

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

Facultad de Ingeniería Civil, Arquitectura y Geotecnia

Escuela Profesional de Ingeniería Civil

**ANÁLISIS NUMÉRICO DE SECCIONES DE CONCRETO ARMADO CON GEOMETRÍA
ARBITRARIA BAJO CARGA AXIAL Y FLEXIÓN BIAXIAL: IMPLEMENTACIÓN
DE UN CÓDIGO EN PYTHON CON INTEGRACIÓN
DEL TEOREMA DE GREEN**

TESIS

Presentada por:

Bach. Guido Barrios Pari

Para optar el Título Profesional de:

INGENIERO CIVIL

TACNA – PERÚ

2026

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

Facultad de Ingeniería Civil, Arquitectura y Geotecnia

Escuela Profesional de Ingeniería Civil

**“ANÁLISIS NUMÉRICO DE SECCIONES DE CONCRETO ARMADO CON
GEOMETRÍA ARBITRARIA BAJO CARGA AXIAL Y FLEXIÓN
BIAXIAL: IMPLEMENTACIÓN DE UN CÓDIGO EN
PYTHON CON INTEGRACIÓN DEL
TEOREMA DE GREEN”**

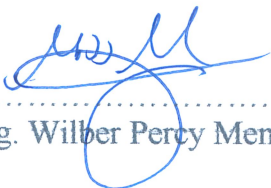
Tesis sustentada y aprobada el día 25 de marzo del 2026 estando integrado el

Jurado Calificador por:

PRESIDENTE


:
Dr. Ing. Victor Yapuchura Platero

SECRETARIO


:
Mtro. Ing. Wilber Percy Mendoza Ramirez

VOCAL


:
MSc. Ing. Edgar Chura Arocutipa

ASESOR DE TESIS


:
MSc. Ing. Edgar Chura Arocutipa

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, **Msc. Ing. Edgar Chura Arocutipa**, en mi condición de **ASESOR** acreditado con **RESOLUCIÓN DE FACULTAD N° 637-2025-FIAG/UNJBG** del 19 de noviembre de 2025, de la tesis titulada: "ANÁLISIS NUMÉRICO DE SECCIONES DE CONCRETO ARMADO CON GEOMETRÍA ARBITRARIA BAJO CARGA AXIAL Y FLEXIÓN BIAxIAL: IMPLEMENTACIÓN DE UN CÓDIGO EN PYTHON CON INTEGRACIÓN DEL TEOREMA DE GREEN" Presentado por **Bach. Guido Barrios Pari**. Para optar el grado académico y/o título profesional de Ingeniero Civil.

Habiendo cumplido con lo establecido en el reglamento de originalidad y similitud de trabajos de investigación y producción intelectual de la UNJBG; considerando que según la revisión, evaluación y análisis realizado a través del software de similitud textual TURNITIN, cuenta con el nivel de similitud permitido cuyo porcentaje es 2%. Por lo que **CERTIFICO LA SIMILARIDAD** de la tesis y/o trabajo enunciado líneas arriba, la cual está expedita para continuar con los trámites para optar el grado académico y/o título profesional INGENIERO CIVIL, según corresponda para su publicación en el Repositorio Institucional.

Tacna, 19 de diciembre 2025.



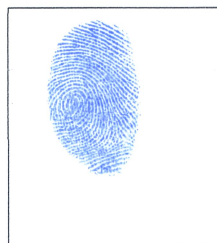
FIRMA ASESOR

Nombres y apellidos: Msc. Ing. Edgar Chura Arocutipa
DNI: 00413327



FIRMA AUTOR

Nombres y apellidos: Bach. Guido Barrios Pari
DNI: 70612454



Dedicatoria

A nuestro creador, quien me guía en cada escalón de mi vida; asimismo, me dio la inteligencia para plasmar lo aprendido en el presente escrito.

A mi padre Hugo Barrios Pereyra y mi madre Eliana Roxana Pari Condori, quienes, con su esfuerzo y dedicación, construyeron en mí una gran persona. Asimismo, a mis hermanos Wilber y Edwin, por su apoyo incondicional en momentos difíciles.

Agradecimientos

Agradezco a Dios, quien me permitió disfrutar de la universidad.

Asimismo, a la universidad, por forjarme con conocimientos y permitirme convertirme en un profesional apasionado por servir a la sociedad.

Agradezco a mis padres, quienes con su grandeza y amor construyeron en mí una gran persona. Del mismo modo, a mis hermanos, por su respaldo incondicional.

Finalmente, agradezco a quien lee este apartado por permitir incurrir dentro de su repositorio de información mental.

Resumen

En el presente trabajo, se desarrolló e implementó un modelo numérico computacional para el análisis de secciones de concreto armado de geometría arbitraria sometidas a carga axial y flexión biaxial. El modelo se fundamenta en los principios del teorema de Green para la integración de esfuerzos de compresión, el bloque rectangular equivalente de Whitney para la modelación del concreto y un modelo elastoplástico del acero de refuerzo, garantizando compatibilidad con la Norma Técnica Peruana E.060. Los resultados obtenidos fueron validados mediante la comparación con los valores normativos y con los generados por software comerciales como SAP2000 y CSI Column, evidenciando una alta concordancia y coherencia estructural. Asimismo, el análisis comparativo entre las normativas ACI 318-19 y E.060 permitió identificar diferencias atribuibles principalmente a los criterios normativos del factor de reducción de resistencia. En conjunto, el modelo desarrollado cumple satisfactoriamente con los objetivos planteados y constituye una herramienta eficiente, precisa y versátil para el análisis estructural de secciones de concreto armado de geometría arbitraria.

Palabras clave: Flexo compresión biaxial, teorema de Green, diagramas de interacción.

Abstract

In the present study, a computational numerical model was developed and implemented for the analysis of reinforced concrete sections with arbitrary geometry subjected to axial load and biaxial bending. The model is based on the principles of Green's Theorem for the integration of compressive stresses, the Whitney equivalent rectangular stress block for concrete modeling, and an elastoplastic model for reinforcing steel, ensuring compatibility with the Peruvian Technical Standard E.060. The obtained results were validated through comparison with normative values and with those generated by commercial software such as SAP2000 and CSI Column, showing a high level of agreement and structural consistency. Furthermore, the comparative analysis between ACI 318-19 and E.060 standards allowed the identification of differences mainly attributable to the normative criteria associated with the strength reduction factor. Overall, the developed model satisfactorily meets the stated objectives and represents an efficient, accurate, and versatile tool for the structural analysis of reinforced concrete sections with arbitrary geometry.

Keywords: Biaxial flexural-compression; Green's Theorem; interaction diagrams.

Índice de contenido

Caratula	i
Aprobación	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Resumen.....	v
Abstract	vi
Índice de contenido	vii
Índice de Tablas	xii
Índice de Imágenes.....	xiv
Índice de Figuras	ii
Capítulo I: Planteamiento del Problema.....	1
1.1. Descripción y Fundamentación del Problema.....	1
1.2. Formulación del Problema	3
1.2.1. <i>Problema General</i>	3
1.2.2. <i>Problemas Específicos</i>	4
1.3. Objetivos	4

1.3.1. <i>Objetivo General</i>	4
1.3.2. <i>Objetivos Específicos</i>	5
1.4. Justificación e Importancia.....	5
1.5. Limitaciones y Alcances	7
1.6. Hipótesis.....	8
1.6.1. <i>Hipótesis General</i>	8
1.6.2. <i>Hipótesis Específicas</i>	9
1.7. Sistema de Variables, Dimensiones e Indicadores.....	10
1.7.1. <i>Variable Independiente</i>	10
1.7.2. <i>Variable Dependiente</i>	11
Capítulo II: Marco Teórico.....	13
2.1. Antecedentes	13
2.2. Bases Teóricas	16
2.3. Teorema de Green	17
2.4. Centro de Reducción y Equilibrio Biaxial	23
2.4.1. <i>Centroide Plástico – Centro de Gravedad</i>	24
2.4.2. <i>Centroide Plástico a Compresión</i>	25

2.4.3. Centroide Plástico a Tracción	26
2.4.4. Matriz de Rotación	26
2.5. Modelos Constitutivos del Concreto y Acero	29
2.5.1. Bloque Rectangular de Whitney	30
2.5.2. Modelo Bilineal del Acero.....	35
2.6. Diagrama de Interacción y Superficie de Interacción	38
2.6.1. Carga Axial a Tracción y Compresión Máxima	43
2.6.2. Diagrama de Interacción Nominal	45
2.6.3. Diagrama de Interacción Reducido	47
2.7. Implementación Computacional con Lenguaje de Programación Python	51
2.8. Definición de Términos Básicos	54
Capítulo III: Metodología de la Investigación	56
3.1. Metodología y Técnicas Utilizadas	56
3.1.1. Tipo y Nivel de Investigación	56
3.1.2. Nivel de Investigación	56
3.1.3. Diseño de Investigación	57

3.2. Población y Muestra.....	58
3.2.1. Población	58
3.2.2. Muestra.....	58
Capítulo IV: Resultados	62
4.1. Sección de Concreto Rectangular	62
4.2. Sección de Concreto Armado Circular.....	65
4.3. Sección de Concreto Armado en L	69
4.4. Sección de Concreto Armado en T	73
4.5. Sección de Concreto Armado Irregular.....	77
Capítulo V: Discusión de Resultados.....	82
5.1. Sección de Concreto Armado Rectangular	82
5.2. Sección de Concreto Armado Circular.....	85
5.3. Sección de Concreto Armado en L	88
5.4. Sección de Concreto Armado en T	91
5.5. Sección de Concreto Armado Irregular.....	94
5.6. Comparativo entre GuidPyCol vs SAP2000 y CSI col	97
5.7. Comparativo entre Norma ACI318-19 y E.060	101

Conclusiones	104
Recomendaciones o Sugerencias	106
Referencias Bibliográficas	107
Matriz de Consistencia	114
Anexos	117

Índice de Tablas

Tabla 1	<i>Tabla de indicadores de variable independiente</i>	11
Tabla 2	<i>Tabla de indicadores de variable dependiente</i>	12
Tabla 3	<i>Valores del parámetro β_1</i>	34
Tabla 4	<i>Variación del factor ϕ según normativa ACI</i>	49
Tabla 5	<i>Variación del factor ϕ según normativa E.060</i>	50
Tabla 6	<i>Tabla comparativo para un ángulo determinado (0°) para sección rectangular</i>	62
Tabla 7	<i>Cuadro comparativo para un ángulo determinado (0°) para sección circular</i>	66
Tabla 8	<i>Cuadro comparativo para un ángulo determinado (0°) para sección tipo L</i>	70
Tabla 9	<i>Cuadro comparativo para un ángulo determinado (0°) para sección tipo T</i>	74
Tabla 10	<i>Cuadro comparativo para un ángulo determinado (0°) para sección irregular</i>	78
Tabla 11	<i>Tabla comparativo de las secciones analizadas con su confiabilidad respecto a GuidPyCol</i>	99

Tabla 12 *Cuadro comparativo entre normativa ACI 18-19 vs Norma E.060....* 103

Índice de Imágenes

Imagen 1 <i>Teorema con el Green</i>	18
Imagen 2 <i>Número de vértices ordenados para polígonos discontinuos en sentido antihorario</i>	20
Imagen 3 <i>Número de vértices ordenados para polígonos con aberturas en sentido antihorario</i>	21
Imagen 4 <i>Integración numérica con el teorema de Green para sección de concreto armado</i>	22
Imagen 5 <i>Rotación de la sección de concreto armado en sentido antihorario</i>	27
Imagen 6 <i>Rotación de la sección de concreto armado en sentido horario</i>	28
Imagen 7 <i>Modelos constitutivos del concreto</i>	31
Imagen 8 <i>Modelo constitutivo de parabólico vs bloque rectangular</i>	32
Imagen 9 <i>Bloque rectangular de Whitney</i>	35
Imagen 10 <i>Curvas de esfuerzo de deformación típica del acero y la curva simplificada</i>	36
Imagen 11 <i>Modelo constitutivo o curva característica del acero (modelo bilineal)</i>	38
Imagen 12 <i>Columna general combinado bajo carga axial y flexión biaxial</i>	39

Imagen 13 <i>Diagrama de interacción de columnas bajo carga axial y flexión biaxial.....</i>	41
Imagen 15 <i>Diagrama biaxial Mnx y Mny para determinar la demanda sobre capacidad.....</i>	43
Imagen 16 <i>Diagrama de interacción típica para columnas con estribos.....</i>	45
Imagen 17 <i>Geometría arbitraria para concreto armado.....</i>	46
Imagen 18 <i>Variación del factor ϕ con la deformación neta a tracción en la fibra extrema traccionada en función de la deformación unitaria del acero.....</i>	49
Imagen 19 <i>Variación del factor ϕ con la carga axial a flexión o carga axial a falla balanceada.....</i>	51
Imagen 20 <i>Sección de concreto armado tipo rectangular de 50 x 50 cm con varillas de 1"</i>	58
Imagen 21 <i>Sección de concreto armado tipo circular de diámetro 25 cm con varillas de 1"</i>	59
Imagen 22 <i>Sección de concreto armado tipo L, de 60 x 90 con varillas de 1"</i>	60
Imagen 23 <i>Sección de concreto armado tipo T, de 75 x 50 cm con varillas de 3/4"</i>	60

Imagen 24 Sección de concreto armado tipo <i>IRREGULAR</i> , de 310 x 500 cm con varillas de 5/8" y 1/2"	61
---	----

Índice de Figuras

Figura 1 a) <i>Diagrama de interacción 3D nominal vs reducido (E.060 y ACI 18-19).</i>	64
Figura 2	65
<i>Diagrama de interacción bidireccional sección rectangular.</i>	65
Figura 4 <i>Diagrama de Interacción bidireccional sección circular.</i>	69
Figura 5 <i>Diagrama de interacción 3D nominal vs reducido (E.060 y ACI 18-19).</i>	72
Figura 6 <i>Diagrama de interacción bidireccional sección L.</i>	73
Figura 7 <i>Diagrama de interacción 3D nominal vs reducido (E.060 y ACI 18-19).</i>	76
Figura 8	77
<i>Diagrama de interacción bidireccional sección T.</i>	77
Figura 9 <i>Diagrama de interacción 3D nominal vs reducido (E.060 y ACI 18-19).</i>	80
Figura 10 <i>Diagrama de Interacción bidireccional sección irregular.</i>	81
Figura 11 <i>Análisis comparativo sección rectangular.</i>	83
Figura 12 <i>Cortes direccionales sección rectangular.</i>	84

Figura 13	85
<i>Comparación normativa ACI 318-19 vs NTP E.060 en capacidad axial y flexión biaxial, para sección rectangular</i>	<i>85</i>
Figura 14	86
<i>Análisis comparativo sección circular.....</i>	<i>86</i>
Figura 15 <i>Cortes direccionales sección circular.</i>	<i>87</i>
Figura 16 <i>Comparación Normativa ACI 318-19 vs NTP E.060 en capacidad axial y flexión biaxial, para sección circular</i>	<i>88</i>
Figura 17 <i>Análisis comparativo sección L.</i>	<i>89</i>
Figura 18 <i>Cortes direccionales sección L.</i>	<i>90</i>
Figura 19 <i>Comparación Normativa ACI 318-19 vs NTP E.060 en capacidad axial y flexión biaxial, para sección tipo L</i>	<i>91</i>
Figura 20 <i>Análisis comparativo sección T.</i>	<i>92</i>
Figura 21	93
<i>Cortes direccionales sección L.</i>	<i>93</i>
Figura 22 <i>Comparación Normativa ACI 318-19 vs NTP E.060 en capacidad axial y flexión biaxial, para sección T</i>	<i>94</i>
Figura 23	95

<i>Análisis comparativo sección irregular.</i>	95
<i>Figura 24 Cortes direccionales sección irregular.</i>	96
<i>Figura 25 Comparación normativa ACI 318-19 vs NTP E.060 en capacidad axial y flexión biaxial, para sección irregular.....</i>	97

Capítulo I: Planteamiento del Problema

1.1. Descripción y Fundamentación del Problema

En el contexto nacional, el diseño de elementos verticales de concreto armado se rige por la Norma Técnica E.060 “Concreto Armado” (MVCS, 2009), la cual establece que la relación esfuerzo deformación del concreto puede representarse mediante modelos constitutivos simplificados o más detallados, siempre que estos permitan obtener resultados confiables y compatibles con el comportamiento observado en ensayos experimentales (ACI 318R-14, 2014; ACI318-19, 2019; ACI318-25, 2025). Entre los modelos constitutivos comúnmente empleados en la literatura, se encuentran el bloque rectangular de Whitney, modelos trapezoidales, parabólicos o formulaciones más complejas; sin embargo, la Norma Técnica E.060 (MVCS, 2009) únicamente exige que el modelo adoptado reproduzca adecuadamente el comportamiento del material.

La elección del modelo constitutivo es fundamental para estimar la resistencia última del concreto armado, pues determina la distribución de esfuerzos en la zona de compresión. Estas idealizaciones permiten sustituir el diagrama real por expresiones matemáticas equivalentes que simplifican el análisis estructural tanto en procedimientos normativos como en métodos numéricos avanzados. Esta

aproximación es clave en la elaboración de curvas de interacción (Hognestad et al., 1955; Mander et al., 1988a; Whitney, 1937 y 1942; De Vivo y Rosati, 1998).

Sin embargo, en el ámbito nacional, el uso de programas comerciales de análisis y diseño estructural como ETABS y SAP2000 es ampliamente generalizado. Aunque estos softwares son robustos para el análisis global de estructuras, no necesariamente se ajustan de manera estricta a los modelos constitutivos ni a los criterios de falla establecidos en la normativa peruana. Estudios previos han señalado que sus algoritmos internos suelen basarse en formulaciones y parámetros derivados del código ACI 318, adoptando modelos multilineales que difieren de las exigencias específicas de la Norma Técnica E.060 en aspectos como factores de reducción y criterios de equilibrio (Bonet et al., 2004, 2006; Chiorean, 2024; Harsem, 2002; Nilson, 2001; Otazzi Pasino, 2015; Wight y MacGREGOR, 2011).

Esta diferencia metodológica puede generar discrepancias entre los resultados obtenidos mediante software comercial y los valores previstos por la normativa peruana, particularmente en el diseño a flexo compresión. En estos casos, la capacidad resistente depende sensiblemente del modelo constitutivo empleado para determinar el diagrama de interacción $P_n - M_n$, por lo que el uso de formulaciones no alienadas con la Norma Técnica E.060 puede conducir a

estimaciones no conservadoras o inconsistencias de la resistencia última (Harsem, 2002; Nilson, 2001; Otazzi Pasino, 2015; Wight y MacGREGOR, 2011).

En este contexto, se evidencia la necesidad de contar con un procedimiento de análisis que represente de manera estricta los criterios de la Norma Técnica E.060 para el concreto armado, especialmente en lo referente al cálculo del área comprimida y a la idealización de la distribución de esfuerzos. En particular, para secciones de geometría arbitraria, el uso de métodos matemáticos rigurosos como el teorema de Green resulta indispensable para determinar con precisión el área sometida a compresión (Fafitis, 2000, 2001). Asimismo, la correcta representación del bloque rectangular de compresión mediante el modelo rectangular de Whitney es fundamental para asegurar que la distribución normativa se aplique coherentemente, una exigencia que no siempre es satisfecha por los programas comerciales de análisis estructural actualmente utilizados en el país.

1.2. Formulación del Problema

1.2.1. Problema General

¿Cómo puede implementarse un modelo numérico, basado en el teorema de Green, el bloque rectangular de Whitney y un modelo elastoplástico del acero, que permita analizar con precisión secciones de concreto armado de geometría arbitraria

sometidas a carga axial y flexión biaxial, en coherencia con los criterios de la Norma Técnica E.060?

1.2.2. Problemas Específicos

- ¿En qué medida los modelos constitutivos simplificados (Whitney) difieren de los modelos implementados en los softwares comerciales como CSI COL y SAP2000 respecto al comportamiento del concreto en compresión y del acero a tracción?
- ¿Cómo puede aplicarse el teorema de Green para formular un método general de integración de esfuerzos de compresión sobre secciones arbitrarias sin recurrir a discretizaciones tipo fibra o malla?
- ¿Qué nivel de consistencia presentan los resultados obtenidos con el modelo propuesto respecto a los valores normativos y los programas comerciales utilizados en el medio profesional?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Desarrollar e implementar un modelo numérico computacional basado en los principios del teorema de Green, el bloque rectangular equivalente de Whitney y un modelo elastoplástico para el acero de refuerzo, que permita analizar con precisión secciones de concreto armado de geometría arbitraria sometidas a carga

axial y flexión biaxial, garantizando la compatibilidad con los criterios y modelos constitutivos establecidos en la Norma Técnica E.060.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Comparar el modelo constitutivo normativo del bloque rectangular equivalente de Whitney con los modelos implementados en software comerciales como CSI COL y SAP2000, identificando las diferencias en la representación del comportamiento del concreto y acero.
- Formular un procedimiento general de integración de esfuerzos de compresión para secciones arbitrarias empleando el teorema de Green, evitando discretizaciones tipo fibra o malla y mejorando la eficiencia computacional.
- Validar el modelo propuesto mediante la comparación de sus resultados con los valores normativos y con los obtenidos en programas comerciales de uso profesional, evaluando su grado de precisión y coherencia estructural.

1.4. Justificación e Importancia

El diseño y verificación de elementos de concreto armado bajo flexo compresión biaxial constituye uno de los problemas más complejos de la ingeniería estructural debido a la no linealidad del comportamiento del material y a la

influencia significativa de la geometría de la sección en la distribución de esfuerzos (Fafitis, 2000, 2001; Rodriguez y Aristizabal-Ochoa, 1999; Sousa y Muniz, 2007).

En el ámbito peruano, la Norma Técnica E.060 exige la utilización de modelos constitutivos que representen adecuadamente el comportamiento del concreto en compresión, siendo común en la literatura el empleo no lineal de Hognestad y del bloque rectangular equivalente de Whitney para tal fin. Sin embargo, los programas de diseño estructural más difundidos en el medio (CSI COL, ETABS y SAP200) emplean formulaciones propias basadas en criterios internacionales como el código ACI 318, que no son totalmente compatibles con los supuestos de la norma peruana (Anwar y Ahmed Najam, 2017; Harsem, 2002; Nilson, 2001; Otazzi Pasino, 2015; Wight y MacGREGOR, 2011).

Asimismo, los métodos clásicos basados en la discretizaciones tipo fibra o en iteraciones geométricas presentan limitaciones en precisión y costo computacional, especialmente para secciones irregulares o con discontinuidades (Fafitis, 2000; Papanikolaou, 2012; Spinella, 2013). En este contexto, la aplicación del teorema de Green y del concepto de centroide plástico representa un avance significativo, pues permite formular un procedimiento matemático más eficiente, estable y generalizado para la integración de esfuerzos sobre secciones arbitrarias sin recurrir a un mallado (Chiorean, 2024; Fafitis, 2000, 2001; Sfakianakis, 2002; Sfakianakis y Fardis, 1991).

Desde el punto de vista práctico, esta investigación contribuirá a la optimización de procesos de diseño estructural en el Perú, proporcionando una herramienta computacional que refleje fielmente los criterios de cálculos establecidos por la Norma E.060 y que permita validar o complementar los resultados obtenidos mediante programas comerciales. Además, fortalecerá el desarrollo científico local al generar modelos de análisis independientes, transparentes y adaptables a futuras actualizaciones normativas o a la incorporación de materiales con comportamiento avanzado.

En suma, la relevancia de este estudio radica en la necesidad de armonizar el conocimiento teórico, normativo y computacional, garantizando la precisión y seguridad en el diseño estructural de elementos sometidos a flexo compresión biaxial, tanto en contextos académico como en el ejercicio profesional.

1.5. Limitaciones y Alcances

Limitaciones

- El modelo será desarrollado bajo un comportamiento elastoplástico idealizado del acero (modelo bilineal), según los criterios establecidos por la Norma Técnica E.060, y empleará el bloque rectangular equivalente de Whitney para representar el concreto en compresión.

- La validación del modelo se realizará exclusivamente mediante análisis numérico comparativo, sin incluir ensayos experimentales, contrastando los resultados con los obtenidos en el software SAP2000

Alcances

- El desarrollo computacional en Python permitirá analizar secciones de concreto armado de cualquier geometría arbitraria, incluyendo secciones rectangulares, circulares, en L, en T y sección poligonal regular o irregular.
- El programa calculará y representará superficies tridimensionales de interacción, evaluando el comportamiento resistente de las secciones bajo carga axial y flexo compresión biaxial.
- El modelo constituirá una herramienta numérica general y entendible, aplicable tanto en investigación académica como en el diseño estructural conforme a la Norma Técnica E.060.

1.6. Hipótesis

1.6.1. Hipótesis General

Si se desarrolla e implementa un modelo numérico computacional basado en el teorema de Green, el bloque rectangular equivalente de Whitney y un modelo elastoplástico para el acero de refuerzo, entonces será posible analizar con alta

precisión secciones de concreto armado de geometría arbitraria sometida a carga axial y flexión biaxial, obteniendo resultados compatibles con los criterios de la Norma Técnica E.060 y comparables con los programas comerciales.

1.6.2. *Hipótesis Específicas*

- Los modelos constitutivos comúnmente adoptados en la literatura, como el bloque rectangular de Whitney, presentan diferencias significativas respecto a los modelos implementados en software comerciales como CSICOL y SAP2000 lo que puede generar variaciones apreciables en la estimación de capacidad resistente de secciones sometidas a flexión biaxial.
- La aplicación del teorema de Green en la formulación del equilibrio seccional permitirá integrar los esfuerzos internos de manera analítica y estable, eliminando la necesidad de discretizaciones tipo fibra o malla y mejorando la eficiencia computacional del proceso de análisis.
- El modelo numérico propuesto proporcionara resultados coherentes y precisos, con niveles de concordancia adecuados respecto a los valores normativos a los resultados generados por los programas comerciales, validando su aplicabilidad en el diseño estructural conforme a la Norma Técnica E.060.

1.7. Sistema de Variables, Dimensiones e Indicadores

1.7.1. *Variable Independiente*

Modelo numérico computacional basado en los principios del teorema de Green, el bloque rectangular equivalente de Whitney y un modelo elastoplástico para el acero de refuerzo, aplicado al análisis de secciones de concreto armado sometidas a carga axial y flexión biaxial.

Definición conceptual. Corresponde al modelo matemático–computacional desarrollado para representar el comportamiento resistente de secciones arbitrarias de concreto armado, mediante la integración analítica de los esfuerzos internos y el cumplimiento de las condiciones de equilibrio y compatibilidad, en concordancia con los criterios establecidos en la Norma Técnica E.060.

Definición operacional. La variable se materializa mediante un algoritmo en Python que integra los esfuerzos de compresión mediante el teorema de Green, calcula esfuerzos y momentos resistentes con el bloque rectangular de Whitney y el modelo elastoplástico del acero, y genera diagramas 2D y 3D de interacción para distintas geometrías y propiedades de materiales.

La variable independiente se define como el factor que influye en el sistema en estudio, cuya definición conceptual y operacional permite su comprensión y medición. Estos aspectos se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1

Tabla de indicadores de variable independiente

Indicador	Descripción	Unidad/ Escala
Formulación matemática	Ecuaciones de equilibrio e integración mediante el teorema de Green.	Correcta/Incorrecta
Implementación computacional	Eficiencia y estabilidad del algoritmo en Python.	Tiempo de ejecución (s)
Representación geométrica	Capacidad del modelo para admitir secciones arbitrarias.	Sí / No
Criterio constitutivo	Aplicación del bloque de Whitney	Cumple / No cumple

Nota. Los indicadores de la variable independiente permiten identificar y cuantificar los parámetros que influyen directamente en el comportamiento del sistema analizado.

1.7.2. Variable Dependiente

Precisión y compatibilidad normativa del análisis de secciones de concreto armado.

Definición conceptual. Representa el grado de correspondencia entre los resultados obtenidos mediante el modelo numérico propuesto y los valores teóricos establecidos por la Norma Técnica E.060, así como los resultados reportados por programas comerciales de análisis estructural.

Definición operacional. Se evalúa comparando la capacidad resistente obtenida mediante el modelo propuesto con los resultados generados por software como SAP2000 o CSI COL, estableciendo márgenes de error relativos y niveles de concordancia respecto a los valores normativos.

La variable dependiente se define como el resultado del sistema en estudio, cuya definición conceptual y operacional permite su comprensión y medición. Estos aspectos se resumen en la Tabla 2.

Tabla 2

Tabla de indicadores de variable dependiente

Indicador	Descripción	Unidad/Escala
Precisión de resultados	Diferencia porcentual entre los resultados del modelo y los de referencia (software / norma).	% de error
Concordancia normativa	Cumplimiento de los parámetros y límites definidos por la Norma E.060.	Cumple/No cumple
Estabilidad numérica	Comportamiento del modelo ante variaciones de geometría y carga.	Estable/Inestable
Representación tridimensional	Generación adecuada de la superficie de interacción	Sí / No

Nota. Los indicadores de la variable dependiente permiten medir los resultados o efectos generados por los cambios en la variable independiente.

Capítulo II: Marco Teórico

2.1. Antecedentes

El análisis de secciones de concreto armado sometidas a carga axial y flexión biaxial ha sido ampliamente estudiado desde mediados del siglo XX, debido a la complejidad asociada al comportamiento no lineal del concreto y del acero, así como la influencia de la geometría de la sección en la distribución de esfuerzos y deformaciones (Dodd y Restrepo-Posada, 1995; Mander et al., 1988b, 1988a).

Uno de los primeros enfoques analíticos relevantes fue el modelo del bloque rectangular equivalente, propuesto por Whitney (1937, 1942), el cual simplifica la distribución de esfuerzos de compresión del concreto mediante un bloque uniforme que facilita la formulación del equilibrio seccional. Posteriormente Hognestad et al. (1955) desarrolló el modelo parabólico rectangular, que describe de manera más realista la relación esfuerzo deformación del concreto bajo compresión.

Ambos modelos influyeron de manera significativa en los criterios adoptados por el ACI, los cuales a su vez constituyen la base conceptual de las disposiciones empleadas en la normativa peruana, especialmente en la Norma Técnica E.060 (MVCS, 2009).

Durante la década de 1980, surgieron los primeros modelos numéricos orientados al análisis biaxial de secciones arbitrarias. Lai et al. (1984) y Rotter (1985) propusieron formulaciones matemáticas generales para el equilibrio seccional, considerando simultáneamente los momentos respecto a ambos ejes principales. Posteriormente, Rodriguez y Aristizabal-Ochoa (1999) presentaron una formulación integral para la construcción de diagramas de interacción $P_n - M_{nx} - M_{ny}$, aplicables a secciones de concreto armado con geometría arbitraria, empleando leyes constitutivas no lineales para el concreto y mutilineales para el acero enfoque complementado por los aportes de Sfakianakis y Fardis (1991).

En cuanto al cálculo del centroide plástico, Bonet et al. (2004, 2006), S. Chen et al. (1999), Chen et al. (2001) y Otazzi Pasino (2015) destacaron su relevancia para la estabilidad de los procedimientos iterativos de equilibrio, demostrando que su ubicación depende de la rigidez relativa entre el concreto y el acero. Dichas investigaciones dieron lugar a formulaciones computacionales más robustas, orientadas a la simulación de secciones asimétricas y al cálculo de superficies tridimensionales de interacción.

El avance de la capacidad computacional impulsó el desarrollo de métodos híbridos y de integración automatizada. Papanikolaou (2012) propuso un modelo generalizado para secciones de geometría arbitraria y materiales compuestos, combinando integración de contorno basada en teorema de Green con una estrategia

iterativa sin derivas para lograr una convergencia estable. Asimismo, Spinella (2013) desarrolló un enfoque de análisis no lineal basado en fibras, incorporando el comportamiento post – pico del concreto para reproducir con mayor fidelidad del dominio de resistencia.

Más recientemente, Stefan y Léger (2010) desarrollaron una metodología robusta basada en el método isogónico; en el cual, la posición del eje neutro se hace variar sistemáticamente para obtener soluciones de equilibrio y construir envolventes tridimensionales $P_n - M_{nx} - M_{ny}$. Esta técnica permite generar superficies continuas de capacidad bajo múltiples criterios de desempeño como área fisurada, esfuerzos admisibles y condiciones hidráulicas propias de estructuras masivas y ha demostrado su eficiencia en la representación de casos donde incluso pueden aparecer superficies cerradas múltiples, un comportamiento no observado en columnas tradicionales de concreto armado.

En la misma línea de avances computacionales, Chiorean (2024) propuso un esquema iterativo híbrido Bisección-Newton con control de deformaciones, capaz de integrar no linealidad constitutiva, efectos térmicos y pérdida de convexidad en los diagramas de interacción, consolidando una nueva tendencia hacia la simulación avanzada de secciones arbitrarias.

En conjunto, estos estudios reflejan una transición clara desde los métodos analíticos simplificados hacia formulaciones numéricas más complejas y eficientes. No obstante, persiste la necesidad de modelos adaptados al marco normativo peruano, que integren herramientas como el teorema de Green, el bloque rectangular de Whitney y el modelo elastoplástico para evaluar secciones arbitrarias de concreto armado bajo flexo compresión biaxial con plena compatibilidad normativa y precisión computacional.

