UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

Facultad de ciencias

Escuela Profesional de Matemática

CRITERIO DE ESTABILIDAD Y ESTABILIDAD ASINTÓTICA DE PUNTOS DE EQUILIBRIO EN LOS SISTEMAS AUTÓNOMOS NO LINEALES Y SUS APLICACIONES

TESIS

Presentada por:

Bach. JEANETH GABY ATAHUACHI CATACORA

Para optar el Título Profesional de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TACNA – PERÚ

2024

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N°436

En la ciudad de Tacna, en el auditórium de la Facultad de Ciencias, de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann; siendo las 15:30 horas del día 20 de diciembre del 2024, estando presente el jurado calificador nominado por Resolución de Facultad N°11151-2024-FACI/UNJBG, conformado por los siguientes docentes:

- Dr. Heber Melbin Cabrera Cruz — Presidente
- Dr. Wilder Roger Miñano León — Secretario
- MSc. Jhony Alfonso Chávez Delgado — Vocal

Acto seguido, se dio lectura a la Resolución correspondiente, y del mismo modo se dio lectura al artículo 22° del Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias.

A continuación, el Presidente del Jurado instó a la Bachiller Jeaneth Gaby Atahuachi Catacora a exponer la tesis titulada CRITERIOS DE ESTABILIDAD Y ESTABILIDAD ASINTÓTICA DE PUNTOS DE EQUILIBRIO EN LOS SISTEMAS AUTÓNOMOS NO LINEALES Y SUS APLICACIONES, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 16:10 horas la tesista concluye su exposición, luego se procedió a la formulación de las preguntas por parte de los miembros del jurado calificador. Terminado este proceso, se invitó a que los miembros del jurado emitan su calificación de acuerdo al reglamento. El promedio de la calificación dio el siguiente resultado: Aprobado por unanimidad, con nota de Diecisiete (17), de acuerdo al Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann – Tacna.

Siendo las 17 horas, se dio por concluido el acto de sustentación de la tesis, firmando los señores miembros del jurado calificador, en señal de conformidad.

Dr. Heber Melbin Cabrera Cruz
PRESIDENTE

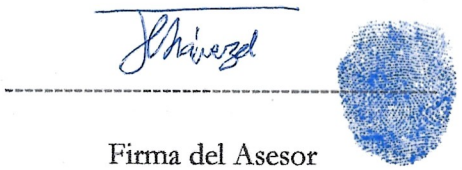
Dr. Wilder Roger Miñano León
SECRETARIO

MSc. Jhony Alfonso Chávez Delgado
VOCAL

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, **JHONY ALFONSO CHÁVEZ DELGADO**, en mi condición de Asesor acreditado por la Resolución de Facultad R.F. N° 10183-2022 -FACI-UN/JBG de la tesis titulada: **"CRITERIO DE ESTABILIDAD Y ESTABILIDAD ASINTÓTICA DE PUNTOS DE EQUILIBRIO EN LOS SISTEMAS AUTÓNOMOS NO LINEALES Y SUS APLICACIONES"**, presentado por la Bachiller JEANETH GABY ATAHUACHI CATACORA para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, habiendo cumplido con lo establecido en el reglamento de originalidad y de similitud de trabajos de investigación y producción intelectual, considerando que según la revisión, evaluación y análisis realizado a través del software de similitud textual TURNITIN cuenta con el nivel de similitud cuyo porcentaje es 10% por lo que **CERTIFICO LA SIMILARIDAD** de la tesis, la cual está de acuerdo al nivel **PERMITIDO**, para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio Institucional**.

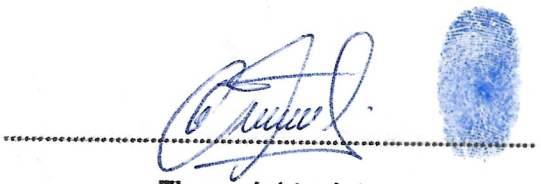
Se emite el presente certificado con fines de continuar con los trámites respectivos para su obtención del título profesional.



Firma del Asesor

DNI:N°18124030

Nombre y Apellidos del Asesor: Jhony Alfonso Chávez Delgado



Firma del tesista

Jeaneth Gaby Atahuachi Catacora

DEDICATORIA

Esta tesis está dedicada principalmente a Dios, por haberme dado la vida, por ser el apoyo y fortaleza en aquellos momentos de dificultad y de debilitamiento, y darle gracias por guiarme en mi camino y permitirme alcanzar mi objetivo.

A mis padres Andrea y Nestor, quienes son mi motor y mi mayor inspiración, quienes a través de su amor y sus buenos valores, su trabajo y su sacrificio durante estos años me han ayudado a trazar mi camino y gracias a ustedes logré llegar hasta aquí y convertirme en una profesional. De igual forma, a mis hermanos Frank y Robert por los gratos momentos que pasamos.

AGRADECIMIENTO

A los docentes de la Escuela profesional de matemática, por haber compartido sus saberes a lo largo de la preparación de nuestra profesión, de manera especial, al Ms. Jhony Alfonso Chávez Delgado asesor de mi tesis de investigación, quien me guió con sus conocimientos y su paciencia como docente.

ÍNDICE DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN **1**

PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO **3**

1.1. Descripción de la realidad problemática 3
1.2. Definición del problema de Investigación 4
1.2.1. Problema General 4
1.2.2. Problema Específicos 4
1.3. Objetivo de la investigación 4
1.3.1. Objetivo general 4
1.3.2. Objetivos específicos 4
1.4. Justificación e importancia de la investigación 5
1.5. Variables 6
1.5.1. Variable independiente 6
1.5.2. Variable dependiente 6
1.6. Hipótesis de Investigación 6
1.6.1. Hipótesis General 6
1.6.2. Hipótesis Específicos 6

FUNDAMENTOS TEÓRICOS **8**

2.1. Antecedentes de la Investigación 8
2.1.1. Antecedentes internacionales 8
2.1.2. Antecedentes nacionales 9
2.1.3. Antecedentes locales 10
2.2. Sistema homogéneo 10
2.3. Sistema lineal homogéneo con coeficiente constante 12
2.4. Estabilidad del sistema autónomo lineal 15

ESTABILIDAD DE UN SISTEMA NO LINEAL **29**

3.1. Estabilidad de un sistema autónomo no lineal 29
3.2. Estabilidad de Liapunov un sistema autónomo no lineal 36
3.3. Campo de fuerza conservativo 38

RESULTADOS **40**
4.1. Estabilidad y Estabilidad asintótica según Lyapunov 40
4.2. Funciones de Lyapunov para Sistemas autónomos lineales 49
4.3. Funciones de Lyapunov para sistemas autónomos no lineales . . . 55
4.4. Aplicaciones del criterio de estabilidad 58
4.4.1. Campo de fuerza conservativo 58
4.4.2. Movimiento de un péndulo 63
4.4.3. Circuito eléctrico simple 65
4.5. Inestabilidad 67

DISCUSIÓN **70**

CONCLUSIONES **72**

RECOMENDACIONES **73**

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS **74**

ÍNDICE DE FIGURAS

1. Nodo asintóticamente estable 18
2. Nodo inestable 19
3. Punto silla 19
4. Nodo estelar asintóticamente estable 21
5. Nodo estelar inestable 22
6. Nodo degenerado inestable 24
7. Nodo degenerado estable 25
8. Centro estable 27
9. Foco asintóticamente estable 28
10. Foco inestable 28
11. Estabilidad en el punto de equilibrio 30
12. Asintóticamente estable 30
13. Inestabilidad del punto de equilibrio 31
14. Función de Liapunov en $V(\bar{x})$ 37
15. Función de Liapunov en $V(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$ 37
16. Péndulo simple 63
17. Circuito $\mathbf{RL_0C_0}$ 66

RESUMEN

El objetivo de esta tesis es derivar un criterio de estabilidad y estabilidad asintótica para el sistema autónomo no lineal

$$\dot{X} = f\left(X\right),$$

sin la necesidad de obtener una solución explícita del sistema, lo cual podría ser complejo o incluso inviable. Para tal fin, se emplearon los enfoques inductivo y deductivo con el propósito de establecer un criterio de estabilidad basado en las condiciones de una función conocida como función de Liapunov, aplicada a un punto de equilibrio o crítico del sistema no lineal.

El principal resultado de esta investigación consiste en una generalización cuantitativa de la estabilidad de los puntos críticos, fundamentada en funciones especiales que amplían el concepto de energía. Esta generalización establece que, si un estado crítico de un sistema dinámico en espacios de estado se encuentra cercano a otro estado crítico, el sistema exhibe una tendencia decreciente, lo que implica que el equilibrio es estable. La función propuesta es diferenciable en una vecindad del punto crítico, se anula en dicho punto y toma valores positivos fuera de él. Además, la derivada de esta función decrece en las proximidades del punto de equilibrio.

Desde la perspectiva de la estabilidad, este enfoque respalda la continuación de investigaciones aplicadas a sistemas autónomos en diversos campos, tales como la ecología (por ejemplo, en modelos depredador-presa), el principio de invarianza de La Salle, los estudios sobre la estabilidad de Mittag-Leffler y el método directo de Liapunov aplicado a sistemas fraccionarios.

Palabras clave: Función de Liapunov, mínimo local estricto, oscilador armónico, estabilidad de circuito $R\ L_0\ C_0$.

ABSTRACT

The objective of this thesis is to derive a stability and asymptotic stability criterion for the nonlinear autonomous system

$$\dot{X} = f(X),$$

without the need to obtain an explicit solution for the system, which could be complex or even unfeasible. To this end, inductive and deductive approaches were employed to establish a stability criterion based on the conditions of a function known as the Liapunov function, applied to an equilibrium or critical point of the nonlinear system.

The main result of this research consists of a quantitative generalization of the stability of critical points, based on special functions that extend the concept of energy. This generalization establishes that if a critical state of a dynamical system in state spaces is close to another critical state, the system exhibits a decreasing tendency, implying that the equilibrium is stable. The proposed function is differentiable in a neighborhood of the critical point, vanishes at that point, and takes on positive values outside of it. Furthermore, the derivative of this function decreases in the vicinity of the equilibrium point.

From a stability perspective, this approach supports continued applied research on autonomous systems in various fields, such as ecology (e.g., predator-prey models), the La Salle invariance principle, Mittag-Leffler stability studies, and the direct Liapunov method applied to fractional systems.

Keywords: Liapunov function, strict local minimum, harmonic oscillator, $R\ L_0\ C_0$ circuit stability

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos principales de esta tesis es desarrollar un criterio para evaluar la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio o críticos en sistemas autónomos, tanto lineales como no lineales, sin recurrir a la resolución explícita del sistema.

La estabilidad de un sistema no lineal está relacionada con el comportamiento de las soluciones de sus ecuaciones diferenciales en torno a una solución fija. En particular, se investiga si las soluciones iniciales cercanas a esta solución fija permanecen próximas a medida que transcurre el tiempo. En el caso específico de un punto crítico, que corresponde a una solución estacionaria, surge la pregunta de si las soluciones que se originan en condiciones iniciales cercanas a dicho equilibrio continúan estando cerca de él conforme evoluciona el sistema. Este fenómeno se denomina estabilidad asintótica, y se caracteriza por la tendencia de las soluciones a converger hacia el punto de equilibrio a medida que el tiempo tiende al infinito.

La propuesta de Liapunov consistió en introducir funciones que pudieran garantizar la estabilidad del sistema a través de condiciones sobre la derivada de la función a lo largo de las trayectorias del campo vectorial que describe la ecuación diferencial correspondiente. Esta idea fue formalizada en una serie de proposiciones y en su resultado principal. Los resultados obtenidos por Liapunov coinciden con los desarrollados por otros matemáticos destacados en el área, tales como Hirsch, Kreider, Sotomayor y el propio Liapunov.

La propuesta de Liapunov consistió en la introducción de funciones que permitieran garantizar la estabilidad de un sistema no lineal mediante condiciones sobre la derivada de la función a lo largo de las trayectorias del campo vectorial asociado a la ecuación diferencial correspondiente. Esta idea fue formalizada a través de una serie de proposiciones y en su resultado principal, conocido como el criterio de estabilidad de Liapunov. Los resultados obtenidos por Liapunov coinciden y complementan los desarrollos realizados por otros matemáticos prominentes en el área, tales como Hirsch, Kreider y Sotomayor.

Esta investigación se organiza en cinco capítulos, los cuales se describen a continuación:

Capítulo 1: Planteamiento del estudio. En este capítulo se formula el problema de investigación, se presentan los objetivos generales y específicos, y se expone la importancia y justificación del estudio. Además, se definen las variables y las hipótesis que guiarán el desarrollo de la investigación.

Capítulo 2: Preliminares. En este capítulo se exponen los antecedentes relevantes de la investigación, así como los conceptos fundamentales relacionados con sistemas homogéneos, sistemas lineales de coeficientes constantes y la estabilidad de sistemas autónomos lineales.

Capítulo 3: Estabilidad de sistemas autónomos no lineales. Este capítulo aborda la estabilidad de sistemas autónomos no lineales, incluyendo el criterio de estabilidad de Liapunov y el análisis de campos de fuerza conservativos, proporcionando una base teórica para el análisis de dichos sistemas.

Capítulo 4: Resultados. En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de los antecedentes y conceptos tratados en los capítulos anteriores. Estos resultados están alineados con los objetivos establecidos en la investigación.

Capítulo 5: Discusión. Comparación con investigaciones previas. En este capítulo se realiza una comparación de los resultados obtenidos con los principales antecedentes de investigaciones previas, analizando las similitudes y diferencias encontradas.

Finalmente, se incluyen las conclusiones y recomendaciones derivadas del estudio, con énfasis en sus implicaciones y posibles aplicaciones futuras.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO

1.1. Descripción de la realidad problemática

Un sistema autónomo no lineal y sus aplicaciones a los fenómenos físicos se representan por un modelo matemático de la forma siguiente:

$$\dot{X} = f(X)$$

donde $f : V \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación de clase C^1 en un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^n$.

El análisis de este sistema autónomo se limita al estudio de la existencia, unicidad, continuidad y estabilidad de las soluciones. El problema central en la teoría de estabilidad consiste en determinar las condiciones bajo las cuales una solución del sistema autónomo, originada cerca de un punto crítico, se mantiene próxima a dicho punto a medida que evoluciona el tiempo. En este caso, decimos que el punto crítico es estable. Si, además, existe la posibilidad de que las soluciones cercanas al punto crítico tiendan a converger hacia él a medida que el tiempo avanza, el punto crítico se considera asintóticamente estable. Este tipo de estabilidad puede analizarse a través de los valores propios de la parte linealizada del sistema, es decir, la derivada del campo vectorial evaluada en el punto crítico. Sin embargo, hasta el momento, no contamos con un método general para determinar la estabilidad de un sistema sin conocer todas sus soluciones, lo cual puede ser extremadamente complejo o incluso inviable en muchos casos.

La idea de introducir funciones que garanticen la estabilidad de un sistema autónomo surge a partir de la búsqueda y construcción de las funciones de Liapunov. Estas funciones se fundamentan en las condiciones impuestas sobre la derivada de la función a lo largo de las órbitas del campo vectorial que describe la ecuación diferencial autónoma. Sin embargo, en la mayoría de los casos, la tarea de encontrar tales funciones no es sencilla. A pesar de las dificultades, en muchas situaciones es posible intentar identificar funciones que satisfagan las condiciones de un criterio de estabilidad. De este modo, es factible estudiar la estabilidad de

los puntos críticos en un sistema autónomo no lineal.

La posible solución al problema planteado consiste en definir un criterio de estabilidad que se establece a partir de funciones especiales, las cuales generalizan la noción de energía en el sistema. En este contexto, si el sistema tiende hacia un estado crítico, la energía debe disminuir a lo largo de la evolución de la solución. En consecuencia, si esta condición se cumple, el punto crítico se considera estable.

1.2. Definición del problema de Investigación

1.2.1. Problema General

¿Bajo qué condiciones es posible establecer un criterio de estabilidad y estabilidad asintótica de puntos de equilibrio en los sistemas autónomos?

1.2.2. Problema Específicos

a. ¿Bajo qué condiciones es posible establecer un criterio de estabilidad y estabilidad asintótica de puntos de equilibrio en los sistemas autónomos lineales y no lineales?

b. ¿Cómo aplicar estas condiciones de estabilidad a situaciones específicas como el movimiento de oscilaciones forzadas de un péndulo, circuitos eléctricos simples y a un campo de fuerzas conservativos representado por sistemas autónomos?

1.3. Objetivo de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Establecer un criterio de estabilidad y estabilidad asintótica de puntos de equilibrio en los sistemas autónomos.

1.3.2. Objetivos específicos

a. Establecer un criterio de estabilidad y estabilidad asintótica de puntos de equilibrio en los sistemas autónomos lineales y no lineales.

b. Aplicar dichas condiciones de estabilidad a situaciones concretas como el movimiento de oscilaciones forzadas de un péndulo, circuitos eléctricos simples y a un campo de fuerzas conservativos representado por sistemas autónomos.

