

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática

**EXPRESIÓN GENERALIZADA DE ECUACIONES DIFERENCIALES
ORDINARIAS DE ORDEN FRACCIONARIO**

TESIS

Presentada por:

Bach. YHON CLINTON FLORES CALLATA

Para optar el Título Profesional de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TACNA – PERÚ

2026



ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS Nro. 460

En la ciudad de Tacna, en el auditorium de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann; siendo las 11:00 horas del día lunes 22 de Diciembre del 202 5, estando presente el jurado calificador nominado con Resolución de Facultad Nro. 11576 - 202 5 FACI-UNJBG, conformado por los siguientes docentes:

<u>Dr. Roberto Guzmán Supo Hallasi</u>	(Presidente)
<u>Dr. Luis Andrés Amaya Cedón</u>	(Secretario)
<u>MSc. Jhon Alfonso Chávez Delgado</u>	(Vocal)

Acto seguido, se dio lectura a la Resolución correspondiente, y del mismo modo se informa a la (al) Bachiller que el acto de sustentación constará de dos partes: (I) exposición y sustentación de la tesis, (II) absolución de preguntas del jurado. Todo ello en un tiempo no mayor a 60 minutos ni menor a 30 minutos. A continuación, el presidente del Jurado instó a la (al) Bachiller:

Jhon Clinton Flores Callata,
a exponer la Tesis titulada:
Exposición Generalizada de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden Fraccionario.

para optar el Título Profesional de Lic. en Matemáticas.

Siendo las 11:45 horas, la (el) tesista concluye su exposición, luego se procedió a la formulación de las preguntas por parte de los miembros del jurado calificador, terminado este proceso, se invitó al público presente a abandonar la sala de sustentación para que los miembros del jurado emitan su calificación de acuerdo a reglamento. El promedio de la calificación dio el siguiente resultado: Aprobado por unanimidad, con nota de Diecisiete (17), de acuerdo al Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann - Tacna.

Siendo las 12:20 horas, se dio por concluido el acto de sustentación de la tesis, firmando los miembros del jurado calificador, en señal de conformidad.

Roberto E. Supo Hallasi
Presidente

Luis Andrés Amaya Cedón
Secretario

Jhon Alfonso Chávez Delgado
Vocal

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, **JHONY ALFONSO CHÁVEZ DELGADO**, en mi condición de Asesor acreditado por la Resolución de Facultad R.F. N° 10783-2024 -FACI-UN/JBG de la tesis titulada: **EXPRESIÓN GENERALIZADA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN FRACCIONARIO**, presentado por el Bachiller **YHON CLINTON FLORES CALLATA** para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, habiendo cumplido con lo establecido en el reglamento de originalidad y de similitud de trabajos de investigación y producción intelectual, considerando que según la revisión, evaluación y análisis realizado a través del software de similitud textual TURNITIN cuenta con el nivel de similitud cuyo porcentaje es **04%** por lo que **CERTIFICO LA SIMILARIDAD** de la tesis, la cual está de acuerdo al nivel **PERMITIDO**, para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio Institucional**.

Se emite el presente certificado con fines de continuar con los trámites respectivos para su obtención del título profesional.



Firma del Asesor

MSc. Jhony Alfonso Chávez Delgado

DNI: N° 18124030



Firma del Tesista

Bach. Yhon Clinton Flores Callata

DNI: N° 75826188

DEDICATORIA

A Dios, fuente de sabiduría y fortaleza, por iluminar mi camino, sostenerme en los momentos difíciles y concederme la gracia de culminar esta investigación.

A mi familia, en especial a mis padres Lucio y Raymunda, por regalarme la vida, ser ejemplo de esfuerzo y brindarme apoyo incondicional en mi formación.

A mi amigo Jhoswell Abel, por su constante apoyo moral y su inspirador compañerismo durante todo este proceso.

Al profesor Jhony Alfonso Chávez Delgado, por su guía y motivación que enriquecieron mi crecimiento académico y personal.

AGRADECIMIENTO

A la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann de Tacna, por acogerme en su comunidad académica y ofrecerme una formación de calidad en un entorno propicio para el desarrollo profesional.

A los docentes de la Escuela Profesional de Matemática, por su entrega, compromiso y por haber contribuido de manera significativa a mi crecimiento académico a través de su enseñanza y orientación.

Al MSc. Jhony Alfonso Chávez Delgado, por su apoyo incondicional, sus valiosas observaciones y constante revisión a lo largo del desarrollo de esta tesis. Su orientación fue fundamental para alcanzar este logro.

ÍNDICE

DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTO	iii
ÍNDICE DE FIGURA	v
RESUMEN	ii
ABSTRACT	vii
CAPÍTULO II: INTRODUCCIÓN	1
1.1. Descripción de la Realidad Problemática	1
1.2. Definición del Problema.....	2
1.2.1. Problema General	2
1.2.2. Problemas Específicos.....	3
1.3. Objetivos de la Investigación.....	3
1.3.1. Objetivo General	3
1.3.2. Objetivos Específicos.....	3
1.4. Justificación e importancia de la investigación	3
CAPÍTULO II: FUNDAMENTOS TEÓRICOS	5
2.1. Antecedentes de la Investigación	5
2.2. Marco Teórico de la Investigación.....	6
2.2.1. Funciones Trascendentes Especiales	6
2.2.2. Operador Diferintegral.....	12
2.2.3. Derivada fraccionaria de Riemann Liouville.....	19
2.3. Marco Conceptual de la Investigación	23
2.3.1. Transformada de Laplace	23
2.3.2. Propiedades de la Transformada de Laplace	23
2.3.3. Transformada de Laplace de la Derivada Fraccional.....	30
2.3.4. Modelo clásico del oscilador armónico amortiguado.....	29
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA	36
3.1. Enfoque metodológico.....	36
3.2. Procedimiento del Método Deductivo.....	36

CAPÍTULO IV: RESULTADOS	38
4.1. Solución de la expresión generalizada de la ecuación de orden fraccionario	38
4.2. Existencia y unicidad de la expresión generalizada de la ecuación I de orden fraccionario	43
4.3. Oscilador Armónico Fraccionario Viscoelástico	54
CAPÍTULO V: DISCUSIÓN	54
CAPÍTULO VI:CONCLUSIONES	61
CAPÍTULO VII:RECOMENDACIONES	62
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	63

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Oscilador armónico amortiguado.....	28
Figura 2. Solución clásica para $\xi = 0.35$.....	30
Figura 3. Modelo fraccionario viscoelástico para $\tilde{\xi} = 0.25, 0.35, 0.75, 1.25$.....	50
Figura 4. Modelo Clásico y fraccionario.....	51

RESUMEN

La finalidad de esta tesis es constituir la realidad y singularidad de respuesta a una expresión generalizada de igualdades diferenciales de ordenamiento fraccionario (EDF) de la forma:

$$[D^{mv} + c_1 D^{(m-1)v} + \dots + c_{m-1} D + c_m D^0]g(t) = 0.$$

De manera análogo, buscamos implementar estas propiedades de realidad y singularidad de solución en un caso fraccionario particularidad de un oscilador armónico fraccionario elástico.

Aunque se encuentran diversas explicaciones de la tasa de variación instantánea y de la antiderivada fraccionaria, esta investigación utiliza la formulación de Riemann – Liouville porque su efecto es interesante desde una perspectiva de la existencia y unicidad de la respuesta.

Para resolver una igualdad diferencial fraccionaria, utilizamos la transformación de Laplace en la eventualidad en el caso de una tasa de variación instantánea fraccionaria de la clase de Riemann–Liouville. La respuesta se expresa como una combinación lineal de funciones de Miller–Ross.

Se aclaran las propiedades realidad y singularidad de la respuesta de igualdades diferenciales fraccionarias y se explican diversos preceptos de respuesta. Para ello, se presentan algunos aspectos generales, junto con definiciones fundamentales y las consecuencias del cálculo fraccionario considerando un polinomio inicial con raíces variadas y coincidentes dentro del marco de la conjetura presentada.

Esta tesis presenta un ejemplo de oscilador armónico fraccionario que extiende el modelo clásico mediante la incorporación de derivadas de orden fraccionario, lo que permite una representación considerablemente más precisa de la amortiguación viscoelástica. El coeficiente de fricción fraccionaria influye tanto en la amortiguación como en la periodicidad del sistema. Este ejemplo permite un análisis sistemático y un acoplamiento experimental más realista que el que proporciona el oscilador clásico.

Palabras clave: Operador Diferintegral, Función de Miller–Ross, Existencia y unicidad de Ecuaciones de Diferenciales Fraccionarias, Oscilador armónico fraccionario viscoelástico.

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to establish the reality and singularity of the response to a generalized expression of differential equalities of fractional ordering (EDF) of the form:

$$[D^{mv} + c_1 D^{(m-1)v} + \dots + c_{m-1} D + c_m D^0]g(t) = 0.$$

Similarly, we seek to implement these properties of reality and solution singularity in a particular fractional case of an elastic fractional harmonic oscillator.

Although various explanations exist for the instantaneous rate of change and the fractional antiderivative, this research uses the Riemann–Liouville formulation because its effect is interesting from the perspective of the existence and uniqueness of the response.

To solve a fractional differential equation, we use the Laplace transform in the eventuality case of a fractional instantaneous rate of change of the Riemann–Liouville class. The response is expressed as a linear combination of Miller–Ross functions.

The properties of reality and singularity of the response of fractional differential equations are clarified, and various response precepts are explained. To this end, some general aspects are presented, along with fundamental definitions and the consequences of fractional calculus considering an initial polynomial with varied and coincident roots within the framework of the presented conjecture. This thesis presents an example of a fractional harmonic oscillator that extends the classical model by incorporating fractional-order derivatives, allowing for a considerably more accurate representation of viscoelastic damping. The fractional friction coefficient influences both the damping and the periodicity of the system. This example allows for a more realistic systematic analysis and experimental coupling than that provided by the classical oscillator.

Keywords: Differintegral Operator, Miller–Ross Function, Existence and Uniqueness of Fraccional Differential Equations, Fractional Viscoelastic Harmonic Oscillato

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Especificación de la Realidad Problemática

La tasa de variación instantánea y las antiderivadas fraccionarias dirigen a la abstracción más avanzada de igualdad diferencial. Cuando una relación involucra operadores fraccionarios dirigidos a una función inexplorado g , que se titula ecuación diferencial fraccionaria (EDF). Es evidente que surgirán diferencias, ya que algo exacto a una EDF pueden tener múltiples significados según los operadores fraccionarios comprometidos para resolverla, bien sean de Riemann - Liouville, de Caputo o diferentes.

El concepto de cálculo fraccionario (tasa de variación instantánea y antiderivadas de orden fraccionario) de ninguna forma es inédito. Durante 1695, L'Hospital escribió a Leibniz, preguntándole: ¿Qué significa $g^m(x)$ si $m = \frac{1}{2}$? Leibniz respondió: Una aparente incongruencia, de la que algún día podrán extraer conclusiones útiles. L'Hospital es considerado el padre del cálculo fraccionario. En las últimas décadas, varios autores han propuesto su propia interpretaciones de la expresión $g^m(x)$, donde n no es necesariamente un entero positivo.