2.2. Bases Teóricas

El estudio del comportamiento resistente de secciones de concreto armado bajo flexo compresión biaxial constituye uno de los problemas más complejos del diseño estructural, debido a la no linealidad del material, la interacción entre esfuerzos axiales y momentos flectores y la influencia geométrica de la sección en la distribución de esfuerzos (Rodriguez y Aristizabal-Ochoa, 1999; Sousa y Muniz, 2007). En este contexto, la formulación matemática adoptada en esta investigación se sustenta en tres pilares fundamentales: el teorema de Green, para la integración analítica del área comprimida (Fafitis, 2000 y 2001); el bloque rectangular equivalente de Whitney, como idealización del esfuerzo de compresión del concreto (Whitney, 1937 y 1942); y un modelo elastoplástico para el acero de refuerzo, ampliamente utilizado en análisis de resistencia última (Dodd y Restrepo-Posada,

1995; Harsem, 2002; Nilson, 2001; Wight y MacGREGOR, 2011). Estos fundamentos se complementan con el uso de herramientas computacionales modernas, particularmente el lenguaje Python, a fin de lograr una implementación flexible, precisa y eficiente del modelo propuesto.

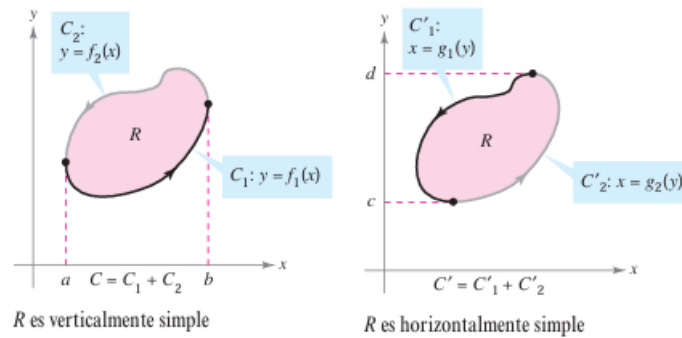
2.3. Teorema de Green

El teorema de Green permite transformar integrales dobles sobre un área A en integrales de línea sobre su contorno ∂A , lo cual es especialmente útil en el cálculo de esfuerzos resultantes en zonas comprimidas de secciones arbitrarias. Tal se observa en la Imagen 1 y como indica la formula “sea R una región simplemente conexa cuya frontera es una curva C suave a trozos orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R ” (Larson y Edwards, 2010, p. 1093).

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{\partial A} (Pdx + Qdy)$$

Imagen 1

Teorema con el Green



Nota. La integración de áreas mediante el Teorema de Green permite su evaluación a partir del contorno de la sección, constituyendo una formulación eficiente en el análisis geométrico. Tomado de Larson y Edwards (2010).

Esta relación que reduce una integral sobre el dominio a una integral sobre el borde es también la forma adoptada en estudios aplicados del teorema como los desarrollados por Soerjadi (1968), quien emplea esta equivalencia para expresar los momentos $\iint_R x^p y^q dA$ de un polígono exclusivamente mediante integrales sobre su frontera, evitando discretizaciones internas permitiendo obtener propiedades seccionales con alta eficiencia computacional. Steger (1996) profundiza este enfoque al presentar una formulación cerrada para momentos arbitrarios basada únicamente en los vértices del polígono y en la reducción integral proporcionada por Green, afirmando que esta técnica permite calcular integrales de

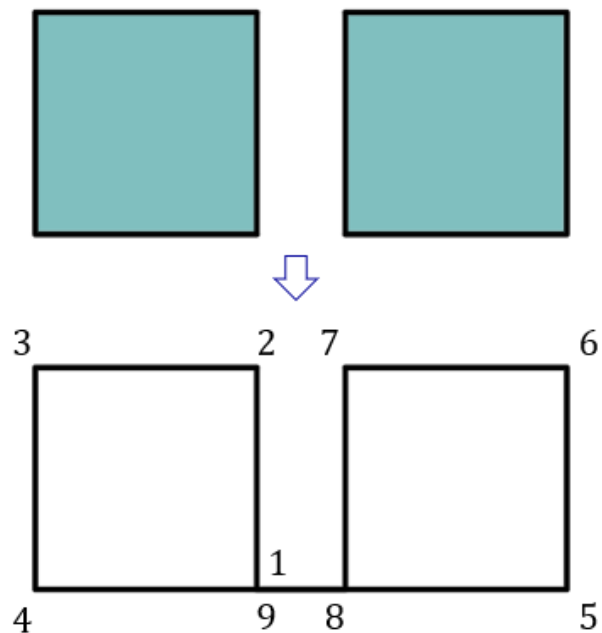
área utilizando únicamente integrales de contorno y resaltando su precisión incluso en geometrías complejas. Complementariamente, Dunkel (1902) expone las extensiones del teorema a ecuaciones diferenciales de orden superior, lo cual evidencia su generalidad y fundamenta su uso en diversas ramas de la ingeniería matemática; mientras que textos modernos como Larson y Edwards (2010) muestran su aplicación práctica en el cálculo de áreas y momentos poligonales mediante fórmulas simplificadas de borde.

En ingeniería estructural, estos fundamentos han sido adoptados por Fafitis (2000 y 2001) y Sfakianakis (2002) para formular procedimientos de integración de esfuerzos en zonas comprimidas de secciones arbitrarias, demostrando que el uso del teorema de Green ofrece un método preciso, directo y computacionalmente eficiente para determinar el área comprimida y los esfuerzos resultantes sin recurrir a mallas, fibras ni discretizaciones internas, lo que lo convierte en un pilar esencial para el análisis seccional avanzado en concreto armado.

De acuerdo con la definición del teorema de Green, este resulta aplicable para el cálculo del área de una sección de concreto armado con geometría arbitraria, como se aprecia en la Imagen 2 e Imagen 3.

Imagen 2

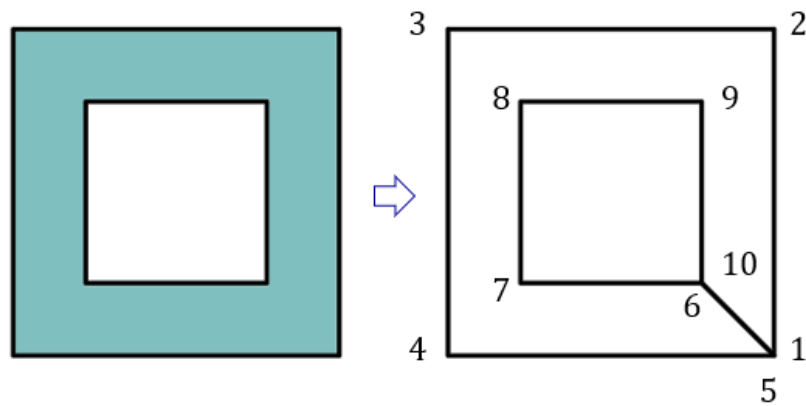
Número de vértices ordenados para polígonos discontinuos en sentido antihorario



Nota. El número de vértices de polígonos discontinuos debe definirse en un orden secuencial antihorario, garantizando la correcta orientación geométrica y el cálculo consistente de propiedades mediante integración de contorno. Adaptado de Hally (1987).

Imagen 3

Número de vértices ordenados para polígonos con aberturas en sentido antihorario



Nota. El número de vértices de polígonos discontinuos debe definirse en un orden secuencial antihorario, garantizando la correcta orientación geométrica y el cálculo consistente de propiedades mediante integración de contorno. Adaptado de Hally (1987).

En el diseño, de acuerdo a la Imagen 4 este teorema se utiliza también para calcular el área de la zona comprimida y, posteriormente, determinar el momento resultante y la fuerza axial sin necesidad de discretizar la sección en fibras, integrando directamente sobre el perímetro comprimido. Este enfoque incrementa la eficiencia computacional y mejora la estabilidad numérica en comparación con los métodos tradicionales basados en mallas, tal como se evidencia en

Si se tiene un polígono irregular o regular con n vértices y las coordenadas de los vértices son $(x_i; y_i), (x_{i+1}; y_{i+1}), \dots (x_n; y_n)$, el área A_g del polígono se puede calcular de la siguiente manera.

$$A_g = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

$$A'_g = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x'_i y'_{i+1} - x'_{i+1} y'_i)$$

Aquí se asume que $x_n = x_1$ y $y_n = y_1$ para cerrar el polígono.

2.4. Centro de Reducción y Equilibrio Biaxial

El centroide plástico se define como el punto de la sección donde puede aplicarse una carga axial pura sin inducir momentos en los ejes principales. Su ubicación depende de la geometría de la sección y de la distribución relativa de las áreas resistentes de concreto y acero en los estados límite últimos (Bonet et al., 2004, 2006; Chen et al., 1999; Chen et al., 2001).

En el análisis convencional, los momentos internos suelen referirse al centroide de la sección bruta, ya que este punto constituye el origen geométrico utilizado en gran parte de los modelos y programas de análisis estructural (Otazzi Pasino, 2015). Sin embargo, cuando la sección o el refuerzo presentan asimetrías

significativas, el uso del centroide bruto como punto de reducción puede generar diagramas de interacción rotados y no representativos del comportamiento real (Chiorean, 2024; Otazzi Pasino, 2015; Papanikolaou, 2012; Susumpow y Line, 2023).

Además, cuando la carga axial no pasa por el centroide plástico se inducen momentos adicionales en ambos ejes. Alterando la forma del diagrama de interacción (Rodriguez y Aristizabal-Ochoa, 1999). Por ello, la determinación del centroide plástico constituye un paso esencial para garantizar superficies de interacción (Spinella, 2013).

2.4.1. Centroide Plástico – Centro de Gravedad

Según Harsem (2002) y Nilson (2001), el centroide geométrico es el punto respecto al cual se evalúan los momentos en muchos procedimientos de análisis elástico, ya que representa el balance simétrico de la sección. Del mismo modo, Wight y MacGREGOR (2011) señalan que el centroide de la sección bruta constituye la referencia inicial para el análisis elástico y para la ubicación de ejes principales en concreto armado.

Si se tiene un polígono irregular o regular con n vértices y las coordenadas de los vértices son $(x_i; y_i), (x_{i+1}; y_{i+1}), \dots (x_n; y_n)$, el área A_g del polígono se puede calcular de la siguiente manera.

$$C_x = \frac{1}{6A_g} \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

$$C_y = \frac{1}{6A_g} \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

Aquí se asume que $x_n = x_1$ y $y_n = y_1$ para cerrar el polígono.

2.4.2. *Centroide Plástico a Compresión*

Como indican Chen et al. (2001), el centroide plástico a compresión se obtiene ubicando el punto para el cual el momento resultante de las fuerzas plásticas es nulo. Por su parte, Bonet et al. (2004) demostraron que su posición controla la estabilidad de los métodos iterativos de equilibrio en la generación de diagramas de interacción, especialmente en secciones asimétricas.

En ingeniería estructural, Papanikolaou (2012) y Spinella (2013) señalan que el centroide plástico es esencial para evitar diagramas de interacción rotados o no convexos bajo flexo compresión biaxial, ya que fijar el origen de momentos en un punto incorrecto puede generar distorsiones numéricas e interpretaciones erróneas de la capacidad resistente.

$$X_{cp} = \frac{0.85f'_c A_g C_x + \sum_{i=1}^n A_{si} (f_y - 0.85f'_c) A_{sxi}}{0.85f'_c A_g + \sum_{i=1}^n A_{si} (f_y - 0.85f'_c)}$$

$$Y_{cp} = \frac{0.85f'_c A_g C_y + \sum_{i=1}^n A_{si} (f_y - 0.85f'_c) A_{syi}}{0.85f'_c A_g + \sum_{i=1}^n A_{si} (f_y - 0.85f'_c)}$$

2.4.3. Centroide Plástico a Tracción

El centroide plástico a tracción corresponde al punto donde actúa la resultante de las fuerzas de tracción del acero cuando todo el acero trabaja a su esfuerzo de fluencia f_y y el concreto se considera completamente agrietado, por lo que no aporta resistencia a tracción. Este centroide plástico puede emplearse como punto de reducción para la construcción de los diagramas de interacción en la zona de flexo tracción (tracción acompañada de flexión o viceversa), ya que permite referir los momentos internos a un punto físicamente coherente con el estado resistente de la sección (Otazzi Pasino, 2015).

$$X_{ct} = \frac{\sum_{i=1}^n A_{si} f_y A_{sxi}}{\sum_{i=1}^n A_{si} f_y}$$

$$Y_{ct} = \frac{\sum_{i=1}^n A_{si} f_y A_{syi}}{\sum_{i=1}^n A_{si} f_y}$$

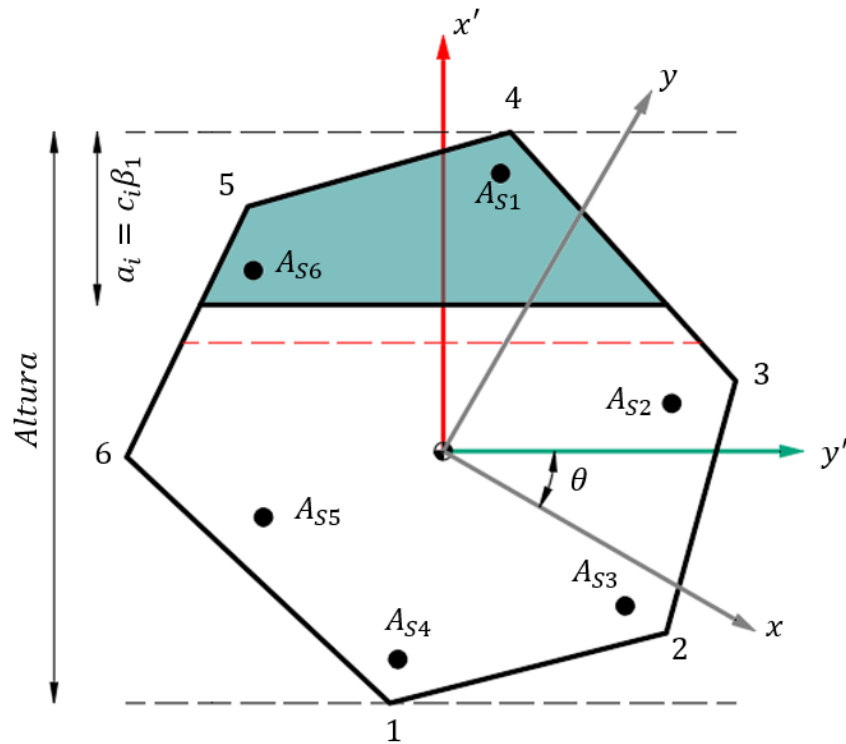
2.4.4. Matriz de Rotación

En el análisis estructural y en la evaluación de secciones de concreto armado sometidas a flexo compresión biaxial, la matriz de rotación constituye una herramienta fundamental para transformar coordenadas locales hacia un sistema

global y viceversa. La rotación de un punto o de una fibra alrededor del origen se expresa mediante la matriz ortogonal, de acuerdo a la Imagen 5 e Imagen 6.

Imagen 5

Rotación de la sección de concreto armado en sentido antihorario

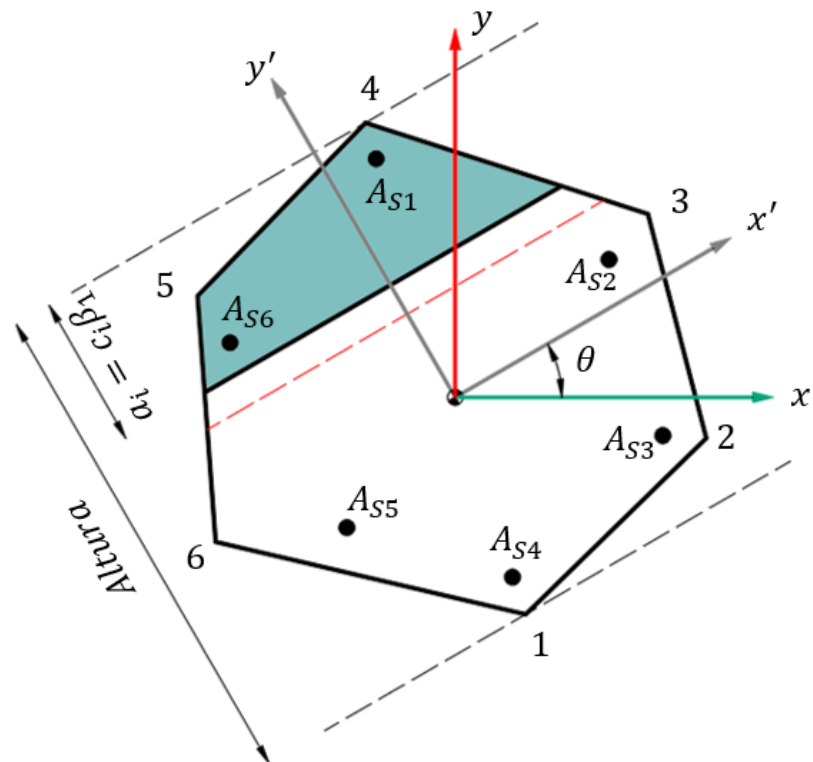


Nota. La rotación de la sección de concreto armado en sentido antihorario permite evaluar la respuesta estructural en distintas direcciones, facilitando el análisis de la interacción biaxial. Adaptado de Fafitis (2000, 2001).

$$M_{rot} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Imagen 6

Rotación de la sección de concreto armado en sentido horario



Nota. La rotación de la sección de concreto armado en sentido horario permite evaluar la respuesta estructural en direcciones opuestas, complementando el análisis de la interacción biaxial. Adaptado de Fafitis (2000, 2001).

$$M_{rot} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Tal como se presenta en desarrollos clásicos de mecánica de cuerpos rígidos (Beer et al., 2016) y en formulaciones matemáticas aplicadas a transformaciones

lineales en el plano (Strang, 2006). En el ámbito del análisis seccional en concreto armado, la matriz de rotación es utilizada para evaluar la respuesta resistente en distintas orientaciones de acuerdo al eje neutro, permitiendo generar superficies tridimensionales de interacción mediante barridos angulares, según lo desarrollado por Rodriguez y Aristizabal-Ochoa (1999) y extendido en formulaciones computacionales más recientes como las de Chiorean (2024) y Papanikolaou (2012). Estos autores destacan que la rotación controlada de la sección o del plano de deformaciones es esencial para capturar adecuadamente la interacción entre los momentos biaxiales y la carga axial, garantizando resultados estables y físicamente coherentes en procesos iterativos de equilibrio.

2.5. Modelos Constitutivos del Concreto y Acero

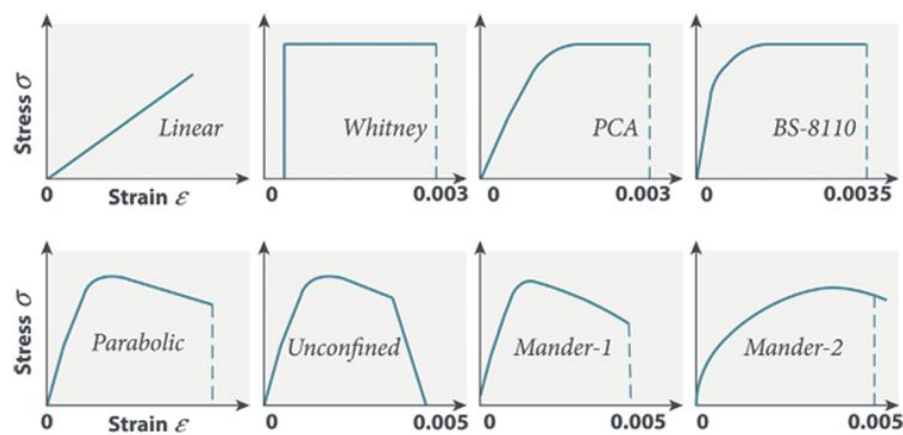
Los modelos constitutivos permiten representar matemáticamente la relación entre esfuerzos y deformaciones de los materiales que intervienen en una sección de concreto armado. Su elección influye directamente en la precisión del análisis seccional y en la forma del diagrama de interacción $P_n - M_{nx} - M_{ny}$. En este estudio, se emplean dos modelos ampliamente aceptados: el bloque rectangular equivalente de Whitney para el concreto en compresión y el modelo bilineal elasto-plástico para el acero de refuerzo, ambos compatibles con los criterios resistentes utilizados en normativas como el ACI 318 y la Norma Técnica E.060.

2.5.1. *Bloque Rectangular de Whitney*

Diversos autores y códigos de diseño han propuesto distintas curvas esfuerzo–deformación de acuerdo a la Imagen 7 para el concreto, tanto no confinado como confinado. Debido a la complejidad del cálculo manual del área y del centroide de la zona comprimida, se suele simplificar la curva parabólica mediante un bloque rectangular equivalente, como plantean los códigos estadounidenses. Aunque esta aproximación facilita el análisis, puede no representar con exactitud la distribución real de esfuerzos. Con el uso de programas computacionales, actualmente se recomienda emplear modelos más precisos obtenidos de ensayos experimentales (Anwar y Ahmed Najam, 2017; Nilson, 2001; Wight y MacGREGOR, 2011).

Imagen 7

Modelos constitutivos del concreto

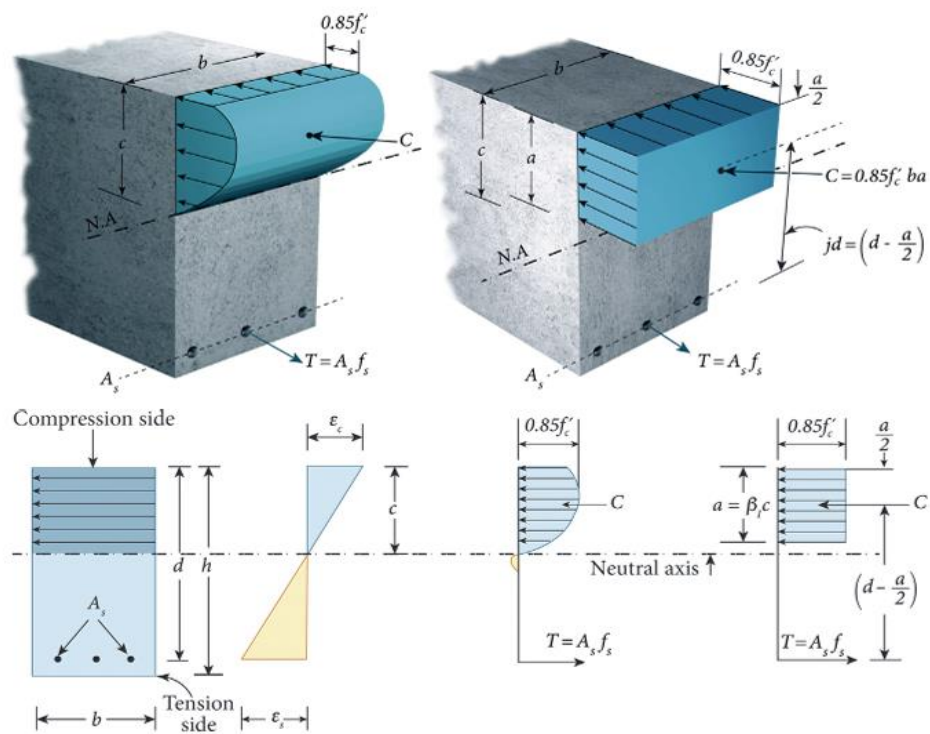


Nota. Los modelos constitutivos del concreto describen la relación esfuerzo–deformación, permitiendo representar su comportamiento no lineal en compresión y su limitada resistencia a tracción en el análisis estructural. Tomado de Anwar y Ahmed Najam (2017).

El modelo de Whitney (1937, 1942) cómo se observa en la Imagen 8 simplifica la distribución de esfuerzos del concreto en compresión mediante un bloque rectangular de altura $a = \beta_1 c$, donde c es la profundidad del eje neutro y β_1 depende de la resistencia f'_c . La tensión promedio se toma como $0.85f'_c$, permitiendo obtener la fuerza de compresión resultante.

Imagen 8

Modelo constitutivo de parabólico vs bloque rectangular.



Nota. El modelo parabólico representa de forma continua la distribución real de esfuerzos en compresión, mientras que el bloque rectangular de Whitney simplifica el comportamiento mediante una idealización uniforme para fines de diseño estructural. Tomado de Anwar y Ahmed Najam (2017).

$$C = 0.85f'_c ba$$

$$C_c = 0.85f'_c A_c$$

Si bien la Norma Técnica E.060 (MVCS, 2009) no obliga al uso exclusivo del bloque rectangular equivalente, este modelo se emplea ampliamente en la práctica profesional debido a su simplicidad y a su compatibilidad con los procedimientos normativos de diseño. Su formulación permite representar de manera conservadora la distribución de esfuerzos del concreto en compresión y facilita el cálculo manual y computacional de fuerzas internas. Asimismo, cuando el bloque de Whitney se combina con los principios de integración del teorema de Green, es posible evaluar la contribución resistente del concreto en secciones de geometría irregular sin recurrir a discretizaciones en fibras o malla como lo demuestran Bonet et al. (2004) y Sousa y Muniz (2007).

De esta manera, el modelo propuesto en esta investigación utiliza el bloque rectangular equivalente de Whitney para representar el comportamiento del concreto en compresión e integra sus efectos mediante el teorema de Green sobre el perímetro comprimido de la sección. Esta formulación permite evaluar de manera analítica la resultante axial y los momentos resistentes asociados garantizando el equilibrio interno correspondiente a los diagramas de interacción bidimensional y tridimensional.

Las normativas internacionales (ACI 318R-14, 2014; ACI318-19, 2019; ACI318-25, 2025) establecen que el parámetro β_1 , tal y como se observa en la Imagen 9 y Tabla 3 empleando la definición del bloque rectangular equivalente de

Whitney, debe variar en función de la resistencia del concreto f'_c . De forma equivalente, MVCS (2009), en el art. 10.2.7.3, adopta el mismo criterio y define explícitamente los valores del factor β_1 , según la resistencia del concreto. Esta variación busca reflejar la reducción en la ductilidad del concreto conforme aumente su resistencia, garantizando una representación más realista del diagrama de compresión en el bloque equivalente.

Tabla 3

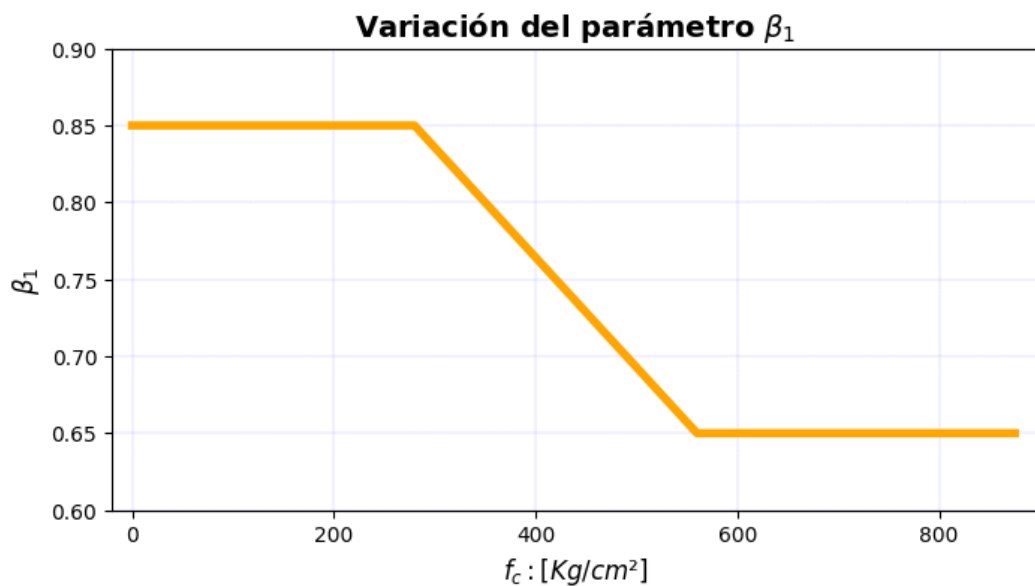
Valores del parámetro β_1

$f'_c, \left[\frac{Kgf}{cm^2} \right]$	β_1	Zona
$170 < f'_c \leq 280$	0.85	(a)
$280 < f'_c < 560$	$0.85 - \frac{0.05(f'_c - 280)}{70}$	(b)
$f'_c \geq 560$	0.65	(c)

Notas. Los valores adaptados de la ACI 318-19 garantizan que el análisis cumpla con criterios normativos de seguridad y diseño estructural.

Imagen 9

Bloque rectangular de Whitney



Notas: En la imagen se aprecia la variación del bloque rectangular de Whitney, evidenciando cómo los parámetros de compresión se ajustan en función de la resistencia del concreto para representar su comportamiento equivalente.

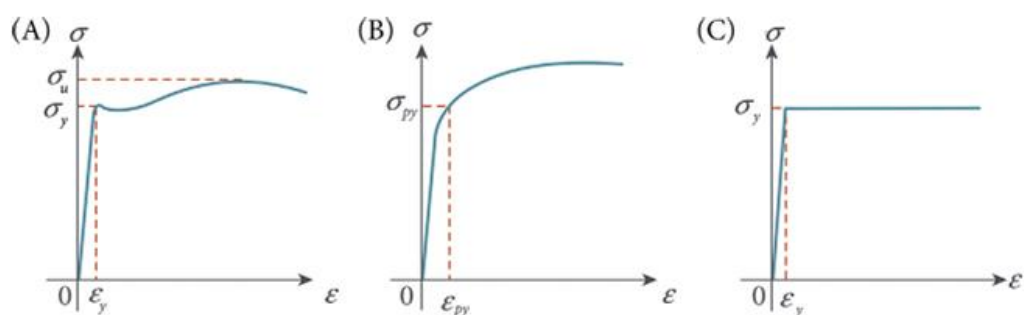
2.5.2. *Modelo Bilineal del Acero*

La caracterización del comportamiento del acero de refuerzo tal y como se observa en la Imagen 10; también ha sido objeto de amplio estudio, ya que su aporte resistente es fundamental en el análisis axial-flexional de secciones de concreto armado. A diferencia del concreto, cuyo comportamiento en compresión es no lineal y frágil, el acero presenta un comportamiento dúctil que puede representarse

adecuadamente mediante un modelo esfuerzo–deformación idealizado (Dodd y Restrepo-Posada, 1995; Park y Paulay, 1975).

Imagen 10

Curvas de esfuerzo de deformación típica del acero y la curva simplificada



Nota. Las curvas esfuerzo–deformación del acero muestran su comportamiento elástico, fluencia y endurecimiento, mientras que la curva simplificada idealiza este comportamiento mediante un modelo elastoplástico. Tomado de Anwar y Ahmed Najam (2017).

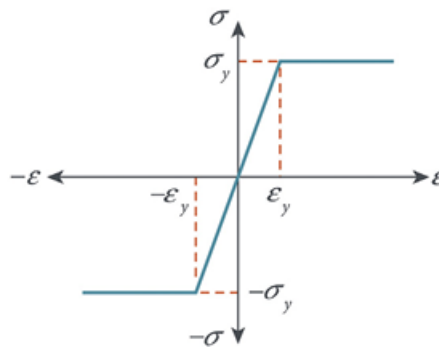
Se reconoce que existen diversos modelos constitutivos para representar el comportamiento esfuerzo–deformación del acero de refuerzo, así como se observa en la Imagen 10, entre los cuales destacan el modelo elastoplástico perfecto, el modelo Trilineal y la curva completa obtenida de ensayos experimentales. Cada uno de estos modelos refleja distintos grados de detalle del comportamiento real del acero bajo tracción y compresión. Sin embargo, para el desarrollo de esta

investigación, se adopta el modelo elastoplástico perfecto, debido a su simplicidad, estabilidad numérica y adecuada representación de la fluencia del acero en estado límite último, tal como señalan Park y Paulay (1975) en su formulación clásica del diseño resistente.

Debido a su simplicidad y a la precisión que ofrece para el análisis en estado límite último, la Imagen 11 muestra el modelo elastoplástico perfecto, así mismo es el más empleado en normativas internacionales como el ACI 318, donde constituye la base para evaluar la fluencia del acero y su contribución resistente en flexo-compresión. De igual modo, este modelo está implícito en los procedimientos de diseño establecidos por la Norma Técnica E.060, que asume un comportamiento perfectamente plástico a partir del esfuerzo de fluencia f_y . Su adopción en la presente investigación garantiza la compatibilidad con los criterios normativos utilizados en el medio profesional peruano y permite una integración directa con el modelo computacional propuesto.

Imagen 11

Modelo constitutivo o curva característica del acero (modelo bilineal)



Nota. El modelo constitutivo bilineal del acero idealiza la curva esfuerzo–deformación mediante un tramo elástico lineal seguido de una meseta plástica, permitiendo representar de forma simplificada su comportamiento estructural. Tomado de Anwar y Ahmed Najam (2017).

$$f_y = \begin{cases} -f_y & \varepsilon_s \leq -\varepsilon_y \\ E_s \varepsilon_s & -\varepsilon_y < \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \\ f_y & \varepsilon_s > \varepsilon_y \end{cases}$$

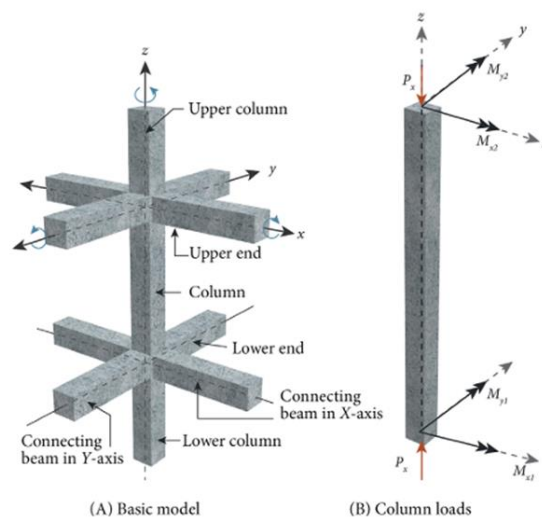
2.6. Diagrama de Interacción y Superficie de Interacción

Las columnas son elementos estructurales diseñados principalmente para resistir fuerzas axiales de compresión, tal y como se observa en la Imagen 12. aunque en la práctica también están sometidas a momentos flectores y, en menor medida, a corte y torsión. Según Harsem (2002) y Otazzi Pasino (2015), las

columnas se caracterizan por presentar una relación entre su longitud y su menor dimensión transversal mayor a tres, diferenciándose así de los pedestales. Harsem (2002) y Wight y MacGREGOR (2011) coinciden al definir las como miembros verticales que transmiten cargas gravitacionales y laterales hacia los elementos inferiores de la estructura, frecuentemente sometidos a flexo-compresión debido a la continuidad estructural.