1.4. Justificación e importancia de la investigación

La investigación titulada " Criterio de Estabilidad y Estabilidad Asintótica en Puntos de Equilibrio en Sistemas Autónomos No Lineales y sus Aplicaciones"0 se justifica por la necesidad y relevancia de entender la estabilidad de los sistemas dinámicos no lineales, particularmente en los sistemas autónomos, donde el comportamiento de un sistema es crucial para su diseño y control en diversas áreas de la ciencia e ingeniería. Los sistemas autónomos son aquellos en los que el comportamiento de un sistema está determinado solo por sus condiciones iniciales y no depende explícitamente del tiempo. La capacidad de analizar la estabilidad de estos sistemas es fundamental para predecir y controlar el comportamiento a largo plazo de procesos dinámicos.

Uno de los enfoques clave para analizar la estabilidad es la utilización de funciones de Liapunov, que sirven como una herramienta poderosa para establecer la estabilidad de los puntos críticos de los sistemas. Sin embargo, encontrar o construir dichas funciones no es tarea sencilla, lo que representa un desafío técnico y teórico importante en la teoría de sistemas dinámicos. La existencia de una función de Liapunov adecuada implica que el sistema es estable (o asintóticamente estable) en un punto crítico determinado. Esta propiedad se convierte en un criterio clave en el análisis de sistemas no lineales, ya que permite prever el comportamiento del sistema sin la necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones diferenciales que lo describen.

La investigación cobra especial relevancia en aplicaciones prácticas. Por ejemplo, el estudio de la estabilidad es esencial en el modelado y análisis de sistemas ecológicos, como el modelo de presa y depredador, que describe las interacciones entre dos especies en un ecosistema. También es fundamental en la teoría de control moderno, especialmente en la regulación de máquinas eléctricas y la estabilización de sistemas mecánicos, como en el caso de la estabilidad de un giroscopio, cuyo rendimiento depende de la precisión y estabilidad en su rotación.

De igual forma, el desarrollo de técnicas de control que aseguren la estabilidad de cuerpos rígidos con puntos fijos, que es un desafío en robótica y aeronáutica, se beneficia del análisis de estabilidad asintótica.

Además, la investigación sigue siendo de gran importancia en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), un campo que continúa siendo relevante tanto en teoría como en aplicaciones prácticas. La estabilidad es un tema central en la resolución de problemas de EDOs, que son la base de modelos matemáticos en diversas disciplinas. La búsqueda de métodos para analizar la estabilidad, como el criterio de estabilidad y la construcción de funciones de Liapunov, sigue siendo un área activa de investigación, lo que asegura la relevancia continua de esta línea de trabajo.

1.5. Variables

1.5.1. Variable independiente

a. Función de Liapunov

b. Función estricta de Liapunov

1.5.2. Variable dependiente

a. Puntos de equilibrio estable

b. Puntos de equilibrio asintóticamente estable

1.6. Hipótesis de Investigación

1.6.1. Hipótesis General

Es posible establecer un criterio de estabilidad y estabilidad asintótica para los puntos críticos en sistemas autónomos no lineales.

1.6.2. Hipótesis Específicos

a. Es posible establecer un criterio de estabilidad y estabilidad asintótica de puntos críticos en los sistemas autónomos lineales y no lineales.

b. Es posible aplicar condiciones de estabilidad a situaciones específicas como el movimiento de oscilaciones forzadas de un péndulo, circuitos eléctricos simples y a un campo de fuerzas conservativos representado por sistemas autónomos.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1. Antecedentes de la Investigación

2.1.1. Antecedentes internacionales

La Salle (1973), en su trabajo "Stability by Liapunov's Direct Method with Applications", menciona que la mecánica celeste que fue estudiada por Lagrange, Laplace, Hamilton y Jacobi, proveen de una teoría planetaria en el problema de los tres cuerpos en el uso sistemático del método de las perturbaciones. La ecuación de Hill en 1877 modela el movimiento de la luna y Adams – Le Verrier teorizaron en 1845 a 1846 sobre la existencia de Neptuno. Surgió el problema de la estabilidad de sistemas y de control, como el control de la máquina de vapor de Watts, o el diseño de control de Airy, astrónomo, para seguir a las estrellas. Maxwell relacionó las ideas básicas de las nociones de estabilidad con las raíces del polinomio característico. Así mismo demostró que el comportamiento de un sistema de control automático en la vecindad de una posición de equilibrio se podía aproximar por una ecuación diferencial lineal y por lo tanto la estabilidad se podría así discutir en términos de las raíces de las ecuaciones algebraicas asociadas.

Pontryagin (1980), en su trabajo de "Ecuaciones diferenciales ordinaria" se menciona que Aleksandr Mikhailovich Liapunov realizó importantes contribuciones en diversas áreas, como las ecuaciones diferenciales, la teoría del potencial, la probabilidad y las aproximaciones. Es particularmente reconocido por sus estudios sobre la estabilidad del equilibrio y del movimiento en sistemas mecánicos e hidrodinámicos, así como en el campo de las ecuaciones diferenciales. Liapunov introdujo nuevos métodos y resultados en estos campos, destacándose especialmente por la formulación de las funciones que llevan su nombre, las cuales son fundamentales en el análisis de estabilidad en sistemas dinámicos.

Poincaré, et al. (1986), en su trabajo "Textos de la Discusión sobre los Fundamentos de las Matemáticas: de las Antinomias a la Predicatividad", Poincaré

argumenta que, para determinar la estabilidad del sistema solar y comprender si un cuerpo permanece en una región del espacio o se aleja de ella, no tiene sentido abordar el estudio cuantitativo sin antes conocer el comportamiento cualitativo de las soluciones. En este sentido, subraya la necesidad de un análisis cualitativo previo. Poincaré se propuso investigar el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial o de un sistema de dos ecuaciones en todo el plano, sin recurrir a la integración explícita de las ecuaciones, sino utilizando únicamente las propiedades inherentes de las funciones involucradas.

2.1.2. Antecedentes nacionales

Sotomayor (1979), en su trabajo "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", se menciona que disciplinas como la geometría diferencial, las geometrías no euclidianas y la topología tienen un impacto significativo en la física matemática, un campo en el que aún se continúa trabajando en el establecimiento de condiciones para las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Un aspecto clave de este estudio es el interés por comprender el comportamiento de las soluciones en todo su dominio, lo cual constituye el enfoque central de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Esta teoría fue desarrollada de manera simultánea por Poincaré (1854-1912) y Liapunov (1857-1918). La contribución más destacada del siglo XIX en este ámbito corresponde a Henri Poincaré, quien introdujo la topología como herramienta para estudiar las propiedades de las trayectorias de los sistemas dinámicos.

Gavilán (2019), en su investigación titulada "Funciones de Liapunov y semigrupos del tipo gradiente", se concluye que los conceptos de atractor local débil se encuentran contenidos dentro de un conjunto compacto invariante, mientras que el atractor local forma parte del atractor global. Además, se estudian los semigrupos gradientes y los semigrupos de tipo gradiente, para los cuales se emplea la teoría de Morse, cumpliendo con uno de los objetivos principales de la tesis. Posteriormente, se presenta la construcción de una función de Liapunov generalizada que posee dos propiedades adicionales: es decreciente y diferenciable a lo largo de las soluciones, lo que también satisface otro de los objetivos de la investigación.

Chuñe (2022), en su investigación titulada "Análisis de estabilidad asintótica global de redes neuronales dinámicas: enfoque de Liapunov", se concluye que las

redes neuronales dinámicas en tiempo continuo son sistemas que presentan estados en valores continuos y cuyas ecuaciones de movimiento se expresan mediante ecuaciones diferenciales. En este contexto, la estabilidad, según el enfoque de Liapunov, establece que un punto crítico es asintóticamente estable si la derivada de la función asociada es estrictamente negativa. Posteriormente, se demuestra que el enfoque de Liapunov permite establecer la estabilidad de la red neuronal dinámica en tiempo continuo, utilizando una función de Liapunov cuadrática y garantizando la existencia de un único punto de equilibrio en la red.

2.1.3. Antecedentes locales

Chávez et al. (2020), en su investigación titulada "Estabilidad de los puntos críticos de los sistemas dinámicos autónomos lineales", se determina la estabilidad y la estabilidad asintótica de un sistema dinámico autónomo lineal sin necesidad de conocer su solución explícita, lo cual puede resultar difícil o incluso imposible en muchos casos. Para este análisis, se emplearon los métodos inductivo y deductivo con el objetivo de establecer un criterio de estabilidad basado en la solución constante del sistema. Como resultado, se logró generalizar la estabilidad de los puntos críticos de manera cuantitativa, a través del análisis de los valores propios de una matriz cuadrada no singular.

2.2. Sistema homogéneo

Para el análisis de este estudio, se definen los siguientes conceptos claves: sistema de ecuaciones homogéneas, Wronskiano, matriz solución y matriz fundamental. Los textos consultados que sustentan este análisis incluyen las obras de Elsgolts, Krasnov, Mello, Peixoto y Perko, las cuales se citan en la bibliografía correspondiente.

Definición 2.2.1. (Sistema de ecuaciones homogéneas)
Un sistema de ecuaciones de la forma $\dot{y} = C(x)\, y + b(x)$ *se clasifica como homogéneo si el término* $b(x) = 0$ *para todo* x *en el intervalo* I*. En caso contrario, cuando* $b(x) \neq 0$ *, el sistema se considera como no homogéneo.*

Definición 2.2.2. (Principio de superposición)
Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones del sistema de ecuaciones homogéneas

$$\dot{y} = C(x)\, y,$$

Entonces, para cualquier conjunto de constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, la función $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ también será una solución de la misma ecuación.

Definición 2.2.3. (Wronskiano)
Sea $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ un conjunto de n vectores, donde cada vector $y_i = (y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni})$ es un vector columna de $\mathbb{R}^n$, con $i = 1, 2, \ldots, n$. El Wronskiano $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de estos vectores se define como el determinante de la matriz cuyo conjunto de columnas está formado por los vectores $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Es decir,

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.1}$$

donde cada $y_i = (y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni})$ es el i - ésimo vector del conjunto de vectores y $\forall i = \overline{1, n}$.

Definición 2.2.4. (Matriz solución)
Una matriz Φ de orden n, cuyas columnas son soluciones del sistema homogéneo

$$\dot{y} = C(x)\, y,$$

se denomina matriz solución.

Definición 2.2.5. (Matriz Fundamental)
Una matriz solución $\Phi(x)$ de orden n, cuyas columnas son linealmente independientes, se denomina matriz fundamental del sistema homogéneo

$$\dot{y} = C(x)\, y$$

2.3. Sistema lineal homogéneo con coeficiente constante

En el presente estudio, se definen y analizan los conceptos fundamentales de autovalores, autovectores, matriz diagonal y polinomio mínimo, los cuales constituyen elementos clave en la teoría de sistemas lineales. Además, se aborda el análisis de las propiedades del sistema homogéneo con coeficiente constante, haciendo énfasis en sus implicaciones matemáticas y su aplicación en el contexto de las soluciones de ecuaciones diferenciales.

El desarrollo teórico y la comprensión de estos conceptos se fundamentan en los trabajos previos de destacados autores en el campo, tales como Elsgolts, Krasnov, Mello, Peixoto y Perko, cuyas investigaciones y resultados se citan en la bibliografía correspondiente.

Definición 2.3.1. (Autovalores o Valores propios)
Las raíces γ de la ecuación característica $P(\gamma) = \det(C - \gamma I) = 0$ son conocidos como los autovalores o valores propios de la matriz C. Estas raíces representan los valores para los cuales el determinante de la matriz $C - \gamma I$ se anula, lo que implica que el sistema asociado tiene soluciones no triviales.

Definición 2.3.2. (Autovectores o Vector propio)
Si γ es un autovalor de la matriz C, entonces cualquier matriz no nula D que satisfaga la ecuación

$$(C - I\gamma)\, D = 0,$$

se denomina autovector o vector propio de C, correspondiente al autovalor γ. Los autovectores son aquellos vectores no nulos que, al ser multiplicados por la matriz C, solo se escalan por el valor propio γ, es decir, no cambian de dirección.

Definición 2.3.3. (Matriz Diagonalizable)
Una matriz C es diagonizable si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}CP = D$ donde D es una matriz diagonal. Esto significa que la matriz C puede ser transformada en una matriz diagonal mediante una conjugación por la matriz P, lo que implica que C tiene una base de autovectores linealmente independientes.

Definición 2.3.4. (Polinomio Mínimo)
El polinomio mínimo de una matriz C, denotado por $P_m(C)$, es un polinomio en γ con coeficiente principal igual a 1. Este polinomio es el mínimo grado que satisface la ecuación $P_m(C) = 0$ es el polinomio de mínimo grado que satisface la ecuación. Además, el polinomio mínimo es único y divide cualquier otro polinomio que anule C.

Propiedad 2.3.1. (Solución del Sistema homogéneo con coeficientes constantes)
P1) Raíces reales diferentes
Si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$, son los autovalores de la matriz C, y todos ellos reales y distintos, es posible encontrar los autovectores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$. Estos vectores pueden organizarse en las columnas de una matriz P tal que $P^{-1}CP = \gamma I$, donde γI es una matriz diagonal cuyos elementos son precisamente los valores propios de C.

P2) Raíces complejas diferentes
Supongamos que $\gamma_1 = a + ib$, donde a y b son números reales y $b \neq 0$, y que esta es una raíz de la ecuación característica. En este caso, $\gamma_2 = a - ib$ también será una raíz. Los autovectores correspondientes serán complejos y estarán relacionados de la siguiente manera: $d_2 = \overline{d_1}$. Las soluciones complejas linealmente independientes asociadas a estos autovectores son:

$$w_1 = d_1 e^{at}(\cos(bt) + isen(bt))$$

y

$$w_2 = d_2 e^{at}(\cos(bt) - isen(bt)).$$

P3) Raíces repetidas
En el caso en que los autovalores de la matriz C tengan multiplicidad mayor que uno, definiremos la exponencial de una matriz constante C de orden n. Posteriormente, abordaremos la forma canónica de Jordan de la matriz C con el propósito de resolver el sistema lineal homogéneo $\dot{y} = Cy$.

Definición 2.3.5. (Matriz Exponencial)
La exponencial de una matriz C de orden n se define como la matriz de orden n

dada por la siguiente serie infinita:

$$e^C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C^n}{n!} = \frac{I}{0!} + \frac{C^1}{1!} + \frac{C^2}{2!} + \frac{C^3}{3!} + \dots$$

Definición 2.3.6. (El bloque de Jordan)
El bloque de Jordan correspondiente a un autovalor γ se define como la matriz:

$$J(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

Esta es una matriz triangular superior en la que los elementos de la diagonal principal son γ, y los elementos inmediatamente por encima de la diagonal son 1, mientras que el resto de los elementos son 0.

Definición 2.3.7. (Forma canónica de Jordan)
Se dice que una matriz está en forma canónica de Jordan si su diagonal está compuesta por bloques de Jordan. Es decir, la matriz J tiene la siguiente estructura:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_n \end{pmatrix}$$

donde cada bloque J_i tiene la forma:

$$J_i = \begin{pmatrix} \gamma_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \gamma_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \gamma_i \end{pmatrix}$$

Definición 2.3.8. (Matriz en la forma de Jordan)
Si una matriz C tiene r autovectores linealmente independientes. Entonces C es semejante a una matriz que está en la forma de Jordan especial, es decir:

$$J = P^{-1}CP$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix}$$

Cada bloque J_i es una matriz triangular superior, donde γ_i es el autovalor correspondiente y los elementos en la diagonal son todos iguales a γ_i, mientras que los elementos inmediatamente por encima de la diagonal son 1.

2.4. Estabilidad del sistema autónomo lineal

Definición 2.4.1. (Sistema autónomo lineal)
Un sistema autónomo lineal es un sistema de ecuaciones diferenciales homogénea, en el que las transformaciones son lineales y no dependen del tiempo. Este sistema se puede representar mediante la siguiente ecuación

$$\dot{X} = CX,$$

donde C es una matriz que actúa como un operador en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.4.2. (Punto de equilibrio o crítico)
Un vector $\bar{x}$ en $\mathbb{R}^n$ se denomina punto de equilibrio o crítico para el sistema autónomo lineal:

$$\dot{X} = C(X)$$

si cumple que $C(\bar{x}) = 0$.

Definición 2.4.3. (Estabilidad del sistema autónomo)
Si $\dot{X} = CX$ es un sistema lineal autónomo cuya matriz de orden $n \times n$ es no singular, entonces el origen en $\mathbb{R}^n$ tiene las siguientes propiedades de estabilidad:

a. *El origen es asintóticamente estable si las partes reales de todos los autovalores de C son negativas.*

b. *El origen es estable si C tiene un par de autovalores imaginarios puros de multiplicidad mayor que uno, y ningún autovalor con partes reales positivas.*

c. *El origen es inestable, en cualquier otro caso.*

Ejemplo 2.4.1. Consideremos el sistema autónomo lineal homogéneo en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{cases} \tag{2.2}$$

Donde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ representa el valor del estado, y $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ es la matriz de coeficiente del sistema.

La hipótesis de que C es una matriz no singular implica que la matriz que su determinante es distinto de cero, es decir, $\det(C) = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0$. Como consecuencia, la matriz C es invertible.

Dado que C es invertible, el origen $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es el único punto crítico del sistema descrito por la ecuación (2.2), ya que los puntos críticos se obtienen resolviendo $Cx = 0$ lo cual tiene única solución trivial $x = 0$ debido a la inversa de C.