Por ello, existen diversas nociones de tasa de variación instantánea de orden no entero, también llamada tasa de variación instantánea de orden fraccionario, aunque el orden no sea necesariamente un número racional. Por supuesto, algunas definiciones han resultado más útil que otras debido a sus propiedades superiores.

Sin embargo, el cálculo fraccionario aún presenta numerosos desafíos para los investigadores actuales y futuros. Uno de ellos radica en la dificultad, o incluso la inviabilidad en la totalidad de las circunstancias, de obtener soluciones analíticas a los problemas estudiados en esta rama de las matemáticas. Desde una perspectiva de aplicaciones, esto ha impulsado el desarrollo de diversas técnicas, basadas en métodos existente de cálculo entero, así como en otros completamente nuevos.

La partida de la tasa de variación instantánea como la antiderivada fraccionaria de una función implican un operador integral; por tanto, las ecuaciones diferenciales a las que

dan lugar estos operadores están directamente relacionadas con fenómenos de memoria que podrían desempeñar un papel importante en la modelización de ciertos procesos o fenómenos físicos, ya que tales principios de memoria serían ignorados al estudiar ecuaciones diferenciales de orden entero.

El estudio de las igualdades diferenciales fraccionarias han infundido un considerable énfasis entre los investigadores. Recientemente, se han publicado artículos sobre la realidad y singularidad de respuestas para estas igualdades diferenciales. O'Shaughnessy fue probablemente el primero en proponer la obtención de soluciones explícitas para una ecuación diferencial fraccionario, específicamente para la ecuación

$$(D^{1/2}g)(t) = \frac{y}{x}.$$

Como se mencionó anteriormente, el termino “cálculo fraccionario” es de origen histórico y no hay justificación para limitarlo a la diferintegración orden racional. Sin embargo, en la práctica, la solución analítica de igualdades diferenciales se restringe a ecuaciones igualdades de ordenamiento racional .

La existencia de la expresión generalizada para ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario (n, q)

$$[D^{mv} + c_1 D^{(m-1)v} + \dots + c_{m-1} D + c_m D^0]g(t) = 0, \quad (1)$$

donde $v = \frac{1}{q}$ y $mv \in \mathbb{N}$, solo garantiza la existencia de M funciones linealmente independientes que son soluciones de la ecuación diferencial. Sin embargo, estas funciones linealmente independientes pueden anularse; por lo tanto, no se garantiza la existencia de una solución que satisfaga M condiciones iniciales arbitrarias.

Pero en este contexto, es natural formular los siguientes problemas:

1.2. Definición del Problema

1.2.1. Problema General

¿Cómo es posible formular las condiciones para la existencia y unicidad de la solución de la expresión generalizada de ecuaciones diferenciales de ordenamiento fraccionario (1)?

1.2.2. Problemas Específicos

- a) ¿Cómo es posible formular las condiciones de solución de la expresión generalizada de la ecuación diferencial lineal de ordenamiento fraccionario (1)?
- b) ¿Cómo es posible formular condiciones de existencia y unicidad en el problema de valor inicial de la expresión generalizada de la ecuación diferencial lineal de ordenamiento fraccionario (1)?
- c) ¿Cómo se pueden aplicar estas condiciones de realidad y singularidad de respuesta al modelo de un oscilador armónico fraccionario viscoelástico en un fluido Newtoniano?

1.3. Objetivos de la Investigación

1.3.1. Objetivo General

Formular las circunstancias de la existencia y singularidad a la respuesta de la expresión generalizada de igualdades diferenciales de ordenamiento fraccionario (1).

1.3.2. Objetivos Específicos

- a) Formular la respuesta a la expresión generalizada de la igualdad diferencial lineal de ordenamiento fraccionario (1).
- b) Formular las circunstancias de la respuesta a la expresión generalizada de la igualdad diferencial lineal de ordenamiento fraccionario (1).
- c) Aplicar estas circunstancias de existencia y singularidad a la respuesta del modelo de un oscilador armónico fraccionario viscoelástico en un fluido Newtoniano.

1.4. Justificación e importancia de la investigación

En la tesis sobre la Expresión generalizada de igualdades diferenciales ordinarias de ordenamiento Fraccionario, este enfoque se justifica por la relevancia que científicos e ingenieros han mostrado durante mucho tiempo en estas igualdades, lo que ha propiciado el desarrollo de numerosas aplicaciones en diversos campos. Desde la década de 1990, las igualdades diferenciales de orden fraccionario se han redescubierto y aplicado, en particular a reacciones químicas, cinética de reacción, igualdades de velocidad de coeficientes y órdenes, teoría de la energía y igualdad del calor. Esta tesis destaca, en particular, la importancia de su aplicación al modelado de un oscilador armónico en un medio viscoelástico. Demuestra que el operador diferintegral posee capacidad de memoria,

lo que permite un modelado más preciso del comportamiento viscoelástico. Este enfoque permite comparar soluciones clásicas y fraccionarias para diferentes valores de parámetro, subrayando así el potencial de las identidades diferenciales fraccionarias para describir fenómenos físicos complejos.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1. Antecedentes de la Investigación

Abreu (2018) produjo un trabajo que ofrece una introducción concisa a la concepción de cálculo fraccionario, como la antiderivada fraccionaria y la variación de cambio instantánea fraccionaria. Establece la correspondencia entre sus fórmulas y relaciones con las derivadas clásicas. Además, propone un sistema para determinar ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando transformación de Laplace, el cual valida con la transformación de Laplace clásica. Finalmente, implementa el cálculo para la integrar ecuaciones diferenciales fraccionarias procediendo al empleo del método de diferencias finitas, basado en un problema de Cauchy con derivadas de Caputo y resuelto mediante una cuadratura rectangular.

Flores (2017) en su trabajo se centra principalmente en las igualdades diferenciales fraccionarias lineales, para las cuales busca procedimientos de resolución. Formula sugerencias y crecimiento similares a la conjetura de igualdades diferenciales ordinarias, que involucran operadores fraccionarios. Aprovecha ciertas funciones, que denomina no elementales, que le permite resolver igualdades diferenciales estableciendo soluciones mediante dichas funciones.

Velásquez (2019) aborda el dilema de modelar el desplazamiento de un artefacto mediante igualdades no lineales con una tasa de variación constante fraccionarias. La respuesta implica analizar las circunstancias para la existencia de una igualdad diferencial fraccionaria de orden fraccionario. El operador diferencial y las condiciones de Cauchy se definen según la interpretación de Caputo. El sistema secuencial para alcanzar los propósitos planteados se basa en la abstracción perspicaz de la conjetura de Peano y en la realidad de las soluciones superiores e inferiores de una igualdad diferencial clásica, y posteriormente en la extensión de esta conjetura combinado con el polinomio de Taylor, para manifestar modelos matemáticos del desplazamiento de un artefacto.

Quispe (2016), propone un análisis de las reglas que rigen las igualdades diferenciales fraccionarias y el uso de configuraciones para fenómenos relacionados con este proceso. Empleó un enfoque mixto inductivo y deductivo. Las consecuencias de este análisis condujeron a resultados sobre igualdades diferenciales fraccionarias de forma global, al reexaminar respuestas previas y profundizar en las soluciones a problemas

asociados con este proceso. Esto sugiere que la configuración de igualdades diferenciales fraccionarias ofrece una estructura más apropiada para organizar ejemplos de orden ordinario.

Maldonado (2020), en su trabajo desarrolla y analiza diversas estrategias para determinar igualdades diferenciales fraccionarias, utilizando herramientas como la transformada de Laplace y el tratamiento directo de derivadas fraccionarias. Su estudio nos ayuda a comprender cómo estos operadores generalizados pueden enriquecer los métodos de solución tradicionales, abriendo así nuevas perspectivas para modelar de acontecimiento que presentan memoria o comportamiento no local.

2.2. Marco Teórico de la Investigación

En el ámbito de las funciones trascendentes particulares, introducimos la funciones Gamma, Gamma incompleta, Beta y Digamma, así como diversos operadores integrales. También se definen varios operadores diferintegral. Entre los autores consultados en las referencias bibliográficas se encuentran (Bell, 1968), (Chaudhry & Zubar, 2002), (Levedev, 1972), (Miller & Ross, 1993), (Santanu, 2011) y (Arafet, Domínguez, y Chang, 2008).

2.2.1. Funciones Trascendentes Especiales

2.2.1.1. Función Gamma de Euler

Definición 2.2.1.1.1 (Función Gamma de Euler)

Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(z) > 0$. Definimos

$$\gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

a la que llamamos *Función Gamma*.

Proposición 2.2.1.1.1 (Función Gamma de uno)

Para $z = 1$, tenemos:

$$\gamma(1) = 1.$$

Demostración:

Del cálculo directo de la integral se deduce:

$$\gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Proposición 2.2.1.1.2 (Función Gamma recursiva)

Para $\operatorname{Re}(z) > 0$, tenemos:

$$\gamma(z+1) = z\gamma(z).$$

Demostración:

Por definición 2.2.1.1.1, tenemos:

$$\gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

Por lo tanto

$$\gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = -t^z e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\gamma(z).$$

En consecuencia,

$$\gamma(z+1) = z\gamma(z).$$

Proposición 2.2.1.1.3 (Función Gamma para entero positivos)

Para cualquier entero $m \geq 1$, se cumple:

$$\gamma(z+m)\gamma(-z-m+1) = (-1)^m \gamma(z)\gamma(1-z), \text{ para todo } z \in \mathbb{C}$$

Demostración:

Por la propiedad 2.2.1.2, se cumple:

$$\gamma(z+m) = (z+m-1)(z+m-2)(z+m-3)\dots(z+2)(z+1)z\gamma(z)$$

$$\gamma(1-z) = (1-z-1)(1-z-2)(1-z-3)\dots(1-z-m+1)\gamma(1-z-m).$$

Despejando $\gamma(1-z-m)$, obtenemos

$$\gamma(1-z-m) = \frac{\gamma(1-z)}{(1-z-1)(1-z-2)(1-z-3)\dots(1-z-m+1)},$$

del producto $\gamma(z+m)\gamma(1-z-m)$. tenemos

$$\begin{aligned}
\gamma(z+m) \cdot \gamma(1-z-m) &= \frac{[(z+m-1)(z+m-2) \dots (z+2)(z+1)z \cdot \gamma(z)]\gamma(1-z)}{(1-z-1)(1-z-2) \dots (1-z-m+1)(1-z-m)} \\
&= \left[\frac{(z+m-1)(z+m-2) \dots (z+2)(z+1)z}{(1-z-1)(1-z-2) \dots (1-z-m+1)(1-z-m)} \right] \gamma(z)\gamma(1-z) \\
&= \left[\frac{(z+m-1)(z+m-2) \dots (z+2)(z+1)z}{z(-z-1)(-z-2) \dots (-z-m+2)(1-z-m)} \right] \gamma(z)\gamma(1-z) \\
&= (-1)^m \gamma(z)\gamma(1-z).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\gamma(z+m) \cdot \gamma(1-z-m) = (-1)^m \gamma(z)\gamma(1-z).$$

Proposición 2.2.1.1.4 (Formula de reflexión)

En la fórmula de reflexión de Euler, tenemos:

$$\gamma(z)\gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}, 0 < z < 1$$

Demostración:

Comencemos con las definiciones:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Gamma(1-z) = \int_0^{+\infty} e^{-s} t^{-z} ds$$

Consideremos el producto.