Imagen 12

Columna general combinado bajo carga axial y flexión biaxial

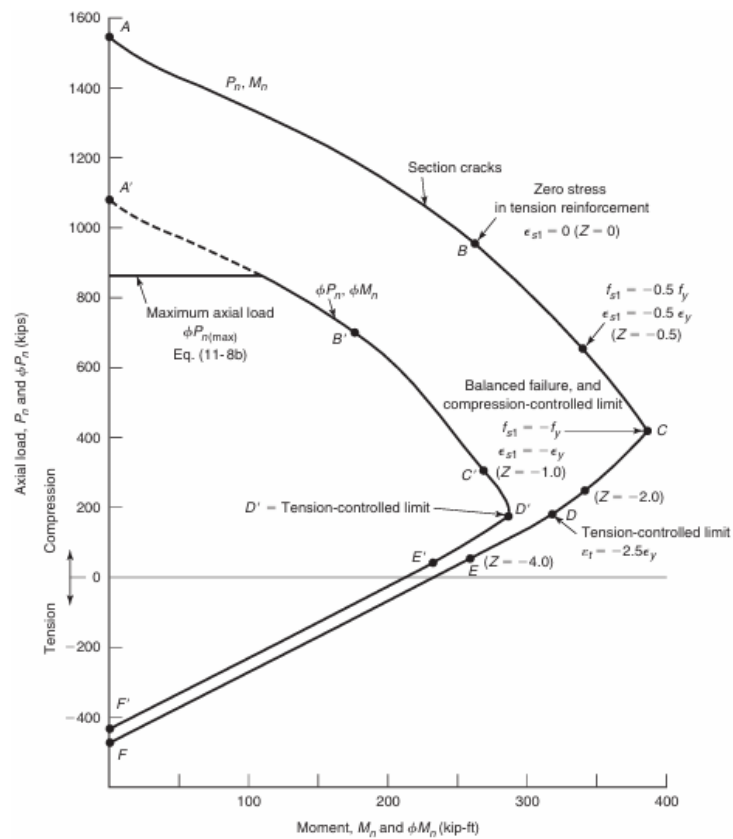


Nota. La columna general sometida a carga axial y flexión biaxial presenta una respuesta resistente gobernada por el diagrama de interacción. Tomado de Anwar y Ahmed Najam (2017).

Los diagramas de interacción constituyen una herramienta fundamental en el análisis y diseño de columnas de concreto armado, ya que representan las combinaciones últimas entre la carga axial P_n y los momentos resistentes M_{nx} y M_{ny} . Según Nilson (2001) y Otazzi Pasino (2015), la capacidad resistente de una sección disminuye cuando actúan simultáneamente carga axial y momento, por lo que su interacción debe evaluarse en conjunto y no de manera aislada. Estos diagramas permiten identificar las regiones dominadas por compresión, tracción o flexo-compresión, y son esenciales para determinar si la sección se encuentra en un estado seguro o próximo a falla, tal como se observa en la Imagen 13.

Imagen 13

Diagrama de interacción de columnas bajo carga axial y flexión biaxial



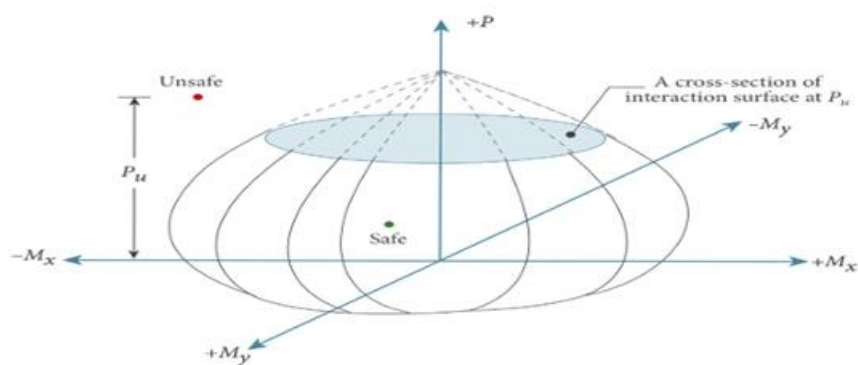
Nota. El diagrama de interacción muestra la relación entre carga axial y momentos biaxiales, definiendo la capacidad resistente de la columna. Tomado de Wight y MacGREGOR (2011).

Para el caso biaxial, la interacción se describe mediante superficies tridimensionales $P_n - M_{nx} - M_{ny}$, como se observa en la Imagen 14, este ha sido ampliamente estudiadas en formulaciones generales para secciones arbitrarias

(Bonet et al., 2004, 2006; Rodríguez y Aristizabal-Ochoa, 1999; Sousa y Muniz, 2007). Investigaciones más recientes, como las de Chiorean (2024) y Papanikolaou (2012), muestran que estas superficies son fundamentales para capturar el comportamiento resistente real de columnas con geometrías irregulares o refuerzo no simétrico. Por tanto, los diagramas de interacción permiten evaluar de manera rigurosa el equilibrio interno de la sección bajo cargas combinadas, constituyendo una herramienta indispensable en el diseño estructural moderno como se observan en la Imagen 15.

Imagen 14

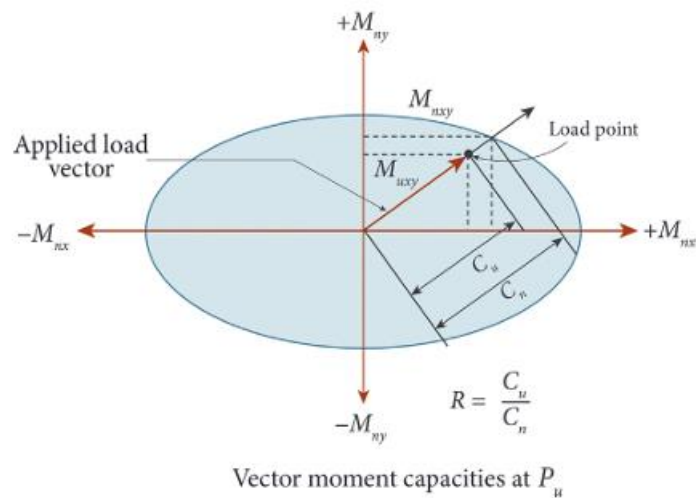
Superficie de interacción de una columna típica



Nota. La superficie de interacción de una columna representa la capacidad resistente tridimensional frente a carga axial y momentos biaxiales. Tomado de Anwar y Ahmed (2017).

Imagen 15

Diagrama biaxial M_{nx} y M_{ny} para determinar la demanda sobre capacidad



Nota. El diagrama biaxial o plano de carga constante permite comparar la demanda de momentos con la capacidad resistente de la sección para un valor fijo de carga axial. Tomado de Anwar y Ahmed (2017).

2.6.1. Carga Axial a Tracción y Compresión Máxima

De la Imagen 16, la capacidad axial máxima de una columna depende de si el esfuerzo predominante es de compresión o de tracción, ya que el material responde de forma diferente en cada caso. La carga axial máxima a compresión, denominada $P_{n,máx}$ (Punto A) corresponde al estado en el que la sección se encuentra totalmente comprimida y el concreto alcanza su tensión equivalente máxima definida por el bloque rectangular de Whitney, mientras que el acero

trabaja parcialmente en compresión. Para una sección maciza, esta resistencia se expresa como la suma de esfuerzo a compresión de concreto y el acero (Puntos B, C, D, E y F), aunque los códigos reducen esta capacidad debido a efectos de esbeltez, imperfecciones y excentricidades inevitables (Nilson, 2001; Otazzi Pasino, 2015; Wight y MacGREGOR, 2011).

$$P_n = 0.85f'_c(A_g - A_{st}) + A_{st}f_y$$

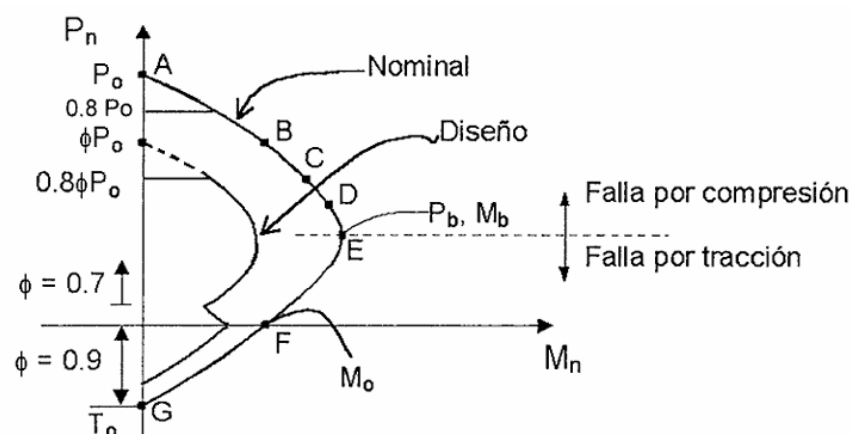
- Para columnas con estribos $P_n = 0.80[0.85f'_c(A_g - A_{st}) + A_{st}f_y]$
- Para columnas zunchadas $P_n = 0.85[0.85f'_c(A_g - A_{st}) + A_{st}f_y]$

Por otro lado, la carga axial máxima a tracción se presenta cuando todo el acero longitudinal alcanza su esfuerzo de fluencia f_y , ya que el concreto no aporta resistencia en tracción; de esta manera, la resistencia última en este estado se define como carga axial máxima (punto G). Este límite constituye el extremo traccionado del diagrama de interacción, donde el momento resistente puede tomar valores altos debido al brazo interno generado entre la tracción del acero y la compresión reducida del concreto. En conjunto, estos valores extremos de la resistencia axial determinan los puntos límite del diagrama de interacción uniaxial y biaxial, proporcionando un marco fundamental para evaluar la seguridad de columnas sometidas a cargas combinadas (Nilson, 2001; Otazzi Pasino, 2015; Wight y MacGREGOR, 2011).

$$P_t = A_{st}f_y$$

Imagen 16

Diagrama de interacción típica para columnas con estribos



Nota. El diagrama de interacción típico para columnas con estribos muestra la relación entre carga axial y momento, considerando el confinamiento transversal proporcionado por los estribos. Tomado de Otazzi Pasino (2015).

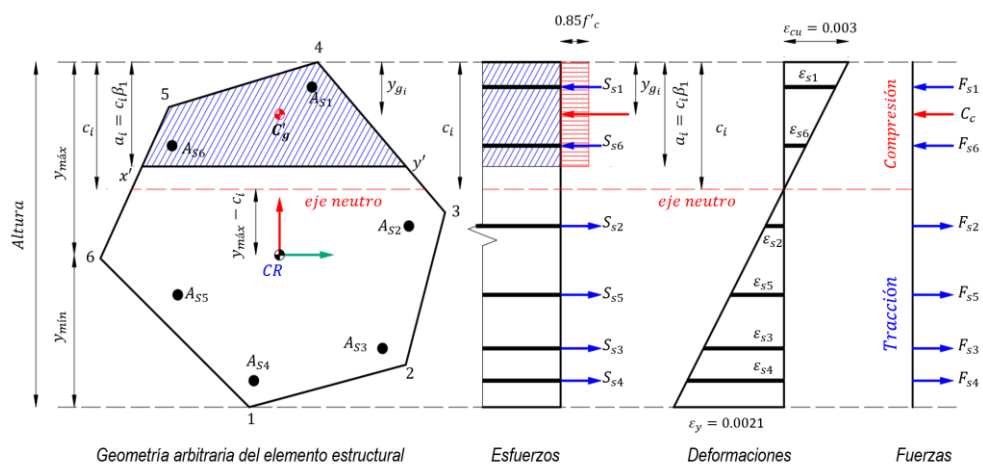
2.6.2. Diagrama de Interacción Nominal

El diagrama de interacción nominal representa las combinaciones últimas de carga axial P_n y momento flector M_n que una sección de concreto armado puede resistir antes de alcanzar la falla. Este diagrama se obtiene a partir del equilibrio entre las fuerzas internas generadas por el concreto comprimido y el acero en tracción o compresión, suponiendo un diagrama de deformaciones compatible y modelos constitutivos establecidos para ambos materiales (Otazzi Pasino, 2015).

Según Nilson (2001), el diagrama nominal define la frontera resistente teórica de la sección, previa a la aplicación de los factores de reducción ϕ que establecen los reglamentos. De forma similar, Wight y MacGREGOR (2011) señalan que el diagrama $P_n - M_n$ permite identificar los estados de falla por compresión, flexo-compresión y tracción, constituyendo la base para la evaluación del diseño en marcos de concreto armado. De la Imagen 17, se puede relacionar el caso biaxial, esta relación se extiende a una superficie tridimensional $P_n - M_{nx} - M_{ny}$, ampliamente utilizada para analizar secciones de geometría irregular o refuerzo asimétrico.

Imagen 17

Geometría arbitraria para concreto armado



Nota. La geometría arbitraria permite analizar secciones irregulares y su efecto en la resistencia estructural. Adaptado de Fafitis (2000).

$$N_n = 0.85 \iint_{A_c} f'_c(x, y) dA + \sum_{i=1}^m f_s A_s$$

$$M_{nx} = -0.85 \iint_{A_c} Y_{CR} f'_c(x, y) dA - \sum_{i=1}^m Y_{CR} f_s A_s$$

$$M_{ny} = 0.85 \iint_{A_c} X_{CR} f'_c(x, y) dA + \sum_{i=1}^m X_{CR} f_s A_s$$

2.6.3. Diagrama de Interacción Reducido

El diagrama de interacción resistente se obtiene al aplicar los factores de reducción de resistencia ϕ a las cargas nominales P_n y a los momentos M_n , con el fin de incorporar la incertidumbre propia de los materiales, los efectos de ductilidad y las condiciones de falla asociadas a tracción o compresión. Mientras el diagrama nominal representa la capacidad teórica de la sección basada únicamente en el equilibrio interno y los modelos constitutivos, el diagrama resistente refleja la capacidad de diseño permitida por la normativa (Otazzi Pasino, 2015).

Según Nilson (2001), ϕ los factores reducen la resistencia nominal para asegurar que la demanda sísmica y gravitacional no exceda la capacidad real de la sección, especialmente en estados de baja ductilidad como la compresión pura. Wight y MacGREGOR (2011) destacan que el diagrama $\phi P_n - \phi M_n$ constituye la superficie última utilizada en diseño estructural, ya que define la frontera apta para

comparar las cargas factorizadas requeridas por las normas de diseño. En consecuencia, el diagrama resistente representa la herramienta fundamental para verificar la seguridad de columnas sometidas a flexo-compresión uniaxial y biaxial conforme a los criterios establecidos por el ACI 318 y la Norma Técnica E.060.

Según ACI 318R-14 (2014); ACI318-19 (2019) y ACI318-25 (2025), establecen que los factores de reducción dependen de la ductilidad de la sección, el cual se evalúa mediante la deformación de la fibra más traccionada del acero cómo se observa en la Tabla 4 e Imagen 18. Estos códigos establecen que se deben asignar valores mayores de ϕ cuando la sección muestra un comportamiento dúctil denominado por tracción y valores menores cuando la falla está controlada por compresión debido a su naturaleza frágil.

Tabla 4

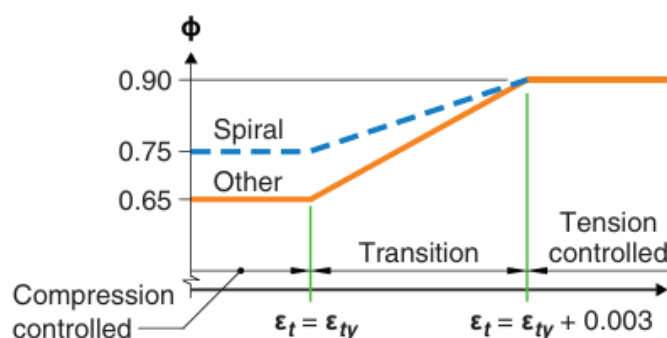
Variación del factor ϕ según normativa ACI

Condicionantes	ϕ	Zona
$0.005 \leq \varepsilon_t$	0.90	Controlado por compresión
$\varepsilon_{ty} < \varepsilon_t < 0.005$	$\phi_c + \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_y}{0.005 - \varepsilon_t} (\phi_t - \phi_c)$	Transición
$\varepsilon_{ty} \leq \varepsilon_t$	0.65/0.75	Controlado por tracción

Nota. En la tabla se aprecia los factores de reducción. Adaptado de la Norma ACI 318-19.

Imagen 18

Variación del factor ϕ con la deformación neta a tracción en la fibra extrema traccionada en función de la deformación unitaria del acero



Nota. Deformación neta a tracción en la fibra extrema. Tomado de ACI318-19 (2019).

La Norma Técnica E.060 establece un criterio propio para los factores de reducción de resistencia en elementos sometidos a flexo-compresión como se observa en la Tabla 5 e Imagen 19. Según los artículos 9.3.2 y 10.3.4 de dicha normativa, los valores de ϕ dependen del tipo de falla y del nivel de confinamiento del elemento, diferenciando entre columnas con estribos y columnas con espiral. La norma asigna valores menores cuando la falla está controlada por compresión y valores mayores cuando está controlada por tracción, incluyendo además una zona de transición entre ambos estados (MVCS, 2009).

Tabla 5

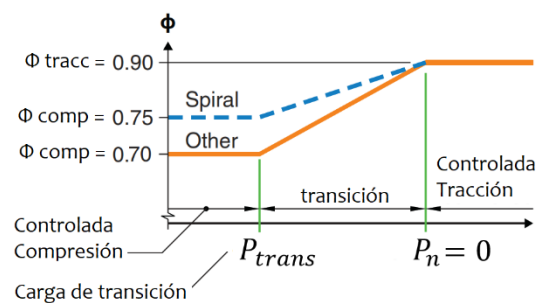
Variación del factor ϕ según normativa E.060

Condicionantes	ϕ	Zona
$P_n \leq 0$	0.90	Controlado por compresión
$0 < P_n < P_{trans}$	$\phi_c - (\phi_t - \phi_c) \frac{P_n}{P_{trans}}$	Transición
$P_n \geq P_{trans}$	0.70/075	Controlado por tracción

Nota. En la tabla se aprecia las fórmulas para los factores de reducción. Adaptado de E.060.

Imagen 19

Variación del factor Φ con la carga axial a flexión o carga axial a falla balanceada



Nota. La variación del factor Φ depende del nivel de deformación, cambiando desde compresión controlada hasta tracción controlada entre carga axial y falla balanceada. Adaptado de MVCS (2009).

2.7. Implementación Computacional con Lenguaje de Programación Python

El lenguaje de programación Python constituye una plataforma idónea para el desarrollo de modelos numéricos aplicados al análisis estructural, debido a su potencia matemática, su arquitectura modular y su amplia compatibilidad con bibliotecas científicas. Herramientas como NumPy, Matplotlib y Plotly permiten realizar operaciones vectoriales y matriciales de forma eficiente, así como generar visualizaciones avanzadas en dos y tres dimensiones, lo que facilita la

implementación y validación de modelos seccionales bajo flexo-compresión. La versatilidad de Python lo convierte en una alternativa adecuada para reproducir metodologías numéricas ampliamente empleadas en la literatura, tal como las propuestas por Chiorean (2024) y Papanikolaou (2012), orientadas al análisis preciso de secciones de concreto armado en estados límites resistentes.

En el presente trabajo, el lenguaje de programación Python se emplea para desarrollar el código destinado a la obtención del diagrama de interacción.

- **Definición de la geometría de la sección transversal:** Se obtiene la forma arbitraria de la sección de concreto y la ubicación del acero de refuerzo longitudinal directamente desde un archivo DXF de AutoCAD. Las coordenadas (x_i, y_i) de los vértices del concreto y las posiciones de las barras se almacenan como arreglos numéricos para permitir su procesamiento matemático.
- **Determinación de propiedades geométricas mediante el teorema de Green:** Empleando la formulación integral de Green, se calcula el área total de la sección de concreto, asimismo se calcula el centro de gravedad y los momentos de primer orden requeridos para el análisis. Este procedimiento se aplica tanto para la sección completa como para cada bloque comprimido generado posteriormente.

- **Modelo de Whitney y cálculo del bloque comprimido:** Para cada ángulo de rotación θ , se determina la profundidad del bloque comprimido utilizando el modelo rectangular equivalente de Whitney. El eje neutro y la altura a del bloque se recorren desde la fibra extrema en compresión hasta la altura total de la sección rotada, permitiendo identificar el área comprimida y el centroide del bloque comprimido.
- **Cálculo del centro de reducción y fuerzas internas:** Se define un centro de reducción (centro de gravedad, centroide plástico a compresión, a tracción o punto definido por el usuario). Todas las coordenadas del concreto y acero se trasladan a este sistema, luego, para cada combinación (θ, a) , se evalúan las fuerzas de compresión del concreto, la fuerza de cada barra de acero según su deformación, finalmente los momentos resistentes respecto al centro de reducción definido por el usuario.
- Generación de la superficie tridimensional $p_n - M_{nx} - M_{ny}$ se ensamblan los valores resistentes últimos para todas las rotaciones y profundidades del eje neutro, creando una malla tridimensional del dominio resistente. Finalmente, mediante Plotly, se genera una visualización interactiva que permite interpretar la superficie de interacción biaxial en todo el espacio.

El uso de Python garantiza reproducibilidad, transparencia y extensibilidad del modelo permitiendo incorporar nuevas condiciones normativas o materiales compuestos sin alterar la estructura del código (Chiorean, 2024 y Spinella, 2013).

2.8. Definición de Términos Básicos

- **Flexo-compresión biaxial** ($P_n - M_{nx} - M_{ny}$): Estado de carga en el cual una sección está sometida simultáneamente a una fuerza axial y a momentos flectores en dos direcciones ortogonales.
- **Teorema de Green** ($A_g = \oint$): Principio matemático que transforma integrales de área en integrales de línea, aplicado para la integración analítica de esfuerzos en secciones arbitrarias.
- **Bloque rectangular de Whitney** ($C = 0.85f'_cA_c$): Modelo normativo simplificado que representa la distribución de esfuerzos a compresión en el concreto mediante un bloque uniforme de intensidad.
- **Centroide plástico** ($C_{px}; C_{py}$): Punto de equilibrio donde la carga axial pura no genera momentos; depende de la distribución plástica de los materiales.
- **Diagrama de interacción tridimensional** ($P_u - M_{ux} - M_{uy}$): Superficie tridimensional que describe todas las combinaciones de carga axial y momentos que puede resistir una sección antes de fallar.

- **Método de integración perimetral:** Técnica que utiliza el teorema de Green para evaluar esfuerzos sobre el contorno comprimido de la sección.
- **Python:** Lenguaje de programación científico de código abierto que permite la implementación numérica de modelos estructurales mediante librerías como NumPy, Matplotlib y Plotly.
- **Diagrama de interacción ($P_n - M_n$):** Representación bidimensional del límite de equilibrio entre carga axial y flexión en dos ejes principales, generada numéricamente con base en la teoría del equilibrio plástico.

Capítulo III: Metodología de la Investigación

3.1. Metodología y Técnicas Utilizadas

3.1.1. Tipo y Nivel de Investigación

La presente investigación es de tipo aplicada y de enfoque cuantitativo, debido a que desarrolla una herramienta computacional orientada a resolver un problema técnico real del diseño estructural: el análisis resistente de secciones de concreto armado de geometría arbitraria sometidas a caga axial y flexión biaxial.

El carácter aplicativo se manifiesta en la construcción de un modelo numérico en Python que integra los fundamentos teóricos del teorema de Green para el cálculo geométrico de áreas y centroides, el bloque rectangular de Whitney para la determinación del bloque comprimido, y el uso del centro de reducción como referencia para el cálculo de fuerzas internas y momentos.

3.1.2. Nivel de Investigación

El nivel de investigación es teórico, no experimental y comparativo, en concordancia con la naturaleza del modelo estructural desarrollado.

Es teórica, porque se fundamenta en la formulación matemática y en la aplicación de modelos estructurales consolidados, tales como el teorema de Green para el cálculo geométrico, el bloque rectangular de Whitney para la determinación

del bloque comprimido, y el centro de reducción para la referencia de momentos resistentes.

Es no experimental, ya que la investigación no recurre a ensayos físicos ni a pruebas de laboratorio; en su lugar, se emplea el procesamiento computacional de la geometría extraída de archivos DXF, la rotación de la sección respecto del centro de reducción, evaluación del bloque comprimido para múltiples profundidades y ángulos. Todo el análisis se desarrolla mediante simulación matemática programada en Python.

Finalmente, es comparativa, porque se analizan y contrastan los resultados del modelo numérico propuesto con los obtenidos por programas estructurales comerciales, determinando su precisión y validez.

3.1.3. Diseño de Investigación

El diseño de la investigación es no experimental, descriptivo y analítico, dado que no se manipulan variables en un entorno físico o de laboratorio, sino que se observan, formulan y comparan resultados generados mediante simulación numérica.

El estudio es de tipo transversal, pues los datos se obtienen a partir de modelos teóricos evaluados en un único momento temporal. La investigación sigue un proceso estructurado.

3.2. Población y Muestra

3.2.1. Población

La población está constituida por el conjunto teórico de secciones de concreto armado sometidas a carga axial y flexión biaxial, considerando diferentes configuraciones geométricas.

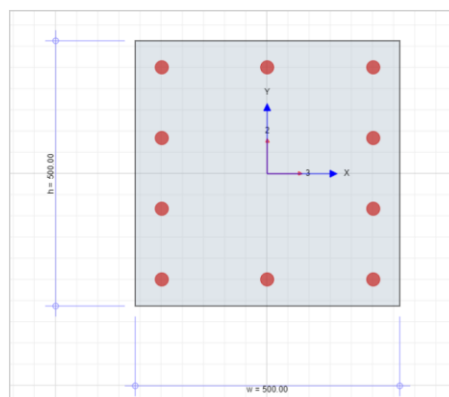
3.2.2. Muestra

La muestra se compone de secciones representativas utilizadas en diseño estructural, tanto regulares como irregulares:

- Sección de concreto armado rectangular

Imagen 20

Sección de concreto armado tipo rectangular de 50 x 50 cm con varillas de 1"

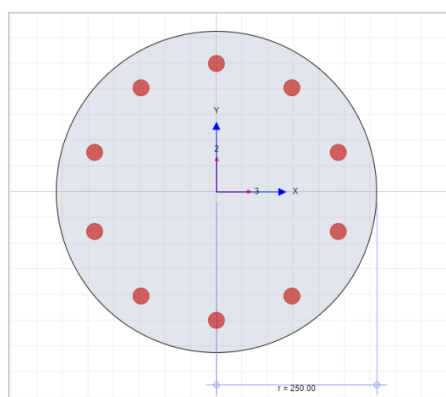


Nota. Sección de concreto armado tipo rectangular elaborado con el software CSI COL.

- Sección de concreto armado circular

Imagen 21

Sección de concreto armado tipo circular de diámetro 25 cm con varillas de 1"

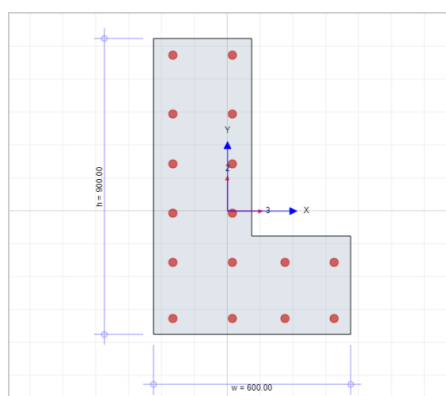


Nota. Sección de concreto armado tipo circular elaborado con el software CSI COL.

- Sección de concreto armado en L

Imagen 22

Sección de concreto armado tipo L, de 60 x 90 con varillas de 1"

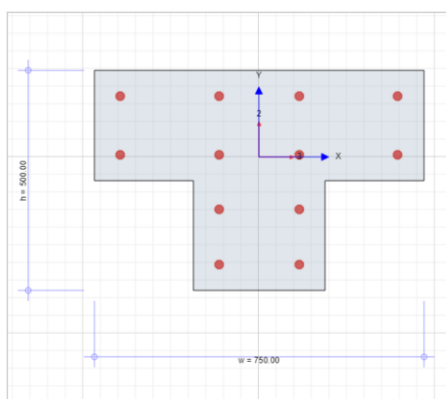


Nota. Sección de concreto armado tipo L elaborado con el software CSI COL.

– Sección de concreto armado T

Imagen 23

Sección de concreto armado tipo T, de 75 x 50 cm con varillas de 3/4"

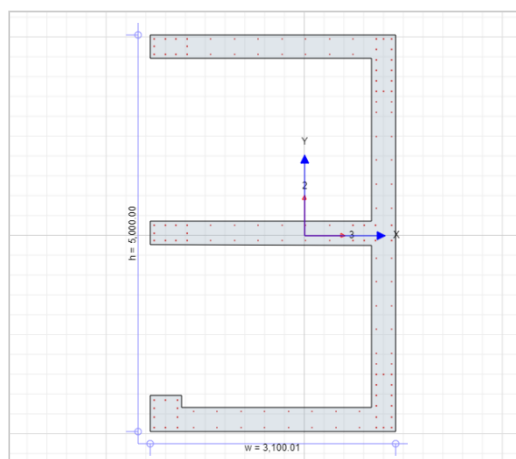


Nota. Sección de concreto armado tipo T elaborado con el software CSI COL.

- Sección de concreto armado poligonal – irregular.

Imagen 24

Sección de concreto armado tipo IRREGULAR, de 310 x 500 cm con varillas de 5/8" y 1/2"



Nota. Sección de concreto armado tipo irregular elaborado con el software CSI COL.

Capítulo IV: Resultados

4.1. Sección de Concreto Rectangular

La tabla 6 presenta la comparación de la carga axial P_n y el momento M_y para el corte direccional a 0° , obtenidos mediante GuidPyCol, SAP2000 y CSI Column. Se observa una alta concordancia entre los resultados a lo largo de todo el dominio resistente, con diferencias reducidas tanto en compresión como en tracción. Las pequeñas discrepancias identificadas se asocian a las diferencias en los modelos internos de integración y criterios normativos empleados por cada software, sin afectar la tendencia global del diagrama de interacción.

Tabla 6

Tabla comparativo para un ángulo determinado (0°) para sección rectangular

N°	GuidPyCol 0°		SAP2000 0°		CSI Col 0°	
	Pn	My	Pn	My	Pn	My
1	413,79	0,00	412,41	0,00	410,54	0,00
2	413,79	6,11	412,41	11,55	410,54	11,50
3	413,79	11,47	412,41	16,13	410,54	16,50
4	413,79	16,36	403,05	20,68	398,05	21,10
5	411,76	20,78	375,27	24,76	370,25	25,20
6	385,16	24,76	346,50	28,38	343,75	28,30
7	357,66	28,31	316,48	31,58	313,75	31,50
8	329,06	31,46	286,44	34,28	282,18	34,20

N°	GuidPyCol 0°		SAP2000 0°		CSI Col 0°	
	Pn	My	Pn	My	Pn	My
9	299,09	34,25	252,82	36,77	248,60	36,60
10	267,37	36,71	216,52	39,00	213,85	38,70
11	233,38	38,92	176,56	41,10	173,93	40,70
12	196,36	40,96	161,60	43,57	159,33	43,20
13	169,64	43,52	144,57	46,40	140,95	45,80
14	149,87	46,82	120,02	49,51	116,79	48,90
15	122,29	50,69	96,73	50,54	94,47	49,70
16	90,65	50,45	54,76	45,65	53,20	44,80
17	39,64	44,33	5,53	39,36	4,99	38,60
18	-11,63	36,87	-31,66	32,63	-31,55	32,00
19	-61,91	27,26	-78,52	23,42	-80,60	22,30
20	-156,37	8,07	-164,71	5,80	-161,55	5,73
21	-191,54	0,00	-189,00	0,00	-185,56	0,00

Nota. La tabla muestra una alta concordancia entre el software comercial y GuidPyCol, validando la precisión del modelo desarrollado.