Proposición 2.4.1. (Matriz C con autovalor reales y distintos)
Si la matriz C tiene autovalores reales y distintos γ_1 y γ_2 para el sistema $\dot{X} = CX$, y existe una matriz invertible P, entonces el sistema puede ser transformado a la forma diagonal:

$$\dot{W} = JW,$$

donde J es la matriz diagonal definida por:

$$J = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Demostración. Supongamos que v_1 y v_2 son los vectores propios asociados a γ_1 y γ_2. Entonces, la matriz $P = \{v_1\ ,\ v_2\}$ es una matriz de cambio de base. A partir de esto, obtenemos la matriz de cambio de coordenadas:

$$X = P^{-1}W,$$

Es decir, la ecuación original $\dot{X} = CX$ se transforma de la siguiente manera

$$\dot{W} = P^{-1}\dot{X} = P^{-1}CX = P^{-1}CPZ = JW$$

Por lo tanto, el sistema en la nueva base $\{v_1\ ,\ v_2\}$ se describe por

$$\dot{W} = JW.$$

En la nueva base $\{v_1\ ,\ v_2\}$, el sistema tiene la siguiente forma

$$\begin{cases} \dot{w_1} = \gamma_1 w_1 \\ \dot{w_2} = \gamma_2 w_2 \end{cases}$$

Si se hace $k_1 = k_2 = 0$ en las curvas de fase, obtenemos la solución:

$$\bar{\alpha}\,(t) = (k_1 e^{\gamma_1 t}, k_2 e^{\gamma_2 t}),$$

Esto nos da el punto crítico $(0, 0)$. A continuación, analizamos los casos según los valores de γ_1 y γ_2 :

Caso I: Si $\gamma_2 < \gamma_1 < 0$, se analizan los siguientes subcasos:

- Subcaso 1: Si $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, se obtiene dos semirrectas, en las cuales $w_1 \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.
- Subcaso 2: Si $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, se obtiene dos semirrectas, en las cuales $w_2 \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

Por lo tanto, en ambos casos, el punto $(0, 0)$ es un nodo asintóticamente estable. En este caso, las órbitas del sistema son parábolas en el nuevo sistema de coordenadas, tal como se muestra en la figura 1.

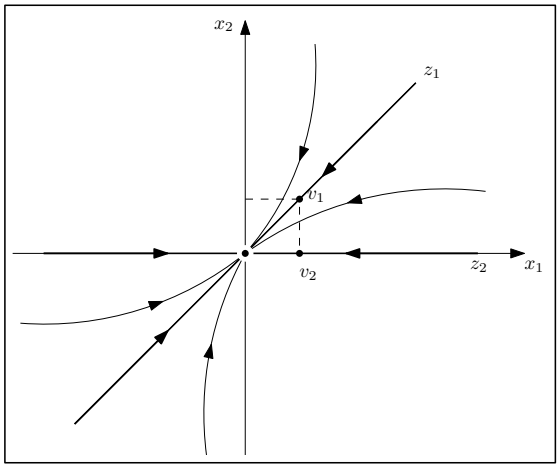


Figura 1: Nodo asintóticamente estable

Fuente: *Elaboración propia*

Caso II: Si $\gamma_1 > \gamma_2 > 0$, se analizan los siguientes subcasos:

- Subcaso 1: Si $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, se obtiene dos semirrectas, en las cuales $w_2 \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.
- Subcaso 2: Si $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, se obtiene dos semirrectas, en las cuales $w_1 \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

En ambos subcasos, el punto $(0, 0)$ es un nodo inestable. En este caso, las órbitas son parábolas en el nuevo sistema, tal como se muestra en la figura 2.

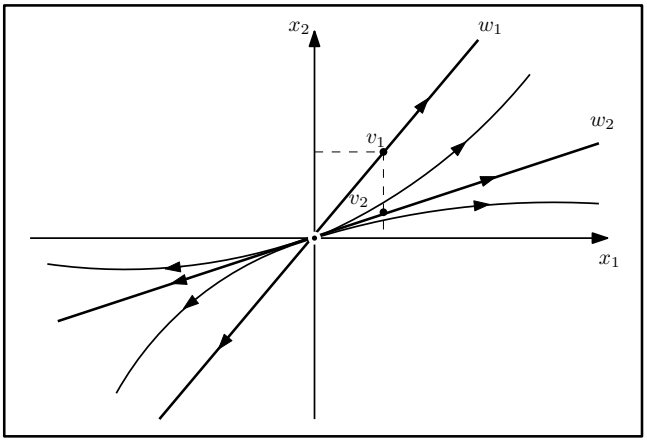


Figura 2: Nodo inestable

Fuente: *Elaboración propia*

Caso III: Si $\gamma_1 < 0 < \gamma_2$, se analizan los siguientes subcasos:

- Subcaso 1: Si $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, se obtiene dos semirrectas, en las cuales $w_2 \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.
- Subcaso 2: Si $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, se obtiene dos semirrectas, en las cuales $w_1 \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

En este caso, el punto $(0, 0)$ es un punto silla. Las órbitas en este subcaso son hipérbolas en el nuevo sistema, tal como se muestra en la figura 3.

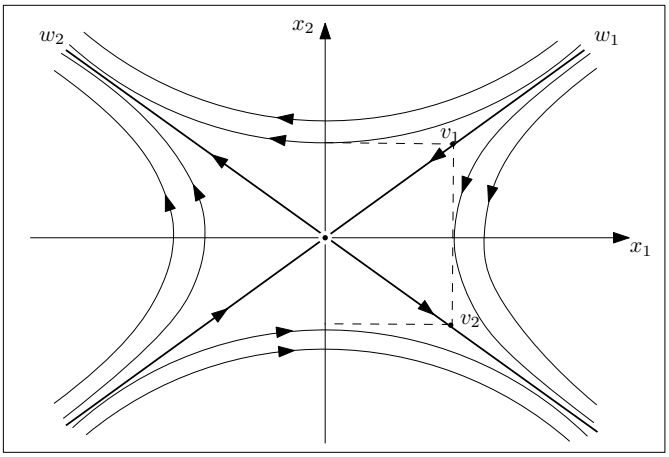


Figura 3: Punto silla

Fuente: *Elaboración propia*

Proposición 2.4.2. (Matriz diagonal C con autovalores reales e iguales) *Supongamos que la matriz C es diagonal, pero tiene autovalores reales y coincidentes, es decir, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, en el sistema*

$$\dot{X} = CX,$$

Si además existe una matriz invertible P, entonces el sistema transformado toma la siguiente forma:

$$\dot{W} = JW,$$

donde J es la matriz diagonal definida por:

$$J = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Demostración. Supongamos que v_1 es el autovector asociado a γ y v_2 es el autovector degenerado asociado al mismo valor propio γ. Entonces, la matriz de cambio de base es

$$P = \{v_1 \ , \ v_2\}.$$

A partir de esta matriz de cambio de base, obtenemos la matriz de cambio de coordenadas $X = PZ$.

Es decir, la ecuación original se transforma de la siguiente manera:

$$\dot{W} = P^{-1}\dot{X} = P^{-1}CX = P^{-1}CPW = JW$$

Por lo tanto, el sistema transformado se describe por:

$$\dot{W} = JW.$$

En la nueva base $\{v_1 \ , \ v_2\}$, el sistema tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \gamma w_1 \\ \dot{w}_2 = \gamma w_2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos que:

$$w_2 = Cw_1,$$

lo que implica que las órbitas son rectas en el nuevo sistema. Si establecemos $k_1 = k_2 = 0$ en las curvas de fase la solución general es:

$$\bar{\alpha}\,(t) = (k_1 e^{\gamma t}, k_2 e^{\gamma t}),$$

lo que da como resultado el punto crítico $(0, 0)$.

A continuación, analizamos los casos dependiendo del signo de γ.

Caso I: Si $\gamma < 0$:

- Subcaso 1: Si $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, se obtiene dos semirrectas, en las cuales $w_2 \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.
- Subcaso 2: Si $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, se obtiene dos semirrectas, en las cuales $w_1 \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

En ambos subcasos, el punto (0,0) es un nodo estelar asintóticamente estable, como se muestra en la figura 4.

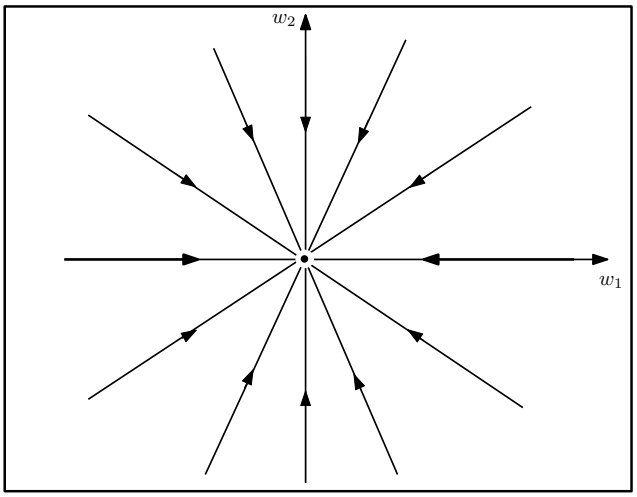


Figura 4: Nodo estelar asintóticamente estable

Fuente: *Elaboración propia*

Caso II: Si $\gamma > 0$:

- Subcaso 1: Si $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, se obtiene dos semirrectas, en las cuales $w_2 \longrightarrow \infty$ cuando $t \longrightarrow \infty$.
- Subcaso 2: Si $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, se obtiene dos semirrectas, en las cuales $w_1 \longrightarrow \infty$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

En ambos subcasos, el punto $(0, 0)$ es un nodo estelar asintóticamente estable, como se muestra en la figura 5.

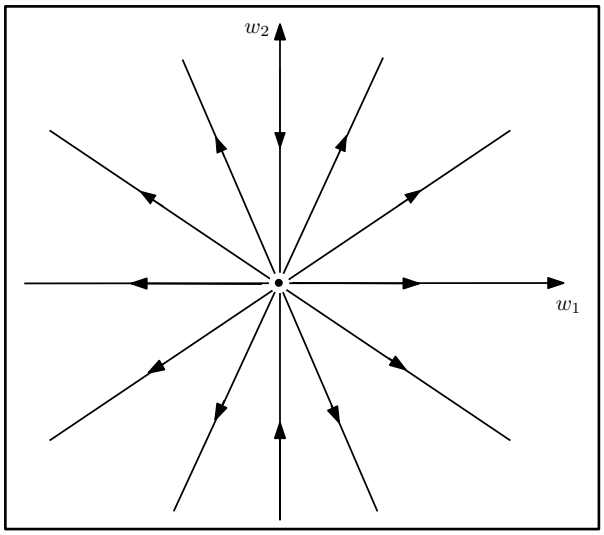


Figura 5: Nodo estelar inestable

Fuente: *Elaboración propia*

Proposición 2.4.3. (Matriz no diagonal C con autovalores reales e iguales)
Supongamos que la matriz C no es diagonal, pero tiene autovalores reales y coincidentes $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, en el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{X} = CX,$$

y existe una matriz invertible P, entonces el sistema transformado puede escribirse en la forma:

$$\dot{W} = JW,$$

donde J es una matriz de Jordan dada por

$$J = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 1 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Demostración. Supongamos que v_1 es el vector propio asociado al valor propio γ, y v_2 es el vector propio degenerado también asociado a γ. Entonces, podemos formar la matriz de cambio de base P con los vectores v_1 y v_2, es decir, $P = \{v_1\ ,\ v_2\}$

Con esta matriz de cambio de base, obtenemos la transformación de coordenadas $X = PW$, lo cual implica que la ecuación original se transforma como sigue:

$$\dot{W} = P^{-1}\dot{X} = P^{-1}CX = P^{-1}CPW = JW,$$

donde J es la matriz de Jordan correspondiente. Por lo tanto, el sistema transformado en la nueva base $\{v_1\ ,\ v_2\}$ tiene la forma

$$\dot{W} = JW.$$

En la nueva base, las ecuaciones del sistema son:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \gamma w_1 + w_2 \\ \dot{w}_2 = \gamma w_2 \end{cases}$$

Ahora si figamos $k_1 = k_2 = 0$ en las curvas de fase, obtenemos la solución general de la forma:

$$\bar{\alpha}\,(t) = (k_1 e^{\gamma t} t + k_2 e^{\gamma t}, k_2 e^{\gamma t}),$$

y, en consecuencia, el punto crítico $(0, 0)$.

A continuación, analizamos los casos dependiendo del signo de γ

Caso I: Si $\gamma > 0$:

- Subcaso 1: Si $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, se obtiene dos semirrectas, en las cuales $w_1 \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

- Subcaso 2: Si $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, se obtiene dos semirrectas, en las cuales $w_2 \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

En este caso, la relación $\frac{w_1}{w_2} = \frac{k_1 t + k_2}{k_2} \longrightarrow \infty$ cuando $t \longrightarrow \infty$, lo que implica que las órbitas se alejan del punto crítico $(0, 0)$ tangencialmente al eje w_1.

En ambos subcasos, el punto $(0, 0)$ es un nodo degenerado inestable, tal como se muestra en la figura 6.

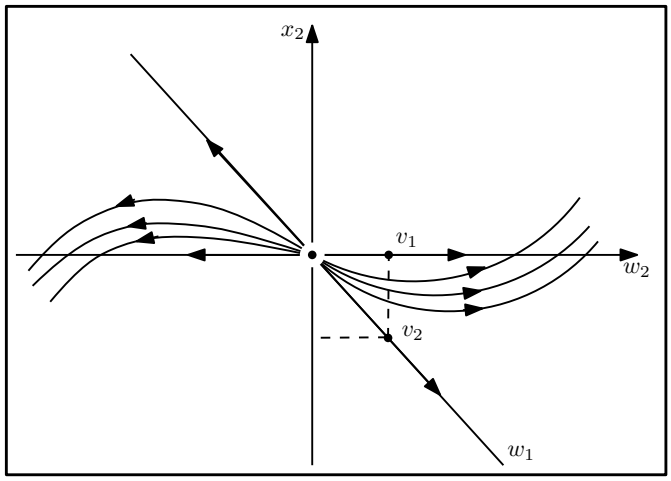


Figura 6: Nodo degenerado inestable

Fuente: *Elaboración propia*

Caso II: Si $\gamma < 0$:

- Subcaso 1: Si $k_2 = 0$, $k_1 \neq 0$, se obtiene dos semirrectas, en las cuales $w_1 \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.
- Subcaso 2: Si $k_2 \neq 0$, $k_1 = 0$, se obtiene dos semirrectas, en las cuales $w_2 \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

En este caso, la relación $\frac{w_2}{w_1} = \frac{k_2}{k_1 t + k_2} \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$, lo que implica que las órbitas se alejan del punto crítico $(0, 0)$ tangencialmente al eje w_1.

En ambos subcasos, el punto $(0, 0)$ es un nodo degenerado estable, tal como se muestra en la figura 7.

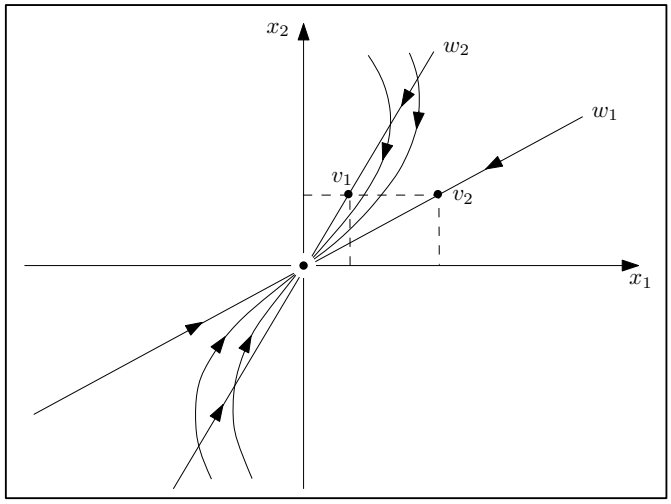


Figura 7: Nodo degenerado estable

Fuente: *Elaboración propia*

Proposición 2.4.4. (Matriz diagonal C con autovalor compleja y distinta) *Si los autovalores de la matriz C son conjugados, es decir, $\gamma_1 = a+ib$ y $\gamma_2 = a-ib$ para el sistema lineal $\dot{X} = CX$, entonces el sistema en un nuevo conjunto de coordenadas se describe por la ecuación $\dot{W} = JW$, donde J es la matriz de Jordan correspondiente:*

$$J = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Demostración. Supongamos que $v_1 = \vec{\alpha}+i\vec{\beta}$, $v_2 = \vec{\alpha}-i\vec{\beta}$ son los vectores propios asociados a los valores propios γ_1 y γ_2, donde $\vec{\alpha} = \binom{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}$ y $\vec{\beta} = \binom{\beta_{12}}{\beta_{22}}$.