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-s} t^{-z} ds \right) \\
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(t+s)} t^{z-1} s^{-z} dt ds
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 e^{-u} (uv)^{z-1} [u(1-v)]^{-z} u dv du \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^1 e^{-u} v^{z-1} (1-v)^{-z} du dv \\
&= \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} du \right) \left(\int_0^1 v^{z-1} (1-v)^{-z} dv \right)
\end{aligned}$$

Se sabe que:

$$B(z, 1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1$$

Por lo tanto:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

2.2.1.1.1 Función Gamma Incompleta de Euler

Definición 2.2.1.1.1 (Gamma incompleta de Euler)

La función gamma incompleta es:

$$\Gamma(v, z) = \int_0^z t^{v-1} e^{-t} dt, \operatorname{Re}(v) > 0.$$

Observación 2.2.1.1.1.

Una versión anterior o normalizada de la función viene dada por:

$$\Gamma^*(v, z) = \frac{1}{\Gamma(v)z^v} \int_0^z t^{v-1} e^{-t} dt$$

2.2.1.2. Función Beta

Definición 2.2.1.2.1 (Función Beta)

Sean $\operatorname{Re}(x) > 0$ y $\operatorname{Re}(y) > 0$. Definimos:

$$B(x; y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

que denomina *Función Beta*.

Proposición 2.2.1.2.1 (Simetría de la función Beta)

Sea $\operatorname{Re}(x) > 0$ y $\operatorname{Re}(y) > 0$. Entonces, en la función Beta, tenemos:

$$B(x; y) = B(y; x)$$

Demostración:

Usando la definición 2.2.1.2.1 y realizando el cambio de variable, obtenemos:

$$B(x; y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = - \int_1^0 (1-s)^{x-1} s^{y-1} ds = \int_0^1 s^{y-1} (1-s)^{x-1} ds.$$

Por lo tanto,

$$B(x; y) = B(y; x).$$

Proposición 2.2.1.2.2 (Relación Beta y Gamma)

La relación entre las funciones Beta y Gamma viene dada por

$$B(x; y) = \frac{\gamma(x)\gamma(y)}{\gamma(x+y)}.$$

Demostración:

Según la definición 2.2.1.1.1, tenemos:

$$\gamma(x) \cdot \gamma(y) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-s} s^{y-1} ds \right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(t+s)} t^{x-1} s^{y-1} dt ds.$$

Tras el correspondiente cambio de variable, obtenemos

$$\begin{aligned} \gamma(x) \cdot \gamma(y) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-s} s^{y-1} ds \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u} (uv)^{x-1} (u(1-v))^{y-1} uv du dv \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} v^x u^y (1-v)^{y-1} du dv \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{(x+y)-1} du \right) \left(\int_0^{+\infty} v^x (1-v)^{y-1} dv \right) = \gamma(x+y) \cdot B(x; y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la demostración está completa.

Definición 2.2.1.2.2 (Función Beta Incompleta)

La generalización de la función beta de Euler, definida en la forma

$$B(x; p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

se denomina *Función Beta incompleta*.

2.2.1.3. Función Digamma

Definición 2.2.1.3.1 (Función Digamma)

La *Función Digamma* se define mediante la siguiente fórmula:

$$\Psi(z) = D \log[\gamma(z)] = \frac{1}{\gamma(z)} D[\gamma(z)], \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \dots$$

Definición 2.2.1.3.2 (Función Digamma)

La función Digamma puede definirse como una serie infinita:

$$\Psi(z+1) = -\mathcal{C} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{k(z+k)},$$

donde $\mathcal{C} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{m} - \ln(m) \right] = 0,5572156649 \dots$, conocida como constante de *Euler - Mascheroni*.

Proposición 2.2.1.3.1 (Descomposición de la función Digamma)

Para todo numero natural m ,

$$\Psi(z+m) = \Psi(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z+k}, \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \dots$$

Demostración:

Consideremos la definición 2.2.1.3.1. Así, para $m = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} \Psi(z+1) &= D[\log(\gamma(z+1))] = D[\log(z\gamma(z))] = D[\log(z) + \log(\gamma(z))] \\ &= D[\log(z)] + D[\log(\gamma(z))] = \frac{1}{z} + \Psi(z), \end{aligned}$$

es decir, $\Psi(z+1) = \Psi(z) + \frac{1}{z}$. Supongamos ahora que para $m = n$, tenemos:

$$\Psi(z+n) = \Psi(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z+k}, \quad n \in \mathbb{N}, z \neq 0, -1, -2, -3, \dots$$

Finalmente, para $m = n + 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\Psi(z+n+1) &= D[\log(\gamma(z+n+1))] \\
&= D[\log((z+n)(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+n-n)\gamma(z))] \\
&= D[\log(z+n) + \log(z+n-1) + \log(z+n-2) + \cdots + \log(z) \\
&\quad + \log(\gamma(z))] \\
&= D[\log(z+n)] + D[\log(z+n-1)] + D[\log(z+n-2)] + \cdots \\
&\quad + D[\log(z)] + D[\gamma(z)] \\
&= \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z+n-1} + \frac{1}{z+n-2} + \cdots + \frac{1}{z} + \Psi(z) \\
&= \Psi(z) + \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{z+n-2} + \frac{1}{z+n-1} + \frac{1}{z+n} \\
&= \Psi(z) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{z+k}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Psi(z+n+1) = \Psi(z) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{z+k}.$$

2.2.2. Operador Diferintegral

2.2.2.1. Operador Diferintegral de Anton Grünwald – Aleksey Letnikov

Definición 2.2.2.1.1 (Derivada de ordenamiento m)

La derivada de ordenamiento m , denotada como $g^{(m)}(x)$, se define como:

$$g^{(m)}(x) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c^m} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m}{n} g(x - nc).$$

Observación 2.2.2.1.1.

Expandimos este concepto a cualquier orden $\alpha > 0$. En efecto, utilizando la función gamma y estableciendo los términos de integración, tenemos:

$$D^\alpha g(x) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c^\alpha} \sum_{n=0}^{\frac{x-b}{c}} \frac{(-1)^n \gamma(\alpha+1)}{n! \gamma(\alpha-n+1)} g(x - nc),$$

donde hemos sustituido n por $\frac{x-b}{c}$ ya que α generalmente no es un número entero. Por la proposición 2.2.1.1.3 de la función γ , podemos escribir

$$D^\alpha g(x) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c^\alpha} \sum_{n=0}^{\frac{x-\alpha}{c}} \frac{\gamma(n-\alpha)}{\gamma(-\alpha)\gamma(n+1)} g(x-nc).$$

2.2.2.2. Antiderivada fraccionaria de Bernhard Riemann-Joseph Liouville

Definición 2.2.2.2.1 (Integral Fraccionaria Riemann)

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ y g una función continua por saltos en $J' = (c, d]$, e integrable en todo subintervalo $J = [c, d]$, llamamos:

$${}_c I_x^\alpha g(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_c^x (x-\zeta)^{\alpha-1} g(\zeta) d\zeta, x \in J',$$

la *Integral de Riemann* de g de ordenamiento α .

Observación 2.2.2.2.1.

1. Una función continua para saltos es una función definida en todos los intervalos $(c, d]$ que puede presentar diversas discontinuidades, algunas de las cuales son asintóticas. Además, la función debe ser continua en d , pero puede tener una discontinuidad asintótica en c .
2. d posiblemente $+\infty$.
3. Cuando $c = 0$, afirmamos de la antiderivada de Riemann - Liouville.

Definición 2.2.2.2.2 (Operador Diferintegral)

El *Operador Diferintegral* para cada ordenamiento real se define como un operador conexo:

$$D^\beta g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma(-\beta)} \int_c^x (x-\zeta)^{-\beta-1} g(\zeta) d\zeta, \beta < 0 \\ D^0[g(x)] = g(x), \beta = 0 \\ D^n[D^{-(n-\beta)}g(x)], \beta > 0, n=[\beta] \end{cases}$$

Proposición 2.2.2.2.2 (Operador Diferintegral Lineal)

En linealidad del operador diferintegral, tenemos:

$${}_c D_x^\beta (r g_1(x) + s g_2(x)) = r {}_c D_x^\beta g_1(x) + s {}_c D_x^\beta g_2(x)$$

Demostración:

Sea $\beta > 0, n = [\beta], \alpha = n - \beta > 0, r, s \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\begin{aligned}
{}_c D_t^\beta (r g_1(x) + s g_2(x)) &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_c^x (x - \zeta)^{\alpha-1} (r g_1(\zeta) + s g_2(\zeta)) d\zeta \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_c^x (x - \zeta)^{\alpha-1} r g_1(\zeta) d\zeta + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_c^x (x - \zeta)^{\alpha-1} s g_2(\zeta) d\zeta \\
&= r \frac{1}{\gamma(\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_c^x (x - \zeta)^{\alpha-1} g_1(\zeta) d\zeta + s \frac{1}{\gamma(\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_c^x (x - \zeta)^{\alpha-1} g_2(\zeta) d\zeta \\
&= r {}_c D_x^\beta g_1(x) + s {}_c D_x^\beta g_2(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, demostramos que:

$${}_c D_x^\beta (r g_1(x) + s g_2(x)) = r {}_c D_x^\beta g_1(x) + s {}_c D_x^\beta g_2(x).$$

Proposición 2.2.2.2.3 (Ley de los Exponentes para las integrales fraccionarias)

Sea g una función continua en $J = [0, d]$ y sean $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Entonces:

$$I^\alpha [I^\beta] g(x) = I^{(\alpha+\beta)} g(x).$$

Demostración:

Sea $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Considere la composición de integrales fraccionales

$$\begin{aligned}
I^\alpha [I^\beta g(x)] &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \zeta)^{\alpha-1} [I^\beta g(\zeta)] d\zeta \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \zeta)^{\alpha-1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\zeta (\zeta - y)^{\beta-1} g(y) dy \right\} d\zeta \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)\gamma(\beta)} \int_0^x dy \int_y^x (x - \zeta)^{\alpha-1} (\zeta - y)^{\beta-1} g(y) d\zeta \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)\gamma(\beta)} \int_0^x g(y) dy \int_y^x (x - \zeta)^{\alpha-1} (\zeta - y)^{\beta-1} d\zeta.
\end{aligned}$$

Ahora defina $g_1(\zeta) = (\zeta - y)^{\beta-1}$, $\zeta > y$, luego

$${}_y I_x^\alpha g_1(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \zeta)^{\alpha-1} g_1(\zeta) d\zeta.$$

Entonces la integral interna es precisamente la integral fraccionaria aplicada a g :

$$\gamma(\alpha) {}_y I_x^\alpha g_1(x) = \int_y^x (x - \zeta)^{\alpha-1} (\zeta - y)^{\beta-1} d\zeta,$$

eso es,

$$I^\alpha [I^\beta g(x)] = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x g(y) \left[{}_y I_x^\alpha g_1(x) \right] dy$$

Finalmente, usando el resultado conocido ${}_y I_x^\alpha g_1(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-y)^{\alpha+\beta-1}$, tenemos

$$I^\alpha [I^\beta g(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^x (x-y)^{\alpha+\beta-1} g(y) dy = I^{(\alpha+\beta)} g(x)$$

Definición 2.2.2.2.3 (Función de Miller – Ross E_x)

La *función de Miller – Ross*, denotada por E_x , se define como

$$E_x(\mu, b) = x^\mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bx)^k}{\Gamma(\mu + k + 1)},$$

Propiedad 2.2.2.2.1 (Miller- Ross E_x)

Sea E_x la función Miller – Ross, se cumple que

a) $E_x(0, b) = e^{bx}$.

b) $E_x(-1, b) = bE_x(0, b)$.