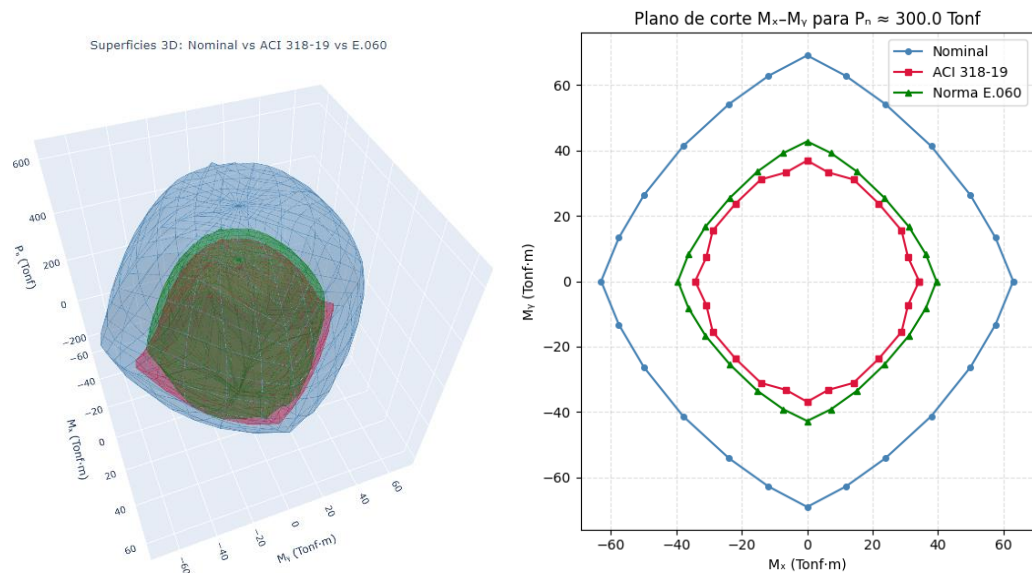
La figura 1 muestra la comparación entre la superficie nominal, la superficie reducida según ACI 318-19 y la superficie reducida según la Norma E.060, evidenciando una mayor reducción global de capacidad en el modelo ACI.

El corte en el plano $M_x - M_y$ para $P_n = 300 \text{ Tonf}$ permite observar que la Norma E.060 conserva mayores valores resistentes, especialmente en zonas dominadas por compresión.

Estas diferencias reflejan el enfoque normativo, donde el ACI prioriza la ductilidad mientras que la E.060 privilegia la resistencia axial.

Figura 1

a) Diagrama de interacción 3D nominal vs reducido (E.060 y ACI 18-19).



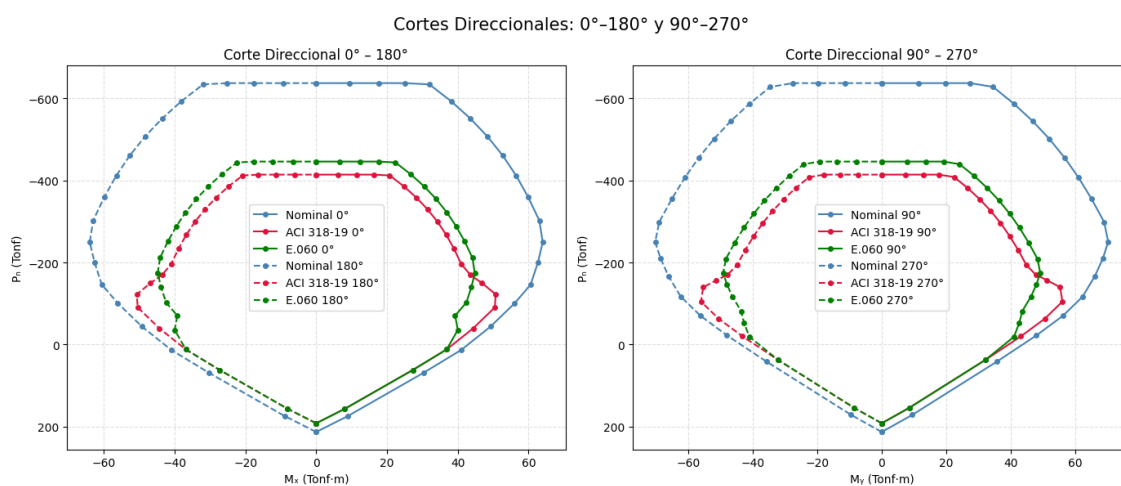
Nota. Diagrama biaxial para el diseño a flexo compresión Biaxial para sección rectangular

En la figura 2 se observa, los cortes direccionales 0° – 180° y 90° – 270° permiten analizar el comportamiento resistente en direcciones principales de flexión biaxial.

Se observa que la superficie nominal encierra a las superficies reducidas, siendo la E.060 menos conservadora que el ACI 318-19 en la mayoría de los rangos de carga axial.

Figura 2

Diagrama de interacción bidireccional sección rectangular.



Nota. Diagrama de interacción 2D o bidimensional con normativa ACI 18-19 y E.060, para sección rectangular

4.2. Sección de Concreto Armado Circular

La tabla 7 presenta la comparación de la carga axial P_n y el momento M_y para el corte direccional a 0°, obtenidos mediante GuidPyCol, SAP2000 y CSI Column. Se observa una alta concordancia entre los resultados a lo largo de todo el

dominio resistente, con diferencias reducidas tanto en compresión como en tracción. Las pequeñas discrepancias identificadas se asocian a las diferencias en los modelos internos de integración y criterios normativos empleados por cada software, sin afectar la tendencia global del diagrama de interacción.

Tabla 7

Cuadro comparativo para un ángulo determinado (0°) para sección circular

N°	GuidPyCol 0°		SAP2000 0°		CSI Col 0°	
	Pn	My	Pn	My	Pn	My
1	347,39	0,00	344,46	0,00	343,75	0,00
2	347,39	4,91	344,46	6,71	343,75	6,70
3	347,39	6,79	344,46	9,45	343,75	9,63
4	347,39	9,58	344,46	12,65	343,75	12,80
5	347,39	12,66	329,68	15,62	325,68	16,10
6	340,29	15,78	304,19	18,69	300,84	19,00
7	316,09	18,78	276,28	21,52	274,39	21,60
8	289,66	21,56	247,59	23,94	244,06	24,00
9	261,06	24,05	214,79	26,14	211,22	26,20
10	230,18	26,25	179,12	28,05	177,02	27,90
11	196,75	28,17	139,17	29,65	136,48	29,40
12	159,63	29,75	114,11	32,02	111,95	31,70
13	125,57	32,05	91,57	33,53	88,10	33,00
14	97,97	34,11	59,55	34,96	58,47	34,50
15	61,84	35,97	27,92	34,40	26,95	33,80
16	22,87	34,42	-13,68	29,66	-13,84	29,10

N°	GuidPyCol 0°		SAP2000 0°		CSI Col 0°	
	Pn	My	Pn	My	Pn	My
17	-27,72	28,54	-60,01	23,86	-59,16	23,40
18	-76,08	21,66	-94,98	17,88	-93,38	17,60
19	-128,44	12,48	-148,05	8,54	-146,25	8,22
20	-180,73	2,45	-182,55	1,52	-178,96	1,56
21	-191,54	0,00	-189,00	0,00	-185,56	0,00

Nota. La tabla muestra una alta concordancia entre el software comercial y GuidPyCol, validando la precisión del modelo desarrollado.

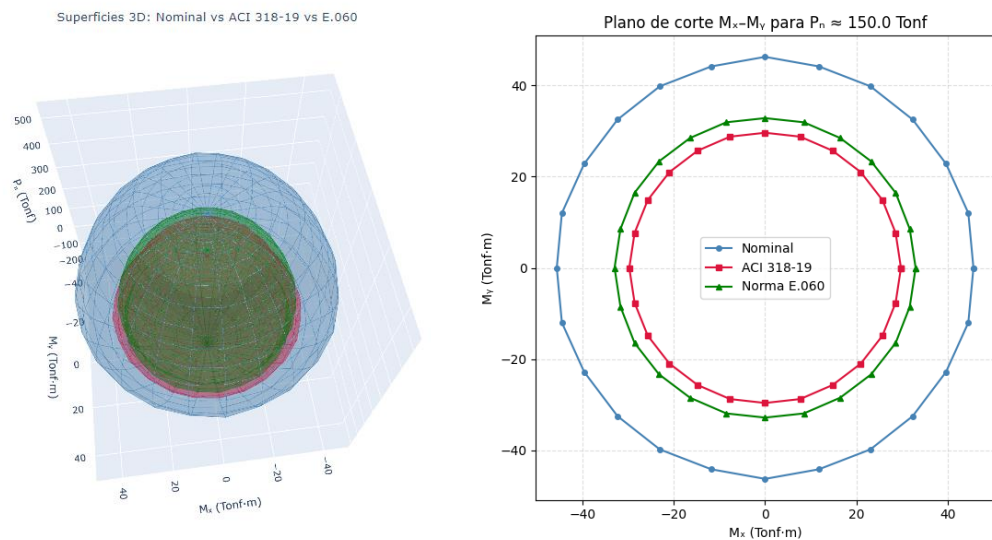
La figura 3 muestra la comparación entre la superficie nominal, la superficie reducida según ACI 318-19 y la superficie reducida según la Norma E.060, evidenciando una mayor reducción global de capacidad en el modelo ACI.

El corte en el plano $M_x - M_y$ para $P_n = 150 \text{ Tonf}$ permite observar que la Norma E.060 conserva mayores valores resistentes, especialmente en zonas dominadas por compresión.

Estas diferencias reflejan el enfoque normativo, donde el ACI prioriza la ductilidad mientras que la E.060 privilegia la resistencia axial.

Figura 3

Diagrama de interacción 3D Nominal vs Reducido (E.060 y ACI 18-19).



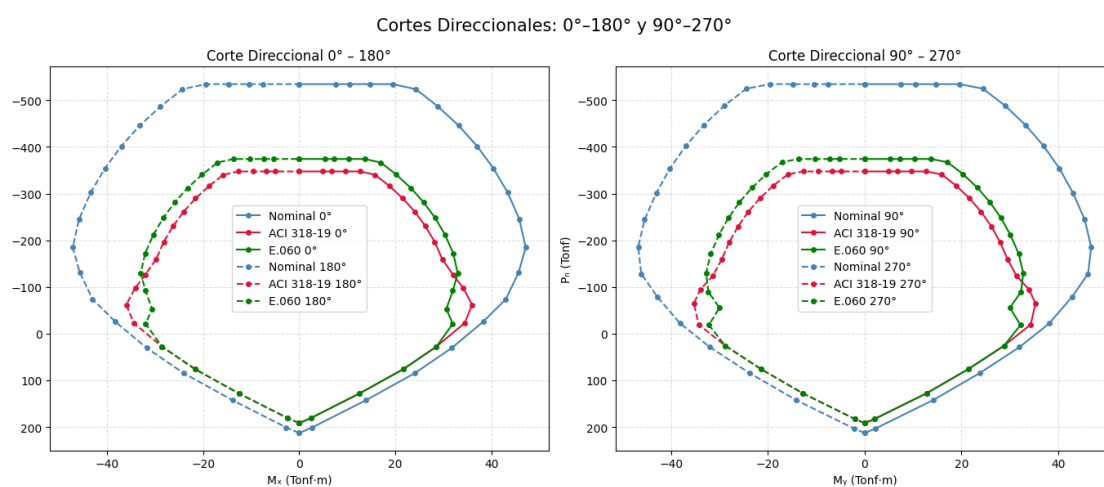
Nota. Diagrama biaxial para el diseño a flexo compresión Biaxial, para sección circular

En la figura 4 se observa, los cortes direccionales 0° – 180° y 90° – 270° permiten analizar el comportamiento resistente en direcciones principales de flexión biaxial.

Se observa que la superficie nominal encierra a las superficies reducidas, siendo la E.060 menos conservadora que el ACI 318-19 en la mayoría de los rangos de carga axial.

Figura 4

Diagrama de Interacción bidireccional sección circular.



Nota. Diagrama de Interacción 2D o bidimensional con normativa ACI 18-19 y E.060, para sección circular

4.3. Sección de Concreto Armado en L

La tabla 8 presenta la comparación de la carga axial P_n y el momento M_y para el corte direccional a 0°, obtenidos mediante GuidPyCol, SAP2000 y CSI Column. Se observa una alta concordancia entre los resultados a lo largo de todo el dominio resistente, con diferencias reducidas tanto en compresión como en tracción. Las pequeñas discrepancias identificadas se asocian a las diferencias en los modelos internos de integración y criterios normativos empleados por cada software, sin afectar la tendencia global del diagrama de interacción.

Tabla 8

Cuadro comparativo para un ángulo determinado (θ) para sección tipo L

N°	GuidPyCol 0°		SAP2000 0°		CSI Col 0°	
	Pn	My	Pn	My	Pn	My
1	612,57	-0,01	613,54	-1,31	607,36	-1,16
2	612,57	15,43	613,54	32,37	607,36	31,98
3	612,57	32,35	588,98	46,35	579,65	47,00
4	595,83	47,36	534,65	59,49	525,35	60,11
5	541,51	60,49	478,92	70,82	472,74	70,37
6	485,82	71,79	424,64	79,90	415,45	79,81
7	428,44	81,31	364,98	87,74	355,47	87,30
8	368,31	88,91	315,79	92,87	311,18	91,67
9	319,91	93,92	272,57	96,83	266,99	95,43
10	275,36	97,80	223,23	100,47	218,33	98,83
11	226,29	101,34	167,84	104,00	165,23	102,09
12	171,21	104,76	134,67	109,85	133,33	107,74
13	134,40	111,57	92,27	116,80	90,80	114,20
14	88,05	119,04	55,13	121,06	56,73	118,61
15	43,68	124,40	5,69	121,16	8,88	118,41
16	-11,39	116,97	-42,29	109,28	-39,90	106,11

N°	GuidPyCol 0°		SAP2000 0°		CSI Col 0°	
	Pn	My	Pn	My	Pn	My
17	-71,52	101,48	-92,64	94,90	-86,75	92,64
18	-120,78	85,00	-142,49	77,82	-136,05	75,54
19	-177,10	63,52	-188,57	59,17	-180,94	57,33
20	-232,09	38,04	-241,75	34,30	-234,67	32,17
21	-306,46	0,00	-308,25	1,93	-296,90	1,82

Nota. La tabla muestra una alta concordancia entre el software comercial y GuidPyCol, validando la precisión del modelo desarrollado.

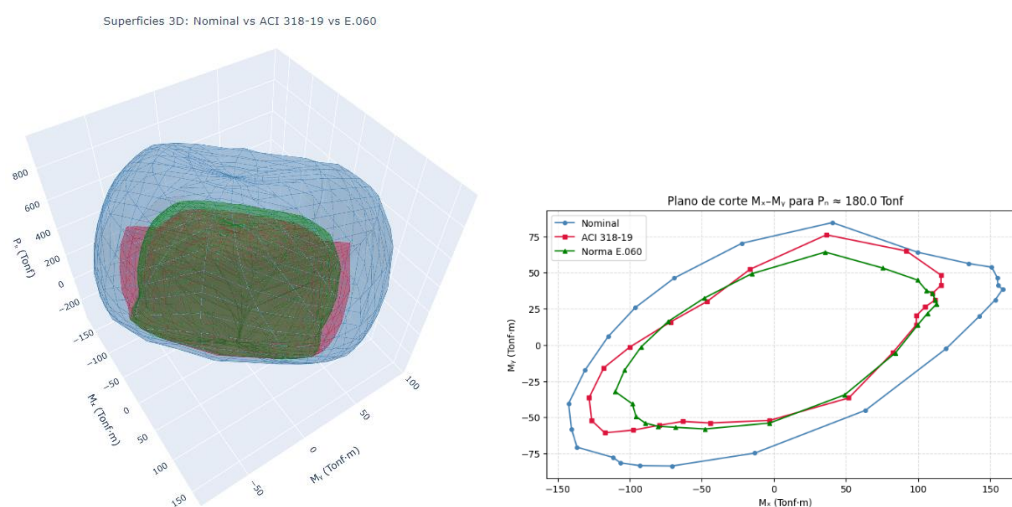
La figura 5 muestra la comparación entre la superficie nominal, la superficie reducida según ACI 318-19 y la superficie reducida según la Norma E.060, evidenciando una mayor reducción global de capacidad en el modelo ACI.

El corte en el plano $M_x - M_y$ para $P_n = 180 \text{ Tonf}$ permite observar que la Norma E.060 conserva mayores valores resistentes, especialmente en zonas dominadas por compresión.

Estas diferencias reflejan el enfoque normativo, donde el ACI prioriza la ductilidad mientras que la E.060 privilegia la resistencia axial.

Figura 5

Diagrama de interacción 3D nominal vs reducido (E.060 y ACI 18-19).



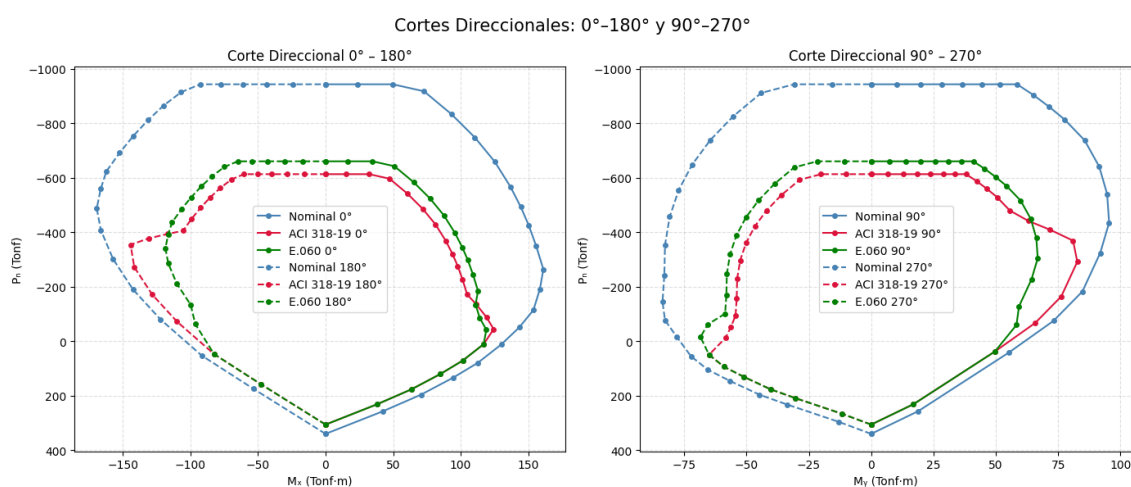
Nota. Diagrama biaxial para el diseño a flexo compresión Biaxial para sección tipo L

En la figura 6 se observa, los cortes direccionales 0° - 180° y 90° - 270° permiten analizar el comportamiento resistente en direcciones principales de flexión biaxial.

Se observa que la superficie nominal encierra a las superficies reducidas, siendo la E.060 menos conservadora que el ACI 318-19 en la mayoría de los rangos de carga axial.

Figura 6

Diagrama de interacción bidireccional sección L.



Nota. Diagrama de interacción 2D o bidimensional con normativa ACI 18-19 y E.060, para sección tipo L

4.4. Sección de Concreto Armado en T

La tabla 9 presenta la comparación de la carga axial P_n y el momento M_y para el corte direccional a 0°, obtenidos mediante GuidPyCol, SAP2000 y CSI Column. Se observa una alta concordancia entre los resultados a lo largo de todo el dominio resistente, con diferencias reducidas tanto en compresión como en tracción. Las pequeñas discrepancias identificadas se asocian a las diferencias en los modelos internos de integración y criterios normativos empleados por cada software, sin afectar la tendencia global del diagrama de interacción.

Tabla 9

Cuadro comparativo para un ángulo determinado (0°) para sección tipo T

N°	GuidPyCol 0°		SAP2000 0°		CSI Col 0°	
	Pn	My	Pn	My	Pn	My
1	395,34	-0,01	395,05	-1,14	402,55	-1,18
2	395,34	1,85	395,05	5,92	402,55	6,30
3	395,34	5,70	395,05	9,66	402,55	10,10
4	395,34	9,26	395,05	12,88	402,55	13,59
5	395,34	12,55	395,05	16,01	402,55	16,77
6	395,34	15,56	395,05	18,86	402,55	19,44
7	395,34	18,31	380,08	21,44	384,28	22,08
8	389,97	20,81	362,11	23,67	364,70	24,48
9	372,51	23,09	342,07	25,80	343,78	26,69
10	354,10	25,17	320,43	27,77	320,48	28,72
11	334,46	27,08	277,27	30,42	275,83	31,46
12	304,00	29,31	262,44	33,39	260,65	34,48
13	272,31	32,13	246,84	36,48	242,40	37,65
14	254,28	35,83	225,36	39,63	221,17	40,80
15	229,74	39,75	194,23	40,55	188,31	41,66
16	192,03	40,61	138,61	37,17	131,20	38,18

N°	GuidPyCol 0°		SAP2000 0°		CSI Col 0°	
	Pn	My	Pn	My	Pn	My
17	124,91	36,40	81,74	32,69	72,73	33,58
18	63,10	30,60	34,28	26,83	24,56	27,58
19	1,27	22,39	-22,51	18,91	-33,80	19,41
20	-87,01	9,43	-93,07	8,29	-107,22	8,39
21	-129,29	0,00	-128,76	1,68	-142,52	1,83

Nota. La tabla muestra una alta concordancia entre el software comercial y GuidPyCol, validando la precisión del modelo desarrollado.

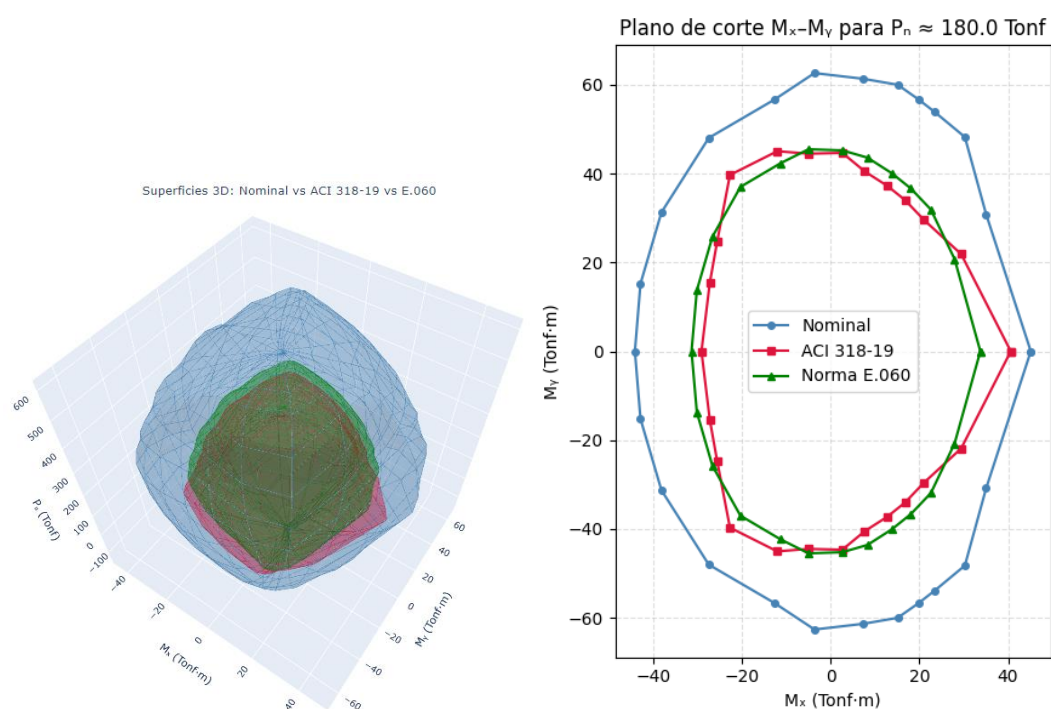
La figura 7 muestra la comparación entre la superficie nominal, la superficie reducida según ACI 318-19 y la superficie reducida según la Norma E.060, evidenciando una mayor reducción global de capacidad en el modelo ACI.

El corte en el plano $M_x - M_y$ para $P_n = 180 \text{ Tonf}$ permite observar que la Norma E.060 conserva mayores valores resistentes, especialmente en zonas dominadas por compresión.

Estas diferencias reflejan el enfoque normativo, donde el ACI prioriza la ductilidad mientras que la E.060 privilegia la resistencia axial.

Figura 7

Diagrama de interacción 3D nominal vs reducido (E.060 y ACI 18-19).



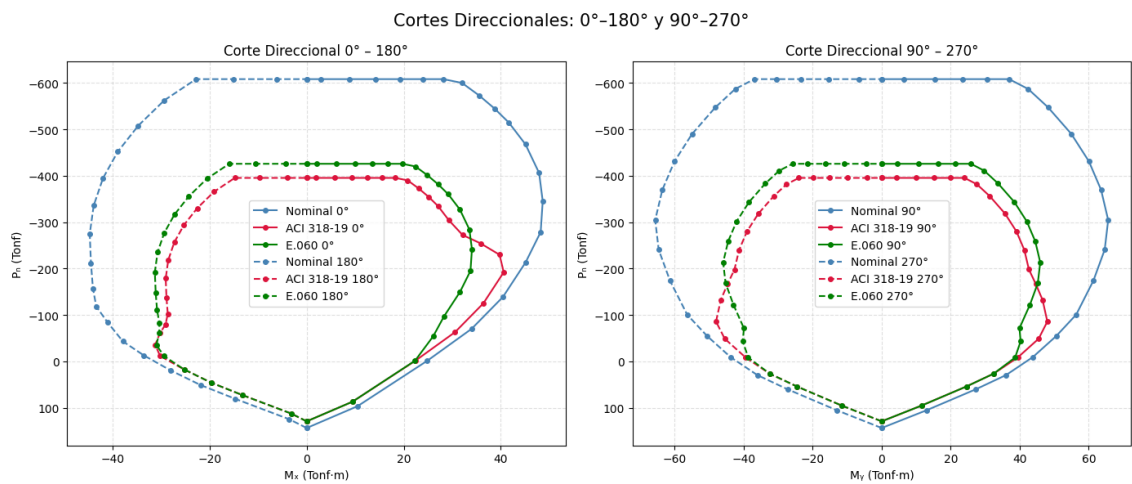
Nota. Diagrama biaxial para el diseño a flexo compresión Biaxial, para sección tipo T

En la figura 8, se observa los cortes direccionales 0° – 180° y 90° – 270° permiten analizar el comportamiento resistente en direcciones principales de flexión biaxial.

Se observa que la superficie nominal encierra a las superficies reducidas, siendo la E.060 menos conservadora que el ACI 318-19 en la mayoría de los rangos de carga axial.

Figura 8

Diagrama de interacción bidireccional sección T.



Nota. Diagrama de interacción 2D o bidimensional con normativa ACI 18-19 y E.060, para sección tipo T

4.5. Sección de Concreto Armado Irregular

La tabla 10 presenta la comparación de la carga axial P_n y el momento M_y para el corte direccional a 0°, obtenidos mediante GuidPyCol, SAP2000 y CSI Column. Se observa una alta concordancia entre los resultados a lo largo de todo el

dominio resistente, con diferencias reducidas tanto en compresión como en tracción. Las pequeñas discrepancias identificadas se asocian a las diferencias en los modelos internos de integración y criterios normativos empleados por cada software, sin afectar la tendencia global del diagrama de interacción.

Tabla 10

Cuadro comparativo para un ángulo determinado (0°) para sección irregular

N°	GuidPyCol 0°		SAP2000 0°		CSI Col 0°	
	Pn	My	Pn	My	Pn	My
1	5495,38	0,06	5466,00	24,45	5369,86	5,64
2	5495,38	320,88	5460,00	3143,48	5357,79	3096,75
3	5444,62	3298,22	5021,00	4071,93	4931,41	3999,91
4	5048,98	4126,10	4886,00	4314,60	4797,56	4239,64
5	4902,92	4382,21	4746,00	4533,72	4666,44	4441,40
6	4753,68	4610,82	4603,00	4729,31	4530,18	4623,80
7	4600,57	4812,93	4457,00	4901,06	4389,63	4783,45
8	4442,52	4989,61	4306,00	5050,50	4244,55	4919,96
9	4278,44	5142,74	4148,00	5179,57	4094,75	5033,59
10	4106,73	5274,72	3983,00	5290,67	3938,89	5126,21
11	3839,75	5397,96	3127,00	5414,39	2969,54	5222,74
12	2587,78	5608,05	2520,00	5754,23	2490,56	5545,23
13	2535,15	6057,11	2481,00	6039,23	2466,88	5815,50
14	2589,58	6588,65	2442,00	6324,22	2443,21	6085,78
15	2666,92	7250,16	2404,00	6609,22	2419,53	6356,05
16	2406,97	7053,78	2365,00	6894,21	2395,86	6626,32

N°	GuidPyCol 0°		SAP2000 0°		CSI Col 0°	
	Pn	My	Pn	My	Pn	My
17	2188,93	6792,70	2173,00	6632,87	2215,99	6378,22
18	1987,05	6471,35	1981,00	6314,73	2035,63	6078,63
19	1763,11	6052,32	1758,00	5893,19	1837,04	5698,39
20	1260,06	4956,49	1184,00	4630,74	1276,21	4458,29
21	-809,84	0,00	-756,00	-35,89	-579,79	-8,80

Nota: La tabla muestra una alta concordancia entre el software comercial y

GuidPyCol, validando la precisión del modelo desarrollado.

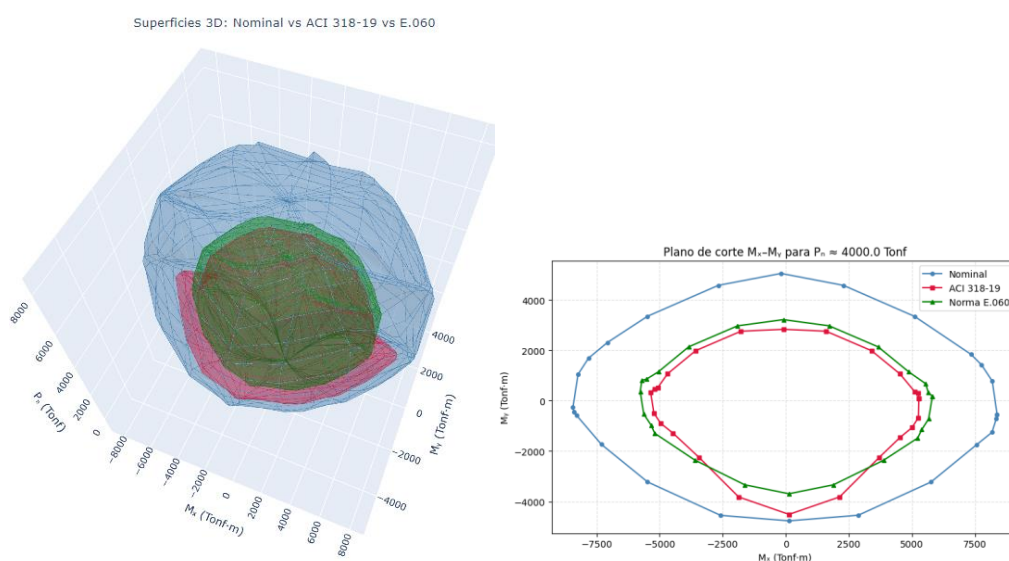
La figura 9 muestra la comparación entre la superficie nominal, la superficie reducida según ACI 318-19 y la superficie reducida según la Norma E.060, evidenciando una mayor reducción global de capacidad en el modelo ACI.

El corte en el plano $M_x - M_y$ para $P_n = 4000 \text{ Tonf}$ permite observar que la Norma E.060 conserva mayores valores resistentes, especialmente en zonas dominadas por compresión.

Estas diferencias reflejan el enfoque normativo, donde el ACI prioriza la ductilidad mientras que la E.060 privilegia la resistencia axial.

Figura 9

Diagrama de interacción 3D nominal vs reducido (E.060 y ACI 18-19).



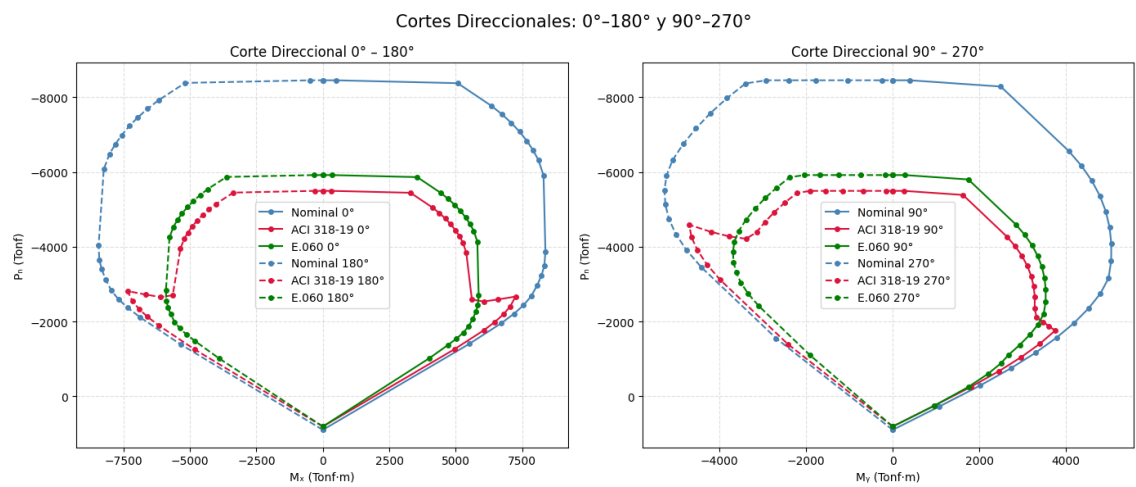
Nota. Diagrama de interacción 3D nominal vs reducido (E.060 y ACI 18-19). b) diagrama biaxial para el diseño a flexo compresión Biaxial, para sección irregular.

En la figura 10, se observa los cortes direccionales 0° – 180° y 90° – 270° permiten analizar el comportamiento resistente en direcciones principales de flexión biaxial.

Se observa que la superficie nominal encierra a las superficies reducidas, siendo la E.060 menos conservadora que el ACI 318-19 en la mayoría de los rangos de carga axial.

Figura 10

Diagrama de Interacción bidireccional sección irregular.