Luego, tenemos la relación:

$$C\left(\vec{\alpha} + i\vec{\beta}\right) = (a + ib)\left(\vec{\alpha} + i\vec{\beta}\right)$$

Por tanto, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C\vec{\alpha} = a\vec{\alpha} - b\vec{\beta} \\ C\vec{b} = a\vec{\beta} + b\vec{\alpha} \end{cases}$$

Sea ahora la matriz $P = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ lo que implica que:

$$CP = \begin{bmatrix} a\alpha_{11} - b\beta_{12} & a\beta_{12} + b\alpha_{11} \\ a\alpha_{21} - b\beta_{22} & a\beta_{22} + b\alpha_{21} \end{bmatrix}$$

La matriz J será entonces de la forma:

$$J = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

y la relación $CP = PJ$,se mantiene. Esto implica que:

$$PJ = \begin{bmatrix} \alpha_{11}a + \beta_{12}b & \alpha_{11}b + \beta_{12}a \\ \alpha_{21}a + \beta_{22}b & \alpha_{21}b + \beta_{22}a \end{bmatrix}$$

Al igualar $CP = PJ$, se obtiene que:

$$J = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

En la nueva base $\{v_1\ ,\ v_2\}$, el sistema se transforma en:

$$\dot{W} = JW.$$

El sistema para z_1 y z_2 es:

$$\begin{cases} \dot{w_1} = aw_1 + bw_2 \\ \dot{w_2} = -bw_1 + aw_2 \end{cases}$$

Definimos las coordenadas polares como: $\begin{cases} w_1 = rcos\ \theta \\ w_2 = rsen\ \theta \end{cases}$

Entonces, el sistema de ecuaciones se convierte en:

$$\begin{cases} \dot{w_1} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}sen\theta \\ \dot{w_2} = \dot{r}sen\ \theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

A partir de aquí, obtenemos las siguientes ecuaciones para r y θ :

$$\begin{cases} \dot{r} = ar \\ \dot{\theta} = -b \end{cases}$$

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos que:

$$r(t) = k_2 e^{at} \ , .\theta\,(t) = \ \theta\,(0) - bt,$$

donde k_2 es una constante de integración.

- Si $b > 0$, entonces $\theta \to -\infty$, cuando t$\to +\infty$, lo que indica que las órbitas giran infinitamente alrededor del punto crítico en sentido horario.
- Si $b < 0$, entonces $\theta \to +\infty$, cuando $t \to -\infty$, lo que indica que las órbitas giran infinitamente alrededor del punto crítico en sentido antihorario.

Casos del sistema:

Caso I: $\alpha = 0$

En este caso $r\,(t) = r(0)$. Las órbitas son circunferencias con centro en el origen. El punto $(0, 0)$ se denomina centro, como se muestra en la figura 8.

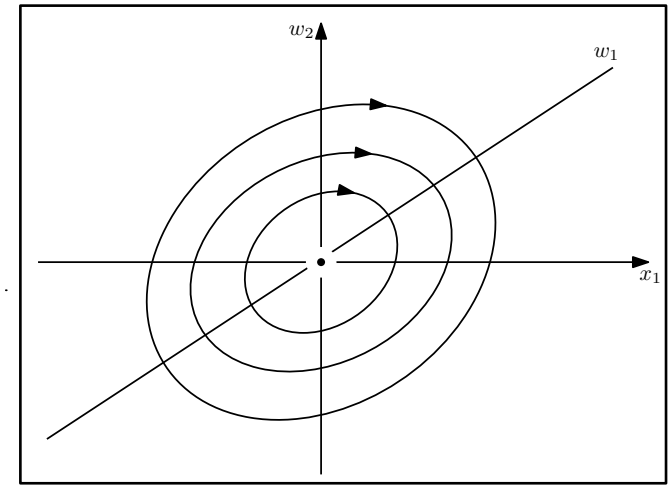


Figura 8: Centro estable

Fuente: *Elaboración propia*

Caso II: $\alpha < 0$

En este caso $r\,(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. Las orbitas son espirales logarítmicas, y el punto $(0, 0)$ se denomina foco estable, como se muestra en la figura 9.

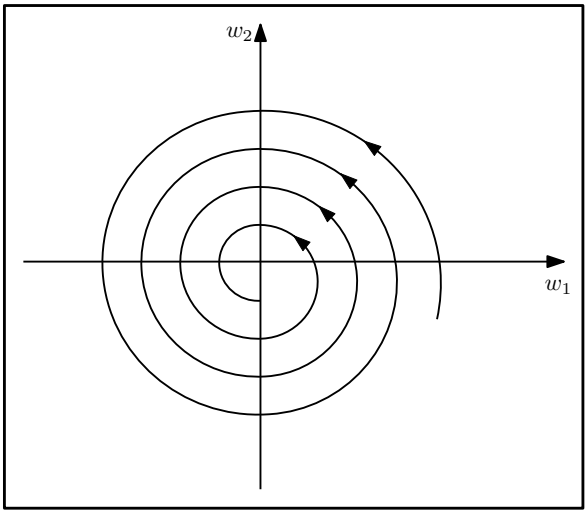


Figura 9: Foco asintóticamente estable

Fuente: *Elaboración propia*

Caso III: $\alpha > 0$

En este caso $r(t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. Las orbitas son espirales logarítmicas, y el punto $(0, 0)$ se denomina foco estable, como se muestra en la figura 10.

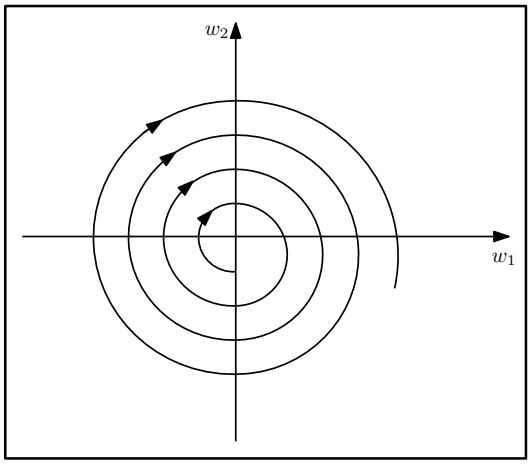


Figura 10: Foco inestable

Fuente: *Elaboración propia*

CAPÍTULO III

ESTABILIDAD DE UN SISTEMA NO LINEAL

Para el análisis de las variables de estudio, se definen conceptos clave como sistema autónomo no lineal, punto crítico, estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad. Además, se introduce la matriz Jacobiana y la función de aproximación lineal como herramientas fundamentales para el estudio del comportamiento local de los sistemas. En este contexto, se exploran también la función de Liapunov y la función estricta de Liapunov, que permiten analizar la estabilidad global de los sistemas.

Los textos consultados, que se citan en la bibliografía, incluyen los trabajos de Hirsch, Kreider, La Salle, Liapunov, Pontryagin y Sotomayor.

3.1. Estabilidad de un sistema autónomo no lineal

Definición 3.1.1. (Sistema autónomo no lineal)
Un sistema autónomo no lineal es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden cuyo campo vectorial es independiente del tiempo. Estos sistemas se representan de la siguiente forma:

$$\dot{X} = f(X) \tag{3.1}$$

donde $f : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación de clase C^1, definida en una vecindad abierta $V \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 3.1.2. (Punto de equilibrio o critico)
Un punto $\bar{x} \in V \subset \mathbb{R}^n$ de un sistema autónomo no lineal descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{X} = f(X)$$

se dice que es un punto de equilibrio o crítico si $f(\bar{x}) = 0$.

Definición 3.1.3. (Estabilidad)

Un punto critico $\bar{x}$ del sistema autónomo no lineal (3.1) es estable si para cualquier vecindad abierta $V_1(\bar{x})$, toda solución $x(t)$ del sistema con condición inicial $x(0) \in V_1$ permanece en V para todo $t \geq 0$. (Figura 11)

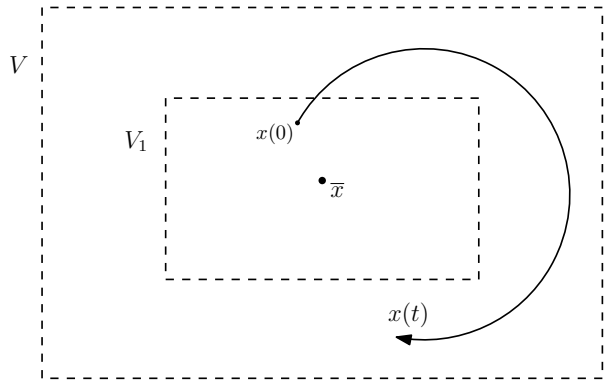


Figura 11: Estabilidad en el punto de equilibrio

Fuente: *Elaboración propia*

Definición 3.1.4. (Asintóticamente Estable)

Un punto crítico $\bar{x}$ del sistema autónomo no lineal (3.1) es asintóticamente estable si $\bar{x}$ es estable y, además, existe una vecindad abierta $V_2(\bar{x}) \subset V_1(\bar{x})$ tal que $\lim_{t\to\infty} x(t) = \overline{x}$. (Figura 12)

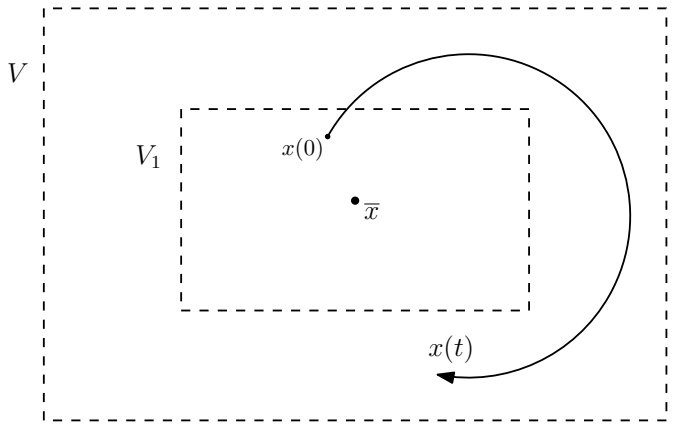


Figura 12: Asintóticamente estable

Fuente: *Elaboración propia*

Definición 3.1.5. (Inestabilidad)
Un punto crítico $\bar{x}$ del sistema autónomo no lineal (3.1) que no es estable se denomina inestable. (Figura 13)

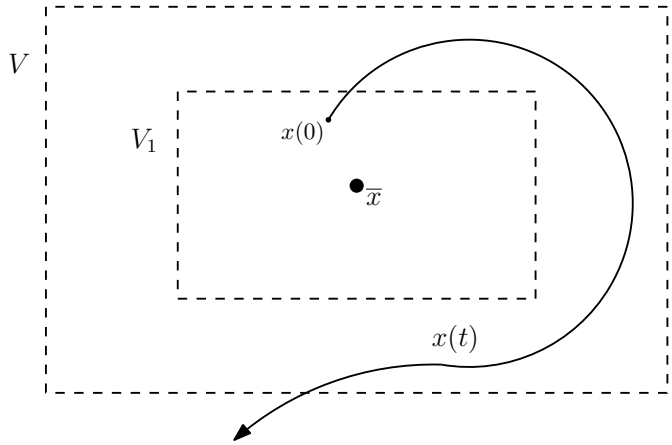


Figura 13: Inestabilidad del punto de equilibrio

Fuente: *Elaboración propia*

Definición 3.1.6. (Matriz Jacobiana)
Sea $f : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real de variable vectorial, $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x}))$, de clase C^1, definida en una vecindad abierta $V \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, f tiene una aproximación lineal en todo punto $\bar{x}$ de f, y la matriz de esta aproximación, con respecto a la base canónica en $\mathbb{R}^n$, es la matriz Jacobiana:

$$J = \left(\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{\bar{x}_0 = \bar{x}}$$

Definición 3.1.7. (Función de aproximación lineal)
Sea f una función de clase C^1 definida en V, y $\bar{x}$ un punto de V. Se dice que una función $T = T(x)$ es una aproximación lineal de f en $\bar{x}$ si T es lineal sobre $\mathbb{R}^n$ y

$$\lim_{\|x-\bar{x}\|\to\overline{0}} \frac{[f(x)-f(\bar{x})]-T(x-\bar{x})}{\|x-\bar{x}\|}=\overline{0} \tag{3.2}$$

Observación 3.1.1

1. Tenga en cuenta que como T es lineal, (3.2) puede escribirse en la forma

$$\lim_{\|x-\bar{x}\|\to\overline{0}} \frac{f(x)-f(\bar{x})-[T(x)-T(\bar{x})]}{\|x-\bar{x}\|}=\overline{0}$$

2. En particular, cuando $\bar{x}=0$ y $f(0)=0$, entonces

$$\lim_{\|x\|\to\overline{0}} \frac{f(x)-T(x)}{\|x\|}=0 \tag{3.3}$$

Proposición 3.1.1. *Si T_1 y T_2 son aproximaciones lineales a f en $\bar{x}$, entonces $T_1=T_2$.*

Demostración. Si trasladamos el origen de coordenadas a $\bar{x}$, en caso de ser necesario, podemos suponer que $\bar{x}=0$. En este caso, la ecuación (3.3) nos da:

$$\lim_{\|x\|\to\overline{0}} \frac{f(x)-T_1(x)}{\|x\|}=0 \quad , \quad \lim_{\|x\|\to\overline{0}} \frac{f(x)-T_2(x)}{\|x\|}=0$$

Por la desigualdad triangular, tenemos que

$$\|T_1(x)-T_2(x)\| \leq \|T_1(x)-f(x)\|+\|f(x)-T_2(x)\|,$$

Es decir,

$$\|(T_1-T_2)(x)\| \leq \|T_1(x)-f(x)\|+\|T_2(x)-f(x)\|,$$

De aquí se sigue que:

$$\lim_{\|x\|\to\overline{0}} \frac{(T_1-T_2)(x)}{\|x\|}=0$$

En este caso, $\frac{x}{\|x\|}$ es un vector constante, lo que implica que $T_1=T_2$ debido a la linealidad.

Proposición 3.1.2. *Sea $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x))$ una función de clase C^1 en un abierto $V\subset\mathbb{R}^n$. Entonces, f tiene una aproximación lineal en todo punto*

$\bar{x} \in V$, y la matriz de esta aproximación con respecto a la base canónica en $\mathbb{R}^n$, es la matriz jacobiana:

$$J_M = \left[\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f_1}{\partial \mathrm{x}_1} & \cdots & \dfrac{\partial_1}{\partial \mathrm{x}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{x=\bar{x}}$$

La matriz J_M se conoce como la matriz Jacobiano de f en $\bar{x} = (x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$, y la aproximación lineal a f en $\bar{x}$ se denomina la derivada de f en $\bar{x}$.

Demostración. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la transformación lineal definida por J. Debemos probar que:

$$\lim_{\|x-\bar{x}\| \to \bar{0}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - T(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} = \bar{0}$$

Para hacerlo, es suficiente mostrar que el valor absoluto de cada componente del vector tiende a cero en el límite, es decir, que

$$\lim_{\|x\| \to \bar{0}} \frac{f_k(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) - f_k(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k(\bar{x}_1, .., \bar{x}_n)}{\partial x_i}(x_i - \bar{x}_i)}{\|x\|} = 0 \quad (3.4)$$

para $1 \leq k \leq n$.

$$\begin{aligned} f_k(x_1, \ldots, x_n) - f_k(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = & [f_k(x_1,\ \ldots, x_n) - f_k(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)] \\ & + [f_k(\bar{x}_1, \ldots, x_n) - f_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, x_n)] \\ & + [f_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, x_n) - f_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, x_n)] + \ldots \\ & + [f_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, x_n) - f_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, x_n)] \end{aligned}$$

Luego aplicamos el valor medio a cada uno de los términos entre corchetes de la expresión anterior y obtenemos

$$[f_k(x_1,\ \ldots,x_n) - f_k(\bar{x}_1,\ldots,x_n)] = (x_1-\bar{x}_1)\,\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\,[\bar{x}_1+\theta_1(x_1-\bar{x}_1)\,x_2,\ldots,x_n]$$

$$[f_k(\bar{x}_1,x_2,\ \ldots,x_n) - f_k(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,x_n)] = (x_2-\bar{x}_2)\,\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\,[\bar{x}_2+\theta_2(x_2-\bar{x}_2)\,x_3,\ldots,x_n]$$

$$[f_k(\bar{x}_1,\bar{x}_2,x_3,\ \ldots,x_n) - f_k(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,x_n)] = (x_3-\bar{x}_3)\,\frac{\partial f_k}{\partial x_3}\,[\bar{x}_3+\theta_3(x_3-\bar{x}_3)\,x_4,\ldots,x_n]$$

$$[f_k(\bar{x}_1,\ldots,\ x_i,\ldots,x_n) - f_k(\bar{x}_1,\ldots,x_n)] = (x_i-\bar{x}_i)\,\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\,[\bar{x}_i+\theta_i(x_i-\bar{x}_i)\,x_{i+1},\ldots,x_n]$$

Luego

$$f_k(x) - f_k(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_i)\,\frac{\partial(\bar{x}_1,..,\bar{x}_i+\theta_i(x_i-\bar{x}_i)\,x_{i+1},\ldots,x_n)}{\partial x_i}$$

para $0<\theta_i<1,\ \forall i$.

Por simplicidad, volvemos a escribir esta igualdad en la forma:

$$f_k(x_1,\ \ldots,x_n) - f_k(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_i)\,\frac{\partial f_k(\ldots\theta_i\ldots)}{\partial x_i}$$

y sustituyendo en (3.4) obtenemos:

$$\frac{1}{\|x-\bar{x}\|}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_i)\left[\frac{\partial f_k(\ldots\theta_i\ldots)}{\partial x_i} - \frac{\partial f_k(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)}{\partial x_i}\right]$$

El valor absoluto de esta cantidad no excede:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f_k(\ldots\theta_i\ldots)}{\partial x_i} - \frac{\partial f_k(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)}{\partial x_i}\right],$$

la cual tiende a cero cuando $\|x-\bar{x}\|\to 0$, ya que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ son continua.