Ejemplo 2.2.2.2.1 (Antiderivada fraccionaria de orden $\alpha > 0$ de $g(x) = x^\lambda$)

Calcular la antiderivada fraccionaria de orden $\alpha > 0$ de $g(x) = x^\lambda$ con $\lambda > -1$ y término inicial $c = 0$.

Solución:

Tenemos $g(x) = x^\lambda$ con $\lambda > -1$. Tomando $c = 0$, de la definición de la integral fraccionaria obtenemos:

$${}_0 I_x^\alpha x^\lambda = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (\zeta - x)^{\alpha-1} \zeta^\lambda d\zeta.$$

Entonces, al evaluar la integral tenemos

$$\begin{aligned}
{}_0I_t^\alpha x^\lambda &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^1 (xt - x)^{\alpha-1} (xt)^\lambda x dt = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-1)^{\alpha-1} x^{\alpha-1} x^\lambda t^\lambda x dt \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha+\lambda} (t-1)^{\alpha-1} t^\lambda dt = \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-1)^{\alpha-1} t^\lambda dt \\
&= \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-1)^{\alpha-1} t^{(\lambda+1)-1} dt = \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\gamma(\alpha)} B(\alpha, \lambda+1) \\
&= \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\gamma(\alpha)} \frac{\gamma(\alpha)\gamma(\lambda+1)}{\gamma(\alpha+\lambda+1)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$${}_0I_t^\alpha x^\lambda = \frac{\gamma(\lambda+1)}{\gamma(\alpha+\lambda+1)} x^{\alpha+\lambda}.$$

Ejemplo 2.2.2.2.2 (Tasa de variación instantánea fraccionaria de orden $\alpha > 0$ de $g(x) = (x-b)^\lambda$)

Calcule la tasa de variación instantánea fraccionaria de orden $\alpha > 0$ de la función $g(x) = (x-b)^\lambda$ con

$\lambda > -1$ y termino inicial $c = b$.

Solución:

Si consideramos $g(x) = (x-b)^\lambda$, resulta más conveniente tomar $c = b$ como límite inferior. La integral fraccionaria de orden $\alpha > 0$ se expresa entonces de la siguiente manera :

$${}_aI_t^\alpha g(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_b^x (x-\zeta)^{\alpha-1} (\zeta-b)^\lambda d\zeta.$$

Al realizar el cambio de variable $\zeta = b + s \Rightarrow d\zeta = ds$ con $s \in [0, x-b]$, obtenemos:

$${}_bI_x^\alpha g(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^{x-b} [(x-b)-s]^{\alpha-1} s^\lambda ds.$$

Al definir la variable de traslación $\hat{x} = x - b$, la integral toma la forma:

$${}_0I_{\hat{x}}^\alpha \hat{x}^\lambda = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^{\hat{x}} [\hat{x}-s]^{\alpha-1} s^\lambda ds = \frac{\gamma(\lambda+1)}{\gamma(\lambda+\alpha+1)} \hat{x}^{\alpha+\lambda} = \frac{\gamma(\lambda+1)}{\gamma(\lambda+\alpha+1)} (x-b)^{\alpha+\lambda}.$$

Si queremos derivar la misma función fraccionalmente , para $\mu > 0$, dejemos que $n = [\beta]$ y $\alpha = n - \beta$. La tasa de cambio instantáneo fraccionaria de orden μ se define como:

$${}_a D_x^\beta (x-b)^\lambda = D^n [{}_a I_t^\alpha (x-b)^\lambda] = D^n \left[\frac{\gamma(\lambda+1)}{\gamma(\lambda+\alpha+1)} (x-b)^{\alpha+\lambda} \right].$$

Por lo tanto, la tasa de cambio instantáneo fraccionaria se convierte en

$$\begin{aligned} {}_b D_x^\beta (x-b)^\lambda &= \frac{\gamma(\lambda+1)}{\gamma(\lambda+\alpha+1)} D^n (x-b)^{\alpha+\lambda} = \frac{\gamma(\lambda+1)}{\gamma(\lambda+\alpha+1)} \frac{\gamma(\lambda+\alpha+1)}{\gamma(\lambda+\alpha-m+1)} (x-b)^{\lambda+\alpha-m} \\ &= \frac{\gamma(\lambda+1)}{\gamma(\lambda+\alpha-m+1)} (x-b)^{\lambda-\mu}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.2.2.3 (Integral fraccionaria de una potencia)

Calcule la antiderivada fraccionaria de orden $\alpha > 0$ de $g(x) = (x-b)^\lambda$ con $\lambda > -1$ y termino inicial $c = 0$.

Solución:

Para calcular la antiderivada fraccionalmente de orden α de la función

$g(x) = (x-b)^\lambda$, si el término inferior es cero, el procedimiento se vuelve más complejo y esta expresión resultante pierde simplicidad

$$\begin{aligned} {}_0 I_x^\alpha g(x) &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\zeta)^{\alpha-1} (\zeta-b)^\lambda d\zeta \\ &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\frac{x}{x-b}}^0 x^{\alpha-1} (x-b)^{\alpha-1} (1-x)^\lambda (x-b)^\lambda (b-x) dx \\ &= \frac{(x-b)^{\lambda+\alpha}}{\gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{x}{x-b}} x^{\alpha-1} (1-x)^\lambda dx. \end{aligned}$$

La última integral la podemos relacionar con la función Beta incompleta

$${}_0 I_x^\alpha g(x) = \frac{(x-b)^{\lambda+\alpha}}{\gamma(\alpha)} B_{\frac{x}{x-b}}(\alpha, \lambda+1),$$

Ahora, si diferintegramos la función $g(x) = (b-x)^\lambda$,

$$\begin{aligned}
{}_0I_x^\alpha g(x) &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \zeta)^{\alpha-1} (b - \zeta)^\lambda d\zeta = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\frac{x}{b}}^0 (t(b - \zeta))^{\alpha-1} (b - \zeta)^\lambda \frac{(b - \zeta)^2}{b - x} dt \\
&= -\frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\frac{x}{b}}^0 t^{\alpha-1} (b - \zeta)^{\alpha-1+\lambda+2} (b - x)^{-1} dt \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{x}{b}} t^{\alpha-1} \left(\frac{b - x}{1 - t} \right)^{\alpha+\lambda+1} (b - x)^{-1} dt \\
&= \frac{(b - x)^{\alpha+\lambda}}{\gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{x}{b}} t^{\alpha-1} (1 - t)^{-\alpha-\lambda-1} dt.
\end{aligned}$$

Usando la función Beta incompleta

$${}_0I_t^\alpha g(x) = \frac{(b - x)^{\alpha+\lambda}}{\gamma(\alpha)} B_{\frac{x}{b}}(\alpha, -\alpha - \lambda).$$

Tomando $b = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
{}_0I_x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) &= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}{\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-1} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}(1-t)} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{2u}{u(1-u^2)} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{1-u^2} du.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$${}_0I_x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right).$$

Ejemplo 2.2.2.2.4 (Antiderivada fraccionaria del exponencial)

Calcular la antiderivada fraccionaria de orden $\alpha > 0$ de $g(x) = e^{bx}$ con $b \in \mathbb{R}$.

Solución:

Si $g(x) = e^{bx}$, entonces tenemos

$$I^\alpha e^{bx} = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \zeta)^{\alpha-1} e^{b\zeta} d\zeta,$$

cambiar la variable $t = x - \zeta$

$$I^\alpha e^{bx} = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_x^0 t^{\alpha-1} e^{b(x-t)} dt = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{bx} e^{-bt} dt = \frac{e^{bx}}{\gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-bt} dt.$$

Podemos reescribir esta expresión posemos en la forma $E_x(\alpha, b) = D^{-\alpha} e^{bx}$. Además, tenemos:

$$E_x(\alpha, b) = \frac{e^{bx}}{\gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-bt} dt = \frac{x^\alpha e^{bx}}{\gamma(\alpha) x^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-bt} dt = x^\alpha e^{bx} \Gamma^*(\alpha, bx),$$

donde Γ^* es el gamma incompleta. Desarrollando este último resultado en serie, si integramos e^{bx} , α veces, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{bx} dx &= \frac{1}{b} e^{bx} \Big|_0^x = \frac{1}{b} [e^{bx} - 1] = \frac{e^{bx}}{b} - \frac{1}{b} \\ \int_0^x \left(\frac{e^{bx}}{b} - \frac{1}{b} \right) dx &= \frac{e^{bx}}{b^2} - \frac{x}{b} - \frac{1}{b^2} \\ \int_0^x \left(\frac{e^{bx}}{b^2} - \frac{x}{b} - \frac{1}{b^2} \right) dx &= \frac{e^{bx}}{b^3} - \frac{x^2}{2b} - \frac{x}{b^2} - \frac{1}{b^3} \\ \int_0^x \left(\frac{e^{bx}}{b^3} - \frac{x^2}{2b} - \frac{x}{b^2} - \frac{1}{b^3} \right) dx &= \frac{1}{b^3} \left(e^{bx} - \frac{(xb)^2}{2} - xb - 1 \right) \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{b^\alpha} \left(e^{bx} - \frac{1}{(\alpha-1)} (xb)^{\alpha-1} - \dots - \frac{1}{3} (xb)^3 - \frac{1}{2} (xb)^2 - bx - 1 \right). \end{aligned}$$

Además, $E_x(\alpha, b)$ satisface $E_x(0, b) = e^{bx}$. Finalmente, $E_0(\alpha, b) = 0$ si $\alpha > 0$ y $E_x(\alpha, 0) = \frac{x^\alpha}{\gamma(\alpha+1)}$.

2.2.3. Tasa de variación constante fraccionaria de Riemann Liouville

Definición 2.2.3.1. (Funciones de Clase C)

Sea $d = +\infty$. Una función se denomina clase **C** si está definida en $(0, +\infty]$ y es integrable en todo subintervalo finito de este intervalo.

Proposición 2.2.3.1. (Integral fraccionaria para funciones de clase C)

Sea g una función continua en $J = [0, d]$ tal que Dg es de clase **C**. Entonces $I^{\alpha-1}(Dg(x)) = I^\alpha g(x) - \frac{g(0)}{\gamma(\alpha+1)} x^\alpha$ para $\alpha > 0, x > 0, x \in J$.