Nota. Diagrama de Interacción 2D o bidimensional con normativa ACI 18-19 y

E.060, para sección irregular

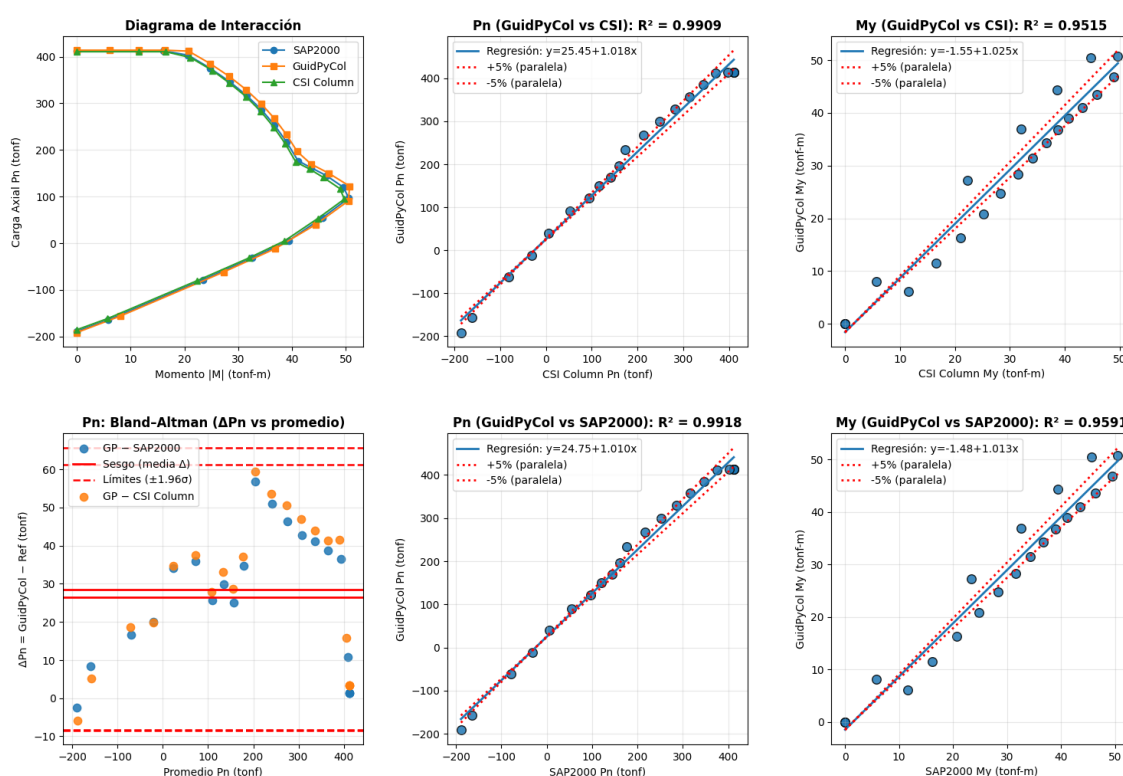
Capítulo V: Discusión de Resultados

5.1. Sección de Concreto Armado Rectangular

La figura 11 muestra la comparación entre los diagramas de interacción obtenidos mediante el modelo propuesto (GuidPyCol) y los softwares comerciales SAP2000 y CSI Column, observándose una alta correlación entre los resultados. Las ligeras diferencias identificadas se atribuyen principalmente al modelo constitutivo del concreto adoptado, ya que los programas comerciales emplean el modelo de Mander, mientras que en la presente investigación se utiliza el bloque rectangular equivalente de Whitney. Adicionalmente, los softwares aplican esquemas de análisis por fibras o malla, mientras que el método propuesto emplea el teorema de Green, evitando la discretización explícita. En conjunto, los resultados validan la precisión y eficiencia del procedimiento desarrollado.

Figura 11

Análisis comparativo sección rectangular.



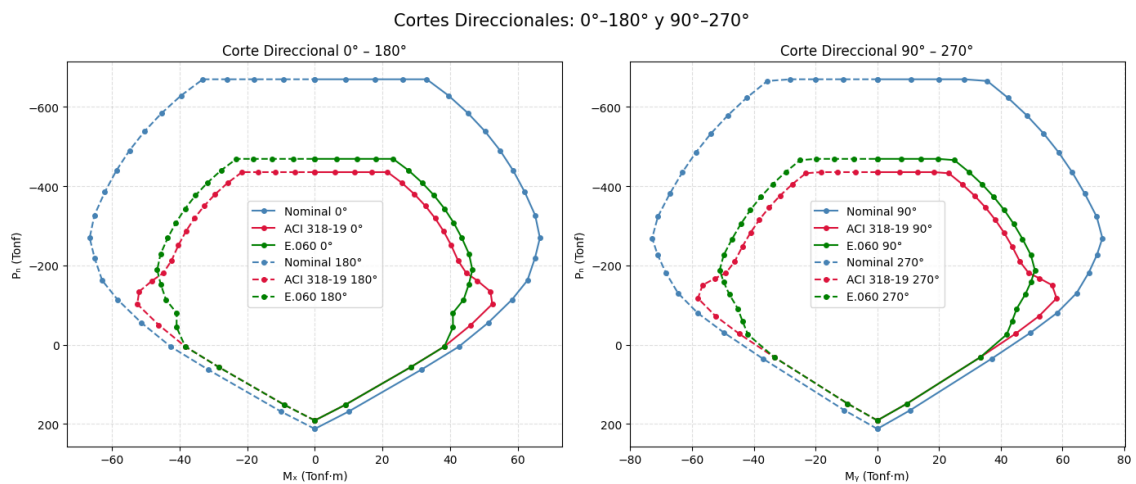
Nota. Análisis comparativo y estadístico de diagramas de interacción P–M, para sección rectangular

La figura 12 y 13 presenta los cortes direccionales 0° – 180° y 90° – 270° de los diagramas de interacción, comparando los resultados nominales con los reducidos según ACI 318-19 y la Norma E.060. Las diferencias observadas se deben principalmente a la formulación del factor de reducción de resistencia ϕ , la cual varía entre ambas normativas. La Norma E.060, al no encontrarse actualizada,

presenta criterios menos conservadores que el ACI 318-19, el cual prioriza la ductilidad estructural. En consecuencia, la variación identificada responde a diferencias normativas y no a limitaciones del modelo numérico desarrollado.

Figura 12

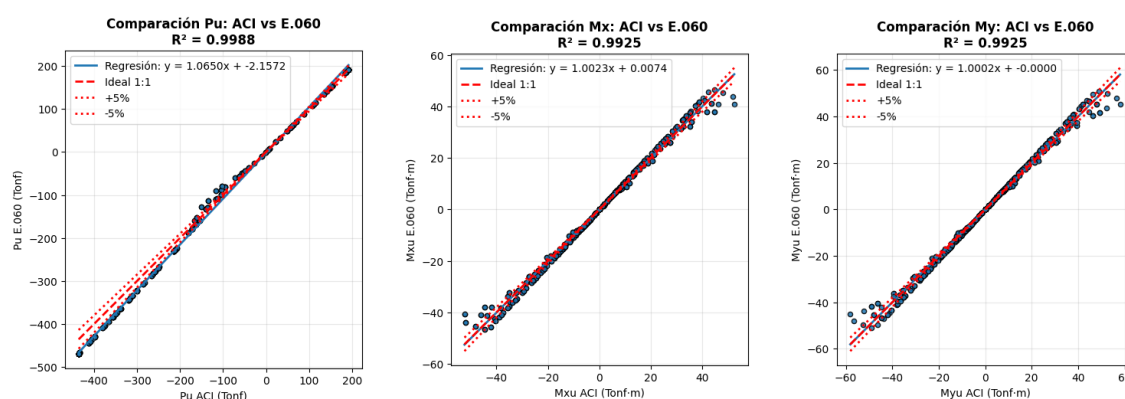
Cortes direccionales sección rectangular.



Nota. Los cortes direccionales del diagrama P–M permiten evaluar la capacidad resistente de la sección en direcciones específicas de carga, para sección rectangular.

Figura 13

Comparación normativa ACI 318-19 vs NTP E.060 en capacidad axial y flexión biaxial, para sección rectangular



Nota. Análisis de regresión lineal entre normativa peruana y normativa ACI 318 para sección rectangular.

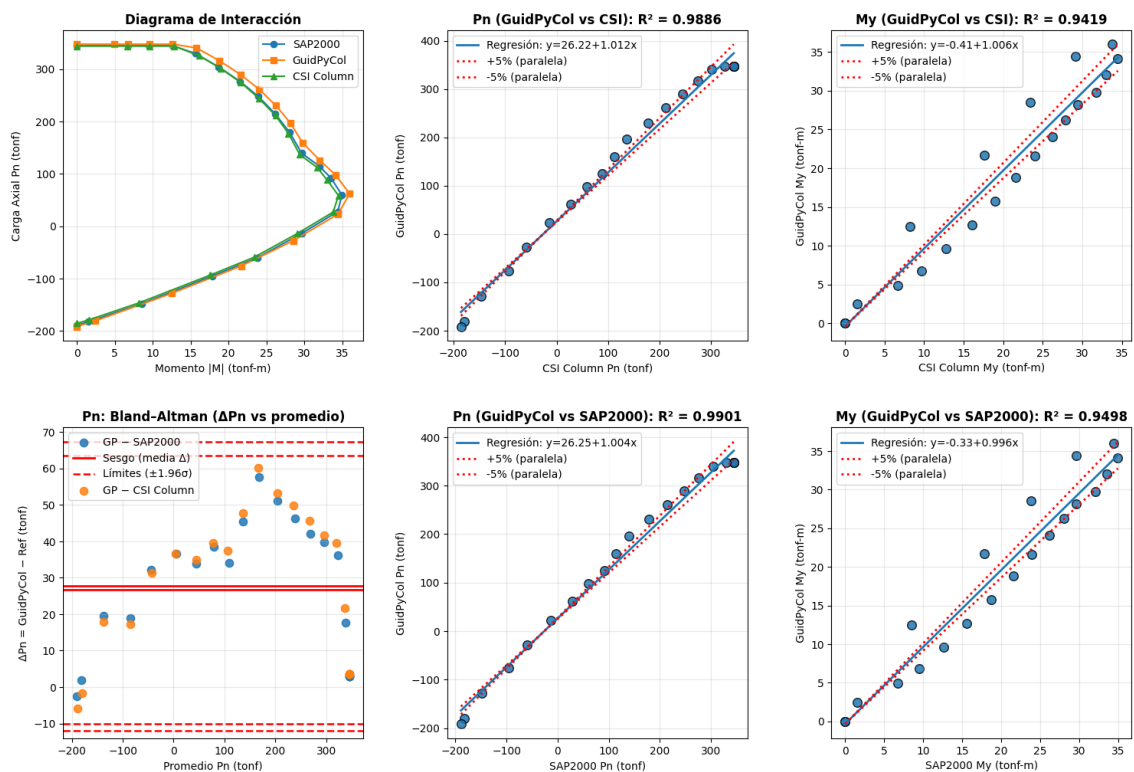
5.2. Sección de Concreto Armado Circular

La figura 14 muestra la comparación entre los diagramas de interacción obtenidos mediante el modelo propuesto (GuidPyCol) y los softwares comerciales SAP2000 y CSI Column, observándose una alta correlación entre los resultados. Las ligeras diferencias identificadas se atribuyen principalmente al modelo constitutivo del concreto adoptado, ya que los programas comerciales emplean el modelo de Mander, mientras que en la presente investigación se utiliza el bloque rectangular equivalente de Whitney. Adicionalmente, los softwares aplican

esquemas de análisis por fibras o malla, mientras que el método propuesto emplea el teorema de Green, evitando la discretización explícita. En conjunto, los resultados validan la precisión y eficiencia del procedimiento desarrollado.

Figura 14

Análisis comparativo sección circular.



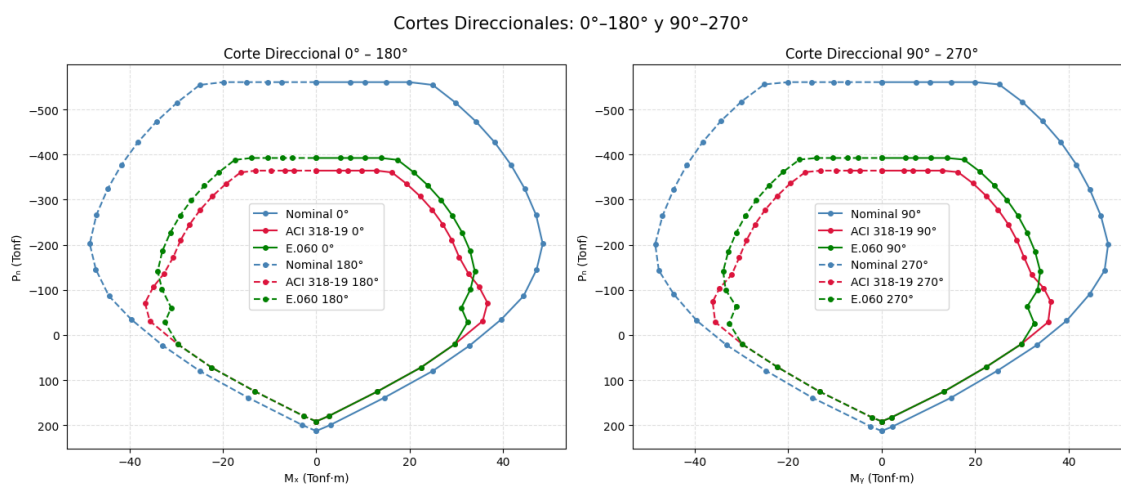
Nota. Análisis comparativo y estadístico de diagramas de interacción P–M, para sección circular.

La figura 15 y 16 presenta los cortes direccionales 0°–180° y 90°–270° de los diagramas de interacción, comparando los resultados nominales con los

reducidos según ACI 318-19 y la Norma E.060. Las diferencias observadas se deben principalmente a la formulación del factor de reducción de resistencia ϕ , la cual varía entre ambas normativas. La Norma E.060, al no encontrarse actualizada, presenta criterios menos conservadores que el ACI 318-19, el cual prioriza la ductilidad estructural. En consecuencia, la variación identificada responde a diferencias normativas y no a limitaciones del modelo numérico desarrollado.

Figura 15

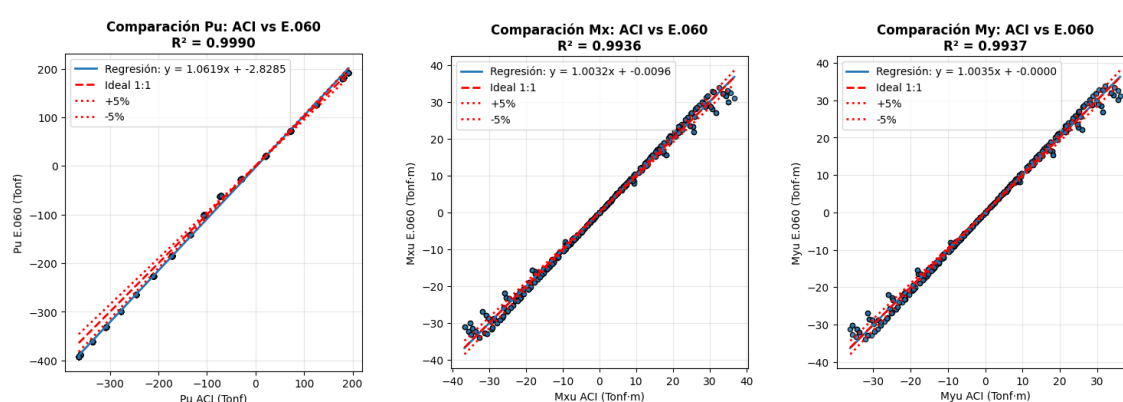
Cortes direccionales sección circular.



Nota. Los cortes direccionales del diagrama P–M permiten evaluar la capacidad resistente de la sección en direcciones específicas de carga, para sección circular.

Figura 16

Comparación Normativa ACI 318-19 vs NTP E.060 en capacidad axial y flexión biaxial, para sección circular



Nota. Análisis de regresión lineal entre normativa peruana y normativa ACI 318 para sección circular.

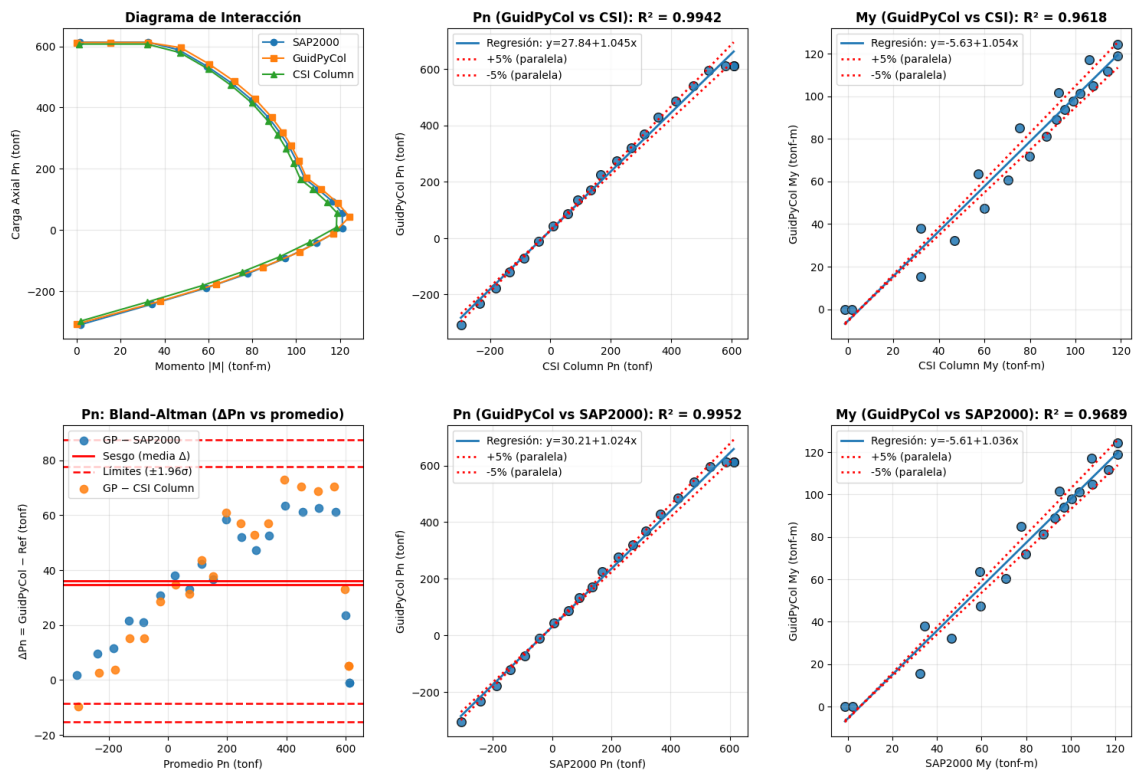
5.3. Sección de Concreto Armado en L

La figura 17 muestra la comparación entre los diagramas de interacción obtenidos mediante el modelo propuesto (GuidPyCol) y los softwares comerciales SAP2000 y CSI Column, observándose una alta correlación entre los resultados. Las ligeras diferencias identificadas se atribuyen principalmente al modelo constitutivo del concreto adoptado, ya que los programas comerciales emplean el modelo de Mander, mientras que en la presente investigación se utiliza el bloque rectangular equivalente de Whitney. Adicionalmente, los softwares aplican

esquemas de análisis por fibras o malla, mientras que el método propuesto emplea el teorema de Green, evitando la discretización explícita. En conjunto, los resultados validan la precisión y eficiencia del procedimiento desarrollado.

Figura 17

Análisis comparativo sección L.



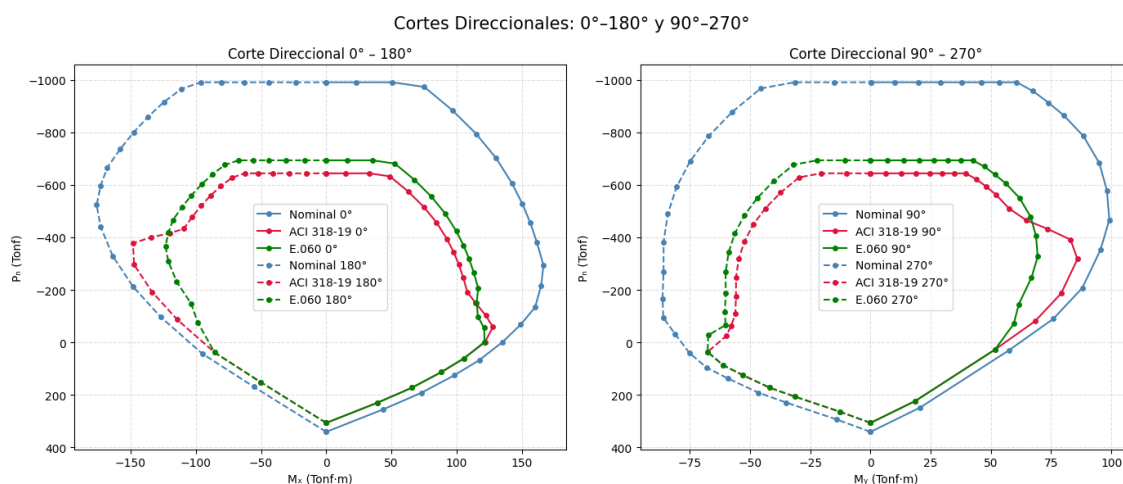
Nota. Análisis comparativo y estadístico de diagramas de interacción P–M, para sección L.

La figura 18 y 19 presenta los cortes direccionales 0° – 180° y 90° – 270° de los diagramas de interacción, comparando los resultados nominales con los

reducidos según ACI 318-19 y la Norma E.060. Las diferencias observadas se deben principalmente a la formulación del factor de reducción de resistencia ϕ , la cual varía entre ambas normativas. La Norma E.060, al no encontrarse actualizada, presenta criterios menos conservadores que el ACI 318-19, el cual prioriza la ductilidad estructural. En consecuencia, la variación identificada responde a diferencias normativas y no a limitaciones del modelo numérico desarrollado.

Figura 18

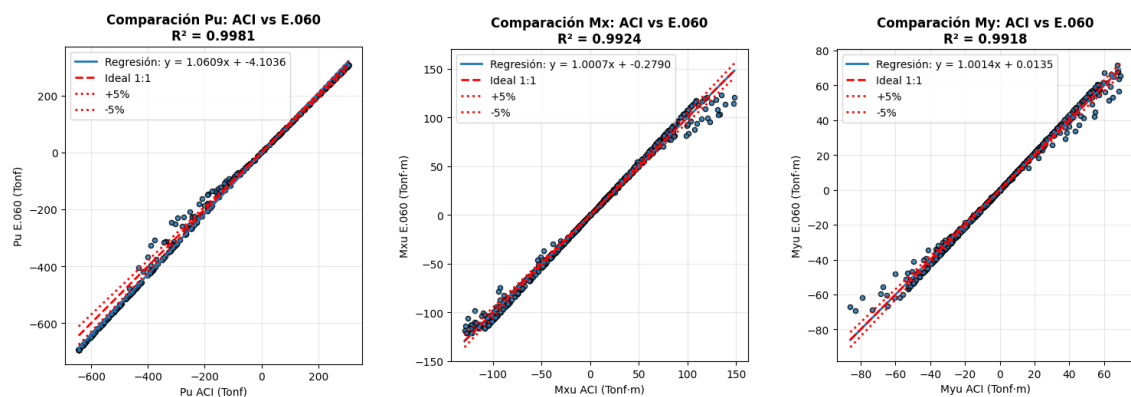
Cortes direccionales sección L.



Nota. Los cortes direccionales del diagrama P–M permiten evaluar la capacidad resistente de la sección en direcciones específicas de carga, para sección L.

Figura 19

Comparación Normativa ACI 318-19 vs NTP E.060 en capacidad axial y flexión biaxial, para sección tipo L



Nota. Análisis de regresión lineal entre normativa peruana y normativa ACI 318 para sección L.

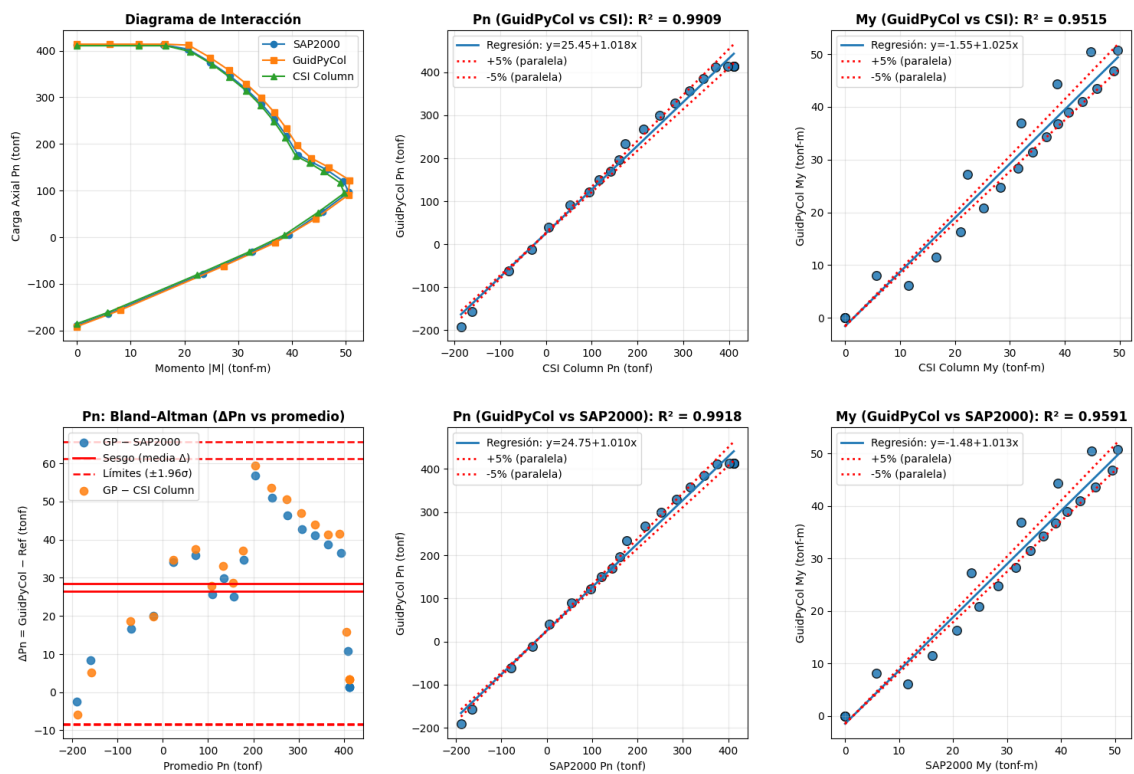
5.4. Sección de Concreto Armado en T

La figura 20 muestra la comparación entre los diagramas de interacción obtenidos mediante el modelo propuesto (GuidPyCol) y los softwares comerciales SAP2000 y CSI Column, observándose una alta correlación entre los resultados. Las ligeras diferencias identificadas se atribuyen principalmente al modelo constitutivo del concreto adoptado, ya que los programas comerciales emplean el modelo de Mander, mientras que en la presente investigación se utiliza el bloque rectangular equivalente de Whitney. Adicionalmente, los softwares aplican

esquemas de análisis por fibras o malla, mientras que el método propuesto emplea el teorema de Green, evitando la discretización explícita. En conjunto, los resultados validan la precisión y eficiencia del procedimiento desarrollado.

Figura 20

Análisis comparativo sección T.



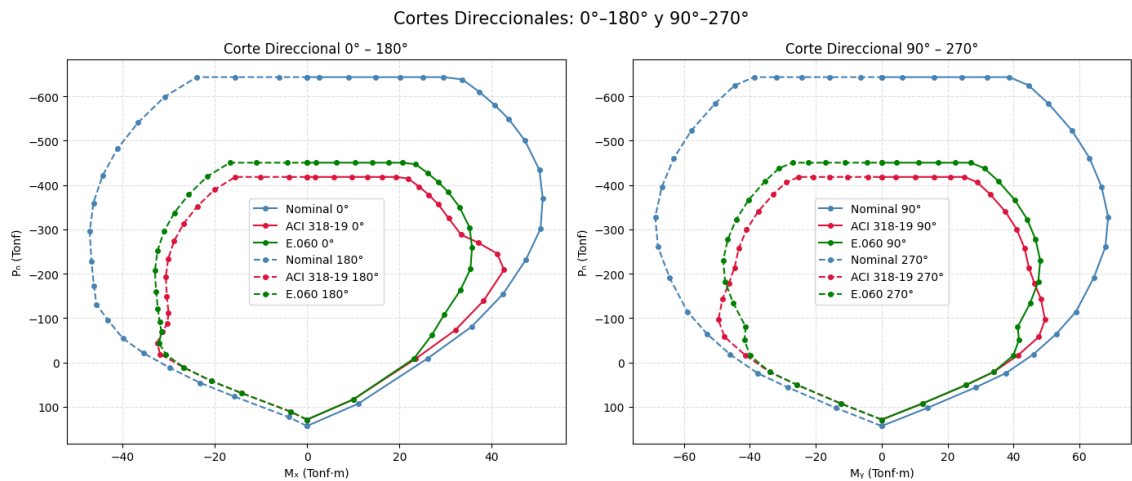
Nota. Análisis comparativo y estadístico de diagramas de interacción P–M, para sección T.

La figura 21 y 22 presenta los cortes direccionales 0° – 180° y 90° – 270° de los diagramas de interacción, comparando los resultados nominales con los

reducidos según ACI 318-19 y la Norma E.060. Las diferencias observadas se deben principalmente a la formulación del factor de reducción de resistencia ϕ , la cual varía entre ambas normativas. La Norma E.060, al no encontrarse actualizada, presenta criterios menos conservadores que el ACI 318-19, el cual prioriza la ductilidad estructural. En consecuencia, la variación identificada responde a diferencias normativas y no a limitaciones del modelo numérico desarrollado.

Figura 21

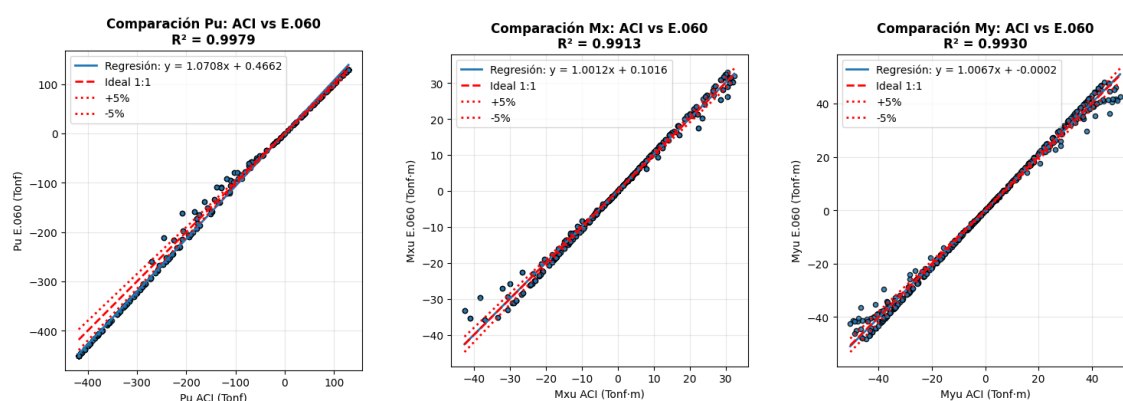
Cortes direccionales sección L.



Nota. Los cortes direccionales del diagrama P–M permiten evaluar la capacidad resistente de la sección en direcciones específicas de carga, para sección T.

Figura 22

Comparación Normativa ACI 318-19 vs NTP E.060 en capacidad axial y flexión biaxial, para sección T



Nota. Análisis de regresión lineal entre normativa peruana y normativa ACI 318 para sección T.