Definición 3.1.3. (Punto Crítico Estable)
Un punto critico $\bar{x}$ del sistema autónomo no lineal (3.1) es estable si ningún valor propio del $J_M f(\bar{x})$ tiene parte real positiva.

Ejemplo 3.1.1. Sea el sistema autónomo no lineal dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\left(\sinh x\right)\left(\cosh x_2\right) \\ \dot{x}_2 = -2x_2 e^{x_1}\left(1 + x_2\right) \end{cases}$$

lo cual puede expresarse de la siguiente manera como un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

El origen $\bar{x} = (0, 0)$ es un punto crítico de este sistema. Aplicando la proposición 3.1.2. resulta un sistema lineal autónomo de coeficientes constantes:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = J_M \cdot f|_{x=\bar{x}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Para calcular la matriz Jacobiana, consideramos las derivadas parciales de las funciones $f_1\left(x_1, x_2\right)\ y\ f_2\left(x_1, x_2\right)$:

$$f_1\left(x_1, x_2\right) = -\left(senhx_1\right)\left(\cosh x_2\right) \quad , \quad f_2(x_1, x_2) = -2x_2 e^{x_1}\left(1 + x_2\right)$$

Luego, la matriz Jacobiana es:

$$J_M f|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}=(0,0)}$$

Evaluando las derivadas parciales en $\bar{x} = (0, 0)$, obtenemos

$$= \begin{bmatrix} -\cosh x_1 \cosh x_2 & -senhxsenhx_2 \\ -2x_2 e^{x_1}\left(1 + x_2\right) & -2e^{x_1} - 4x_2 e^{x_1} \end{bmatrix}_{\bar{x}=(0,0)}$$

Esto da como resultado la siguiente matriz Jacobiana

$$J_M f|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.5), obtenemos el sistema autónomo lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Lo cual se traduce en las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

Los valores propios de este sistema son -1 y -2. Según la definición 3.1.8 (Punto crítico estable), esto implica que $\bar{x} = (0, 0)$ es un punto crítico estable.

3.2. Estabilidad de Liapunov un sistema autónomo no lineal

Definición 3.2.1. (Derivada de Liapunov)
Sea $L : V_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función derivable definida en una vecindad abierta $V_1 \subset V de \bar{x}$. Definimos la derivada de Liapunov $\dot{L} : V_1 \to \mathbb{R}$ como

$$\dot{L}(\bar{x}) = \langle \nabla L(\bar{x}), f(\bar{x}) \rangle,$$

donde $\nabla L(\bar{x})$ es el gradiente de L evaluado en $\bar{x}$, y $f(\bar{x})$ es la función vectorial que describe la dinámica del sistema.

Definición 3.2.2. (Función de Liapunov)
Sea $\bar{x} \in V$ un punto crítico del sistema autónomo no lineal de $\dot{X} = f(X)$. Una función de Liapunov para $\bar{x}$ es una función $L : V(\bar{x}) \to \mathbb{R}$, diferenciable y definida en una vecindad abierta V que contiene a $\bar{x}$, que satisface las siguientes condiciones:

1. $L(\bar{x}) = 0$ y $L(x) > 0$, para todo $x \neq \bar{x}$.
2. $\dot{L}(x) \leq 0$ en $V(\bar{x})$.

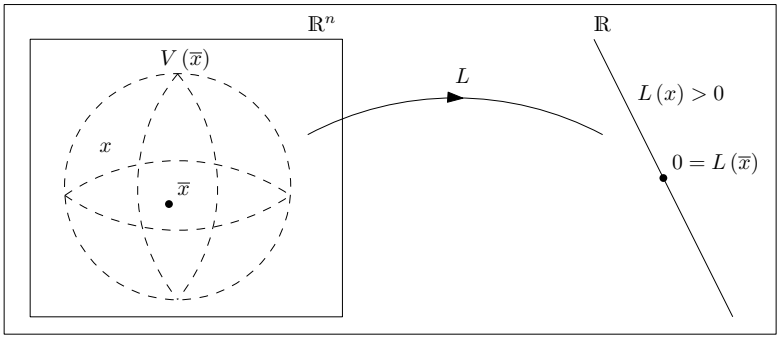


Figura 14: Función de Liapunov en $V(\bar{x})$

Fuente: *Elaboración propia*

Definición 3.2.3. (Función estricta de Liapunov)
Sea $\bar{x} \in V$ un punto crítico del sistema autónomo no lineal de $\dot{X} = f(X)$. Una función estricta de Liapunov para $\bar{x}$ es una función $L : V(\bar{x}) \to \mathbb{R}$, diferenciable y definida en una vecindad abierta W que contiene a $\bar{x}$, que satisface la siguientes condición $\dot{L}(x) < 0$ en $V(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$.

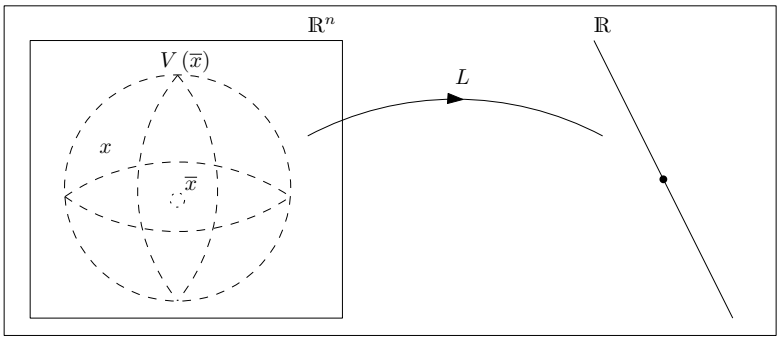


Figura 15: Función de Liapunov en $V(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$

Fuente: *Elaboración propia*

Definición 3.2.4. (Estabilidad global)
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 tal que $f(0) = 0$. El punto crítico $\bar{x} = 0$ es globalmente estable sí, para toda solución $x(t)$ de $\dot{X} = f(X)$, se cumple que:

1. *$\bar{x} = 0$ es estable.*
2. $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

Definición 3.2.5. (Estabilidad global según Liapunov)
Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función estricta de Liapunov para el sistema autónomo no lineal $\dot{X} = f(X)$ en $\bar{x}$. Supongamos que, para cada k¿0 dado, existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $|x| > \varepsilon$, entonces $L(x) > k$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. En este caso $\bar{x} = 0$ es globalmente estable.

Definición 3.2.6. (Inestabilidad de Chatáev)
Sea $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función derivable que satisface las siguientes condiciones en un entorno h- cerrado alrededor del origen de coordenadas:

1. *En un entorno arbitrariamente pequeño U del origen de coordenadas, existe una región R donde $L > 0$. Además, $L = 0$ sobre la parte de la frontera de R que se encuentra dentro de U.*

2. *En la región R donde $L > 0$, la derivada*

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$$

Además, en la región $L \geq \alpha$, donde $\alpha > 0$, se cumple que $\frac{dL}{dt} \geq \beta > 0$ para alguna constante β.

Si se cumple estas condiciones, entonces el punto critico $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ del sistema (3.1) es inestable.

3.3. Campo de fuerza conservativo

Definición 3.3.1. (Campo de Fuerza)
Sea $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. Decimos que F_1 es un campo de fuerza si para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, el vector $F_1(\vec{x})$ representa una fuerza que actúa sobre una partícula localizada en el vector $\vec{x}$.

Definición 3.3.2. (Campo de Fuerza Conservativo)
Sea $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de fuerza. Decimos que F_1 es conservativo si existe una función

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

de clase C^1 tal que:

$$F_1\left(\vec{x}\right) = -\left(\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial x_2}, \frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial x_3}\right) = -\nabla\,\psi(\vec{x})$$

La función ψ se llama energía potencial del campo de Fuerza. Más propiamente, ψ es una energía potencial porque agregarle una constante no cambia el campo de fuerza, es decir, $\nabla\left(\psi\left(\vec{x}\right) + C\right) = \nabla\psi(\vec{x})$.

Ejemplo 3.3.1. El campo de fuerza definido por $F_1\left(\vec{x}\right) = (-6x_1, -8x_2, -10x_3)$ es un campo conservativo ya que existe una función $\psi\left(\vec{x}\right) = 3{x_1}^2 + 4{x_2}^2 + 5{x_3}^2$ tal que:

$$F_1\left(\vec{x}\right) = -\nabla\,\psi(\vec{x})$$

Definición 3.3.3. (Espacio de Estados)
El espacio de estados es el producto cartesiano entre dos vectores, es decir,

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \left\{(\vec{x}, \vec{v}) :\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Esto significa que un punto en el espacio de estados está formado por un par ordenado $(\vec{x}, \vec{v})$, donde: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ es el vector de posición en $\mathbb{R}^3$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es el vector de posición en $\mathbb{R}^3$.

Observación 3.3.1. La energía de una partícula se puede interpretar como una función definida en el espacio de estado, $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, que asigna a cada par de posición y velocidad un valor real correspondiente a la energía de la partícula.
La función que describes es:

$$E\left(\vec{x}, \vec{v}\right) = \frac{1}{2}m\left|\vec{v}\right|^2 + L(\vec{x})$$

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

4.1. Estabilidad y Estabilidad asintótica según Lyapunov

Proposición 4.1.1. (Estabilidad según Liapunov)
Sea $\bar{x} \in V$ un punto crítico de un sistema autónomo no lineal dado por $\dot{X} = f(X)$, donde V es una vecindad abierta que contiene a $\bar{x}$. Sea $L : V_1(\bar{x}) \to \mathbb{R}$, una función diferenciable definida en una vecindad abierta $V_1(\bar{x}) \subset V$. Si L es una función de Liapunov para $\bar{x}$, entonces $\bar{x}$ es un punto crítico estable.

Demostración. Sea $L : V_1(\bar{x}) \to \mathbb{R}$ una función de Liapunov definida en un entorno de $\bar{x}$, y sea $r > 0$ suficientemente pequeño para que la bola $B_r(\bar{x}) \subset V_1(\bar{x})$, donde

$$B_r(\bar{x}) = \{x \in V_1(\overline{x}) : \|x - \overline{x}\| \leq r\}$$

Denotaremos por V_0 a esta bola $B_r(\bar{x})$, es decir, $V_0 = B_r(\bar{x})$.

Definimos $\alpha = \text{mín}\{L(x), x \in \partial B_r(\bar{x})\}$, es decir, α es el valor mínimo de la función de Liapunov sobre la superficie esféricas de radio r centrada en $\bar{x}$. Por la definición de función de Liapunov (Definición 3.2.2, parte (1)), se tiene que $\alpha > 0$.

Afirmación 1: $L(x) < \alpha$ para todo $x \in B_r(\bar{x}) = W_0(\bar{x})$.
Dado que L es una función continua en $\bar{x} \in V_0$ y $\alpha > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - \overline{x}\| < \delta$ entonces $|L(x) - L(\bar{x})| < \alpha$. En particular, tomemos $\varepsilon = \alpha$, y por la definición de continuidad, existe $\delta' > 0$ tal que:

$$\|x - \overline{x}\| < \delta' \Rightarrow |L(x) - L(\overline{x})| < \alpha$$

Dado que $L(\bar{x})$ es menor que α en la frontera de la bola $\partial B_r(\bar{x})$, podemos concluir que $L(x) < \alpha$ para todo punto $x \in V_0$ cuya distancia a $\bar{x}$ sea menor que δ'. En particular, para todo $x \in B_r(\bar{x})$, se cumple que $L(x) < \alpha$.

Afirmación 2: Toda solución $x(t)$ de $\dot{X} = f(X)$ que comienza en $x(0) \in V_1(\bar{x})$ permanece en $B_r(\bar{x})$ para $t > 0$.

Supongamos, por el contrario, que existe un $t_1 > 0$ tal que $\|x(t_1) - \overline{x}\| = r$, es decir, que la solución $x(t)$ alcanza la frontera de la bola $B_r(\bar{x})$ en el tiempo t_1.

Dado que L es una función de Liapunov no creciente a lo largo de las trayectorias del sistema, se cumple que:

$$L(x(t)) - L(x(0)) \geq L(x(t_1)).$$

Sin embargo, como $x(t_1) \in \partial B_r(\bar{x})$, tenemos que $L(x(t_1)) \geq \alpha$, lo que lleva a la contradicción:

$$L(x(t_1)) \geq \alpha > L(x(0)).$$

Esto implica que no puede existir tal t_1, y por lo tanto, la solución $x(t)$ permanece en $B_r(\bar{x})$ para todo $t > 0$. En consecuencia $\bar{x}$ es un punto crítico estable.

Proposición 4.1.2. (Estabilidad asintótica según Liapunov)
Sea $\bar{x} \in V$ un punto de equilibrio de un sistema autónomo no lineal dado por $\dot{X} = f(X)$. Sea $L : V_2(\bar{x}) \to \mathbb{R}$, una función diferenciable definida en una vecindad abierta $V_2(\bar{x}) \subset V_1$. Si L es una función estricta de Liapunov para $\bar{x}$, entonces $\bar{x}$ es asintóticamente estable.

Demostración. Pretendemos demostrar que:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \overline{x}, \quad \forall x \in V_2(\bar{x}),$$

donde $V_2(\bar{x})$ es el conjunto de las órbitas cercanas a $\bar{x}$. Supongamos ahora que L es estrictamente decreciente sobre las órbitas en $V_2(\bar{x})\{\bar{x}\}$.

Sea x(t) una solución del sistema de ecuaciones diferenciales que comienza en $x(0) \in V_1(\bar{x})\{\bar{x}\}$. Consideremos una sucesión creciente de tiempos $t_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} x(t_n) = z_0$$

Afirmación 1: $\bar{x} = z_0$

Por la continuidad de L, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} L\left(x\left(t_n\right)\right) = L(z_0)$$

Dado que $L\left(x\left(t_n\right)\right)$ es estrictamente decreciente sobre las trayectorias, se cumple que:

$$L\left(z_0\right) < L\left(x\left(t\right)\right), \quad \forall t \geq 0.$$

Ahora, supongamos por el contrario, que $\bar{x} \neq z_0$. Sea $x(t)$ la solución que comienza en z_0.

Para cualquier $s > 0$, tenemos que:

$$L\left(z\left(s\right)\right) < L\left(z\left(0\right)\right) = L(z_0).$$

Esto implica que para toda solución $y(s)$ que comienza lo suficientemente cerca de z_0, se cumple:

$$L\left(y\left(s\right)\right) < L\left(z_0\right).$$

Tomando y $(0) = x(t_n)$, llegamos a una contradicción. De hecho, tenemos:

$$L\left(x\left(t_n + s\right)\right) < L\left(z_0\right),$$

lo cual contradice el hecho de que $L\left(x\left(t\right)\right)$ es estrictamente decreciente a lo largo de las trayectorias del sistema. Por lo tanto, la suposición de que $\bar{x} \neq z_0$ no puede ser cierta.

En consecuencia, $z_0 = \bar{x}$.

Hemos demostrado que $\bar{x}$ es el único punto de acumulación posible de la sucesión $\{x\left(t\right) : t > 0\}$. Esto implica que:

$$\lim_{t\to\infty} x\left(t\right) = \bar{x}, \quad \forall x \in V_2\left(\bar{x}\right)$$

Como $\bar{x}$ es el punto crítico al que convergen todas las soluciones cercanas a él, concluimos que $\bar{x}$ es un punto crítico asintóticamente estable.

Ejemplo 4.1.1. Consideremos el sistema autónomo no lineal en $\mathbb{R}^2$ descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 \end{cases}$$

Deseamos analizar la estabilidad del origen $(0, 0)$ como punto crítico.

Solución.
Afirmación: El origen $(0, 0)$ es estable y asintóticamente estable para el sistema autónomo no lineal.

El origen $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio del sistema, ya que al resolver el sistema $\dot{x}_1 = 0$ y $\dot{x}_2 = 0$, se obtiene que $x_1 = x_2 = 0$.

Proponemos la siguiente función candidata de Liapunov:

$$L\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Esta función es claramente positiva en todo $\mathbb{R}^2$ excepto en el origen, donde $L(0, 0) = 0$.

Verificamos las condiciones de la definición de Función de Liapunov (Definición 3.2.2) y Función estricta de Liapunov (Definición3.2.3) para garantizar la estabilidad.

1. Positividad de $L\left(x_1, x_2\right)$

   $L\left(0, 0\right) = 0 y L\left(x_1, x_2\right) > 0, \quad \forall\ \left(x_1, x_2\right) \neq (0, 0)$

   Esta condición se cumple, ya que $L\left(x_1, x_2\right)$ es siempre positiva excepto en el origen.

2. Derivada de $L\left(x_1, x_2\right)$: Calculamos la derivada temporal

   $\dot{L}\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{2}\left(2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2\right) = -\left(x_1^2 + x_2^2\right) + x_1x_2(x_1 + x_2)$

   Consideremos el comportamiento de la derivada $\dot{L}\left(x_1, x_2\right)$ bajo ciertas condiciones sobre x_1 y x_2:

   - Si $x_1 < 1$ y $x_2 \neq 0$, entonces $x_1x_2^2 < x_2^2$.