Demostración:

Asignamos valores $\epsilon, \eta > 0$ tales que $g(x) = (x - \zeta)^{\alpha-1}$ son funciones continuamente diferenciables en $[\eta, x - \epsilon]$. Bajo estas hipótesis, podemos integrar por partes,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma(\alpha+1)} \int_{\eta}^{x-\epsilon} (x-\zeta)^{\alpha} Dg(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{\gamma(\alpha+1)} \left\{ [(x-\zeta)^{\alpha}]_{\eta}^{x-\epsilon} + \gamma \int_{\eta}^{x-\epsilon} (x-\zeta)^{\alpha-1} g(\zeta) d\zeta \right\} \\ &= \frac{1}{\gamma(\alpha+1)} \left\{ \epsilon^{\alpha} g(x-\epsilon) - (t-\eta)^{\alpha} g(\eta) + \alpha \int_{\eta}^{x-\epsilon} (x-\zeta)^{\alpha-1} g(\zeta) d\zeta \right\}, \end{aligned}$$

y ahora tomo límites $\epsilon \rightarrow 0$ y $\eta \rightarrow 0$;

$$I^{\alpha-1}(Dg(x)) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\zeta)^{\alpha-1} g(\zeta) d\zeta - \frac{g(0)}{\gamma(\alpha+1)} x^{\alpha}$$

Proposición 2.2.3.2. (Integral fraccionaria para funciones de clase C^1)

Sea g una función continuamente diferenciable en $J = [0, d]$, entonces:

$$I^{\alpha-1}(I^{\alpha}g(x)) = I^{\alpha}(Dg(x)) + \frac{g(0)}{\gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}$$

para $\alpha > 0, x > 0, x \in J$.

Demostración:

En $I^{\alpha}g(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\zeta)^{\alpha-1} g(\zeta) d\zeta$ cambiamos las variables $y = (x-\zeta)^{\alpha-1}$, $d\zeta = -\frac{1}{\alpha} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy$ obteniendo

$$I^{\alpha}g(x) = -\frac{1}{\gamma(\alpha+1)} \int_{t^{\alpha}}^0 y^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} g\left(x - y^{\frac{1}{\alpha}}\right) dx = \frac{1}{\gamma(\alpha+1)} \int_0^{t^{\alpha}} g\left(x - y^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy.$$

Derivamos bajo el signo de la integral, tenemos

$$\begin{aligned} D(I^{\alpha}g(x)) &= \frac{1}{\gamma(\alpha+1)} \frac{d}{dt} \int_0^{t^{\alpha}} g\left(x - y^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy \\ &= \frac{1}{\gamma(\alpha+1)} \left\{ \alpha x^{\alpha-1} g(0) - 0 + \int_0^{x^{\alpha}} g\left(x - y^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy \right\}, \end{aligned}$$

Entonces,

$$D(I^{\alpha}g(x)) = \frac{g(0)}{\gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\zeta)^{\alpha-1} \frac{d}{dx} g(\zeta) d\zeta = \frac{g(0)}{\gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + I^{\alpha}(Dg(x)).$$

Ejemplo 2.2.3.1. (Integral fraccionaria de la potencia)

Aplicando la proposición anterior a $g(x) = x^\lambda, \lambda > 0$, obtenemos:

$$D(I^\alpha x^\lambda) = I^\alpha(Dx^\lambda).$$

Proposición 2.2.3.3. (Integral fraccionaria para orden de derivación $p \in \mathbb{N}$)

Sean $\alpha > 0, p \in \mathbb{N}$, y sea $D^{p-1}g$ continua en $J = [0, d]$ y tal que $D^p g$ sea de clase C , entonces:

$$I^{\alpha-p}(D^p g(x)) = I^\alpha g(x) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^{\alpha+k}}{\gamma(\alpha+k+1)}.$$

Demostración:

Aplicando la Proposición 2.2.3.2, sustituyendo α por $\alpha + 1$

$$I^{\alpha-2}(D^2 g(x)) = I^{\alpha-1}(Dg(x)) - \frac{Dg(0)}{\gamma(\alpha+2)} x^{\alpha+2}.$$

Ahora, apliquemos nuevamente teorema a $I^{\alpha-1}(Dg(x))$ y sustituyámoslo en la expresión anterior,

$$I^{\alpha-2}(D^2 g(x)) = I^\alpha g(x) - \frac{g(0)}{\gamma(\alpha+1)} x^{\alpha+1} - \frac{Dg(0)}{\gamma(\alpha+2)} x^{\alpha+2}.$$

Al repetir este proceso, obtenemos la siguiente expresión:

$$I^{\alpha-p}(D^p g(x)) = I^\alpha g(x) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^{\alpha+k}}{\gamma(\alpha+k+1)},$$

La demostración queda así completa.

Proposición 2.2.3.4. (Derivación $p \in \mathbb{N}$ de una integral fraccionaria)

Sea $\alpha > 0, n \in \mathbb{N}$, y $D^n g$ continua sobre $J = [0, d]$, entonces:

$$D^n(I^\alpha g(x)) = I^\alpha(D^n g(x)) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{\alpha-n+k}}{\gamma(\alpha-n+k+1)} D^k g(0).$$

Demostración:

Derivamos la expresión de la Proposición 2.2.3.2.

$$D^n(I^\alpha g(x)) = D\{I^\alpha(Dg(x))\} + \frac{g(0)}{\gamma(\alpha-1)}x^{\alpha-2}$$

y ahora aplicamos la Proposición 2.2.3.2 a $I^\alpha(Dg(x)) = I^\alpha(D^2g(x)) + \frac{Dg(0)}{\gamma(\nu)}x^{\alpha-1}$, y sustituimos en la expresión anterior;

$$D^p(I^\alpha g(x)) = I^\alpha(D^2g(x)) + \frac{g(0)}{\gamma(\alpha-1)}x^{\alpha-2} - \frac{Dg(0)}{\gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}.$$

Al repetir este procedimiento varias veces, obtenemos la expresión:

$$D^p(I^\alpha g(x)) = I^\alpha(D^p g(x)) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{\alpha-n+k}}{\gamma(\alpha-n+k+1)} D^k g(0).$$

Definición 2.2.3.2. (Funciones de Clase $\mathcal{C}$)

Se dice que una función es de clase $\mathcal{C}$ si tiene la siguiente forma: $x^\lambda \eta(x)$, $x^\lambda \eta(x) \ln(x)$ con $\lambda > -1$, y donde $\eta(x)$ es una función analítica en una vecindad del origen.

Observación 2.2.3.1.

Dado que $\eta(x)$ analítica, podemos escribir $\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dentro de $[-d, d]$ para $d < r$ y donde r es el radio de convergencia de η .

Proposición 2.2.3.5. (Regla de reajustes)

Sea g una función de clase $\mathcal{C}$. Entonces tenemos:

$$D^\beta g(rx) = k^\beta \left(D^\beta g(y) \right)_{y=rx}, \text{ para todo } r \in \mathbb{R}, r > 0, \text{ para todo } \beta \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

Sean $\alpha > 0$, $I^\alpha g(rx) = \frac{1}{\gamma(\nu)} \int_0^x (t-\zeta)^{\nu-1} g(r\zeta) d\zeta$. Cambio de variable $r\zeta = \bar{\zeta}$ se sigue

$$I^\alpha g(rx) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^{rx} \frac{1}{r} \left(x - \frac{\bar{\zeta}}{r} \right)^{\alpha-1} g(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} = \frac{1}{r^\alpha} (I^\alpha g(y))_{y=rx}.$$

Si $\alpha > 0$ y $m = [\beta]$, definimos $\alpha = m - n$,

$$D^\alpha g(rt) = D^m(I^\alpha g(rx)) = D^m \left(\frac{1}{r^\alpha} (I^\alpha g(y))_{y=rt} \right)$$

$$= \frac{1}{r^\alpha} k^m (D^{m-\alpha} g(y))_{y=rx} = k^\beta (D^\beta g(y))_{y=rt}.$$

2.3. Marco Conceptual de la Investigación

Para el análisis de las variables de nuestro estudio, se presentaron las definiciones de orden exponencial, la transformación de la Laplace y sus propiedades. También se establecieron la transformación de Laplace de la derivada fraccional y la función de Miller - Ross. Las referencias bibliográficas cita algunos textos consultados, como (Bonilla, Kilbas, & Trujillo, 2003), (Bertram, 1975), (Oldham & Spanier, 1974), (Guerra & Kalla, 1990), (Martínez, 2019).

2.3.1. Transformación de Laplace

Definición 2.3.1.1. (Ordenamiento exponencial)

Una función $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x)$, tiene crecimiento acotado por una exponencial o de orden exponencial $\alpha \in \mathbb{R}$ si existen escalares positivos $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$|g(x)| \leq T_1 e^{\alpha x}, \text{ para todo } x > T_2.$$

Definición 2.3.1.2. (Transformación de Laplace)

Sea g una función continua de saltos de clase C y ordenamiento exponencial. La *Transformación de Laplace* de g se define mediante la expresión:

$$\mathcal{L}\{g(x); s\} = \int_0^{+\infty} g(x) e^{-sx} dx, \operatorname{Re}(s) > 0.$$

2.3.2. Propiedades de la Transformación de Laplace

Proposición 2.3.2.1. (Existencia de transformación de Laplace)

Sea g es una función de clase C de ordenamiento exponencial α . Entonces existe:

$$\int_0^{+\infty} g(x) e^{-sx} dx, s > \alpha.$$

Demostración:

Dado que g tiene ordenamiento exponencial α , existen constantes positivas $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$|g(x)| \leq T_1 e^{\alpha x}, \text{ para todo } x > T_2.$$

Al separar integrales y aumentarlas, obtenemos :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g(x)e^{-sx} dx &= \int_0^{T_2} g(x)e^{-sx} dx + \int_{T_2}^{+\infty} g(x)e^{-sx} dx \\
&\leq \int_0^{T_2} e^{-sx} |g(x)| dx + \int_{T_2}^{+\infty} e^{-sx} |g(x)| dx \\
&\leq k \int_0^{T_2} |g(x)| dx + T_1 \int_{T_2}^{+\infty} e^{-sx} e^{-\alpha x} dx \\
&\leq k \int_0^{T_2} |g(x)| dx + T_1 \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)x} dx \\
&\leq M + \frac{T_1}{s - \alpha},
\end{aligned}$$

donde $M = k \int_0^{T_2} |g(x)| dx$, $k = \sup\{e^{-sx}\}$, $s > \alpha$, $x \in [0, T_2]$.

Proposición 2.3.2.2. (Transformación de Laplace de igualdad)

Sean g_1 y g_2 son funciones continuas de ordenamiento exponencial y

$$\mathcal{L}\{g_1(x); s\} = \mathcal{L}\{g_2(x); s\}. \text{ Entonces } g_1(x) = g_2(x).$$

Demostración:

Dado que $\mathcal{L}\{g_1(x); s\} = \mathcal{L}\{g_2(x); s\}$, tenemos $\mathcal{L}\{g_1(x) - g_2(x); s\} = 0$. Por lo tanto

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x).$$

Afirmación: $g(x) = 0$, en efecto,

$$\mathcal{L}\{g(x); s\} = \int_0^{+\infty} g(x)e^{-sx} dx = 0.$$

Por lo tanto, al evaluar los valores de $s = s_0 + n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ a partir de algún s_0 , obtenemos:

$$\mathcal{L}\{g(x); s\} = \int_0^{+\infty} g(x)e^{-(s_0+n+1)x} dx = 0.$$

Al realizar un cambio de variable, obtenemos:

$$\begin{aligned}
L\{g(-\ln t); s\} &= \int_1^0 g(-\ln t) e^{(s_0+n+1)\ln t} (e^{-\ln t}) dt \\
&= - \int_1^0 g(-\ln t) e^{(s_0+n)\ln x} dx \\
&= \int_0^1 g(-\ln t) e^{\ln(t^{s_0} \cdot t^n)} dt \\
&= \int_0^1 t^{s_0} t^n g(-\ln t) dt \\
&= \int_0^1 t^{s_0} g(-\ln t) t^n dt.
\end{aligned}$$

Finalmente, por la propiedad si $\int_0^1 g(t) t^n dt = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $g(t) = 0$. Por lo tanto $x^{s_0} g(-\ln t) = 0$ y $g(x) = 0$.