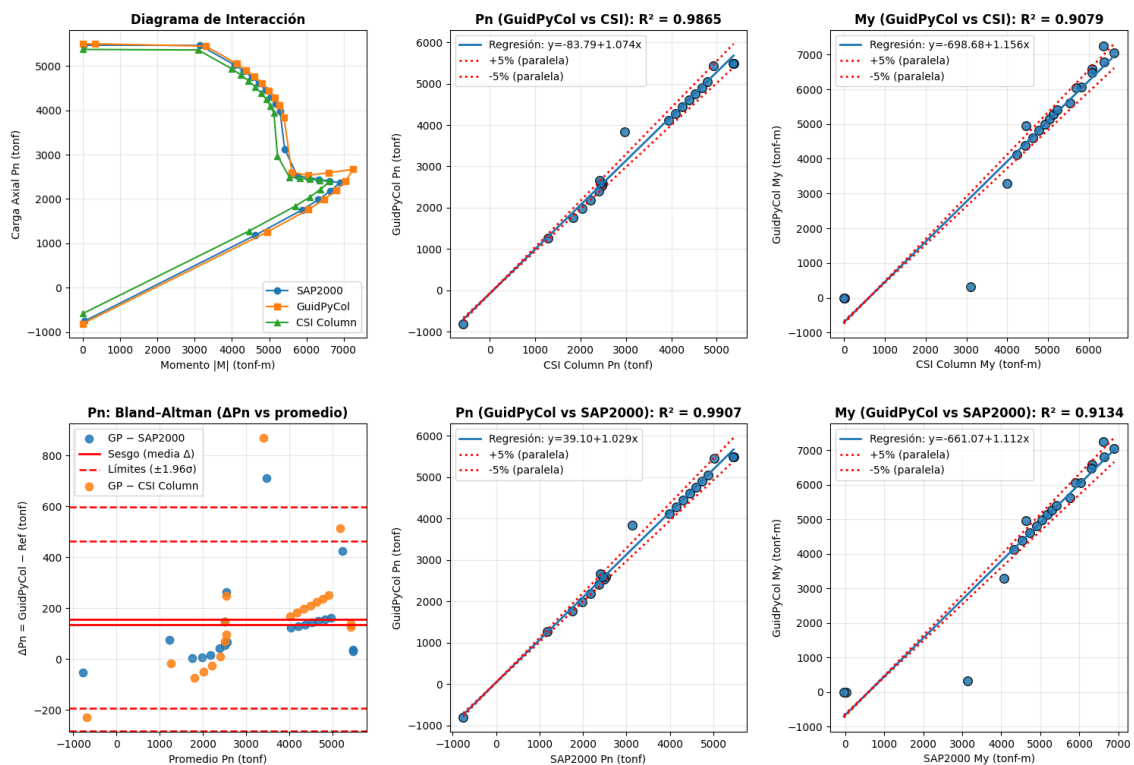
5.5. Sección de Concreto Armado Irregular

La figura 23 muestra la comparación entre los diagramas de interacción obtenidos mediante el modelo propuesto (GuidPyCol) y los softwares comerciales SAP2000 y CSI Column, observándose una alta correlación entre los resultados. Las ligeras diferencias identificadas se atribuyen principalmente al modelo constitutivo del concreto adoptado, ya que los programas comerciales emplean el modelo de Mander, mientras que en la presente investigación se utiliza el bloque rectangular equivalente de Whitney. Adicionalmente, los softwares aplican

esquemas de análisis por fibras o malla, mientras que el método propuesto emplea el teorema de Green, evitando la discretización explícita. En conjunto, los resultados validan la precisión y eficiencia del procedimiento desarrollado.

Figura 23

Análisis comparativo sección irregular.



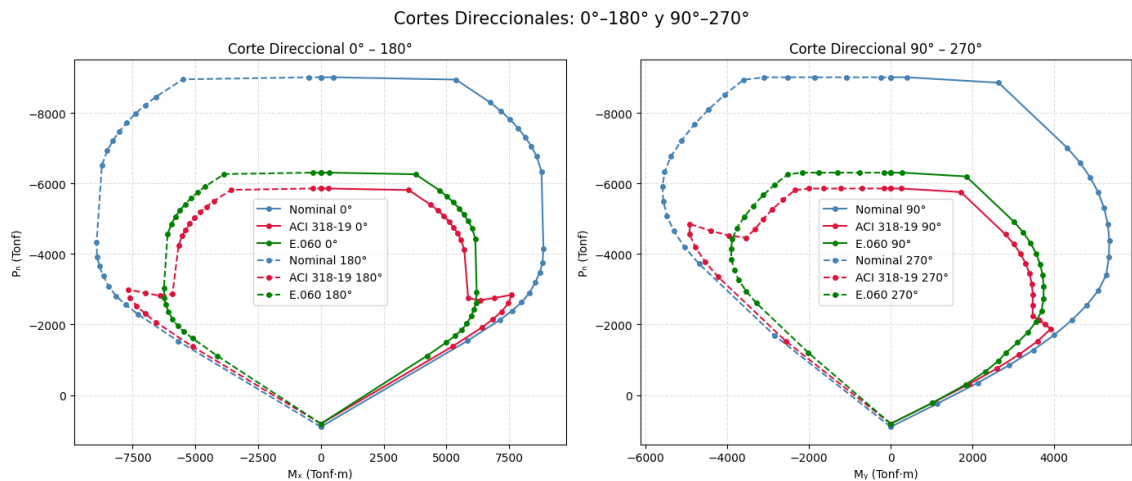
Nota. Análisis comparativo y estadístico de diagramas de interacción P–M, para sección irregular.

La figura 24 y 25 presenta los cortes direccionales 0° – 180° y 90° – 270° de los diagramas de interacción, comparando los resultados nominales con los

reducidos según ACI 318-19 y la Norma E.060. Las diferencias observadas se deben principalmente a la formulación del factor de reducción de resistencia ϕ , la cual varía entre ambas normativas. La Norma E.060, al no encontrarse actualizada, presenta criterios menos conservadores que el ACI 318-19, el cual prioriza la ductilidad estructural. En consecuencia, la variación identificada responde a diferencias normativas y no a limitaciones del modelo numérico desarrollado.

Figura 24

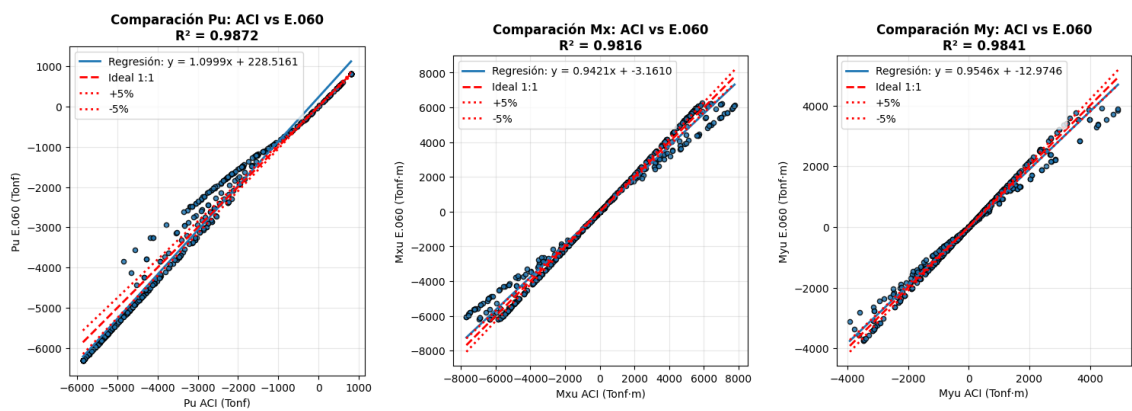
Cortes direccionales sección irregular.



Nota. Los cortes direccionales del diagrama P–M permiten evaluar la capacidad resistente de la sección en direcciones específicas de carga, para sección irregular.

Figura 25

Comparación normativa ACI 318-19 vs NTP E.060 en capacidad axial y flexión biaxial, para sección irregular



Nota. Análisis de regresión lineal entre normativa peruana y normativa ACI 318 para sección T.

5.6. Comparativo entre GuidPyCol vs SAP2000 y CSI col

La tabla 11 presenta el resumen comparativo de la validación del modelo GuidPyCol frente a los programas comerciales CSI Column y SAP2000 para cinco tipos de secciones transversales, que abarcan desde geometrías regulares hasta secciones altamente irregulares.

Los coeficientes de determinación obtenidos para la carga axial nominal P_n son del orden de 0,99 en todos los casos, lo que evidencia una concordancia prácticamente perfecta entre el modelo propuesto y los softwares de referencia.

En el caso de los momentos flectores, los valores de R^2 se mantienen por encima de 0,95 para secciones regulares y moderadamente irregulares, y por encima de 0,90 incluso para secciones de geometría arbitraria, donde la complejidad geométrica incrementa naturalmente la dispersión de resultados.

El análisis estadístico tipo Bland–Altman confirma que los sesgos promedio se mantienen dentro de límites aceptables, sin evidencia de desviaciones sistemáticas. En conjunto, estos resultados validan la capacidad del modelo GuidPyCol para analizar con precisión secciones de concreto armado de geometría arbitraria bajo flexo compresión biaxial.

Tabla 11

Tabla comparativo de las secciones analizadas con su confiabilidad respecto a GuidPyCol

Sec.	Compl.	R ²	R ²	R ²	R ²	Sesgo	Similitud
		Pn (CSI)	Pn (SAP)	My (CSI)	My (SAP)		
S1	Baja	0,991	0,992	0,952	0,959	Bajo	Excelente
S2	Baja	0,991	0,992	0,952	0,959	Bajo	Excelente
S3	Alta	0,994	0,995	0,962	0,969	Bajo– moderado	Muy bueno
S4	Alta	0,991	0,992	0,952	0,959	Bajo	Muy bueno
S5	Muy alta	0,987	0,991	0,908	0,913	Moderado	Bueno

Nota. La comparación de resultados permite evaluar la precisión del modelo, mientras que el análisis de confiabilidad verifica la consistencia y validez de los resultados obtenidos.

Los resultados mostrados en la figura evidencian una alta concordancia entre los diagramas de interacción obtenidos mediante el modelo desarrollado (GuidPyCol) y los resultados proporcionados por los programas comerciales SAP2000 y CSI Column, lo cual se confirma mediante coeficientes de determinación elevados ($R^2 \approx 0,99$) en la comparación de la carga axial y los

momentos resistentes. Esta similitud valida la consistencia global del procedimiento numérico propuesto.

No obstante, las diferencias observadas en ciertos rangos de carga y momento se atribuyen principalmente a los modelos constitutivos del concreto y del acero adoptados en cada metodología. Los softwares comerciales emplean formulaciones basadas en el modelo de Mander para concreto no confinado, junto con esquemas de análisis por fibras o mallas discretizadas, lo que permite una representación continua del comportamiento no lineal del material.

En contraste, en la presente investigación, se ha optado por el uso del bloque rectangular equivalente de Whitney para la modelación del concreto, en concordancia con los criterios normativos, y un modelo elastoplástico para el acero de refuerzo. Asimismo, el cálculo de las resultantes de compresión se realiza mediante el teorema de Green, evitando la discretización explícita de la sección transversal, lo que reduce el costo computacional manteniendo una adecuada precisión.

En consecuencia, las discrepancias identificadas se deben fundamentalmente al modelo de comportamiento del concreto, siendo este el factor predominante en la respuesta resistente de la sección. Las diferencias asociadas al modelo del acero y al esquema de integración numérica resultan secundarias, lo que

demuestra que el método propuesto constituye una alternativa eficiente y confiable para el análisis de secciones de concreto armado de geometría arbitraria bajo flexo compresión biaxial.

5.7. Comparativo entre Norma ACI318-19 y E.060

Con el fin de evaluar las diferencias entre los criterios de diseño establecidos en el ACI 318-19 y la Norma Técnica Peruana E.060, se realizó una comparación directa de las superficies de interacción reducidas $P_u - M_x - M_y$ obtenidas con ambas normativas para cinco tipos de secciones transversales: rectangular, circular, tipo L, tipo T y una sección irregular. La comparación se efectuó mediante análisis de regresión lineal entre los valores calculados con cada norma, considerando como referencia el modelo ACI 318-19.

Se observa un cambio respecto al factor de variación de ϕ , cuyas expresiones matemáticas se observan en la tabla 04 y 05. Sin embargo, mientras que la Norma ACI prioriza la ductilidad de la sección, la Norma E.060 prioriza la resistencia. Por tal motivo, se evidencia que la carga axial es superior a la establecida en la normativa ACI.

Se observa una variación significativa en el factor de reducción de resistencia ϕ , la cual está directamente relacionada con las expresiones matemáticas adoptadas por cada normativa, presentadas en las tablas 04 y 05. Mientras que la

Norma ACI 318-19 define el factor ϕ en función de la deformación unitaria de tracción extrema, priorizando el comportamiento dúctil de la sección y la capacidad de disipación de energía, la Norma Técnica Peruana E.060 establece dicho factor principalmente en función de la magnitud de la carga axial, priorizando la resistencia global del elemento estructural.

Esta diferencia conceptual se manifiesta claramente en los resultados obtenidos, donde se evidencia que, para un amplio rango de estados de carga, la capacidad axial reducida determinada según la Norma E.060 resulta mayor que la obtenida con el ACI 318-19. Dicho comportamiento es consecuencia de que la E.060 mantiene valores relativamente elevados del factor ϕ en estados dominados por tracción y flexión moderada, mientras que el ACI reduce progresivamente dicho factor en función de la ductilidad disponible

En consecuencia, las discrepancias observadas entre ambas normativas no responden a diferencias en el modelo mecánico del material, sino al criterio normativo empleado para la definición del factor de reducción de resistencia; lo cual explica que la Norma E.060 tienda a ser menos conservadora en carga axial y, en contraste, más conservadora en estados de flexión, especialmente en secciones de mayor complejidad geométrica, tal como se observa en la Tabla 12.

Tabla 12*Cuadro comparativo entre normativa ACI 18-19 vs Norma E.060*

Sec.	Pu (R ² / m / b)	Mx (R ² / m / b)	My (R ² / m / b)	Similitud
S1	0,9988	0,9925	0,9925	Muy alta
	1,0650	1,0023	1,0022	
	-2,1572	-0,0074	0,0000	
S2	0,9990	0,9936	0,9937	Muy alta
	1,0619	1,0032	1,0035	
	-2,8285	-0,0096	-0,0000	
S3	0,9981	0,9924	0,9918	Muy alta
	1,0609	1,0007	1,0014	
	-4,1036	-0,2790	0,0135	
S4	0,9979	0,9913	0,9930	Muy alta
	1,0708	1,0012	1,0067	
	0,4662	0,1016	-0,0002	
S5	0,9872	0,9816	0,9841	Aquí se nota la diferencia normativa
	1,0999	0,9421	0,9546	
	228,5161	-3,1610	-12,9746	

Nota. La comparación de resultados permite evaluar la precisión del modelo, mientras que el análisis de confiabilidad verifica la consistencia y validez de los resultados obtenidos.

Conclusiones

- De acuerdo al objetivo general, se desarrolló e implementó con éxito un modelo numérico computacional para el análisis de secciones de concreto armado de geometría arbitraria sometidas a carga axial y flexión biaxial, basado en el teorema de Green, el bloque rectangular equivalente de Whitney y un modelo elastoplástico del acero, cumpliendo con los criterios establecidos en la Norma Técnica Peruana E.060.
- De acuerdo al objetivo general, el uso del teorema de Green permitió formular un procedimiento general de integración de esfuerzos de compresión sin recurrir a discretizaciones tipo fibra o malla, logrando una reducción significativa del costo computacional y manteniendo una adecuada precisión en la determinación de fuerzas y momentos resistentes.
- Respecto al objetivo específico 1, la comparación entre el modelo propuesto y los resultados obtenidos mediante software comerciales como SAP2000 y CSI Column evidenció una alta concordancia, reflejada en coeficientes de determinación elevados (R^2 cercanos a la unidad).
- Respecto al objetivo específico 1, las diferencias observadas entre los resultados del modelo propuesto y los programas comerciales se atribuyen principalmente a los modelos constitutivos del concreto y del acero adoptados, siendo el modelo del concreto el factor predominante; mientras

que los softwares comerciales emplean modelos tipo Mander para concreto no confinado junto con análisis por fibras o malla.

- Respecto al objetivo específico 2, se formuló un procedimiento general para determinar los esfuerzos de compresión en secciones de concreto armado de geometría arbitraria mediante el teorema de Green, transformando la integración en el área comprimida en integrales de contorno, lo que reduce la discretización tipo fibra y mejora la eficiencia computacional del análisis seccional.
- Respecto al objetivo específico 3, los cortes en planos constantes de carga axial y los cortes direccionales demostraron que el modelo propuesto reproduce de manera coherente la respuesta resistente biaxial de la sección, manteniendo una adecuada correspondencia con los enfoques normativos y con los resultados de referencia obtenidos en programas comerciales.
- Respecto al objetivo específico 3, en conjunto, los resultados confirman que el modelo desarrollado constituye una herramienta eficiente, precisa y conceptualmente sólida para el análisis estructural de secciones de concreto armado de geometría arbitraria, representando una alternativa válida a los métodos tradicionales basados en discretización, con potencial aplicación tanto académica como profesional.

Recomendaciones o Sugerencias

- A los futuros tesisistas, se recomienda ampliar los modelos constitutivos incorporando alternativas para el concreto (Hognestad y Mander confinado) y para el acero (bilineal con endurecimiento y degradación por fatiga), a fin de evaluar su influencia en la precisión del diagrama $P_n - M_x - M_y$ y en la estimación del factor ϕ .
- A los futuros investigadores, se recomienda extender el modelo a secciones compuestas, incluyendo sistemas concretos - acero como encamisados, perfiles embebidos, tubos rellenos y placas, considerando la interacción entre materiales mediante compatibilidad de deformaciones y los criterios normativos aplicables.
- A los futuros investigadores, se recomienda realizar una validación ampliada utilizando una base de casos más extensa (diferentes cuantías de refuerzo, disposiciones de acero, niveles de confinamiento y excentricidades), reportando además métricas estadísticas que permitan evaluar la precisión y robustez del modelo propuesto.

Referencias Bibliográficas

- ACI 318R-14. (2014). *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-14) [and] Commentary on Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318R-14)*.
- ACI318-19. (2019). *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI code-318-19)*. American Concrete Institute.
<https://doi.org/10.14359/51716937>
- ACI318-25. (2025). *Building code for structural concrete—Code requirements and commentary (ACI code-318-25)*. American Concrete Institute.
- Anwar, N. y Ahmed Najam, F. (2017). *STRUCTURAL CROSS-SECTIONS Analysis and Design*. En *Structural Cross Sections*. Elsevier.
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-804443-8.00009-9>
- Beer, F. P., Johnston, E. R. y Mazurek, D. F. (2016). *Vector mechanics for engineers. Statics* (Eleventh edition). McGraw-Hill Education.
- Bonet, J. L., Barros, M. H. F. M. y Romero, M. L. (2006). Comparative study of analytical and numerical algorithms for designing reinforced concrete sections under biaxial bending. *Computers & Structures*, 84(31-32), 2184-2193. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2006.08.065>
- Bonet, J. L., Miguel, P. F., Fernandez, M. A. y Romero, M. L. (2004). Analytical Approach to Failure Surfaces in Reinforced Concrete Sections Subjected to

- Axial Loads and Biaxial Bending. *Journal of Structural Engineering*, 130(12), 2006-2015. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2004\)130:12\(2006\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2004)130:12(2006))
- Chen, S. F., Teng, J. G. y Chan, S. L. (2001). Design of Biaxially Loaded Short Composite Columns of Arbitrary Section. *Journal of Structural Engineering*, 127(6), 678-685. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2001\)127:6\(678\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2001)127:6(678))
- Chen, S., Teng, J. y Chan, S. (1999). *Design of Composite Columns of Arbitrary Cross-Section Subject to Biaxial Bending*. En *Advances in Steel Structures (ICASS '99)* (Vol. 1, pp. 443-450). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-008043015-7/50052-X>
- Chiorean, C. G. (2024). Computational issues in biaxial bending capacity assessment of RC and composite cross-sections exposed to fire. *Computers & Structures*, 302, 107477. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2024.107477>
- De Vivo, L. y Rosati, L. (1998). Ultimate strength analysis of reinforced concrete sections subject to axial force and biaxial bending. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166(3-4), 261-287. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00091-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00091-7)

- Dodd, L. L. y Restrepo-Posada, J. I. (1995). Model for Predicting Cyclic Behavior of Reinforcing Steel. *Journal of Structural Engineering*, 121(3), 433-445.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1995\)121:3\(433\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1995)121:3(433))
- Dunkel, M. O. (1902). *SOME APPLICATIONS OF GREEN'S THEOREM IN ONE DIMENSION*.
- Fafitis, A. (2000). Interaction Surfaces of Reinforced Concrete Sections in Biaxial Bending by Green's Theorem. *Computing in Civil and Building Engineering* (2000), 90-97. [https://doi.org/10.1061/40513\(279\)12](https://doi.org/10.1061/40513(279)12)
- Fafitis, A. (2001). Interaction Surfaces of Reinforced-Concrete Sections in Biaxial Bending. *Journal of Structural Engineering*, 127(7), 840-846.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2001\)127:7\(840\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2001)127:7(840))
- Hally, D. (1987). *Calculation of the Moments of Polygons*.
- Harsem, T. E. (2002). *Diseño de estructuras de concreto armado* (Tercera edición). Pontificia Universidad Católica del Perú - Facultad de Ciencias e Ingeniería Departamento de Ingeniería Sección Ingeniería Civil.
- Hognestad, E., Hanson, N. W. y McHenry, D. (1955). *Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design*.
<https://www.concrete.org/publications/internationalconcreteabstractsportal.aspx?m=details&id=11609>

- Lai, S., Will, G. T. y Otani, S. (1984). Model for Inelastic Biaxial Bending of Concrete Members. *Journal of Structural Engineering*, 110(11), 2563-2584. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1984\)110:11\(2563\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1984)110:11(2563))
- Larson, R. y Edwards, B. H. (2010). Cálculo 2 de varias variables (Novena edición).
- Mander, J. B., Priestley, M. J. N. y Park, R. (1988a). Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete. *Journal of Structural Engineering*, 114(8), 1804-1826. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1988\)114:8\(1804\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1988)114:8(1804))
- Mander, J. B., Priestley, M. J. N. y Park, R. (1988b). Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete. *Journal of Structural Engineering*, 114(8), 1804-1826. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1988\)114:8\(1804\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1988)114:8(1804))
- MVCS. (2009). *E.060 Concreto Armado DS N° 010-2009*. <https://www.gob.pe/institucion/munisantamariadelmar/informes-publicaciones/2619713-e-060-concreto-armado-ds-n-010-2009>
- Nilson, A. H. (2001). Diseño de estructuras de concreto (Duodécima edición).
- Otazzi Pasino, G. F. A. (2015). *Apuntes del curso concreto armado I. Pontificia Universidad Católica del Perú - Facultad de Ciencias e Ingeniería Departamento de Ingeniería Sección Ingeniería Civil*. <https://www.pucp.edu.pe/profesor/gianfranco-ottazzi-pasino/publicaciones/>

- Papanikolaou, V. K. (2012). Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load. *Computers & Structures*, 98-99, 33-54.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.02.004>
- Park, R. y Paulay, T. (1975). *Reinforced concrete structures* / R. Park, T. Paulay. ResearchGate.
https://www.researchgate.net/publication/31640630_Reinforced_concrete_structures_R_Park_T_Paulay
- Rodriguez, J. A. y Aristizabal-Ochoa, J. D. (1999). Biaxial Interaction Diagrams for Short RC Columns of Any Cross Section. *Journal of Structural Engineering*, 125(6), 672-683. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1999\)125:6\(672\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1999)125:6(672))
- Rotter, J. M. (1985). Rapid Exact Inelastic Biaxial Bending Analysis. *Journal of Structural Engineering*, 111(12), 2659-2674.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1985\)111:12\(2659\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1985)111:12(2659))
- Sfakianakis, M. G. (2002). Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics. *Advances in Engineering Software*.
- Sfakianakis, M. G. y Fardis, M. N. (1991). Bounding Surface Model for Cyclic Biaxial Bending of RC Sections. *Journal of Engineering Mechanics*,

117(12), 2748-2769. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1991\)117:12\(2748\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1991)117:12(2748))

Soerjadi, R. (1968). *ON THE COMPUTATION OF THE MOMENTS OF A POLYGON, WITH SOME APPLICATIONS.*
<https://resolver.tudelft.nl/uuid:963296a1-8940-4439-9404-eca1bd2f8638>

Sousa, J. B. M. y Muniz, C. F. D. G. (2007). Analytical integration of cross section properties for numerical analysis of reinforced concrete, steel and composite frames. *Engineering Structures*, 29(4), 618-625.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2006.06.002>

Spinella, N. (2013). N-M- χ interaction for arbitrary cross section under biaxial bending and axial load. *Pollack Periodica*, 8(3), 87-100.
<https://doi.org/10.1556/Pollack.8.2013.3.9>

Stefan, L. y Léger, P. (2010). Multicriteria Capacity Envelopes for Biaxial Bending of Concrete Hydraulic Structures. *Journal of Structural Engineering*, 136(9), 1035-1043. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0000205](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000205)

Steger, C. (1996). *On the Calculation of Arbitrary Moments of Polygons.*
<http://wwwradig.informatik.tu-muenchen.de/forschung/fgbv/>

Strang, G. (2006). *Linear Algebra and Its Applications* (Fourth Edition).

Susumpow, T. y Line, R. (2023). *Calculations of Section Capacity of an Irregular Shape Reinforced Concrete Column Using Excel and VBA.*

Whitney, C. S. (1937). Design Of Reinforced Concrete Members Under Flexure Or Combined Flexure And Direct Compression. 33, 483-498.
<https://doi.org/10.14359/8429>

Whitney, C. S. (1942). Plastic Theory of Reinforced Concrete Design. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 107(1), 251-282.
<https://doi.org/10.1061/TACEAT.0005554>

Wight, J. K. y MacGREGOR, J. G. (2011). *REINFORCED CONCRETE MECHANICS & DESIGN.*

Matriz de Consistencia

Problema de investigación	Objetivo	Hipótesis	Variable	Indicadores	Tipo de estudio
¿De qué manera puede implementarse un modelo numérico basado en los principios del teorema de Green, el bloque rectangular de Whitney y el centroide plástico, que permita analizar con precisión secciones de concreto armado de geometría arbitraria sometidas a carga axial y flexión	General: Desarrollar e implementar un modelo numérico computacional basado en los principios del teorema de Green, el bloque rectangular equivalente de Whitney y el centroide plástico, que permita analizar con precisión secciones de	General: La implementación de un modelo numérico basado en el teorema de Green, el bloque de Whitney y el centroide plástico permite analizar con alta precisión secciones de concreto armado arbitrarias, obteniendo resultados	Variable independiente: Modelo numérico computacional basado en el teorema de Green, bloque de Whitney y centroide plástico. Variable dependiente: Precisión y compatibilidad normativa del análisis de secciones.	Independiente: • Correcta formulación matemática del modelo. • Implementación estable en Python. • Representación gráfica 3D del dominio $P-M_x-M_y$. Dependiente: • Error relativo entre resultados del modelo y software. • Grado de compatibilidad con la Norma E.060.	Investigación teórica, no experimental y comparativa, de tipo aplicada y cuantitativa.

biaxial, garantizando la compatibilidad con la Norma Técnica E.060?	concreto armado de geometría arbitraria sometidas a carga axial y flexión biaxial conforme a la Norma E.060.	compatibles con la Norma E.060 y superiores en concordancia a los de programas comerciales.	• Continuidad y convexidad del diagrama P–Mx–My.
---	--	---	--

Interrogante secundaria	Objetivo específico	Hipótesis específica	Variables relacionadas
¿En qué medida los modelos constitutivos tradicionales (Whitney) difieren de los implementados en softwares comerciales (ETABS, SAP2000, CSI Column)?	Comparar los modelos constitutivos normativos con los modelos computacionales de software estructurales, identificando diferencias en la representación del concreto y acero.	Los modelos normativos E.060 presentan diferencias significativas con los utilizados por software comerciales, generando variaciones en la capacidad resistente.	Variable independiente.
¿Cómo puede aplicarse el teorema de Green para formular un método general de integración de esfuerzos	Formular un procedimiento analítico basado en el teorema de Green para la integración	La aplicación del teorema de Green permite integrar esfuerzos internos de forma exacta y eficiente, sin	Variable independiente.

sin recurrir a discretización tipo fibra?	perimetral de esfuerzos sobre secciones arbitrarias.	discretización, reduciendo el error computacional.	
¿Qué nivel de concordancia presentan los resultados del modelo respecto a los valores normativos y de software comercial?	Validar el modelo propuesto mediante comparación con resultados de software y valores normativos.	El modelo numérico propuesto genera resultados coherentes y precisos, con errores menores al 10 % respecto a los valores de referencia.	Variable dependiente.

Anexos

ANÁLISIS NÚMÉRICO DE SECCIONES DE CONCRETO ARMADO CON GEOMETRÍA ARBITRARIA BAJO CARGA AXIAL Y FLEXIÓN BIAxIAL

```
In [ ]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from SeccionAutocad import SeccionAutocad, GraficarSeccion
from CentroReduccion import CentroReduccion
from CentroReduccion import GraficarCentroReduccion
from DiagramaNominalSN import compresion_traccion, beta1_ACI,esfuerzo_acero,cerrar_poligono,area_centroide
from DiagramaNominalSN import Rz,rotar,clip_horizontal_y_ge,calcular_superficie_y_matrices,agregar_traccion_compresion
from DiagramaNominalSN import estribos
from DiagramaNormas import variacion_phiaci,ACI18_19
from DiagramaNormas import falla_balanceada_superficie,variacion_phie060,Norma_E060_3D
from DiagramaGraficos import Diagramareducido, add_superficie_wireframe,cortes_direccionales_matplotlib
from DiagramaGraficos import fig_superficie_3D_UNICO,corte_Pn_plano_MxMy_matplotlib,cargaaxialmaxima,estribos
import plotly.io as pio

In [ ]: ruta = r"D:\000. PROGRAMACION EN PYTHON\00. TESIS 2025\GuidPyColv.3\seccion001.dxf" # Aquí se ingresa la ruta del archivo dxf
Xc, Yc, Xs, Ys, Dn = SeccionAutocad(ruta)
Xc = np.array(Xc, dtype=float)
Yc = np.array(Yc, dtype=float)
Xs = np.array(Xs, dtype=float)
Ys = np.array(Ys, dtype=float)
Dn = np.array(Dn, dtype=float)
As = np.round((np.pi * (2.54 * Dn)**2) / 4, 4)
Ast=np.sum(As)
#GraficarSeccion(Xc,Yc,Xs,Ys,Dn) #Función para graficar la sección importada en formato dxf.

In [ ]: # Ingreso de las propiedades físicas del concreto y acero
fc = 280 # Esfuerzo de compresión del concreto Unidad: [kg/cm^2]
fy = 4200 # Esfuerzo a tracción del acero Unidad: [kg/cm^2]
Es = 200000 # Módulo de elasticidad del acero Unidad: [kg/cm^2]
Ec = 15000*np.sqrt(fc) # Módulo de elasticidad del concreto Unidad: [kg/cm^2]
ecn = 0.003 # Deformación unitaria del concreto
eps_c = ecn
ey = fy / Es # Deformación unitaria del acero G-60
confinamiento = 'estribos'

In [ ]: from DiagramaNormas import variacion_phiaci,ACI18_19
from DiagramaNormas import falla_balanceada_superficie,variacion_phie060,Norma_E060_3D

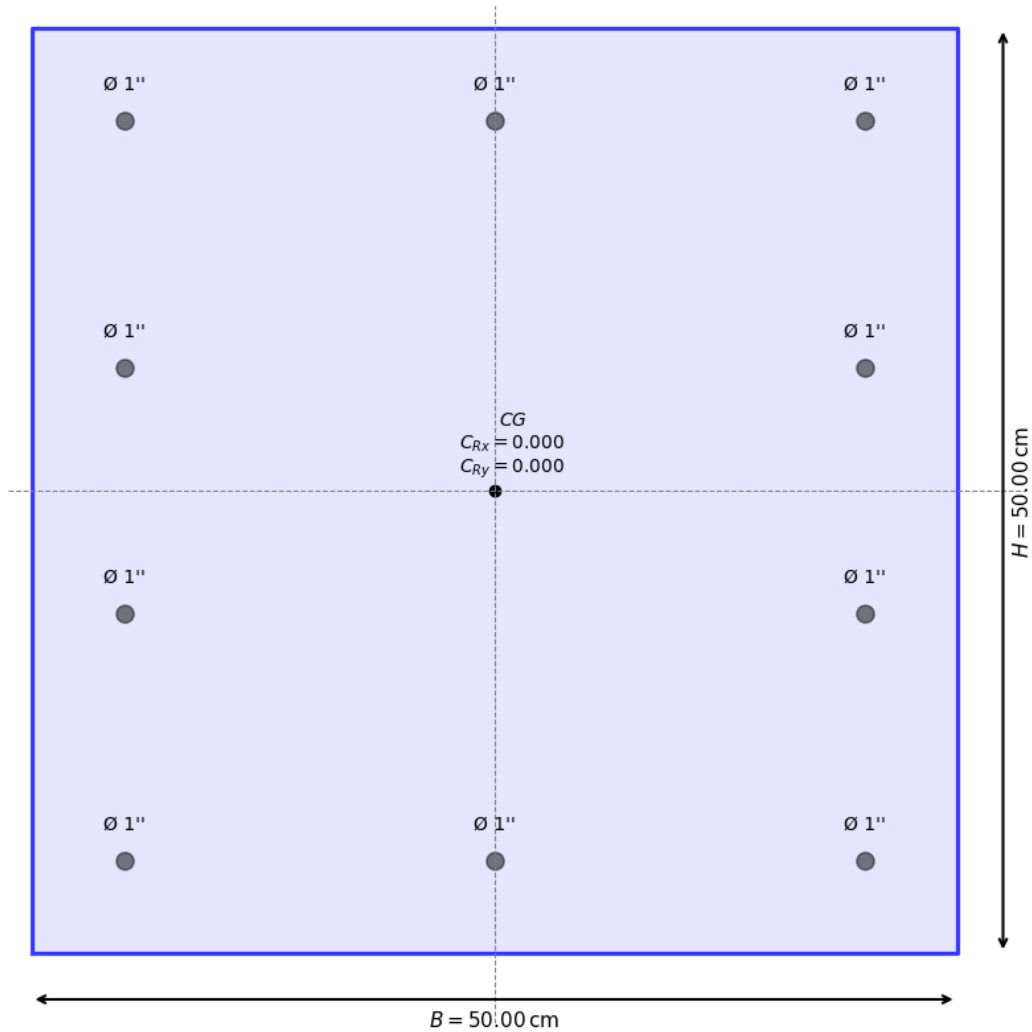
In [ ]: # Número de puntos para la construcción el diagrama de interacción
#-----
step_n=20 # Diagrama de numero de puntos "step_n"
step_a=15 # Diagrama de interacción a cada "step_a"
thetas_base=np.arange(0,360+step_a,step_a)

# Carga axial objetivo para el diagrama biaxial de la sección
#-----
Pno=200.00 # Carga axial objetivo Unidad: [Tonf]

In [ ]: X_usuario=0
Y_usuario=0

In [ ]: XcR, YcR, XsR, YsR, CR, Ag, CRC, CRt, etiqueta=CentroReduccion(Xc, Yc, Xs, Ys, As, Dn, fc, fy, X_usuario,Y_usuario,c_reduccion='c_
GraficarCentroReduccion(XcR, YcR, XsR, YsR, Dn,etiqueta)
CRx = CR[0] / 100
CRy = CR[1] / 100
```