- Si $x_2 < 1$ y $x_1 \neq 0$, entonces $x_1^2 x_2 < x_1^2$.

Si $x_1 < 1$, $x_2 < 1$ y $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, entonces:

$$x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 < x_1^2 + x_2^2.$$

Por lo tanto, tenemos: $\dot{L}(x_1, x_2) < 0$ en el conjunto

$$V(0,0) = \left\{(x_1, x_2) \in \ \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1, \ |x_2| < 1\right\}$$

Esto implica que $\dot{L}(x_1, x_2) \leq 0$ en $V(0,0)$, con $\dot{L}(x_1, x_2) < 0$ para $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

La función $L(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ es una función de Liapunov, y dado que $\dot{L}(x_1, x_2) < 0$ en una vecindad del origen, podemos concluir que:

El origen es estable según la proposición 4.1.1(Estabilidad según Liapunov). Además, el origen es asintóticamente estable ya que es una función estricta de Liapunov estricta, es decir, $\dot{L}(x_1, x_2) < 0$ para $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, como establece la proposición 4.1.2(Estabilidad asintótica según Liapunov).

Por lo tanto, el origen $(0, 0)$ es un punto crítico asintóticamente estable para este sistema autónomo no lineal.

Ejemplo 4.1.2. Consideremos el siguiente sistema autónomo no lineal en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 x_1 \end{cases}$$

Deseamos analizar la estabilidad del origen $(0, 0)$.

Solución.

Afirmación: El origen $(0, 0)$ es el único punto crítico estable y asintóticamente estable para el sistema autónomo no lineal.

El origen $(0, 0)$ es un punto crítico del sistema. Esto se puede verificar resolviendo las ecuaciones $\dot{x}_1 = 0$ y $\dot{x}_2 = 0$, que nos da $x_1 = x_2 = 0$.

Proponemos la siguiente función candidata de Liapunov:

$$L\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + x_2^2,$$

Esta función es positiva en todo $\mathbb{R}^2$ excepto en el origen, donde $L(0,0) = 0$. Esto cumple con la condición (a) de la definición 3.2.2 (Función de Liapunov).

Calculamos la derivada de $L\left(x_1, x_2\right)$:

$$\dot{L}\left(x_1, x_2\right) = \left(2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2\right) = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1x_2 - 1\right)$$

Análisis de la derivada $\dot{L}\left(x_1, x_2\right)$:

Observamos que $\dot{L}\left(x_1, x_2\right)$ depende del signo de $x_1x_2 - 1$. En particular:

- Si $x_1x_2 < 1$, entonces $\dot{L}\left(x_1, x_2\right) \leq 0$.
- Esto implica que $\dot{L}\left(x_1, x_2\right)$ es no positiva en el conjunto

$$V\left(0,\ 0\right) = \left\{\left(x_1, x_2\right) \in\ \mathbb{R}^2 : x_1x_2 < 1\right\}.$$

Dado que $\dot{L}\left(x_1, x_2\right) \leq 0$ en $V\left(0,\ 0\right)$, por la proposición 4.1.1 (Estabilidad según Liapunov), concluimos que el origen (0,0) es estable.

Además, observamos que $\dot{L}\left(x_1, x_2\right) < 0$ en $V\left(0, 0\right)\left\{(0,\ 0)\right\}$, lo que significa que la función $L\left(x_1, x_2\right)$ es estricta en esta vecindad. Por la proposición 4.1.2 (Estabilidad asintótica según Liapunov), concluimos que el origen $(0, 0)$ es asintóticamente estable.

Ejemplo 4.1.3. Consideremos el sistema autónomo no lineal en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2^3 \\ \dot{x}_2 = \ x_1^3 \end{cases}$$

Deseamos analizar la estabilidad del origen $(0, 0)$ como punto crítico.

Solución.
Afirmación: El origen $(0,0)$ es estable para el sistema autónomo no lineal. Sin embargo, no es asintóticamente estable.

El origen $(0,0)$ es un punto crítico del sistema. Esto se puede verificar al observar que cuando $\dot{x}_1 = 0$ y $\dot{x}_2 = 0$, se obtiene $x_1 = x_2 = 0$. Por lo tanto, $(0,0)$ es un punto de equilibrio.

Proponemos la siguiente función candidata de Liapunov:

$$L(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4,$$

Esta función es válida como función de Liapunov para el sistema en el origen, ya que:

- $L(0,0) = 0$.
- $L(x_1, x_2) > 0$ para $(x_1, x_2) \neq (0,0)$, ya que x_1^4 y x_2^4 son siempre no negativos y son cero solo en el origen.

Calculamos la derivada de $L(x_1, x_2)$ a lo largo de las trayectorias del sistema. Usamos las ecuaciones del sistema para calcular $\dot{L}(x_1, x_2)$:

$$\dot{L}(x_1, x_2) = 4x_1^3\dot{x}_1 + 4x_2^3\dot{x}_2 = 0$$

Esto muestra que la derivada de $L(x_1, x_2)$ es cero a lo largo de las trayectorias del sistema.

La derivada $\dot{L}(x_1, x_2) = 0$ implica que las soluciones del sistema permanecen en las curvas de nivel de $L(x_1, x_2)$, es decir, en las curvas definidas por: $x_1^4 + x_2^4 = k$, donde $k \geq 0$

Estas curvas son cerradas y rodean el origen $(0,0)$, lo que sugiere que el sistema es estable, pero no asintóticamente estable, ya que las soluciones no tienden al origen.

Según la Proposición 4.1.1 (Estabilidad según Liapunov), como la derivada de $L(x_1, x_2)$ es no positiva (de hecho, cero) a lo largo de las trayectorias del sistema,

podemos concluir que el origen $(0, 0)$ es estable.

Sin embargo, debido a que las soluciones permanecen en las curvas nivel cerradas y no tienden al origen, el origen no es asintóticamente estable. Las trayectorias podrían permanecer en las curvas de nivel sin converger al origen.

Para obtener más información sobre la estabilidad, calculamos la matriz Jacobiana $DF(x_1, x_2)$ en el origen:

$$DF(0,\ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz Jacobiana en el origen tiene dos autovalores cero, lo que también indica que no podemos determinar la estabilidad asintótica únicamente con esta matriz, ya que no proporciona información sobre la convergencia hacia el origen.

Ejemplo 4.1.4. Consideremos el sistema autónomo no lineal en $\mathbb{R}^2$, dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = \ 3x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

Deseamos analizar la estabilidad del origen $(0, 0)$.

Solución.
Afirmación: El origen $(0, 0)$ es estable y asintóticamente estable para el sistema autónomo no lineal.

El origen $(0, 0)$ es un punto crítico del sistema. Esto se puede verificar al observar que cuando $\dot{x}_1 = 0$ y $\dot{x}_2 = 0$, se obtiene $x_1 = x_2 = 0$. Por lo tanto, $(0, 0)$ es un punto de equilibrio.

Para analizar la estabilidad del origen, calculamos la matriz Jacobiana del sistema en el punto crítico $(0, 0)$:

Primero, el único punto crítico es $(0, 0)$. La parte lineal del sistema en origen, que es dada por la matriz Jacobiana evaluada en $(0, 0)$:

$$DF\,(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Los autovalores son $\lambda_1,\ \lambda_2 = \pm 2\sqrt{3}i$ son autovalores imaginarios puros. Esto indica que el origen es un punto crítico del tipo centro (no asintóticamente estable).

Proponemos una función de Liapunov de la forma:

$$L\,(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2,$$

donde $a_{11}, a_{12} \in \,]0, \infty[\ .$

La función de Liapunov $L\,(x_1, x_2)$ es válida para el sistema en el origen, ya que cumple las siguientes condiciones:

Calculamos la derivada de $L\,(x_1, x_2)$ a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\dot{L}\,(x_1, x_2) = 2a_{11}x_1\dot{x}_1 + 2a_{12}x_2\dot{x}_2$$

Sustituyendo las ecuaciones del sistema:

$$\dot{L}\,(x_1, x_2) = -8a_{11}x_1x_2 - 2a_{11}x_1^4 + 6a_{12}x_1x_2 - 2a_{11}x_2^4$$

Queremos que $\dot{L} \leq 0$ en una vecindad de $(0,0)$; esto se puede lograr seleccionando $a_{11} = 3$ y $a_{12} = 4$. Así, tenemos que:

$$L\,(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_2^2$$

Esta es una función de Liapunov. Según la proposición 4.1.1(Estabilidad según Liapunov) , el origen $(0,0)$ es estable. Además, como $L\,(x_1, x_2)$ es una función estricta de Liapunov ($\dot{L}\,(x_1, x_2) < 0$ para $(x_1, x_2) \neq (0,0)$), por la proposición 4.1.2 (Estabilidad asintótica según Liapunov), podemos afirmar que es asintóticamente estable.

4.2. Funciones de Lyapunov para Sistemas autónomos lineales

Consideremos el sistema autónomo lineal con coeficientes constantes:

$$\dot{X} = CX \tag{4.1}$$

donde C es una matriz $n \times n$ y todos sus valores propios de tienen real negativa.

Solución general del sistema:

Sea $e_1, e_2 \ldots, e_n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Denotemos por

$$x_i(t) = x_i(t, e_i) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \ldots, x_{in}(t))$$

la solución de (4.1) que satisface la condición inicial $x_i(0) = e_i \quad \forall\, i, \quad 1 \leq i \leq n$.

Dado un vector arbitrario $Z = z_1 e_1 + z_2 e_2 \ldots + z e_n$ en $\mathbb{R}^n$, la solución general del sistema que satisface la condición inicial $x(0) = Z$ se expresa como:

$$X(t, Z) = \sum_{i=1}^{n} z_i x_i(t) = z_1 x_1(t) + z_2 x_2(t) + \ldots + z_n x_n(t)$$

Proposición 4.2.1. (Función de Liapunov para sistemas autónomos lineales)

Consideremos la función definida por:

$$L(Z) = \int_0^{+\infty} \|X(t, Z)\|^2 dt \tag{4.2}$$

Si la integral converge, entonces $L(Z)$ es una función de Liapunov para el sistema

$$\dot{X} = CX,$$

bajo la condición de que todos los valores propios de la matriz C tengan partes reales negativas.

Demostración. Primero, observamos que si la integral converge, entonces se cumple:

Afirmación: La función $L(Z)$ está bien definida. Dado que $X(t, Z)$ se puede expresar como una combinación lineal de las soluciones $x_i(t)$ del sistema, tenemos:

$$X(t, Z) = \sum_{i=1}^{n} z_i x_i(t)$$

Sustituyendo esta expresión en (4.2), obtenemos:

$$L(Z) = \int_0^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} z_i x_i(t) \right\|^2 dt$$

Desarrollando el término dentro de la norma:

$$L(Z) = \int_0^{\infty} \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} z_i x_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} z_i x_{in}(t) \right) \right\|^2 dt$$

Esto se puede expandir como:

$$L(Z) = \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i x_{ik}(t) \right)^2 dt$$

Es decir, la integral se puede escribir como:

$$L(Z) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i x_{ik}(t) \right)^2$$

y finalmente, podemos reescribir la integral como:

$$L(Z) = \sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}(t) x_{jk}(t) \right) dt$$

Dado que los valores propios de C tienen partes reales negativas, las integrales de las soluciones son convergentes, lo que garantiza que $L(Z)$ este bien definida.

A continuación, verificamos que $L(Z)$ es una función de Liapunov para el sistema $\dot{X} = CX$. Como vimos anteriormente, $L(Z)$ cumple la condición (a) de la definición 3.2.2 de una Función de Liapunov. Ahora debemos verificar que cumple

la condición (b), según la definición 3.2.3 de una función estricta de Liapunov.

Sea $X(t, x_0)$ una solución $\dot{X} = CX$ que satisface la condición inicial X(0) = x_0. Entonces en (4.2) tenemos:

$$L\left(X(t, x_0)\ \right) = \int_0^{+\infty} \|X\left(s, X\left(t, x_0\right)\right)\|^2 ds = \int_0^{+\infty} \|X\left(s + t, x_0\right)\|^2 ds \tag{4.3}$$

Realizando un cambio de variable $u = s + t$, $du = ds$, y ajustando los límites de integración:

$$L\left(X(t, x_0)\ \right) = \int_t^{+\infty} \|X\left(u, x_0\right)\|^2 du$$

La derivada de $L\left(X(t, x_0)\right)$ con respecto a t es:

$$\dot{L}\left(X(t, x_0)\ \right) = \frac{d}{dx} \int_t^{+\infty} \|X\left(u, x_0\right)\|^2 du = -\|X\left(u, x_0\right)\|^2 \tag{4.4}$$

Por lo tanto, $\dot{L}\left(X(t, x_0)\ \right) \leq 0$ en $\mathbb{R}^n$. Esto implica que $L(Y)$ es una función de Liapunov para el sistema $\dot{X} = AX$ según la proposición 4.1.1 (Estabilidad según Liapunov), el origen es un punto de estabilidad para el sistema (4.1).

Además, se cumple la definición 3.2.3 de función estricta de Liapunov, es decir, $\dot{L}\left(X(t, x_0)\ \right) < 0$ en $\mathbb{R}^n \{0\}$. Esto implica que L es una función estricta de Liapunov para el sistema $\dot{X} = CX$. Por la proposición 4.1.2 (Estabilidad asintótica según Liapunov), el origen es un punto de estabilidad asintótica para el sistema (4.1).

Ejemplo 4.2.1. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 5x_2 \end{cases} \tag{4.5}$$

Buscamos analizar la estabilidad del origen $(0, 0)$.

Solución. El sistema de ecuaciones (4.5) puede representarse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es:

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Para analizar la estabilidad del sistema, calculamos los valores propios de la matriz C. La ecuación característica de C es:

$$\det\left(C - \lambda I\right) = 0$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos los valores propios $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -4$. Con los valores propios podemos escribir el sistema autónomo asociado en términos de variables z_1 y z_2 como:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -3z_1 \\ \dot{z}_2 = -4z_2 \end{cases}$$

Las soluciones generales para cada uno de los componentes del sistema autónomo son:

$z_1\left(t, e_1\right) = \left(e^{-3t}, 0\right)$ tal que $z_1\left(0\right) = e_1$

$z_2\left(t, e_2\right) = \left(0, e^{-4t}\right)$ tal que $z_2\left(0\right) = e_2$

Donde e_1 y e_2 son las condiciones iniciales.

Definimos una función de Liapunov $L\left(z_1, z_2\right)$ como la integral del cuadrado de la norma del vector solución $Y = z_1e_1 + z_2e_2$:

$$L\left(z_1, z_2\right) = \int_0^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^{2} y_i z_i\left(t\right) \right\|^2 dt$$

Sustituyendo las expresiones de $z_1(t)$ y$z_2(t)$, obtenemos:

$$L\left(z_1, z_2\right) = \int_0^{\infty} \left\| z_1\left(e^{-3t}, 0\right) + z_2\left(0, e^{-4t}\right) \right\|^2 dt$$

Desarrollando la norma y la integral:

$$L\left(z_1, z_2\right) = \int_0^{\infty} \left(z_1^2 e^{-6t} + z_2^2 e^{-8t}\right) dt$$

Calculamos las integrales de cada término:

$$L\left(z_1, z_2\right) = z_1^2 \lim_{b\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-6t} dt + z_2^2 \lim_{b\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-8t} dt$$

Al resolver estas integrales, obtenemos:

$$L\left(z_1, z_2\right) = \frac{z_1^2}{6} + \frac{z_2^2}{8}$$

Para verificar que $L\left(z_1, z_2\right)$ es una función de Liapunov para el sistema autónomo lineal (4.5) en el punto $(0, 0)$, se comprueba las siguientes proposiciones:

1. $L\left(0, 0\right) = 0$ y $L\left(z_1, z_2\right) > 0$ para todo $\left(z_1, z_2\right) \neq (0, 0)$
2. $\dot{L}\left(z_1, z_2\right) = \frac{1}{3} z_1 \dot{z}_1 + \frac{1}{4} z_2 \dot{z}_2 = -z_1^2 - z_2^2 \leq 0$ en $\mathbb{R}^2$.

De acuerdo con la proposición 4.1.1 (Estabilidad según Liapunov), el origen $(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable.

La función $L\left(z_1, z_2\right)$ así definida es una función estricta de Liapunov para el sistema autónomo lineal (4.5) en el punto $(0, 0)$, ya que $\dot{L}\left(z_1, z_2\right) < 0$ en $\mathbb{R}^2 \left\{(0, 0)\right\}$.