Proposición 2.3.2.3. (Producto de funciones de crecimiento acotado por una exponencial α)

Sea g_1 y g_2 son funciones continuas de crecimiento acotado por una exponencial α . Entonces su producto también es una función continua de crecimiento acotado por una exponencial α .

Demostración:

Existen T_1 y $T_2 \in \mathbb{R}$ tales que $|g_1(x)| < T_1 e^{\alpha x}$, para todo $x > T_2$ y existen S_1 y $S_2 \in \mathbb{R}$ tales que $|g_2(x)| < S_1 e^{\beta x}$, para todo $x > S_2$. Por lo tanto

$$|g_1(x)g_2(x)| = |g_1(x)||g_2(x)| < T_1 \cdot S_1 e^{(\alpha+\beta)x}, \text{ para } x \geq \max\{T_2, S_2\}.$$

Proposición 2.3.2.4. (Función continua de crecimiento acotado por una exponencial)

Sea g una función continua en $[0; +\infty)$ y Dg una función de clase $\mathcal{C}$ y de crecimiento por una exponencial. Entonces g también es una función de crecimiento acotado por una exponencial.

Demostración:

Para $\varepsilon > 0$, considere $\int_\varepsilon^x [Dg(\zeta)] d\zeta = g(x) - g(\varepsilon)$. Como g es continuo tenemos $\varepsilon \rightarrow 0$ entonces $g(x) = g(0) + \int_0^x [Dg(\zeta)] d\zeta$.

Además, Dg es de crecimiento acotado por una exponencial, por lo que existen constantes T_1 y $T_2 \in \mathbb{R}$ talque $|e^{-\alpha x} Dg(t)| < T_1, \forall x > T_2$. Descomponiendo $g(x)$ en dos integrales, obtenemos

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + \int_0^{T_2} [Dg(\zeta)] d\zeta + \int_{T_2}^x [Dg(\zeta)] d\zeta \\ &= g(0) + \int_0^{T_2} [Dg(\zeta)] d\zeta + \int_{T_2}^x e^{\alpha \varepsilon} [e^{-\alpha \varepsilon} Dg(\zeta)] d\zeta. \end{aligned}$$

Por hipótesis tenemos que $|e^{-\alpha x} Dg(t)| < T_1, \forall x > T_2$

$$g(x) = M_1 + \int_{T_2}^x e^{\alpha \zeta} [e^{-\alpha \zeta} Dg(\zeta)] d\zeta \leq M_1 + T_1 \int_{T_2}^x e^{\alpha \zeta} d\zeta.$$

Al observar $\int_{T_2}^x e^{\alpha \zeta} d\zeta = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha x} - e^{\alpha T_2}) < \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$, obtenemos $g(x) < M_1 + \frac{M e^{\alpha x}}{\alpha} < M_2 e^{\alpha x}$ para algún M_2 .

Proposición 2.3.2.5. (Transformación de Laplace de función continua por saltos)

Sea g una función continua por saltos de crecimiento acotado por una exponencial. Entonces

$$\mathcal{L}\{g(x); s\} = G(s) \longrightarrow 0, s \longrightarrow \infty.$$

Demostración:

Se sabe que g tiene un crecimiento acotado bajo una exponencial, por lo tanto existen escalares reales α, T_1, T_2 tales que $|g(x)| < T_1 e^{\alpha x} \forall x > T_2$. Entonces

$$|G(x)| \leq T_1 \int_0^{+\infty} e^{-sx} e^{\alpha x} dx = T_1 \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)x} dx = \frac{T_1}{s-\alpha},$$

cuando $s > \alpha$ se sigue

$$T_1 \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)x} dx = T_1 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-(s-\alpha)x} dx = T_1 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-(s-\alpha)x}}{-(s-\alpha)} \right]_0^b = \frac{T_1}{s-\alpha}$$

$$\text{y } \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{T_1}{s-\alpha} = 0.$$

Proposición 2.3.2.6. (Valor inicial de una transformación de Laplace)

Sea g una función diferenciable en $[0; +\infty)$ y sean g y Dg funciones que admiten la transformación de Laplace. Entonces

$$g(0) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \mathcal{L}\{g(x); s\}.$$

Demostración:

Según la definición de transformación de Laplace, tenemos,

$$\mathcal{L}\{Dg(x); s\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} Dg(x) dx = s\mathcal{L}\{g(x); s\} - g(0)$$

Tomando el límite, obtenemos:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}\{Dg(x); s\} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-sx} Dg(x) dx = 0,$$

Además,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +\infty} (s\mathcal{L}\{g(x); s\} - g(0)) &= 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow +\infty} s\mathcal{L}\{g(x); s\} - g(0) = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow +\infty} s\mathcal{L}\{g(x); s\} \\ &= g(0). \end{aligned}$$

Como g es continua, $\lim_{s \rightarrow +\infty} s\mathcal{L}\{g(x); s\} = g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Ejemplo 2.3.2.1. (Trasformación de Laplace de la función constante)

Determinar $\mathcal{L}\{1; s\}$, $Re\ s > 0$.

Solución:

Por definición 2.3.1.2, tenemos:

$$\mathcal{L}\{1; s\} = \int_0^{+\infty} 1e^{-sx} dx = \lim_{e \rightarrow +\infty} \int_0^e e^{-sx} dx = \left(-\frac{1}{s}\right)(0 - 1) = \frac{1}{s}.$$

Ejemplo 2.3.2.2. (Trasformación de Laplace de la función exponencial)

Determinar $\mathcal{L}\{e^{-bx}; s\}$, $b > 0$, $Re\ s > 0$.

Solución:

Por definición 2.3.1.2, tenemos:

$$\mathcal{L}\{e^{bx}, s\} = \int_0^{+\infty} e^{-bx} e^{-sx} dx = \int_0^{+\infty} e^{(-b-s)x} dx = \frac{1}{-b-s} (0 - 1) = \frac{1}{s+b}.$$

Ejemplo 2.3.2.3. (Trasformación de Laplace de la función seno)

Determinar $\mathcal{L}\{\sin(bx); s\}$, $b > 0, \operatorname{Re} s > 0$.

Solución:

Por definición 2.3.1.2, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(bx)\} &= \int_0^{+\infty} \sin(bx) e^{-sx} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \sin(bx) e^{-sx} dt \\ &= \frac{1}{b} - \frac{s^2}{b^2} \mathcal{L}\{\sin(bx)\} \\ &= \frac{b}{b^2 + s^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.2.4. (Trasformación de Laplace de delta de Dirac)

Consideremos ahora la delta de Dirac δ :

$$\begin{cases} \delta(x-b) = 0, x \neq b \\ \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \delta(x-b) dx = 1, \text{ para todo } \varepsilon > 0 \\ \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} g(x) \delta(x-b) dx = g(b), \text{ para todo } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

Su transformación de Laplace viene dada por

$$\mathcal{L}\{\delta(x-b)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \delta(x-b) dx = e^{-bx}, \quad b > 0, \operatorname{Re} s > 0.$$

Proposición 2.3.2.7. (Trasformación de Laplace de convolución)

Sea $G(s)$ y $J(s)$ la transformación de Laplace de dos funciones continuas $g(x)$ y $j(x)$. Entonces $\mathcal{L}\{(g * j)(x)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^x g(x-u) g(u) du\right\} = G(s)J(s)$.

Demostración:

$$G(s)J(s) = \left[\int_0^{\infty} g(\rho) e^{-s\rho} d\rho \right] \left[\int_0^{\infty} j(v) e^{-sv} dv \right] = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} g(\rho) e^{-s(\rho+v)} d\rho \right] j(v) dv$$

Ahora, usando un cambio de variable y un cambio de orden tenemos:

$$\begin{aligned} G(s)J(s) &= \int_0^{+\infty} \left[\int_{\tau}^{+\infty} g(x-w) e^{-sx} dx \right] j(w) dw \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_{\tau}^{+\infty} g(x-v) j(w) e^{-sx} dx \right] dw \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^x g(x-v) j(w) dw \right] e^{-sx} dx \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \int_0^x g(x-v) j(w) dw \right\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.2.5. (Integral fraccionario como producto de convolución)

Si tenemos una función g de clase C, tenemos su integral fraccionaria:

$$I^{\beta} g(x) = \frac{1}{\gamma(\beta)} \int_0^x (x-\zeta)^{\beta-1} g(\zeta) d\zeta, \beta > 0,$$

es un producto de convolución de $g(x)$ y $x^{\beta-1}$. También calculamos su transformación de Laplace

$$\mathcal{L}\{I^{\alpha} g(x)\} = \frac{1}{\gamma(\beta)} \mathcal{L}\{x^{\beta-1}\} \mathcal{L}\{g(x)\} = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \frac{\gamma(\beta)}{s^{\beta}} G(s) = \frac{G(s)}{s^{\beta}},$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}\{x^{\nu}\} = \frac{\gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}$.

Ejemplo 2.3.2.6. (Transformación de la integral de una potencia)

$$\mathcal{L}\{I^{\beta} x^{\nu}\} = \frac{s^{-\beta} \gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}} = \frac{\gamma(\nu+1)}{s^{\nu+\beta+1}}, \nu > -1.$$

Ejemplo 2.3.2.7. (Transformación de la integral de una exponencial)

Para $\beta > -1$, se tiene

$$\mathcal{L}\{I^{\beta} e^{bx}\} = s^{-\beta} \frac{1}{s-b} = \frac{1}{s^{\beta}(s-b)}$$

$$\mathcal{L}\{E_x(\beta, b)\} = \frac{1}{s^{\beta}(s-b)}, s > b$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\beta(s-b)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^\beta\left(1 + \frac{b}{s-b}\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\beta+1}} + \frac{b}{s^{\beta+1}(s-b)}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\beta+1}}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{s^{\beta+1}(s-b)}\right\} = \frac{x^\beta}{\gamma(\beta+1)} + I^{\beta-1}\left[L^{-1}\left\{\frac{b}{s-b}\right\}\right] \\
&= \frac{x^\beta}{\gamma(\beta+1)} + bI^{\beta-1}\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{s-b}\right\}\right] = \frac{x^\beta}{\gamma(\beta+1)} + bI^{\beta-1}[E_x(0, b)] \\
&= \frac{x^\beta}{\gamma(\beta+1)} + bE_x(\beta+1, b).
\end{aligned}$$

2.3.3. Transformación de Laplace de la Derivada Fraccional

Proposición 2.3.3.1. (Transformación de Laplace de la tasa de variación instantánea fraccionaria de una función de crecimiento acotado de una exponencial)