Sección de Concreto Armado



```

In [ ]: # Número de puntos para la construcción el diagrama de interacción
#-----
step_n=15          # Diagrama de numero de puntos "step_n"
step_a=15          # Diagrama de interacción a cada "step_a"
thetas_base=np.arange(0,360+step_a,step_a)

# Carga axial objetivo para el diagrama biaxial de la sección
#-----
Pno=200.00         # Carga axial objetivo      Unidad: [Tonf]

In [ ]: Po, Pnc, Mxc, Myc, Pt, Pnt, Mxt, Myt = compresion_traccion(Ag, Ast, fy, fc, CR, CRC, CRT, confinamiento)

In [ ]: Pn_mat, Mx_mat, My_mat, eps_mat = calcular_superficie_y_matrices(XcR, YcR, XsR, YsR, As, CR, fc, fy, Es, ecn, thetas_base, step_n=

In [ ]: traccion    = [Pnt/1000, Mxt/100000, Myt/100000]  # valores de tracción
compresion    = [Pnc/1000, Mxc/100000, Myc/100000]  # valores de compresión

Pn_new, Mx_new, My_new = agregar_traccion_compresion(Pn_mat, Mx_mat, My_mat, traccion, compresion)

In [ ]: confinamiento = 'estribos'
phi_n=cargaaxialmaxima(confinamiento=confinamiento)

In [ ]: Pn_red, Mx_red, My_red = Diagramareducido(Pn_new, Mx_new, My_new, Pnc, confinamiento=confinamiento)

In [ ]: phi_c, phi_t=variacion_phiaci(confinamiento)
Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, phi_ext=ACI18_19(eps_mat, fy, Es, Pn_red, Mx_red, My_red, confinamiento)

In [ ]: Pn_bal, Mx_bal, My_bal=falla_balanceada_superficie(Pn_mat, Mx_mat, My_mat, eps_mat, fy, Es)

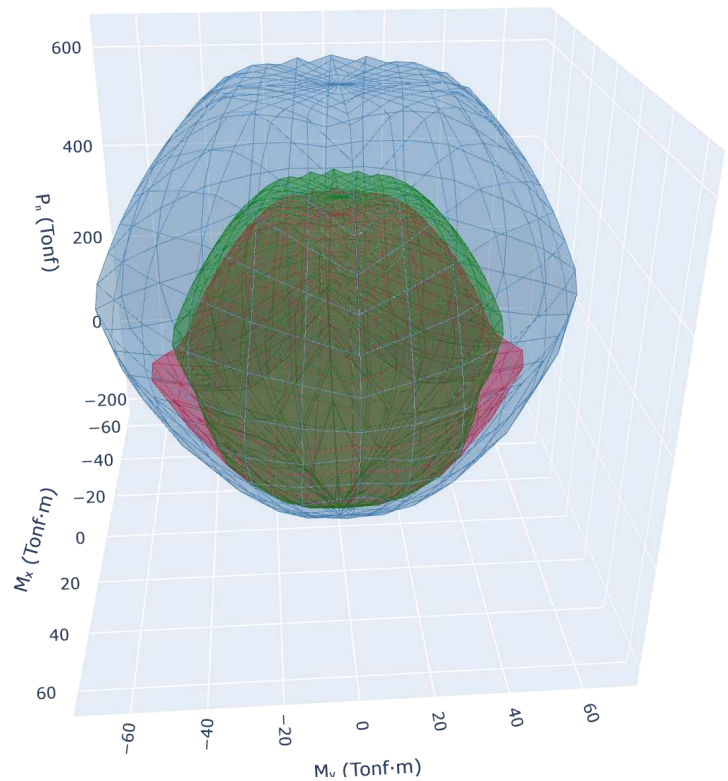
phi_ce, phi_te=variacion_phi060(confinamiento)
Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, Myu_mat_E060, phi_mat_E060=Norma_E060_3D(Pn_red, Mx_red, My_red, Pn_bal, fc, Ag, confinamiento)

In [ ]: import plotly.io as pio
pio.renderers.default = "notebook_connected" # o "notebook_connected"

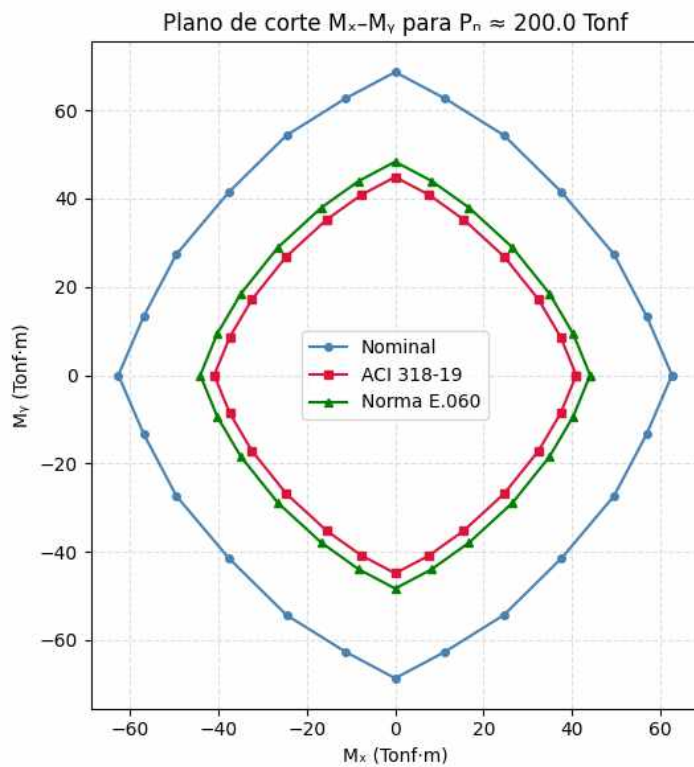
fig = fig_superficie_3D_UNICO( Pn_red, Mx_red, My_red, Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, Myu_mat_E060)
fig.show()

```

Superficies 3D: Nominal vs ACI 318-19 vs E.060

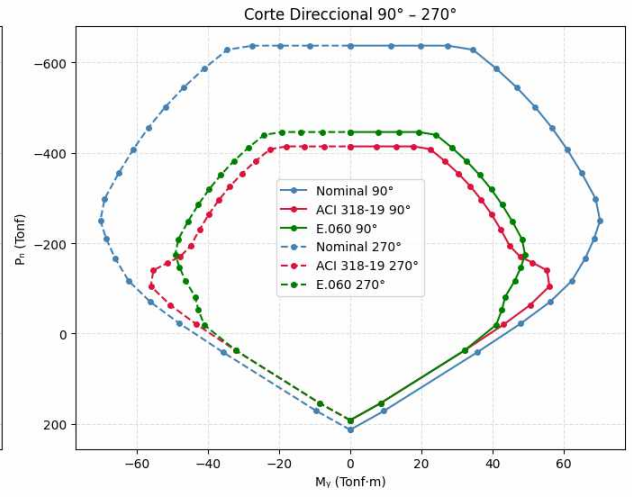
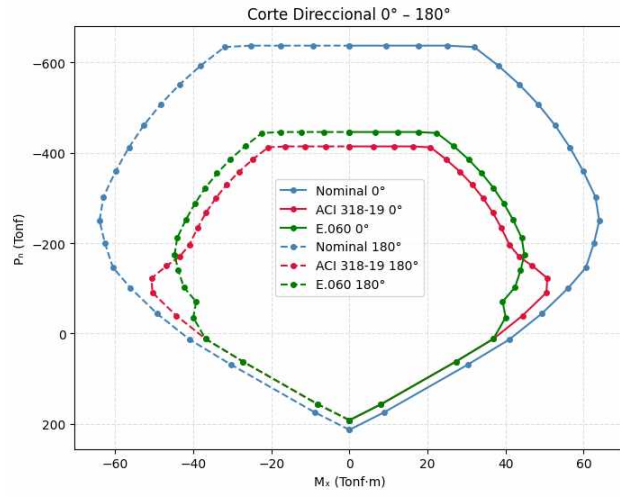


```
In [ ]: Pn_obj = 200 # Tonf, por ejemplo
fig_corte, ax_corte, datos_corte = corte_Pn_plano_MxMy_matplotlib(Pn_red, Mx_red, My_red, Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, Pu_mat_E060)
plt.show()
```



```
In [ ]: fig_dir, ax_dir = cortes_direccionales_matplotlib(-Pn_red, Mx_red, My_red, -Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, -Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, Myu_mat_E060)
plt.show()
```

Cortes Direccionales: 0°-180° y 90°-270°



ANÁLISIS NÚMÉRICO DE SECCIONES DE CONCRETO ARMADO CON GEOMETRÍA ARBITRARIA BAJO CARGA AXIAL Y FLEXIÓN BIAxIAL

```
In [ ]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from SeccionAutocad import SeccionAutocad, GraficarSeccion
from CentroReduccion import CentroReduccion
from CentroReduccion import GraficarCentroReduccion
from DiagramaNominalSN import compresion_traccion, beta1_ACI,esfuerzo_acero,cerrar_poligono,area_centroide
from DiagramaNominalSN import Rz,rotar,clip_horizontal_y_ge,calcular_superficie_y_matrices,agregar_traccion_compresion
from DiagramaNominalSN import estribos
from DiagramaNormas import variacion_phiaci,ACI18_19
from DiagramaNormas import falla_balanceada_superficie,variacion_phi060,Norma_E060_3D
from DiagramaGraficos import Diagramareducido, add_superficie_wireframe,cortes_direccionales_matplotlib
from DiagramaGraficos import fig_superficie_3D_UNICO,corte_Pn_plano_MxMy_matplotlib,cargaaxialmaxima,estribos
import plotly.io as pio

In [ ]: ruta = r"D:\000. PROGRAMACION EN PYTHON\00. TESIS 2025\GuidPyColv.3\seccion002.dxf" # Aquí se ingresa la ruta del archivo dxf
Xc, Yc, Xs, Ys, Dn = SeccionAutocad(ruta)
Xc = np.array(Xc, dtype=float)
Yc = np.array(Yc, dtype=float)
Xs = np.array(Xs, dtype=float)
Ys = np.array(Ys, dtype=float)
Dn = np.array(Dn, dtype=float)
As = np.round((np.pi * (2.54 * Dn)**2) / 4, 4)
Ast=np.sum(As)
#GraficarSeccion(Xc,Yc,Xs,Ys,Dn) #Función para graficar la sección importada en formato dxf.

In [ ]: # Ingreso de las propiedades físicas del concreto y acero
fc = 280 # Esfuerzo de compresión del concreto Unidad: [kg/cm^2]
fy = 4200 # Esfuerzo a tracción del acero Unidad: [kg/cm^2]
Es = 200000 # Módulo de elasticidad del acero Unidad: [kg/cm^2]
Ec = 15000*np.sqrt(fc) # Módulo de elasticidad del concreto Unidad: [kg/cm^2]
ecn = 0.003 # Deformación unitaria del concreto
eps_c = ecn
ey = fy / Es # Deformación unitaria del acero G-60
confinamiento = 'estribos'

In [ ]: from DiagramaNormas import variacion_phiaci,ACI18_19
from DiagramaNormas import falla_balanceada_superficie,variacion_phi060,Norma_E060_3D

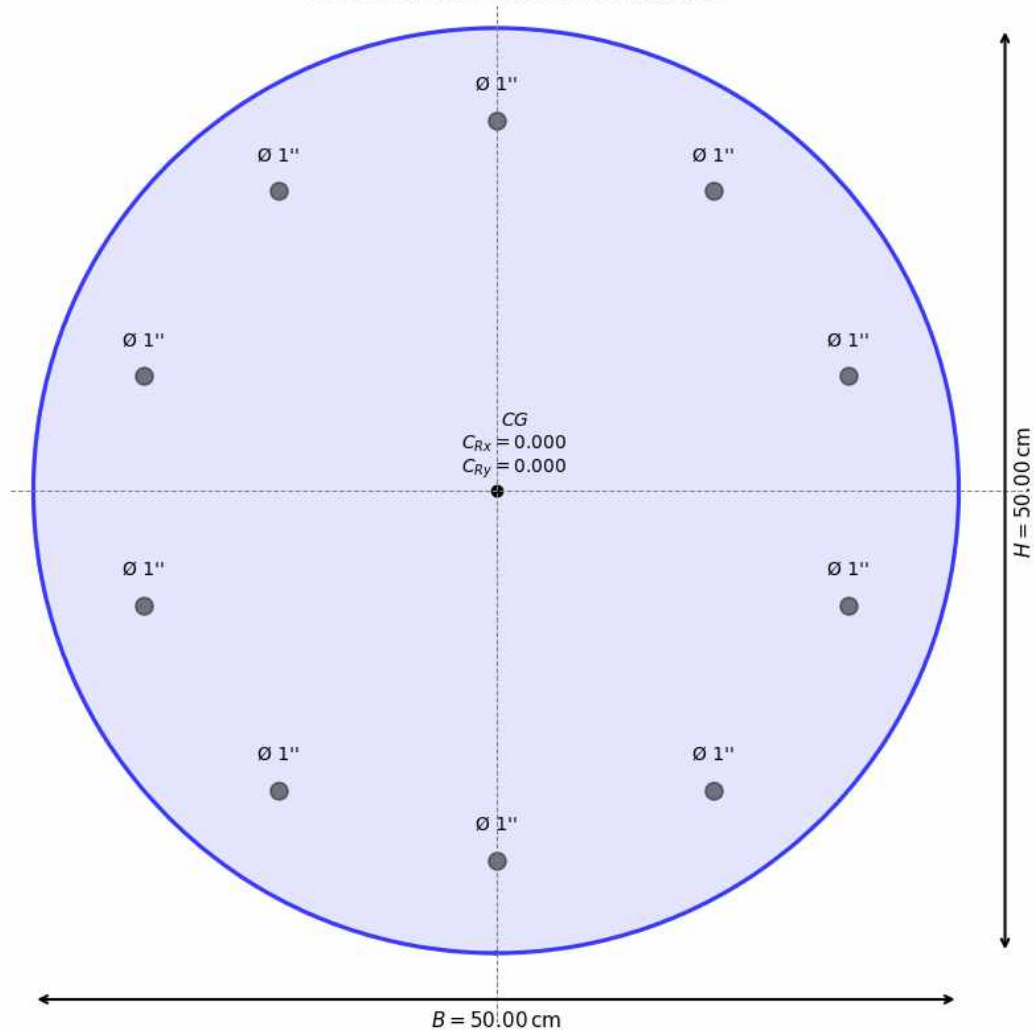
In [ ]: # Número de puntos para la construcción el diagrama de interacción
#-----
step_n=20 # Diagrama de numero de puntos "step_n"
step_a=15 # Diagrama de interacción a cada "step_a"
thetas_base=np.arange(0,360+step_a,step_a)

# Carga axial objetivo para el diagrama biaxial de la sección
#-----
Pno=200.00 # Carga axial objetivo Unidad: [Tonf]

In [ ]: X_usuario=0
Y_usuario=0

In [ ]: XcR, YcR, XsR, YsR, CR, Ag, CRC, CRt, etiqueta=CentroReduccion(Xc, Yc, Xs, Ys, As, Dn, fc, fy, X_usuario,Y_usuario,c_reduccion='c_
GraficarCentroReduccion(XcR, YcR, XsR, YsR, Dn,etiqueta)
CRx = CR[0] / 100
CRy = CR[1] / 100
```

Sección de Concreto Armado



```

In [ ]: # Número de puntos para la construcción el diagrama de interacción
#-----
step_n=15      # Diagrama de numero de puntos "step_n"
step_a=15      # Diagrama de interacción a cada "step_a"
thetas_base=np.arange(0,360+step_a,step_a)

# Carga axial objetivo para el diagrama biaxial de la sección
#-----
Pno=200.00     # Carga axial objetivo      Unidad: [Tonf]

In [ ]: Po, Pnc, Mxc, Myc, Pt, Pnt, Mxt, Myt = compresion_traccion(Ag, Ast, fy, fc, CR, CRC, CRT, confinamiento)

In [ ]: Pn_mat, Mx_mat, My_mat, eps_mat = calcular_superficie_y_matrices(XcR, YcR, XsR, YsR, As, CR, fc, fy, Es, ecn, thetas_base, step_n=

In [ ]: traccion    = [Pnt/1000, Mxt/100000, Myt/100000]    # valores de tracción
compresion    = [Pnc/1000, Mxc/100000, Myc/100000]    # valores de compresión

Pn_new, Mx_new, My_new = agregar_traccion_compresion(Pn_mat, Mx_mat, My_mat, traccion, compresion)

In [ ]: confinamiento = 'estribos'
phi_n=cargaaxialmaxima(confinamiento=confinamiento)

In [ ]: Pn_red, Mx_red, My_red = Diagramareducido(Pn_new, Mx_new, My_new, Pnc, confinamiento=confinamiento)

In [ ]: phi_c, phi_t=variacion_phiaci(confinamiento)
Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, phi_ext=ACI18_19(eps_mat, fy, Es, Pn_red, Mx_red, My_red, confinamiento)

In [ ]: Pn_bal, Mx_bal, My_bal=falla_balanceada_superficie(Pn_mat, Mx_mat, My_mat, eps_mat, fy, Es)

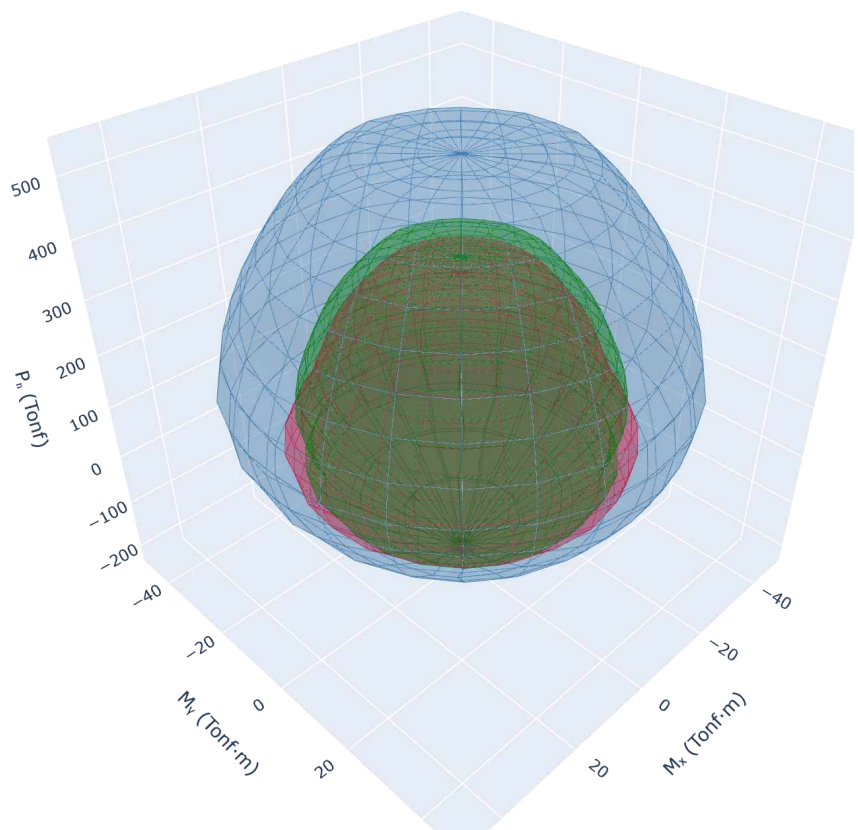
phi_ce, phi_te=variacion_phi060(confinamiento)
Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, Myu_mat_E060, phi_mat_E060=Norma_E060_3D(Pn_red, Mx_red, My_red, Pn_bal, fc, Ag, confinamiento)

In [ ]: import plotly.io as pio
pio.renderers.default = "notebook_connected" # o "notebook_connected"

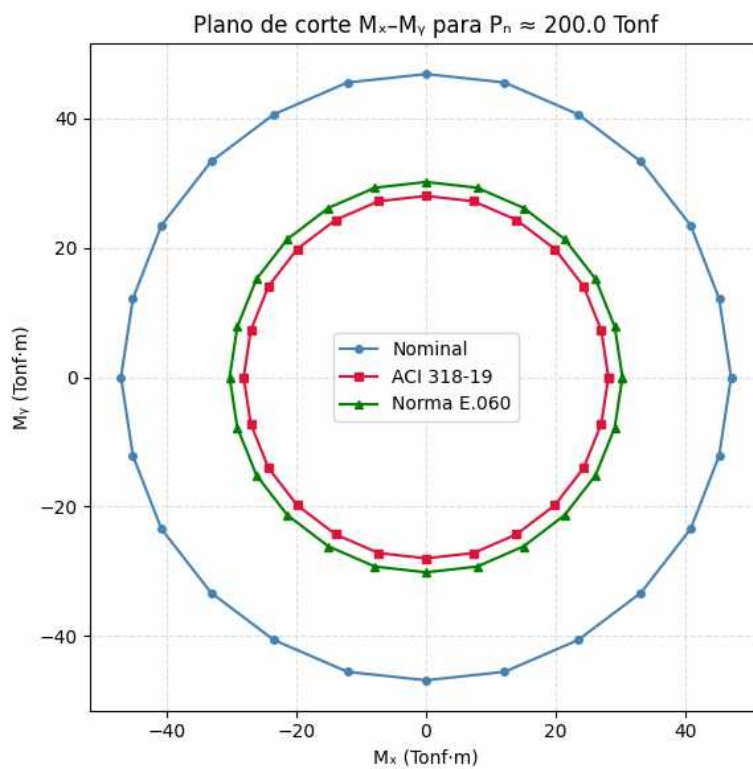
fig = fig_superficie_3D_UNICO( Pn_red, Mx_red, My_red, Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, Myu_mat_E060)
fig.show()

```

Superficies 3D: Nominal vs ACI 318-19 vs E.060

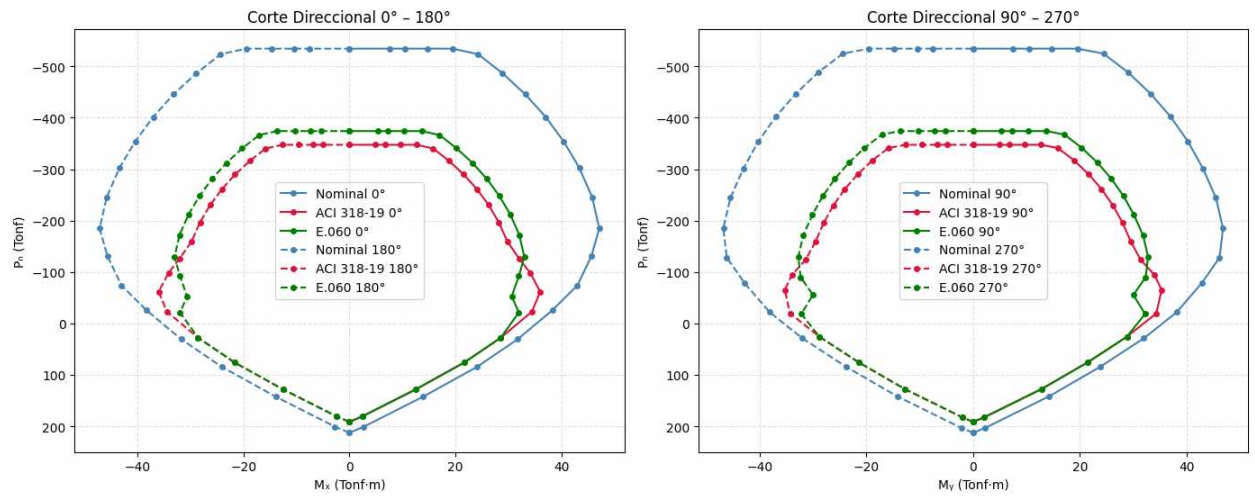


```
In [ ]: Pn_obj = 200 # Tonf, por ejemplo
fig_corte, ax_corte, datos_corte = corte_Pn_plano_MxMy_matplotlib(Pn_red, Mx_red, My_red, Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, Pu_mat_E060,
plt.show())
```



```
In [ ]: fig_dir, ax_dir = cortes_direccionales_matplotlib(-Pn_red, Mx_red, My_red, -Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, -Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, My
plt.show())
```

Cortes Direccionales: 0°-180° y 90°-270°



ANÁLISIS NÚMÉRICO DE SECCIONES DE CONCRETO ARMADO CON GEOMETRÍA ARBITRARIA BAJO CARGA AXIAL Y FLEXIÓN BIAxIAL

```
In [ ]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from SeccionAutocad import SeccionAutocad, GraficarSeccion
from CentroReduccion import CentroReduccion
from CentroReduccion import GraficarCentroReduccion
from DiagramaNominalSN import compresion_traccion, beta1_ACI,esfuerzo_acero,cerrar_poligono,area_centroide
from DiagramaNominalSN import Rz,rotar,clip_horizontal_y_ge,calcular_superficie_y_matrices,agregar_traccion_compresion
from DiagramaNominalSN import estribos
from DiagramaNormas import variacion_phiaci,ACI18_19
from DiagramaNormas import falla_balanceada_superficie,variacion_phie060,Norma_E060_3D
from DiagramaGraficos import Diagramareducido, add_superficie_wireframe,cortes_direccionales_matplotlib
from DiagramaGraficos import fig_superficie_3D_UNICO,corte_Pn_plano_MxMy_matplotlib,cargaaxialmaxima,estribos
import plotly.io as pio

In [ ]: ruta = r"D:\000. PROGRAMACION EN PYTHON\00. TESIS 2025\GuidPyColv.3\seccion003.dxf" # Aquí se ingresa la ruta del archivo dxf
Xc, Yc, Xs, Ys, Dn = SeccionAutocad(ruta)
Xc = np.array(Xc, dtype=float)
Yc = np.array(Yc, dtype=float)
Xs = np.array(Xs, dtype=float)
Ys = np.array(Ys, dtype=float)
Dn = np.array(Dn, dtype=float)
As = np.round((np.pi * (2.54 * Dn)**2) / 4, 4)
Ast=np.sum(As)
#GraficarSeccion(Xc,Yc,Xs,Ys,Dn) #Función para graficar la sección importada en formato dxf.

In [ ]: # Ingreso de las propiedades físicas del concreto y acero
fc = 280 # Esfuerzo de compresión del concreto Unidad: [kg/cm^2]
fy = 4200 # Esfuerzo a tracción del acero Unidad: [kg/cm^2]
Es = 200000 # Módulo de elasticidad del acero Unidad: [kg/cm^2]
Ec = 15000*np.sqrt(fc) # Módulo de elasticidad del concreto Unidad: [kg/cm^2]
ecn = 0.003 # Deformación unitaria del concreto
eps_c = ecn
ey = fy / Es # Deformación unitaria del acero G-60
confinamiento = 'estribos'

In [ ]: from DiagramaNormas import variacion_phiaci,ACI18_19
from DiagramaNormas import falla_balanceada_superficie,variacion_phie060,Norma_E060_3D

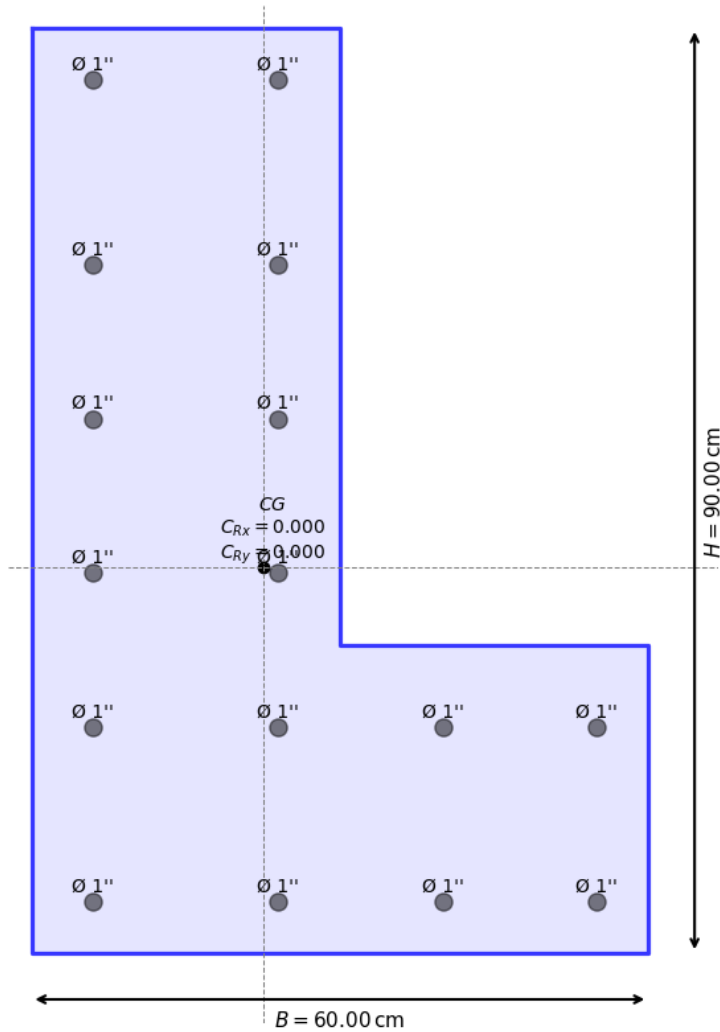
In [ ]: # Número de puntos para la construcción el diagrama de interacción
#-----
step_n=20 # Diagrama de numero de puntos "step_n"
step_a=15 # Diagrama de interacción a cada "step_a"
thetas_base=np.arange(0,360+step_a,step_a)

# Carga axial objetivo para el diagrama biaxial de la sección
#-----
Pno=200.00 # Carga axial objetivo Unidad: [Tonf]

In [ ]: X_usuario=0
Y_usuario=0

In [ ]: XcR, YcR, XsR, YsR, CR, Ag, CRC, CRt, etiqueta=CentroReduccion(Xc, Yc, Xs, Ys, As, Dn, fc, fy, X_usuario,Y_usuario,c_reduccion='c_
GraficarCentroReduccion(XcR, YcR, XsR, YsR, Dn,etiqueta)
CRx = CR[0] / 100
CRy = CR[1] / 100
```