Finalmente por la proposición 4.1.2 (Estabilidad asintótica según Liapunov), el origen $(0, 0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Ejemplo 4.2.2. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \\ \dot{x}_3 = -3x_3 \end{cases} \tag{4.6}$$

Solución. El sistema se representan con la matriz de coeficientes:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de la matriz C son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$, lo que nos permite transformar el sistema original en uno más sencillo con las siguientes ecuaciones autónomas:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 \\ \dot{z}_2 = -2z_2 \\ \dot{z}_3 = -3z_3 \end{cases}$$

Las soluciones a estas ecuaciones son:
$z_1(t, e_1) = e^{-t}e_1$, tal que $z_1(0) = e_1$
$z_2(t, e_2) = e^{-2t}e_2$, tal que $z_2(0) = e_2$
$z_3(t, e_3) = e^{-3t}e_3$, tal que $z_3(0) = e_3$
Así, el vector Y en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como:

$$Y = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3,$$

La función $L(z_1, z_2, z_3)$ se define como la integral de la norma cuadrada de $X(t, Y)$ a lo largo del tiempo:

$$L(z_1, z_2, z_3) = \int_0^{+\infty} \|X(t, Y)\|^2 dt$$

Al desarrollar la norma y simplificar, obtenemos:

$$L(z_1, z_2, z_3) = \int_0^{\infty} z_1^2e^{-2t} + z_2^2e^{-4t} + z_3^2e^{-6t}dt$$

Evaluando cada término de la integral:

$$L(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 \lim_{b\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-2t}dt + z_2^2 \lim_{b\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-4t}dt + z_3^2 \lim_{b\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-6t}dt$$

Por tanto la función $L(z_1, z_2, z_3)$ queda como

$$L\left(z_1, z_2, z_3\right) = \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{4} + \frac{z_3^2}{6}$$

Para verificar que $L\left(z_1, z_2, z_3\right)$ es una función de Liapunov para el sistema lineal (4.6) en el punto de equilibrio $\bar{x} = (0, 0, 0)$, se verifican las siguientes condiciones:

1. $L\left(0, 0, 0\right) = 0$ y $L\left(z_1, z_2, z_3\right) > 0$ para todo $(z_1, z_2, z_3) \neq (0, 0, 0)$
2. $\dot{L}\left(z_1, z_2, z_3\right) = z_1\dot{z_1} + \frac{1}{2}z_2\dot{z}_2 + \frac{1}{3}z_3\dot{z}_3 = -z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 \leq 0$ en $\mathbb{R}^3$.

De acuerdo con la proposición 4.1.1 (Estabilidad según Liapunov), el origen $(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable.

Además, como $\dot{L}\left(z_1, z_2, z_3\right) < 0$ para $(z_1, z_2, z_3) \neq (0, 0, 0)$, la función $L\left(z_1, z_2, z_3\right.$ $)$ es una función estricta de Liapunov.

Por la proposición 4.1.2 (Estabilidad asintótica según Liapunov), se concluye que el origen $\bar{x} = (0, 0, 0)$ es un punto crítico asintóticamente estable.

4.3. Funciones de Lyapunov para sistemas autónomos no lineales

Consideremos el sistema autónomo no lineal dado por la ecuación diferencial $\dot{X} = f(X)$. Según el marco conceptual, si f es una función de clase C^1 en un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ que contiene el origen y toma de valores en $\mathbb{R}^n$, entonces esta función puede expresarse de la siguiente manera:

$$f\left(X\right) = JX + g(X)$$

donde J es la matriz Jacobiana de f evaluada en el origen, y $g(X)$ es un término de orden pequeño respecto a JX cuando $\|X\|$ es pequeño. A continuación, aplicamos estos resultados a la construcción previamente mencionado para obtener funciones de Liapunov en sistemas autónomos no lineales como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 4.3.1. (Función de Lyapunov para sistemas autónomos no lineales)
Supongamos que f es una función de clase C^1 definida en un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ que incluye el origen, y cumple las siguientes condiciones:

1. *La función f en el origen toma el valor cero*
2. *Las partes reales de los autovalores de la matriz Jacobiana J de f evaluada en el origen son negativas.*

En este caso, la función de Liapunov $L = L(X)$ para el sistema lineal $\dot{X} = JX$ de coeficientes constantes también constituye una función de Liapunov estricta para el sistema autónomo no lineal $\dot{X} = f(X)$.

Demostración. Según la Proposición 4.2.1. (Función de Liapunov para sistemas autónomos lineales), sabemos que:

$$\dot{L}(X) \leq -\|X\|^2$$

Además la gradiente de $L(X)$ es:

$$\nabla(\, L(X)) = 2JX$$

Dado que $\|JX\| \leq \gamma \|X\|$ para alguna constante γ y todo de $X \in \mathbb{R}^n$, podemos concluir que:

$$\|\nabla(\, L(X))\| \leq 2\gamma \|X\|$$

Luego, al calcular el producto $\nabla L(X) \,.f(X)$, obtenemos:

$$\nabla L(X) \cdot f(X) \leq -\|X\|^2 + 2\gamma \|X\| \, \|g(X)\| \,.$$

A continuación, utilizamos el siguiente resultado:

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{f(X) - JX}{\|X\|} = \lim_{\|x\| \to 0} \frac{g(X)}{\|X\|} = 0$$

Esto implica que existe una esfera S_r de radio r centrada en el origen de $\mathbb{R}^n$, tal que para todo X en esta esfera:

$$\|g(X)\| \leq \frac{1}{4\gamma}\|X\|$$

Dentro de esta esfera, podemos entonces escribir:

$$\nabla L(X) \cdot f(X) \leq -\|X\|^2 + (2\gamma\|X\|)\left\|\frac{1}{4\gamma}\|X\|\right\| = -\frac{1}{2}\|X\|^2$$

Por lo tanto, tenemos que: $\dot{L}(X) \leq 0$ en $\mathbb{R}^n$ que contiene al origen.

Esto demuestra que L es, de hecho, una función de Liapunov para el sistema dado.

Ejemplo 4.3.1. Análisis de la estabilidad del sistema autónomo lineal en $\mathbb{R}^2$, descrito por el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + {x_2}^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + {x_1}^2 \end{cases} \tag{4.7}$$

Solución. El único punto crítico del sistema es el origen $\bar{x} = (0,0)$. Para analizar la estabilidad en el origen, linealizamos el sistema no lineal alrededor $\bar{x} = (0,0)$. La aproximación lineal de f se obtiene al calcular la matriz Jacobiana J de las funciones $f_1 = -x_1 + x_2^2$ y $f_2 = -x_2 + x_1^2$ evaluadas en el origen.

La matriz Jacobiana J es

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}=(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Esto da lugar a un sistema lineal de coeficientes constantes

$$\dot{X} = JX \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Es decir, el sistema lineal autónomo resultante es:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 \\ \dot{z}_2 = -z_2 \end{cases}$$

La soluciones del sistema lineal son:

$$z_1(t) = e^{-t}.\, z_1(0) \qquad , \qquad z_2(t) = z_1(t) = e^{-t}.\, z_2(0)$$

Consideramos la función de Liapunov candidata $L(z_1, z_2)$ dada por

$$L(z_1, z_2) = \int_0^\infty \left\| z_1\left(e^{-t}, 0\right) + z_2\left(0, e^{-t}\right)\right\|^2 dt$$

Al simplificar esta expresión, obtenemos:

$$L(z_1, z_2) = \int_0^\infty (z_1^2 e^{-2t} + z_2^2 e^{-2t}) dt$$

Resolviendo la integral:

$$L(z_1, z_2) = z_1^2 \lim_{b\to\infty} \int_0^\infty e^{-2t} dt + z_2^2 \lim_{b\to\infty} \int_0^\infty e^{-2t} dt$$

Por lo tanto

$$L(z_1, z_2) = \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{2}$$

L así definida es una función de Lyapunov para el sistema autónomo no lineal (4.7) en el punto $\bar{x} = (0, 0)$. En efecto, verificando las propiedades de la función de Liapunov:

1. $L(0, 0) = 0$, y $L(z_1, z_2) > 0$ para todo $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$
2. $\dot{L}(z_1, z_2) = z_1\dot{z}_1 + z_2\dot{z}_2 = -z_1^2 - z_2^2 \leq 0$ en $\mathbb{R}^2$.

Según la proposición 4.1.1 (Estabilidad según Liapunov), el origen $(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable.

Además, dado que $\dot{L}(z_1, z_2) < 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la función L es estricta. Según la proposición 4.1.2 (Estabilidad asintótica según Liapunov), esto implica que el origen $(0, 0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

4.4. Aplicaciones del criterio de estabilidad

4.4.1. Campo de fuerza conservativo

Proposición 4.4.1.1. (Teorema de Conservación de la Energía)

Sea $x(t)$ la trayectoria de una partícula en movimiento dentro de un campo de fuerza conservativo, donde $F_1 = -\nabla\ \psi$ representa la fuerza de la derivada de un

potencial ψ. Entonces la energía total E de la partícula permanece constante a lo largo del tiempo.

Demostración. Sea $x(t)$ la trayectoria de una partícula móvil en un campo de fuerza conservativo. La energía total $E(x\,(t))$ de la partícula en función del tiempo es:

$$E\,(x\,(t)) = \frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2 + \psi\,(x\,(t))\,,$$

donde $\frac{1}{2}m\,|\dot{x}\,(t)|^2$ es la energía cinética T , y $\psi\,(x\,(t))$ es la energía potencial.

Afirmación: La energía total $E(x(t))$ es constante respecto al tiempo, es decir, que:

$$\frac{d}{dt}\,(T+\psi) = 0$$

lo que también puede expresarse,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2 + \psi\,(x\,(t))\right) = 0$$

Para derivar la energía total con respecto al tiempo, aplicamos las reglas de derivación a cada término:

La derivada de $\dfrac{1}{2}m\,|\dot{x}(t)|^2$ es

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2 = m\,\langle\ddot{x},\dot{x}\rangle$$

donde $< \bullet, \bullet >$ denota el producto interno.

Aplicando la regla cadena para $\psi\,(x\,(t))$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\psi\,(x\,(t)) = \langle\nabla\psi\,(x\,(t))\,,\dot{x}(t)\rangle$$

Por lo tanto, la derivada de la energía total es:

$$\frac{d}{dt}E(x(t)) = m\,\left\langle\ddot{x}\,(t)\,,\dot{x}\,(t)\right\rangle + \langle\nabla\psi\,(x\,(t))\,,\dot{x}(t)\rangle$$

Según la segunda ley de Newton, conocemos que la fuerza $F(x(t))$ sobre la

partícula es:

$$F_1\left(x\left(t\right)\right) = m\ddot{x}\left(t\right).$$

Como estamos en un campo conservativo, la fuerza está relacionada con la energía potencial por:

$$F_1\left(x\left(t\right)\right) = -\nabla\psi\left(x\left(t\right)\right)$$

Por lo tanto, la ecuación que hemos obtenido se puede escribir como:

$$m\ddot{x}\left(t\right) + \nabla\ \psi\left(x\left(t\right)\right) = 0$$

Finalmente, hemos demostrado que la derivada de la energía total con respecto al tiempo es cero:

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0,$$

lo que implica que la energía total $E(x(t))$ es constante en el tiempo.

Proposición 4.4.1.2. (Teorema de Lagrange)

Supongamos una masa constante m que se desplaza bajo la acción de un campo conservativo $F_1 = -\nabla\ \psi\left(x\right)$*, determinado por una función potencial* $\psi : U_0 \to \mathbb{R}$ *definida en una vecindad abierta* $U_0 \subset \mathbb{R}^3$*. Un punto crítico* $(x_0, 0)$ *del campo de fuerzas conservativas se considera estable si la energía potencial* ψ *presenta un mínimo local estricto en* $\dot{x}$*.*

Demostración. Según la segunda Ley de Newton se afirma que la fuerza $F_1\left(x\right)$ está directamente relacionada con la aceleración de la partícula a través de la ecuación:

$$F_1\left(x\right) = m\ddot{x}, \tag{4.8}$$

donde m es la masa de la partícula y $\ddot{x}$ es su aceleración. En el caso de un campo conservativo, la fuerza está dado por:

$$F_1\left(x\right) = -m\nabla\psi(x)$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación (4,8), obtenemos la siguiente ecuación

diferencial de segundo orden para la posición $x(t)$:

$$\ddot{x} = -\nabla\psi(x)$$

Este comportamiento puede representarse en el espacio de estados $U_0 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ con el siguiente sistema autónomo:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\nabla\ \psi\,(x) \end{cases}$$

donde $(x, v) \in U_0 \times \mathbb{R}$.

Consideremos un punto crítico $(x_0, v_0) \in U \times \mathbb{R}$. En este punto se cumple $v_0 = 0$ y $\nabla\psi\,(x_0) = 0$.

Para investigar la estabilidad del punto crítico $(x_0, 0)$, utilizamos la energía total $E(x, v)$, que se define como:

$$E\,(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + \psi\,(x)\,,$$

A fin de construir una función de Liapunov, notamos que una función de Liapunov debe anularse en $(x_0, 0)$. Por lo tanto, restamos de $E(x, v)$ la energía de estado $(x_0, 0)$, que es $\psi\,(x_0)$, y definimos la función $L : U_0 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$L\,(x, v) = E\,(x, v) - E\,(\ x_0, 0) = \frac{1}{2}mv^2 + \psi\,(x) - \psi\,(x_0)$$

Afirmación: L es una función de Liapunov para $(x_0, 0)$

Para demostrar que $L\,(x, v)$ es una función de Liapunov, verificamos las siguientes propiedades:

1. $L\,(x_0, 0) = 0$: Por hipótesis, ψ tiene un mínimo local estricto en x_0, Lo que implica que existe una vecindad de x_0 tal que $\psi\,(x) > \psi\,(x_0)$ para todo $x \neq x_0$. Además, la energía cinética $T = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$. Por lo tanto se cumple que $L\,(x, v) > 0$ para todo $(x, v) \neq (x_0, 0)$.

2. Por la conservación de la energía, $\dot{L}\,(x, v) = 0$ en una vecindad de $(x_0, 0)$: Esto significa que L es constante a lo largo de las trayectorias del sistema. Por el Teorema de Lagrange (Proposición 4.4.1.2), podemos concluir que el punto crítico $(x_0, 0)$ es estable.

Ejemplo 4.4.1.1. (Oscilador armónico)
Examinemos la ecuación del oscilador armónico en tres dimensiones:

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0 \tag{4.9}$$

Nuestro objetivo analizar la estabilidad del sistema en torno al origen $(0, 0, 0)$ de esta ecuación.

Solución. Analicemos el oscilador armónico en tres dimensiones, el cual está descrito por la ecuación (4.9) :

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0.$$

Este sistema corresponde a un campo de fuerzas dado por:

$$F_1(\vec{x}) = \left(-m\alpha^2 x_1, -m\alpha^2 x_2, -m\alpha^2 x_3\right) \quad , \qquad (\alpha \neq 0)$$

lo cual es un campo conservativo. La energía potencial asociada a este campo está dada por:

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{2} m\alpha^2 \left({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2\right).$$

El único punto crítico de la energía potencial ψ es el origen $\vec{x} = (0, 0, 0)$.
El Hessiano de ψ en el origen es:

$$H_\psi(0, 0, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & m\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & m\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, si tomamos un vector de perturbaciones (h_1, h_2, h_3), la aplicación del Hessiano a este vector se realiza de la siguiente manera:

$$H_\psi(0, 0, 0)(h_1, h_2, h_3) = \frac{1}{2} m\alpha^2 \left({h_1}^2 + {h_2}^2 + {h_3}^2\right),$$

y este Hessiano es definido como positivo. Por lo tanto, el origen corresponde a un mínimo estricto de ψ.

Según la proposición 4.4.1.2 (Teorema de Lagrange), dado que el origen es un mínimo estricto de la energía potencial, podemos concluir que el origen es un

punto crítico estable.

4.4.2. Movimiento de un péndulo

Proposición 4.4.2.1 (Estabilidad del movimiento de un péndulo)

Sea un péndulo simple que oscila en un plano vertical, como se ilustra en la figura 16. Suponemos que la fuerza gravitatoria es constante y tiene una magnitud proporcional a la masa m del péndulo. Además, despreciamos la masa de la varilla que lo sostiene. Se incluye una fuerza de fricción (o viscosidad) que se opone al movimiento, la cual es proporcional a la velocidad del péndulo. Bajo estas condiciones, la estabilidad del fenómeno físico puede ser representada mediante un sistema de ecuaciones diferenciales, el cual es estable.

Demostración.

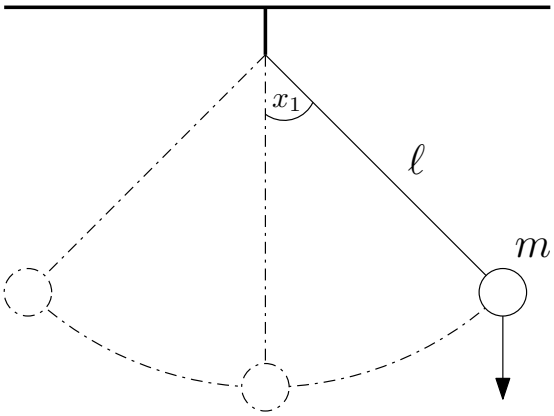


Figura 16: Péndulo simple

Fuente: *Elaboración propia*

Sea ℓ la longitud (constante) de la cuerda. El péndulo se mueve a lo largo de una circunferencia de radio ℓ . Definimos $x_1(t)$ como el ángulo entre la vertical y la varilla en el instante t, medida en sentido contrario a las agujas del reloj. La velocidad angular del péndulo es $\dot{x}_1(t)$, y la velocidad lineal es $\ell\dot{x}_1(t)$.

La fuerza de fricción es proporcional a la velocidad y se expresa $-\alpha\ell\ \dot{x}_1(t)$, donde $\alpha > 0$ es el coeficiente de friccion. Esta fuerza es tangente a la circunferencia descrita por el movimiento del péndulo.