Sean $\beta > 0$ y $g \in \mathcal{C}$ de crecimiento acotado de una exponencial. Entonces

$$\mathcal{L}\{D^\beta g(x)\} = s^\beta G(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} D^{k-m+\beta} g(0), m = [\beta].$$

Demostración:

Es claro ver que

$$\begin{aligned}
L\{D^\beta g(x)\} &= L\{D^m(D^{-(m-\beta)}g(x))\} \\
&= s^m L\{D^{-(m-\beta)}g(x)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} D^{k-(m-\beta)}g(0) \\
&= s^m \frac{G(s)}{s^{m-\beta}} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} D^{k-(m-\beta)}g(0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$L\{D^\beta g(t)\} = s^\beta G(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} D^{k-(m-\beta)}g(0).$$

Propiedad 2.3.3.2. (Transformación de Laplace de la tasa de variación instantánea Fraccionaria)

Supongamos que la transformación de Laplace de $G(x)$ existe, luego:

$$\text{a) } \mathcal{L}\{D^\beta G(x)\} = s^\beta g(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^{k-n+\beta} G(0), n-1 < \beta \leq n, n \in \mathbb{N}.$$

b) $\mathcal{L}\{D^\beta G(x)\} = s^\beta g(s) - D^{-(1-\beta)}G(0), 0 < \beta \leq 1.$

Propiedad 2.3.3.3. (Transformación de Laplace de la función Miller – Ross)

$$\mathcal{L}\{E_x(\mu, r)\} = \frac{1}{s^r(s-b)}, s > b.$$

Propiedad 2.3.3.4. (Transformación inversa de Laplace)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\mu(s-b)^2}\right\} = xE_x(\mu, b) - \mu E_x(\mu+1, b), \mu > -2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\mu(s-b)}\right\} = E_x(\mu, b).$$

2.3.4. Modelo clásico del oscilador armónico amortiguado

Definición 2.3.4.1. (Masa en el oscilador armónico)

La masa es el indicador físico que pondera la inacción de un sólido oscilante, es decir, su resistencia a los cambios en su estado de movimiento. Matemáticamente, relaciona la aceleración del sistema con la fuerza aplicada resultante según la segunda ley de Newton:

$$\mathcal{F} = m \cdot a$$

Definición 2.3.4.2.(Segunda principio Físico de Newton)

El instante principio Físico de Newton plantea que la velocidad de la materia es inversamente proporcional a su masa. Físicamente,

$$\mathcal{F} = m \cdot a$$

donde:

$\mathcal{F}$: fuerza resultante ejercida sobre el sólido (en Newton, N),

m : masa del sólido (en Kilogramos, Kg),

a : aceleración del sólido (en metros por segundo al cuadrado, m/s^2)

Definición 2.3.4.3 (Principio Físico de Hooke)

El principio Físico de Hooke explica el proceder flexible de un espiral o material dentro de sus límites dúctiles. Establece que la energía suministrada por un resorte es conforme a su deformidad:

$$\mathcal{F} = -\rho \mathcal{X},$$

donde:

$\mathcal{F}$: fuerza reparadora aplicada al resorte (en N),

ρ : constante flexible (en N/m)

$\mathcal{X}$: desplazamiento desde la posición de estabilidad (en m),

a : aceleración del cuerpo (en m/s²). Un signo negativo expresa que la fuerza se opones a la deformación.

Definición 2.3.4.4 (Oscilador armónico amortiguado)

Un oscilador armónico amortiguado es una estructura física que especifica el movimiento oscilatorio de un fragmento o cuerpo sometido a las siguientes influencias: Una fuerza reparadora proporcional al traslado, una fuerza dispersiva o de frotación proporcional a la velocidad y la pasividad de la estructura.

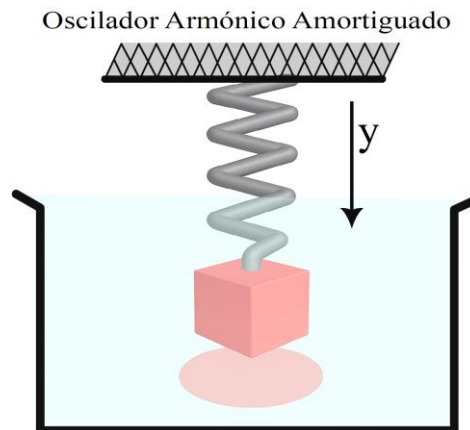


Figura 1. Oscilador armónico amortiguado

Ejemplo 2.3.4.1 (Oscilador armónico amortiguado)

Contemple una estructura masa-resorte amortiguada. Una masa $m > 0$ está unida a un espiral con constante elástica $\rho > 0$ y sometida a una fuerza de fricción proporcional a la velocidad, con un factor $\theta > 0$. Despreciemos las fuerzas externas y el efecto

gravitatorio. Plantee y resuelva la igualdad diferencial que dirige el movimiento de la estructura:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \theta \frac{d}{dt} x(t) + \rho x(t) = 0.$$

Solución:

Aplicando el segundo principio de Newton y el principio de Hooke, el modelo clásico de un oscilador, sin considerar efectos gravitatorios ni fricción en el medio, está dada por:

$$ma + \rho x = 0,$$

donde m representa la masa del objeto unido al oscilador y ρ el coeficiente de elasticidad de la estructura. Cuando se introduce un término de fricción, generalmente se supone que es proporcional a la velocidad:

$$ma + \theta v + \rho x = 0,$$

donde θ es el coeficiente de fricción del medio. En notación diferencial:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + r \frac{d}{dt} x(t) + \rho x(t) = 0.$$

Definimos la frecuencia natural del oscilador sin fricción como : $\varphi_0 = \sqrt{\frac{\rho}{m}}$, y el coeficiente de amortiguamiento $\xi = \frac{r}{2\sqrt{\rho m}}$. Al realizar el cambio de variable $y(t) = x(\varphi_0 t)$, la igualdad se convierte en:

$$m\varphi_0^2 \frac{d^2}{dt^2} x(\varphi_0 t) + r\varphi_0 \frac{d}{dt} x(\varphi_0 t) + \rho x(\varphi_0 t) = 0,$$

dividiendo por $m\omega_0^2$, obtenemos:

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2\frac{d}{dt} \xi y(t) + y(t) = 0.$$

El polinomio característico asociado es entonces: $Q(\lambda) = \lambda^2 + 2\xi\lambda + 1 = 0$,

cuyas raíces son $x = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2}$. Como $\xi > 0$, la solución general toma la forma:

$$y(t) = r_1 e^{(-\xi + i\sqrt{1-\xi^2})t} + r_2 e^{(-\xi - i\sqrt{1-\xi^2})t}$$

Imponemos las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $\frac{d}{dt}y(0) = 1$, elegidas para permitir una comparación posterior de este modelo con su versión fraccionaria. De $y(0) = 0$, obtenemos $r_1 + r_2 = 0$ y $r = r_1 = -r_2$. Por lo tanto,

$$y(t) = r e^{-\xi t} \left(e^{i\sqrt{1-\xi^2}t} - e^{-i\sqrt{1-\xi^2}t} \right) = 2ir e^{-\xi t} \text{sen} \left(\sqrt{1 - \xi^2}t \right).$$

A continuación, por diferenciación:

$$\frac{d}{dt}y(t) = -2ir\xi e^{-\xi t} \text{sen} \left(\sqrt{1 - \xi^2}t \right) + 2ir\sqrt{1 - \xi^2} e^{-\xi t} \cos \left(\sqrt{1 - \xi^2}t \right).$$

Evaluando en $t = 0$, obtenemos $\frac{d}{dt}y(0) = 2ir\sqrt{1 - \xi^2} = 1$, entonces $r = \frac{1}{2i\sqrt{1-\xi^2}}$. Por lo tanto

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi t} \text{sen} \left(\sqrt{1 - \xi^2}t \right).$$

En la figura 2 modela la respuesta para el valor de $\xi = 0.35$

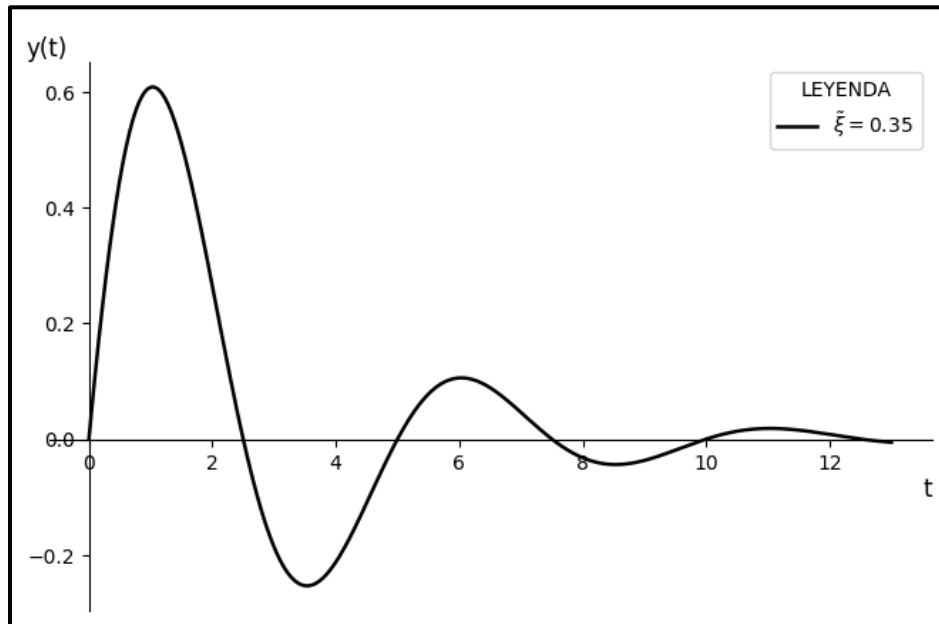


Figura 2. Solución clásica para $\xi = 0.35$.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1. Enfoque metodológico

De acuerdo con el objetivo de esta tesis, se utiliza una pesquisa de tipo básica que busca profundizar en la comprensión de la teoría de las igualdades de orden fraccionario. La pesquisa de la investigación es explicativo, ya que responde las preguntas de la investigación. Su nivel también es explicativo, puesto que pretende explicar las causas y los efecto de las proposiciones.

3.2. Procedimiento del Método Deductivo

3.2.1. Observación

Se seleccionó un conjunto de proposiciones relativas a la existencia y unicidad de igualdades diferenciales lineales de ordenamiento fraccionario y se plantearon con el fin de encontrar una demostración.

3.2.2. Experimentación

Se han analizado y evaluado rigurosamente, con respecto al marco teórico y conceptual, las propuestas relativas a la respuesta de igualdades diferenciales lineales con cantidades constantes de ordenamiento fraccionario.

3.2.3. Inducción

Se establecieron reglas de deducción, así como la definición de la integral y la derivada fraccional. De igual modo, el análisis pasó de las proposiciones de la transformación de Laplace a la respuesta de igualdades diferenciales lineales de ordenamiento fraccionario.

3.2.4. Analogías

Se compararon las proposiciones relativas a igualdades diferenciales lineales de orden entero con las proposiciones relativas a igualdades diferenciales lineales de ordenamiento fraccionario.