Sección de Concreto Armado



```

In [ ]: # Número de puntos para la construcción el diagrama de interacción
#-----
step_n=15          # Diagrama de numero de puntos "step_n"
step_a=15          # Diagrama de interacción a cada "step_a"
thetas_base=np.arange(0,360+step_a,step_a)

# Carga axial objetivo para el diagrama biaxial de la sección
#-----
Pno=200.00         # Carga axial objetivo      Unidad: [Tonf]

In [ ]: Po, Pnc, Mxc, Myc, Pt, Pnt, Mxt, Myt = compresion_traccion(Ag, Ast, fy, fc, CR, CRC, CRT, confinamiento)

In [ ]: Pn_mat, Mx_mat, My_mat, eps_mat = calcular_superficie_y_matrices(XcR, YcR, XsR, YsR, As, CR, fc, fy, Es, ecn, thetas_base, step_n=

In [ ]: traccion = [Pnt/1000, Mxt/100000, Myt/100000] # valores de tracción
compresion = [Pnc/1000, Mxc/100000, Myc/100000] # valores de compresión

Pn_new, Mx_new, My_new = agregar_traccion_compresion(Pn_mat, Mx_mat, My_mat, traccion, compresion)

In [ ]: confinamiento = 'estribos'
phi_n=cargaaxialmaxima(confinamiento=confinamiento)

In [ ]: Pn_red, Mx_red, My_red = Diagramareducido(Pn_new, Mx_new, My_new, Pnc, confinamiento=confinamiento)

In [ ]: phi_c, phi_t=variacion_phiaci(confinamiento)
Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, phi_ext=ACI18_19(eps_mat, fy, Es, Pn_red, Mx_red, My_red, confinamiento)

In [ ]: Pn_bal, Mx_bal, My_bal=falla_balanceada_superficie(Pn_mat, Mx_mat, My_mat, eps_mat, fy, Es)

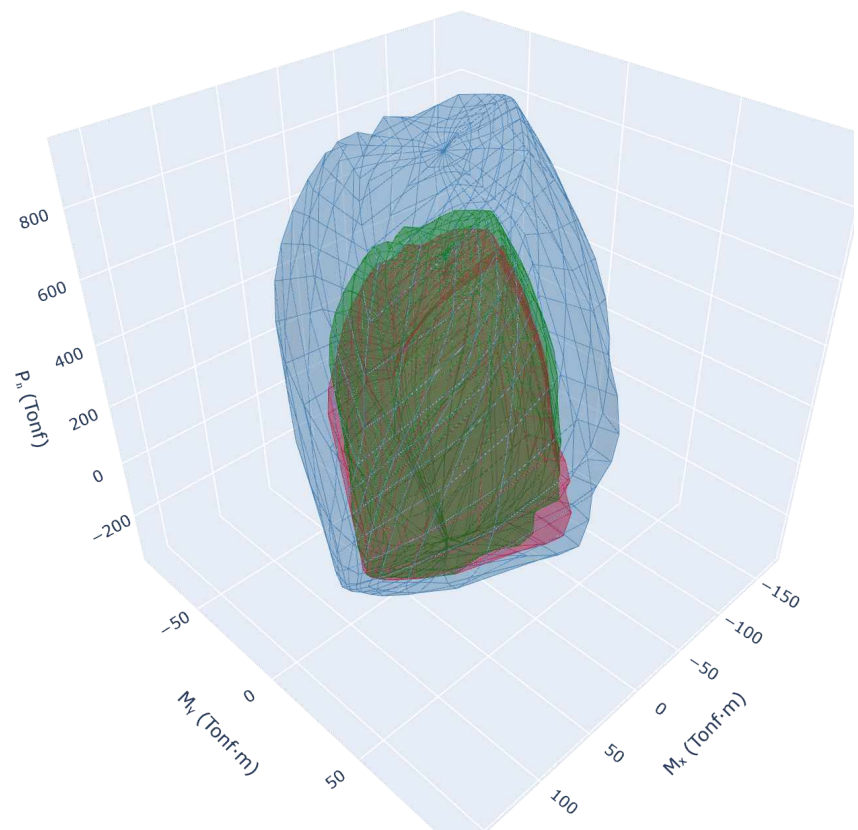
phi_ce, phi_te=variacion_phi060(confinamiento)
Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, Myu_mat_E060, phi_mat_E060=Norma_E060_3D(Pn_red, Mx_red, My_red, Pn_bal, fc, Ag, confinamiento)

In [ ]: import plotly.io as pio
pio.renderers.default = "notebook_connected" # o "notebook_connected"

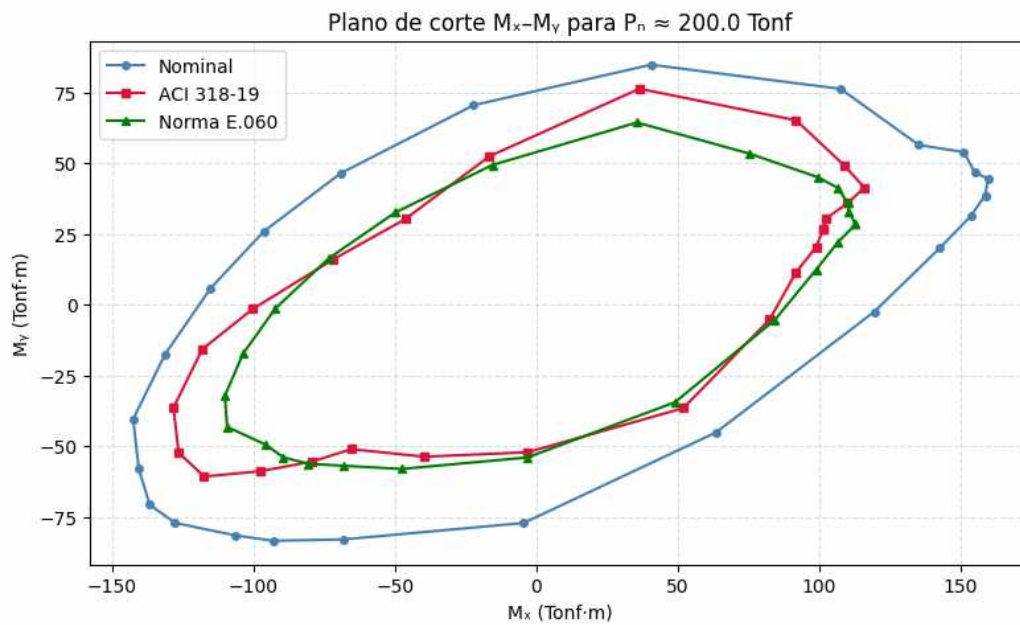
fig = fig_superficie_3D_UNICO( Pn_red, Mx_red, My_red, Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, Myu_mat_E060)
fig.show()

```

Superficies 3D: Nominal vs ACI 318-19 vs E.060

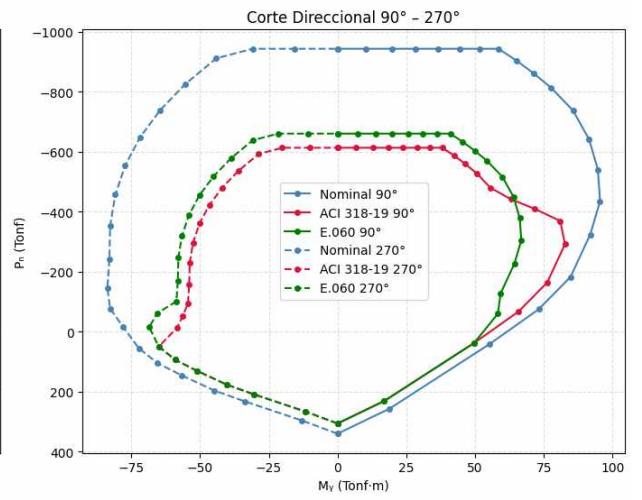
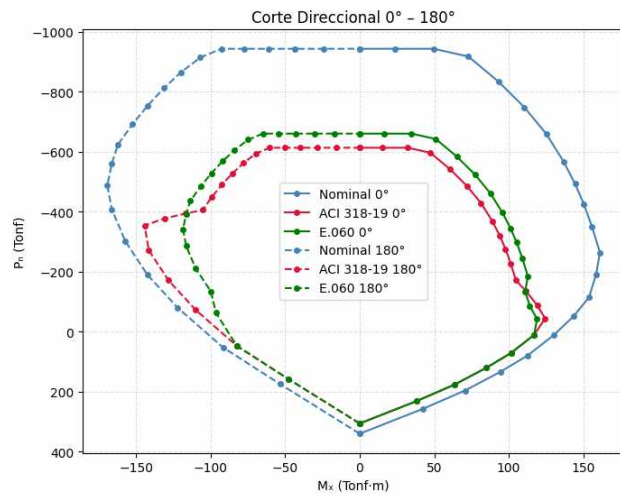


```
In [ ]: Pn_obj = 200 # Tonf, por ejemplo
fig_corte, ax_corte, datos_corte = corte_Pn_plano_MxMy_matplotlib(Pn_red, Mx_red, My_red, Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, Pu_mat_E060,
plt.show())
```



```
In [ ]: fig_dir, ax_dir = cortes_direccionales_matplotlib(-Pn_red, Mx_red, My_red, -Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, -Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, My
plt.show())
```

Cortes Direccionales: 0°-180° y 90°-270°



ANÁLISIS NÚMÉRICO DE SECCIONES DE CONCRETO ARMADO CON GEOMETRÍA ARBITRARIA BAJO CARGA AXIAL Y FLEXIÓN BIAIXIAL

```
In [ ]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from SeccionAutocad import SeccionAutocad, GraficarSeccion
from CentroReduccion import CentroReduccion
from CentroReduccion import GraficarCentroReduccion
from DiagramaNominalSN import compresion_traccion, beta1_ACI,esfuerzo_acero,cerrar_poligono,area_centroide
from DiagramaNominalSN import Rz,rotar,clip_horizontal_y_ge,calcular_superficie_y_matrices,agregar_traccion_compresion
from DiagramaNominalSN import estribos
from DiagramaNormas import variacion_phiaci,ACI18_19
from DiagramaNormas import falla_balanceada_superficie,variacion_phie060,Norma_E060_3D
from DiagramaGraficos import Diagramareducido, add_superficie_wireframe,cortes_direccionales_matplotlib
from DiagramaGraficos import fig_superficie_3D_UNICO,corte_Pn_plano_MxMy_matplotlib,cargaaxialmaxima,estribos
import plotly.io as pio

In [ ]: ruta = r"D:\000. PROGRAMACION EN PYTHON\00. TESIS 2025\GuidPyColv.3\seccion004.dxf" # Aquí se ingresa la ruta del archivo dxf
Xc, Yc, Xs, Ys, Dn = SeccionAutocad(ruta)
Xc = np.array(Xc, dtype=float)
Yc = np.array(Yc, dtype=float)
Xs = np.array(Xs, dtype=float)
Ys = np.array(Ys, dtype=float)
Dn = np.array(Dn, dtype=float)
As = np.round((np.pi * (2.54 * Dn)**2) / 4, 4)
Ast=np.sum(As)
#GraficarSeccion(Xc,Yc,Xs,Ys,Dn) #Función para graficar la sección importada en formato dxf.

In [ ]: # Ingreso de las propiedades físicas del concreto y acero
fc = 280 # Esfuerzo de compresión del concreto Unidad: [kg/cm^2]
fy = 4200 # Esfuerzo a tracción del acero Unidad: [kg/cm^2]
Es = 200000 # Módulo de elasticidad del acero Unidad: [kg/cm^2]
Ec = 15000*np.sqrt(fc) # Módulo de elasticidad del concreto Unidad: [kg/cm^2]
ecn = 0.003 # Deformación unitaria del concreto
eps_c = ecn
ey = fy / Es # Deformación unitaria del acero G-60
confinamiento = 'estribos'

In [ ]: from DiagramaNormas import variacion_phiaci,ACI18_19
from DiagramaNormas import falla_balanceada_superficie,variacion_phie060,Norma_E060_3D

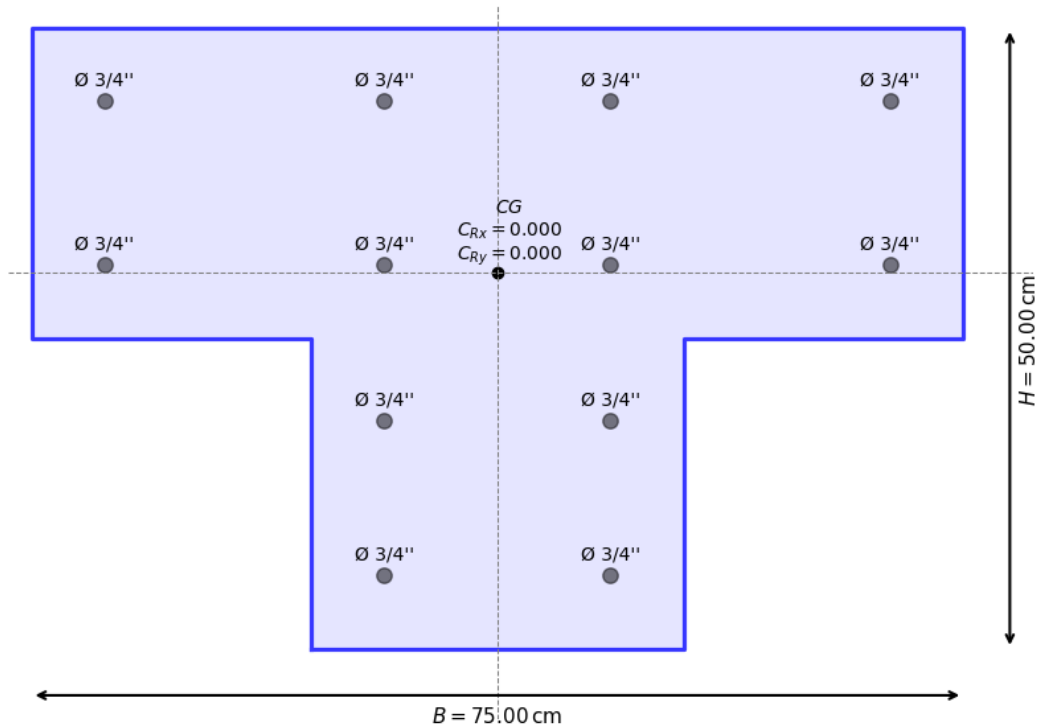
In [ ]: # Número de puntos para la construcción el diagrama de interacción
#-----
step_n=20 # Diagrama de numero de puntos "step_n"
step_a=15 # Diagrama de interacción a cada "step_a"
thetas_base=np.arange(0,360+step_a,step_a)

# Carga axial objetivo para el diagrama biaxial de la sección
#-----
Pno=200.00 # Carga axial objetivo Unidad: [Tonf]

In [ ]: X_usuario=0
Y_usuario=0

In [ ]: XcR, YcR, XsR, YsR, CR, Ag, CRC, CRT, etiqueta=CentroReduccion(Xc, Yc, Xs, Ys, As, Dn, fc, fy, X_usuario,Y_usuario,c_reduccion='c_
GraficarCentroReduccion(XcR, YcR, XsR, YsR, Dn,etiqueta)
CRx = CR[0] / 100
CRy = CR[1] / 100
```

Sección de Concreto Armado



```
In [ ]: # Número de puntos para la construcción el diagrama de interacción
#-----
step_n=15          # Diagrama de numero de puntos "step_n"
step_a=15          # Diagrama de interacción a cada "step_a"
thetas_base=np.arange(0,360+step_a,step_a)

# Carga axial objetivo para el diagrama biaxial de la sección
#-----
Pno=200.00         # Carga axial objetivo      Unidad: [Tonf]

In [ ]: Po, Pnc, Mxc, Myc, Pt, Pnt, Mxt, Myt = compresion_traccion(Ag, Ast, fy, fc, CR, CRC, CRT, confinamiento)

In [ ]: Pn_mat, Mx_mat, My_mat, eps_mat = calcular_superficie_y_matrices(XcR, YcR, XsR, YsR, As, CR, fc, fy, Es, ecn, thetas_base, step_n=

In [ ]: traccion   = [Pnt/1000, Mxt/100000, Myt/100000] # valores de tracción
compresion       = [Pnc/1000, Mxc/100000, Myc/100000] # valores de compresión

Pn_new, Mx_new, My_new = agregar_traccion_compresion(Pn_mat, Mx_mat, My_mat, traccion, compresion)

In [ ]: confinamiento = 'estribos'
phi_n=cargaaxialmaxima(confinamiento=confinamiento)

In [ ]: Pn_red, Mx_red, My_red = Diagramareducido(Pn_new, Mx_new, My_new, Pnc, confinamiento=confinamiento)

In [ ]: phi_c, phi_t=variacion_phiaci(confinamiento)
Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, phi_ext=ACI18_19(eps_mat, fy, Es, Pn_red, Mx_red, My_red, confinamiento)

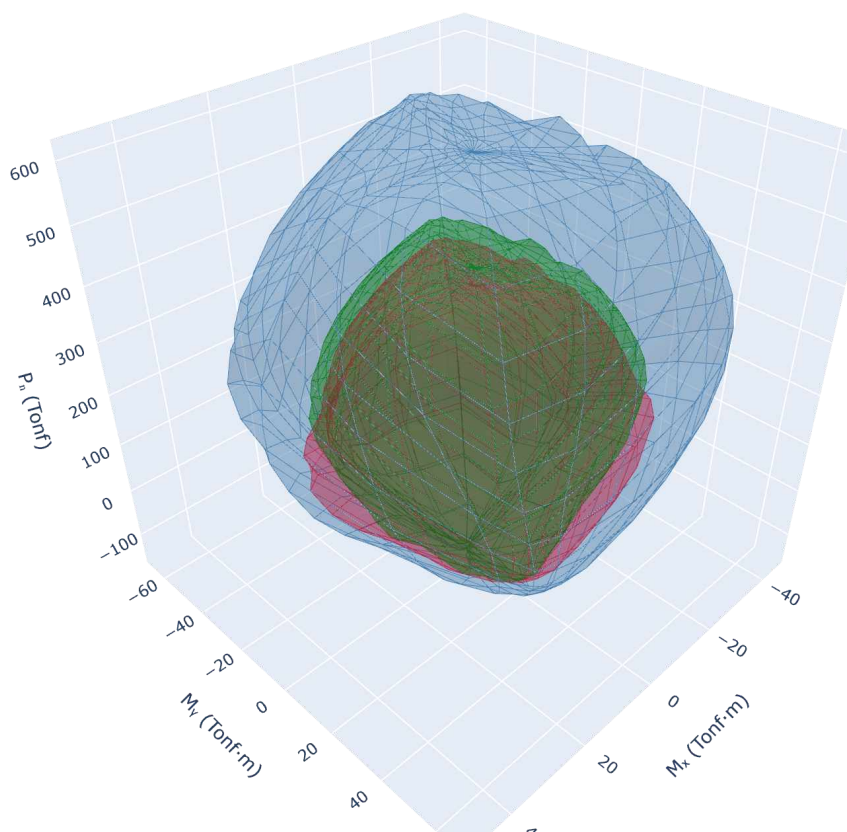
In [ ]: Pn_bal, Mx_bal, My_bal=falla_balanceada_superficie(Pn_mat, Mx_mat, My_mat, eps_mat, fy, Es)

phi_ce, phi_te=variacion_phi060(confinamiento)
Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, Myu_mat_E060, phi_mat_E060=Norma_E060_3D(Pn_red, Mx_red, My_red, Pn_bal, fc, Ag, confinamiento)

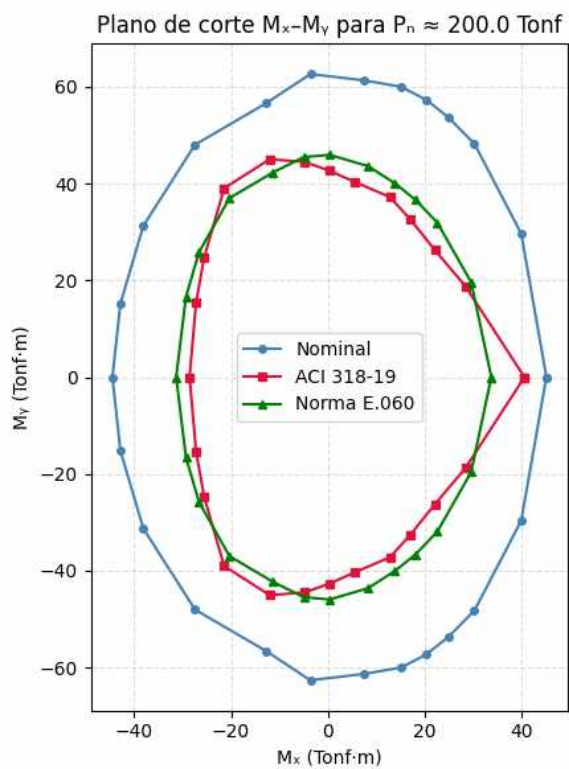
In [ ]: import plotly.io as pio
pio.renderers.default = "notebook_connected" # o "notebook_connected"

fig = fig_superficie_3D_UNICO( Pn_red, Mx_red, My_red, Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, Myu_mat_E060)
fig.show()
```

Superficies 3D: Nominal vs ACI 318-19 vs E.060

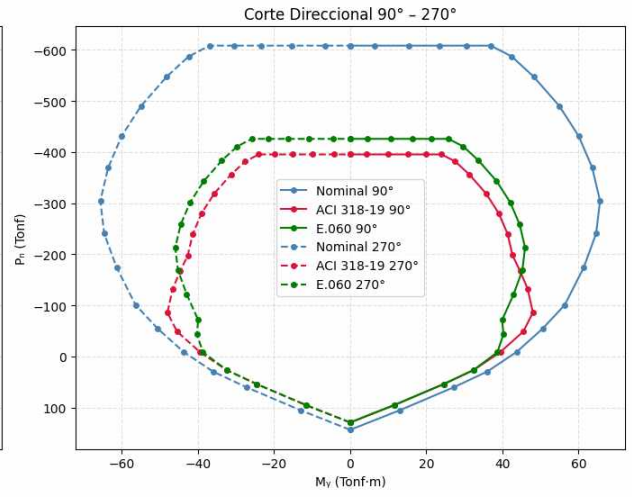
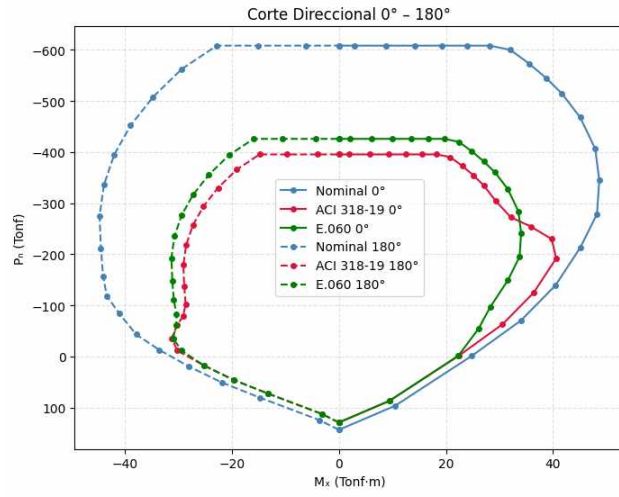


```
In [ ]: Pn_obj = 200 # Tonf, por ejemplo
fig_corte, ax_corte, datos_corte = corte_Pn_plano_MxMy_matplotlib(Pn_red, Mx_red, My_red, Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, Pu_mat_E060,
plt.show())
```



```
In [ ]: fig_dir, ax_dir = cortes_direccionales_matplotlib(-Pn_red, Mx_red, My_red, -Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, -Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, My
plt.show())
```

Cortes Direccionales: 0°-180° y 90°-270°



ANÁLISIS NÚMÉRICO DE SECCIONES DE CONCRETO ARMADO CON GEOMETRÍA ARBITRARIA BAJO CARGA AXIAL Y FLEXIÓN BIAxIAL

```
In [ ]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from SeccionAutocad import SeccionAutocad, GraficarSeccion
from CentroReduccion import CentroReduccion
from CentroReduccion import GraficarCentroReduccion
from DiagramaNominalSN import compresion_traccion, beta1_ACI,esfuerzo_acero,cerrar_poligono,area_centroide
from DiagramaNominalSN import Rz,rotar,clip_horizontal_y_ge,calcular_superficie_y_matrices,agregar_traccion_compresion
from DiagramaNominalSN import estribos
from DiagramaNormas import variacion_phiaci,ACI18_19
from DiagramaNormas import falla_balanceada_superficie,variacion_phie060,Norma_E060_3D
from DiagramaGraficos import Diagramareducido, add_superficie_wireframe,cortes_direccionales_matplotlib
from DiagramaGraficos import fig_superficie_3D_UNICO,corte_Pn_plano_MxMy_matplotlib,cargaaxialmaxima,estribos
import plotly.io as pio

In [ ]: ruta = r"D:\000. PROGRAMACION EN PYTHON\00. TESIS 2025\GuidPyColv.3\seccion005.dxf" # Aquí se ingresa la ruta del archivo dxf
Xc, Yc, Xs, Ys, Dn = SeccionAutocad(ruta)
Xc = np.array(Xc, dtype=float)
Yc = np.array(Yc, dtype=float)
Xs = np.array(Xs, dtype=float)
Ys = np.array(Ys, dtype=float)
Dn = np.array(Dn, dtype=float)
As = np.round((np.pi * (2.54 * Dn)**2) / 4, 4)
Ast=np.sum(As)
#GraficarSeccion(Xc,Yc,Xs,Ys,Dn) #Función para graficar la sección importada en formato dxf.

In [ ]: # Ingreso de las propiedades físicas del concreto y acero
fc = 280 # Esfuerzo de compresión del concreto Unidad: [kg/cm^2]
fy = 4200 # Esfuerzo a tracción del acero Unidad: [kg/cm^2]
Es = 200000 # Módulo de elasticidad del acero Unidad: [kg/cm^2]
Ec = 15000*np.sqrt(fc) # Módulo de elasticidad del concreto Unidad: [kg/cm^2]
ecn = 0.003 # Deformación unitaria del concreto
eps_c = ecn
ey = fy / Es # Deformación unitaria del acero G-60
confinamiento = 'estribos'

In [ ]: from DiagramaNormas import variacion_phiaci,ACI18_19
from DiagramaNormas import falla_balanceada_superficie,variacion_phie060,Norma_E060_3D

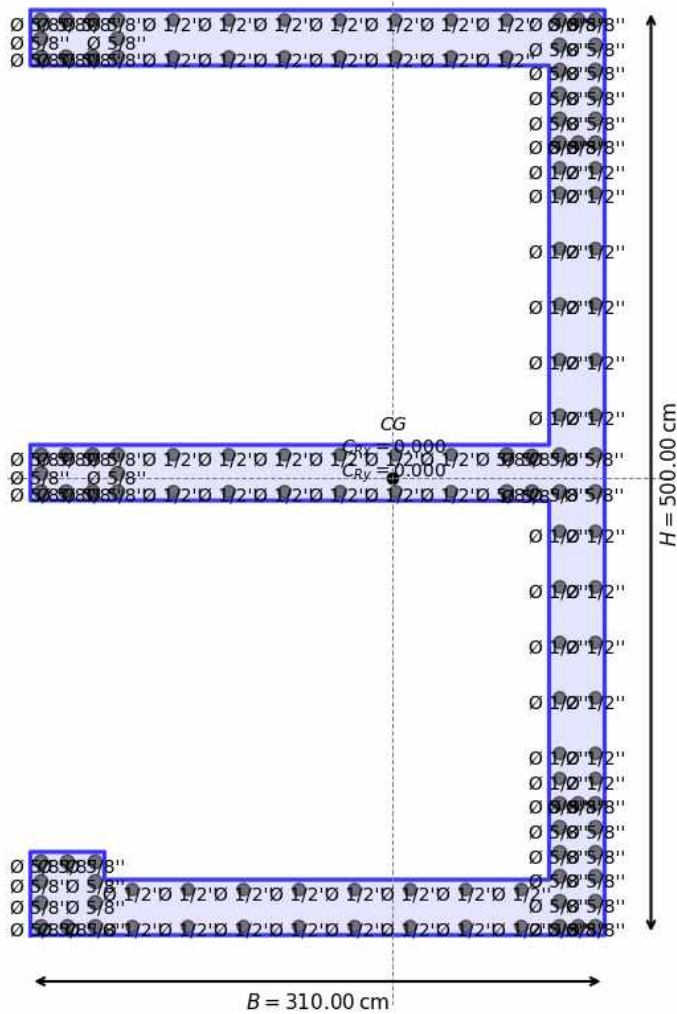
In [ ]: # Número de puntos para la construcción el diagrama de interacción
#-----
step_n=20 # Diagrama de numero de puntos "step_n"
step_a=15 # Diagrama de interacción a cada "step_a"
thetas_base=np.arange(0,360+step_a,step_a)

# Carga axial objetivo para el diagrama biaxial de la sección
#-----
Pno=200.00 # Carga axial objetivo Unidad: [Tonf]

In [ ]: X_usuario=0
Y_usuario=0

In [ ]: XcR, YcR, XsR, YsR, CR, Ag, CRC, CRt, etiqueta=CentroReduccion(Xc, Yc, Xs, Ys, As, Dn, fc, fy, X_usuario,Y_usuario,c_reduccion='c_
GraficarCentroReduccion(XcR, YcR, XsR, YsR, Dn,etiqueta)
CRx = CR[0] / 100
CRy = CR[1] / 100
```

Sección de Concreto Armado



```
In [ ]: # Número de puntos para la construcción el diagrama de interacción
#-----
step_n=15          # Diagrama de numero de puntos "step_n"
step_a=15          # Diagrama de interacción a cada "step_a"
thetas_base=np.arange(0,360+step_a,step_a)

# Carga axial objetivo para el diagrama biaxial de la sección
#-----
Pno=200.00         # Carga axial objetivo      Unidad: [Tonf]

In [ ]: Po, Pnc, Mxc, Myc, Pt, Pnt, Mxt, Myt = compresion_traccion(Ag, Ast, fy, fc, CR, CRC, CRT, confinamiento)

In [ ]: Pn_mat, Mx_mat, My_mat, eps_mat = calcular_superficie_y_matrices(XcR, YcR, XsR, YsR, As, CR, fc, fy, Es, ecn, thetas_base, step_n=

In [ ]: traccion    = [Pnt/1000, Mxt/100000, Myt/100000]  # valores de tracción
compresion    = [Pnc/1000, Mxc/100000, Myc/100000]  # valores de compresión

Pn_new, Mx_new, My_new = agregar_traccion_compresion(Pn_mat, Mx_mat, My_mat, traccion, compresion)

In [ ]: confinamiento = 'estribos'
phi_n=cargaaxialmaxima(confinamiento=confinamiento)

In [ ]: Pn_red, Mx_red, My_red = Diagramareducido(Pn_new, Mx_new, My_new, Pnc, confinamiento=confinamiento)

In [ ]: phi_c, phi_t=variacion_phiaci(confinamiento)
Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, phi_ext=ACI18_19(eps_mat, fy, Es, Pn_red, Mx_red, My_red, confinamiento)

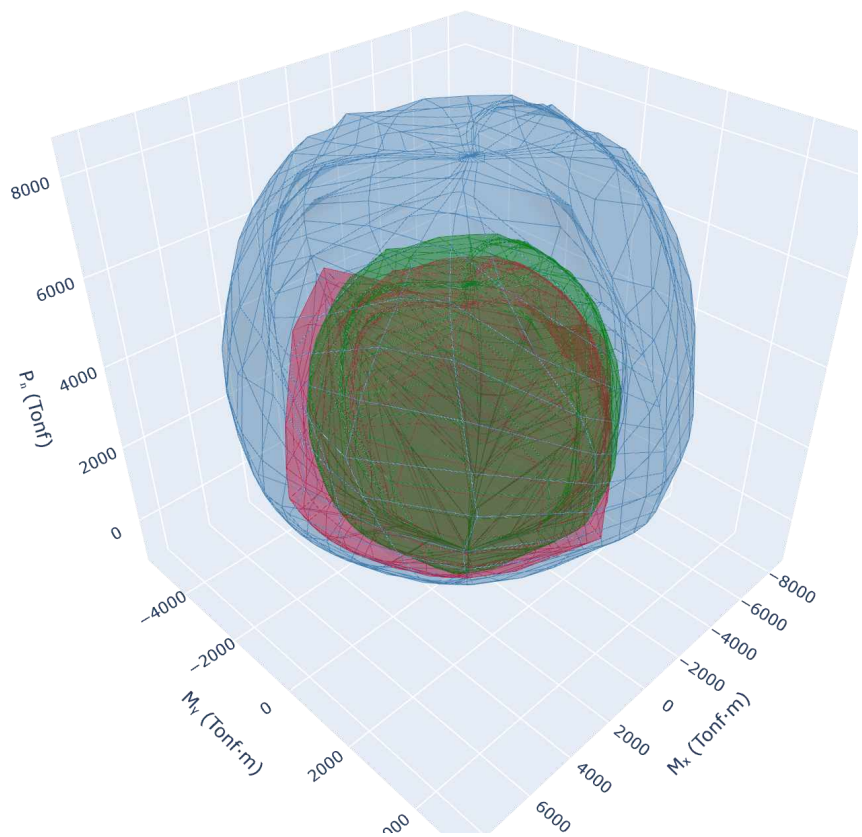
In [ ]: Pn_bal, Mx_bal, My_bal=falla_balanceada_superficie(Pn_mat, Mx_mat, My_mat, eps_mat, fy, Es)

phi_ce, phi_te=variacion_phi060(confinamiento)
Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, Myu_mat_E060, phi_mat_E060=Norma_E060_3D(Pn_red, Mx_red, My_red, Pn_bal, fc, Ag, confinamiento)

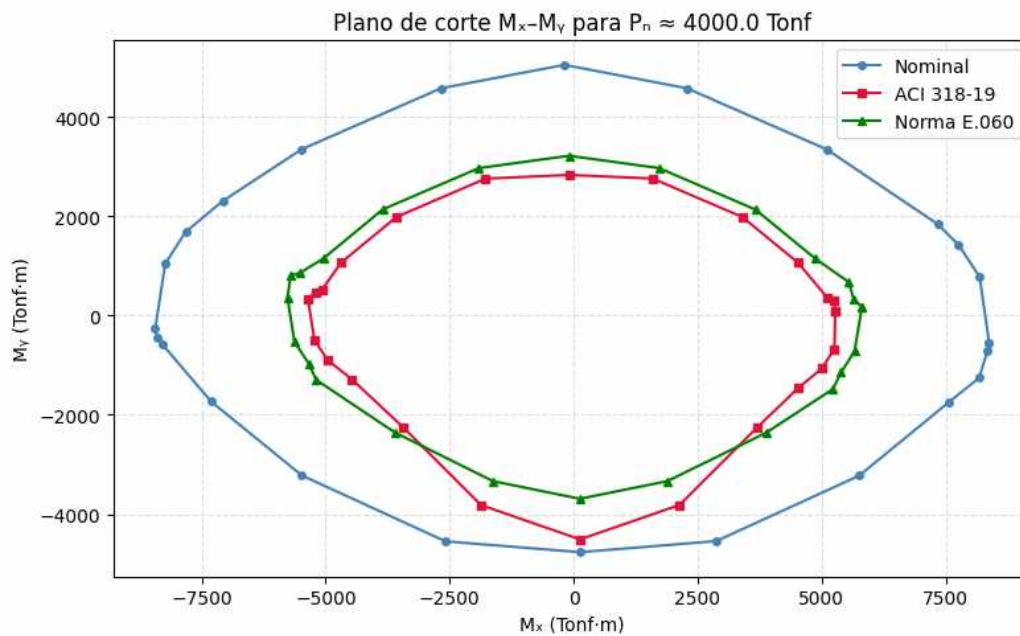
In [ ]: import plotly.io as pio
pio.renderers.default = "notebook_connected" # o "notebook_connected"

fig = fig_superficie_3D_UNICO( Pn_red, Mx_red, My_red, Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, Myu_mat_E060)
fig.show()
```

Superficies 3D: Nominal vs ACI 318-19 vs E.060



```
In [ ]: Pn_obj = 4000 # Tonf, por ejemplo
fig_corte, ax_corte, datos_corte = corte_Pn_plano_MxMy_matplotlib(Pn_red, Mx_red, My_red, Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, Pu_mat_E060,
plt.show())
```



```
In [ ]: fig_dir, ax_dir = cortes_direccionales_matplotlib(-Pn_red, Mx_red, My_red, -Pu_mat, Mxu_mat, Myu_mat, -Pu_mat_E060, Mxu_mat_E060, My
plt.show())
```

Cortes Direccionales: 0°-180° y 90°-270°