La fuerza gravitatoria tiene una componente tangente a la circunferencia, dada por $-msen(x_1(t))$, donde m es la masa del péndulo y x_1 es el ángulo. Por lo tanto, la fuerza total tangencial a la circunferencia en el instante t es :

$$F_1 = -\left(\alpha\ell\dot{x}_1(t) + m\sin(x_1(t))\right)$$

La aceleración tangencial del péndulo es $a = \ell\ddot{x}_1$. Entonces, aplicando la segunda Ley de Newton, $F = ma$, obtenemos:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{\alpha}{m}\dot{x}_1 - \frac{1}{\ell}\sin(x_1)$$

Introduciendo una nueva variable $x_2 = \dot{x}_1(t)$ (Interpretada como velocidad angular), obtenemos el sistema equivalente de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{\ell}sen(x_1) - \frac{\alpha}{m}x_2 \end{cases}$$

Este sistema autónomo no lineal en $\mathbb{R}^2$ tiene como punto crítico $\bar{x} = (0, 0)$. Para investigar la estabilidad del punto tratamos de usar la energía total E_t, como una función natural de análisis.

La energía total se expresa como la suma de la energía cinética E_c y la energía potencial E_p :

$$E_t = E_c + E_p$$

La energía cinética E_c es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell\ \dot{x}_2)^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{x}_2^2.$$

Para la energía potencial, tomamos la masa multiplicada por la altura sobre el punto más bajo de la circunferencia:

$$E_p = m(\ell - \ell\cos(x_1))$$

Así la energía total es:

$$E_t\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{x}_2^2 + m\left(\ell - \ell\cos(x_1)\right) = m\ell\left(\frac{1}{2}\ell\dot{x}_2^2 + 1 - \cos(x_1)\right)$$

Afirmación: La energía total E_t es una función de Liapunov, y el punto crítico $\bar{x} = (0, 0)$ es estable. En efecto,

1. $E_t\left(0, 0\right) = 0, \quad E_t\left(x_1, x_2\right) > 0$ para $\left(x_1, x_2\right) \neq (0, 0)$

2. La derivada E_t es:

$$\dot{E}_t\left(x_1, x_2\right) = m\ell(Rx_2\dot{x}_2 + \dot{x}_1 sen(x_1))$$

Sustituyendo las ecuaciones del sistema:

$$\begin{aligned}
\dot{E}_t\left(x_1, x_2\right) &= m\ell\left[\ell\dot{x}_2\left(\frac{-1}{\ell} sen(x_1)\frac{-\alpha}{m}\dot{x}_2\right) + \dot{x}_2 sen(x_1)\right] \\
&= m\ell\left[-\dot{x}_2 sen(x_1) - \frac{\ell\alpha}{m}\dot{x}_2^2 + \dot{x}_2 sen(x_1)\right] \\
&= m\ell\left[-\frac{\ell\alpha\dot{x}_2^2}{m}\right] = -\ell^2\alpha\dot{x}_2^2 \ \leq 0
\end{aligned}$$

Como $\dot{E}_t \leq 0$, E_t es una función de Liapunov y por la proposición 4.1.1(Estabilidad según Liapunov) , el origen $(0, 0)$ es un punto crítico estable.

4.4.3. Circuito eléctrico simple

Proposición 4.4.3.1. (Estabilidad de un circuito $\mathbf{RL_0C_0}$)

Sea un circuito eléctrico simple, como se muestra en la Figura 17, que está compuesto por una resistencia R, un inductor L_0 y un condensador C_0. En este caso, la estabilidad del fenómeno eléctrico que describe el circuito puede representarse mediante un sistema de ecuaciones diferenciales. Dicho sistema de ecuaciones tiene una solución estable, lo que implica que el comportamiento del circuito es estable a lo largo del tiempo.

Demostración.

Péndulo simple

$$L_0\frac{dI}{dt} + RI + \frac{x_1}{C_0} = E \tag{4.10}$$

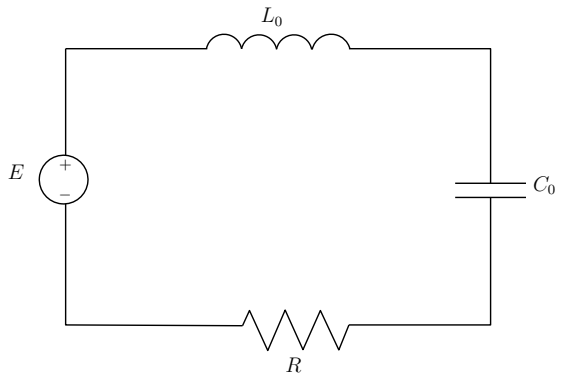


Figura 17: Circuito $\mathbf{RL_0C_0}$

Fuente: *Elaboración propia*

donde:

- RI es la caída de voltaje a través de la resistencia
- $L_0\frac{dI}{dt}$ es la caída de voltaje a través del inductor
- $\frac{x_1}{C_0}$ es la caída de voltaje a través del condensador
- $-E$ es la caída de voltaje a través de un generador.

Supongamos que $I = \frac{dx_1}{dt}$ y $E = 0$. Bajo estas condiciones, la ecuación autónoma (4.10) se convierte en:

$$L_0\ddot{x}_1 + R\dot{x}_1 + \frac{x_1}{C_0} = 0 \tag{4.11}$$

La ecuación (4.11) gobierna el comportamiento de un circuito eléctrico simple $L_0\mathrm{RC}_0$. En este caso, x_1 representa la carga sobre el condensador, y $\dot{x}_1$ la intensidad de corriente. Introduciendo una nueva variable $x_2 = \dot{x}_1$, interpretada como la intensidad de corriente, obtenemos el sistema de primer orden equivalente:

$$\begin{cases} \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{L_0C_0}x_1 - \dfrac{R}{L}\ x_2 \end{cases} \tag{4.12}$$

Este sistema autónomo lineal en $\mathbb{R}^2$ tiene como punto crítico $\bar{x} = (0, 0)$.

Como función de Liapunov para este punto crítico consideramos la energía total E_t:

$$E_t = E_c + E_p$$

donde E_c es la energía cinética y E_p es la energía potencial.

- Energía cinética: $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}L_0x_2$.
- Energía potencial (o energía almacenada en el condensador):

$$E_p = \int_0^{x_1} \frac{x_1}{C_0} dx_1 = \frac{1}{2C_0}x_1^2$$

Por lo tanto, la energía potencial es:

$$E_t\left(x_1\ , x_2\right) = \frac{1}{2C}\left(L_0C_0x_2 + x_1^2\right)$$

Afirmación: E_t es una función de Liapunov. Para verificarlo, consideramos las siguientes condiciones:

En efecto

1. $E_t\left(0,0\right) = 0, \quad E_t\ \left(x_1\ , x_2\right) > 0$ para $\left(x_1\ , x_2\right) \neq (0,0)$
2. La derivada E_t respecto al tiempo es:

   Dado que $\dot{E}_t \leq 0$, E_t es una función de Liapunov. Según la proposición 4.1.1(Estabilidad según Liapunov), el origen $(0,0)$ es un punto crítico estable.

4.5. Inestabilidad

Proposición 4.5.1. (Teorema de Chatáev sobre inestabilidad)
Sea $L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ una función derivable que satisface las siguientes condiciones en un entorno h- cerrado alrededor del origen de coordenadas:

1. *En un entorno arbitrariamente pequeño V del origen de coordenadas, existe una región R donde $L > 0$. Además, $L = 0$ sobre la parte de la frontera de R que se encuentra dentro de V.*
2. *En la región R donde $L > 0$, la derivada*

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0,$$

Además, en la región $L \geq \alpha$, donde $\alpha > 0$, se cumple que $\frac{dL}{dt} \geq \beta > 0$ para alguna constante β.
Si se cumple estas condiciones, entonces el punto crítico $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ del sistema (3.1) es inestable.

Demostración. Consideremos el punto inicial $(x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ \ldots, x_n(t_0))$ ubicado en un entorno arbitrariamente pequeño del origen de coordenadas, en la región $L > 0$, tal que $L(x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ \ldots, x_n(t_0)) = \alpha > 0$. Dado que $\frac{dL}{dt} \geq 0$ a lo largo de la trayectoria, la función L no decrece a lo largo de la misma. Por lo tanto, mientras la trayectoria no abandone el entorno h-cerrado del origen de coordenadas, donde se cumplen las condiciones del teorema, la trayectoria debe permanecer en la región $L \geq \alpha$. Supongamos que la trayectoria no abandona del h-entorno del origen. Entonces, por la condición (2), la derivada $\frac{dL}{dt} \geq \beta > 0$ a lo largo de la trayectoria para $t \geq t_0$. Multiplicando esta desigualdad por dt e integrando, obtenemos:

$$L(x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots, x_n(t)) - L(x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ \ldots, x_n(t_0)) \geq \beta(t - t_0).$$

De esta expresión se deduce que, cuando $t \to \infty$, la función L crece indefinidamente a lo largo de la trayectoria. Esto resulta una contradicción, ya que la función L, siendo continua y definida en un entorno cerrado del origen, debe ser acotado dentro de dicho entorno. Por lo tanto la suposición de que la trayectoria no abandona el entorno h-cerrado del origen no es válida.

Ejemplo 4.5.1. Analizar la estabilidad del punto crítico $\bar{x} = (0, 0)$, del sistema ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^5 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_1^3 + x_2^5 \end{cases}$$

Solución. Consideremos la función $L(x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^4$ la cual satisface las condiciones de la proposición 4.5.1:

1. $L(x_1, x_2) > 0$, cuando $|x_1| > |x_2|$
2. Calculamos la derivada de L:

$$\dot{L}(x_1, x_2) = 4x_1^3\left(x_1^5 + x_2^3\right) - 4x_2^3\left(x_1^3 + x_2^5\right)$$

Simplificando:

$$\dot{L}(x_1, x_2) = 4\left(x_1^3 - x_2^5\right)$$

Esta derivada es positiva cuando $|x_1| > |x_2|$, y para $L \geq \alpha > 0$, es $\dfrac{dL}{dt} \geq \beta > 0$.

Dado $\dot{L}(x_1, x_2) > 0$ en la región $|x_1| > |x_2|$ podemos concluir que el punto crítico $\bar{x} = (0, 0)$ es inestable.

CAPÍTULO V

DISCUSIÓN

5.1. La estabilidad se refiere a la propiedad de un sistema dinámico en la que las soluciones cercanas a una solución fija permanecen próximas a medida que pasa el tiempo. En el caso de un punto crítico (una solución estacionaria), la estabilidad asintótica describe la tendencia de las soluciones cercanas a ese equilibrio a converger hacia él con el tiempo.

5.2. La propuesta de Liapunov consistía en usar funciones para garantizar la estabilidad de un sistema, estableciendo condiciones sobre la derivada de la función a lo largo de las trayectorias del campo vectorial asociado a la ecuación diferencial. Esta idea fue formalizada en una serie de proposiciones y su resultado principal. Los resultados de Lyapunov coinciden con los de otros matemáticos destacados en el área, como Hirsh, Kreider, Sotomayor y el propio Lyapunov.

5.3. En el contexto de las funciones de Lyapunov, si la derivada de L, denotada como $\dot{L}(x)$, es negativa en una vecindad, significa que L disminuye a lo largo de las trayectorias de un sistema autónomo no lineal. Físicamente, esto indica que una partícula pierde energía al moverse a lo largo de las trayectorias del sistema $\dot{X} = f(X)$, y no puede adquirir suficiente energía para escapar de una vecindad limitada por la superficie $L(x) = \alpha$.Este comportamiento sugiere que el punto crítico es estable e incluso asintóticamente estable.

5.4. En un circuito RLC_0, la energía total E_t disminuye debido a la caída de voltaje en la resistencia, que actúa como una fuerza amortiguadora, similar a un freno mecánico. Esto reduce la frecuencia de las oscilaciones, que dependen de la interacción entre el condensador y la bobina. A medida que la resistencia disipa energía, el sistema alcanza el estado de equilibrio, donde la corriente y la carga se estabilizan en un valor constante, sin más oscilaciones.

5.5. En el artículo de Chávez et al.(2020), se establece la estabilidad y la estabilidad asintótica de un sistema dinámico autónomo lineal, sin necesidad de conocer su solución explícita, mediante el análisis de los valores propios de una

matriz cuadrada no singular. Además, el criterio de estabilidad propuesto es más general, ya que se extiende a sistemas autónomos tanto lineales como no lineales, basándose en la construcción de funciones de Lyapunov.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

6.1. El criterio de estabilidad y la estabilidad asintótica de los puntos críticos en sistemas autónomos no lineales pueden determinarse sin necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones del sistema. Esta capacidad simplifica significativamente el análisis y permite obtener conclusiones sobre el comportamiento del sistema de manera más eficiente, facilitando su estudio y comprensión sin recurrir a soluciones complejas.

6.2. Al construir una función de Liapunov para un punto crítico de un sistema autónomo no lineal, se puede garantizar la estabilidad de dicho punto, según lo establece la estabilidad según Liapunov (Proposición 4.1.1). Esta técnica ofrece una herramienta poderosa para evaluar la estabilidad del sistema, permitiendo hacerlo de manera eficiente sin la necesidad de resolver completamente las ecuaciones del sistema dinámico.

6.3. Si se construye una función de Liapunov adecuada para un punto de equilibrio en un sistema autónomo no lineal, conforme a la estabilidad asintótica según Liapunov (Proposición 4.1.2), se garantiza que dicho punto crítico será asintóticamente estable.

6.4. El criterio de estabilidad del punto crítico ha sido aplicado a situaciones específicas, como en el análisis de las oscilaciones forzadas de un péndulo. En este contexto, la función de Liapunov se determina a partir de la energía total del sistema, tal como se establece en la estabilidad del movimiento de un péndulo (Proposición 4.4.2.1).

6.5. El criterio de estabilidad del punto crítico ha sido aplicado a situaciones específicas, como en el análisis de un circuito eléctrico simple. En este caso, la función de Liapunov se determina a partir de la energía total del sistema, conforme a lo que establece la estabilidad de un circuito RL_0C_0 (Proposición 4.4.3.1)

CAPÍTULO VII

RECOMENDACIONES

7.1. Se sugiere realizar investigaciones que apliquen el concepto de estabilidad al estudio de una familia de ecuaciones fundamentales en la teoría de circuitos eléctricos, especialmente la ecuación de Liénard, expresada como $u''+g\left(u\right)u'+h\left(u\right)=0$. Esta investigación podría proporcionar valiosos conocimientos sobre la estabilidad y el comportamiento transitorio en circuitos eléctricos.

7.2. Se recomienda realizar investigaciones centradas en la aplicación del criterio de estabilidad al análisis del sistema máquina-regulador de Watt, particularmente en el contexto del control automático de la presión en las calderas de una máquina de vapor. Esto permitiría mejorar la comprensión y el desempeño de dicho sistema en términos de estabilidad.

7.3. Se recomienda investigar métodos alternativos para la construcción de funciones de Liapunov en sistemas no lineales, como el método del gradiente variable, los enfoques de Krasovskii y Zubov, los cuales pueden ofrecer soluciones más generales y robustas para analizar la estabilidad de estos sistemas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Chávez, J. & et al. (2020), *Estabilidad de los puntos de críticos de los sistemas dinámicos autónomos lineales*, Ciencias, 2 (1), 68-81.

[2] Chuñe, J. (2022), *Análisis de estabilidad asintótica global de redes neuronales dinámicas: enfoque de Lyapunov*, Tesis de Licenciado en Matemáticas, Universidad Nacional de Piura. Repositorio UNP. https://repositorio.unp.edu.pe/handle/UNP/1268

[3] Elsgolts, L. (1979), *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, Mir, Moscú.

[4] Gavilán, M. (2019), *Funciones de Liapunov y semigrupos tipo gradiente*, Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Repositorio UNMSM.

[5] Hirsh, M. (1983), *Differential Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra*, Alianza Editorial, Madrid.

[6] Kreider, D. (1978), *Ecuaciones Diferenciales*, Fondo educativo interamericano, México.

[7] Krasnov, L. (1978), *Teoría de la Estabilidad*, Reverte, Barcelona.

[8] La Salle, J. (1973), *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press, New York.

[9] Liapunov, A. (1949), *Probleme General de la Stabilitie du Mouvement*, , Ann. of Math. Stud., Vol. 17, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

[10] Mello, A. (1979), *Equações Diferenciais*, Imeusp, Brasil.

[11] Moreno Armendariz, et al (2001). , *Control adaptable indirecto usando Redes Neuronales Dinámicas*, Revista del centro de investigación. Universidad La Salle, vol 4, núm.16, enero-junio, 2001, pp.13-32.

[12] Peixoto, M. (1978), *Sistemas dinámicos*, Academic Press, Nueva York

[13] Perko, L. (1991), *Ecuaciones diferenciales y Sistemas Dinámicos*, Springer Verlag, New York.

[14] Pontryagin, L. (1980), *Ordinary Differential Equations*, Addison Werley, Reading, Masachussetts.

[15] Poincaré, et al (1986), *Textos de la discusión sobre los fundamentos de las matemáticas: de las antinomias a la predicatividad*, Edited by Gerhard Heinzmann. Paris: Blanchard.(MÑ)

[16] Sotomayor, J.(1979), *Equações Diferenciais Ordinárias*, Euclides, Brasil.(VP).