3.2.5. Generalización

La respuesta y singularidad de la respuesta al problema no homogéneo de una igualdad diferencial lineal de ordenamiento fraccionario se han generalizado sobre la base de las reglas de deducción lógica y la transformación de Laplace.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

4.1. Respuesta de la expresión generalizada de la igualdad diferencial lineal de ordenamiento fraccionario

Definición 4.1.1. (Ecuación Diferencial Fraccionaria de Factores Constantes)

Si $q, m \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\left[D^{\frac{m}{q}} + c_1 D^{\frac{m-1}{q}} + \dots + c_{m-1} D^{\frac{1}{q}} + c_m D^0 \right] y(t) = 0,$$

es una igualdad diferencial fraccionaria homogénea con factores constantes de ordenamiento (m, q) .

Ejemplo 4.1.1. (Ecuación diferencial fraccionaria con trinomio de raíces diferentes)

Resuelve la igualdad diferencial lineal fraccionaria de orden mixto con factores constantes:

$$\left(D^1 - 5D^{\frac{1}{2}} + 6D^0 \right) y(t) = 0, t > 0,$$

con un trinomio inicial de raíces distintas $Q(x) = x^2 - 5x + 6$.

Solución:

Esta es una igualdad diferencial fraccionaria de ordenamiento $(2, 2)$. Para resolverla, primero aplicamos la transformación de Laplace. Utilizando $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y la fórmula habitual para derivadas fraccionarias $\mathcal{L}\{D^1 y(t)\} = sY(s) - y(0)$, $\mathcal{L}\left\{D^{\frac{1}{2}} y(t)\right\} = s^{\frac{1}{2}} Y(s) - D^{-\frac{1}{2}} y(0)$, obtenemos:

$$sY(s) - y(0) - 5 \left(s^{\frac{1}{2}} Y(s) - D^{-\frac{1}{2}} y(0) \right) + 6Y(s) = 0,$$

agrupando los términos en $Y(s)$ y en los datos iniciales:

$$s - 5s^{\frac{1}{2}} + 6Y(s) - y(0) + 5D^{-\frac{1}{2}} y(0) = 0,$$

luego, estableciendo $\beta := y(0) - 5D^{-1/2} y(0)$, obtenemos:

$$Y(s) = \frac{\beta}{s - 5s^{\frac{1}{2}} + 6}.$$

Sustituyendo $\sqrt{s}$ por x , obtenemos $s - 5s^{\frac{1}{2}} + 6 = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Por lo tanto:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x - 3)(x - 2)}, \text{ donde } x = \sqrt{s}.$$

La descomposición en fracciones simples con respecto a la variables x es:

$$\frac{1}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2},$$

Por lo tanto

$$Y(s) = \beta \left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}} - 3} - \frac{1}{s^{\frac{1}{2}} - 2} \right).$$

Para revertir la transformada, utilizamos la identidad práctica:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s} - \beta} \right\} = E_t(-1/2, \beta^2) + \beta E_t(0, \beta^2),$$

donde $E_t(\nu, \lambda)$ denota la función generalizada del tipo Miller - Ross. Aplicando esto para $\beta = 3$ y $\beta = 2$, obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s} - 3} \right\} = E_t(-1/2, 9) + 3E_t(0, 9)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s} - 2} \right\} = E_t(-1/2, 4) + 2E_t(0, 4)$$

Debido a la linealidad, la solución en el dominio del tiempo es:

$$y(t) = \beta \left[E_t\left(-\frac{1}{2}; 9\right) + 3E_t(0; 9) - E_t\left(-\frac{1}{2}; 4\right) - 2E_t(0; 4) \right],$$

$$\text{con } \beta = y(0) - 5D^{-1/2}(y(0)).$$

Ejemplo 4.1.2. (Ecuación diferencial fraccionaria con trinomio de raíces iguales)

Resuelve la igualdad diferencial lineal fraccionaria de ordenamiento mixto con cantidades constantes:

$$\left(D^1 - 4D^{\frac{1}{2}} + 4D^0 \right) y(t) = 0,$$

con un trinomio inicial de raíces iguales $Q(x) = x^2 + 4x + 4$.

Solución:

Esta es una igualdad diferencial fraccionaria de ordenamiento (2,2). Para resolverla, primero aplicamos la transformación de Laplace a la igualdad:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{D^1(y(t)) + 4D^{1/2}(y(t)) + 4D^0(y(t))\} &= \mathcal{L}\{0\} \\ \mathcal{L}\{D^1(y(t))\} + 4\mathcal{L}\{D^{1/2}(y(t))\} + 4\mathcal{L}\{y(t)\} &= 0.\end{aligned}$$

Por definición, $\mathcal{L}\{D^1(y(t))\} = sY(s) - y(0)$, por lo que, utilizando la propiedad de transformación de Laplace para derivadas fraccionarias,

$$\mathcal{L}\{D^{1/2}(y(t))\} = s^{\frac{1}{2}}Y(s) - D^{-\frac{1}{2}}(y(0)),$$

Sustituyendo ahora:

$$\begin{aligned}sY(s) - y(0) + 4\left(s^{\frac{1}{2}}Y(s) - D^{-1/2}(y(0))\right) + 4Y(s) &= 0 \\ (s + 4s^{\frac{1}{2}} + 4)Y(s) - y(0) - 4D^{-1/2}(y(0)) &= 0\end{aligned}$$

Entonces

$$Y(s) = \frac{y(0) + 4D^{-1/2}(y(0))}{s + 4s^{\frac{1}{2}} + 4}.$$

Definamos $\beta = y(0) + 4D^{-1/2}(y(0))$, donde β constante finita distinta de cero, y obtenemos:

$$Y(s) = \beta \frac{1}{(s^{\frac{1}{2}} + 2)^2}.$$

Observamos que:

$$\frac{1}{(s^{\frac{1}{2}} + 2)^2} = \left(\frac{1}{s^{-1/2}(s - 4)} - \frac{2}{s - 4} \right)^2,$$

Por lo tanto, desarrollemos:

$$y(t) = \beta \left\{ \frac{1}{s^{-1}(s - 4)^2} - \frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s - 4)^2} + \frac{4}{(s - 4)^2} \right\}.$$

Aplicando la transformación de Laplace término a término, obtenemos:

$$y(t) = \beta \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{-1}(s-4)^2} \right\} - 4\beta \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{-1/2}(s-4)^2} \right\} + 4\beta \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-4)^2} \right\}$$

Utilizando las identidades con funciones especiales $E_t(\nu, \lambda)$:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{-1}(s-4)^2} \right\} = tE_t(-1, 4)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{-1/2}(s-4)^2} \right\} = tE_t(-1/2, 4) + \frac{1}{2}E_t\left(\frac{1}{2}; 4\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-4)^2} \right\} = tE_t(0; 4).$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$y(t) = t\beta E_t(-1; 4) - 4\beta \left(tE_t\left(-\frac{1}{2}; 4\right) + \frac{1}{2}E_t\left(\frac{1}{2}; 4\right) \right) + 4\beta tE_t(0; 4).$$

Finalmente, $y(t) = t\beta E_t(-1; 4) + 4t\beta E_t(0; 4) - 4t\beta E_t\left(-\frac{1}{2}; 4\right) - 2\beta E_t\left(\frac{1}{2}; 4\right)$,

donde $\beta = y(0) + 4D^{-1/2}(y(0))$.

Ejemplo 4.1.3. (Ecuación diferencial fraccionaria con trinomio de raíces en general)

Resuelva la igualdad diferencial fraccionaria:

$$\left[D^1 + c_1 D^{\frac{1}{2}} + c_2 D^0 \right] y(t) = 0.$$

Solución:

Consideremos una igualdad diferencial fraccionaria de ordenamiento (2,2). Para resolverla, primero utilizamos la transformación de Laplace a ambos lados de la igualdad.

Si $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, tenemos:

$$sY(s) - y(0) + c_1 \mathcal{L}\left\{ D^{\frac{1}{2}} y(t) \right\} + c_2 Y(s) = 0.$$

Por la propiedad de transformación

$$\mathcal{L}\{D^{1/2} y(t)\} = s^{\frac{1}{2}} Y(s) - D^{-\frac{1}{2}} y(0).$$

Sustituyendo:

$$sY(s) - y(0) + c_1 s^{\frac{1}{2}} Y(s) - c_1 D^{-\frac{1}{2}} y(0) + c_2 Y(s) = 0$$

$$(s + c_1 s^{1/2} + c_2) Y(s) - y(0) - c_1 D^{-1/2} y(0) = 0$$

donde $Y(s) = \frac{y(0) + c_1 D^{-1/2} y(0)}{s + c_1 s^{1/2} + c_2}$.

Sea $x^2 + c_1 x + c_2 = (x - \delta)(x - \beta)$ con raíces distintas $\gamma \neq \beta$. Por lo tanto

$$\frac{1}{x^2 + c_1 x + c_2} = \frac{1}{(x - \delta)(x - \beta)} = \frac{1}{\delta - \beta} \left(\frac{1}{x - \delta} - \frac{1}{x - \beta} \right),$$

reemplazando x por $s^{1/2}$:

$$\frac{1}{s + c_1 s^{1/2} + c_2} = \frac{1}{\delta - \beta} \left(\frac{1}{s^{1/2} - \delta} - \frac{1}{s^{1/2} - \beta} \right),$$

entonces

$$Y(s) = \frac{y(0) + c_1 D^{-\frac{1}{2}} y(0)}{\delta - \beta} \left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}} - \delta} - \frac{1}{s^{\frac{1}{2}} - \beta} \right).$$

Cálculo de $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{1/2} - \delta} \right\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{1/2} - \delta} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{1/2} + \delta}{(s^{1/2} - \delta)(s^{1/2} + \delta)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{1/2} + \delta}{s - \delta^2} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{1/2}}{s - \delta^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\delta}{s - \delta^2} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{-1/2}(s - \delta^2)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\delta}{s - \delta^2} \right\} \end{aligned}$$

Usando tablas de transformación de Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{-1/2}(s - \delta^2)} \right\} &= E_t \left(-\frac{1}{2}, \delta^2 \right), \\ \gamma \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - \delta^2)} \right\} &= \delta E_t(0, \delta^2), \end{aligned}$$

de modo que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{1/2} - \delta} \right\} = E_t \left(-\frac{1}{2}, \delta^2 \right) + \delta E_t(0, \delta^2)$$

Sustituyendo en $Y(s)$:

$$y(t) = \frac{y(0) + c_1 D^{-\frac{1}{2}} y(0)}{(\delta - \beta)} \left(E_t \left(-\frac{1}{2}, \delta^2 \right) - E_t \left(-\frac{1}{2}, \beta^2 \right) + \delta E_t(0, \delta^2) - \beta E_t(0, \beta^2) \right),$$

Si las raíces coinciden, $\delta = \beta$, entonces:

$$Y(s) = \frac{y(0) + c_1 D^{-\frac{1}{2}} y(0)}{\left(s^{\frac{1}{2}} - \delta \right)^2},$$

note que

$$\frac{1}{(s^{1/2} - \delta)^2} = \left(\frac{1}{s^{1/2} - \delta} \right)^2 = \left(\frac{s^{1/2} + \delta}{s - \delta^2} \right)^2 = \left(\frac{s^{1/2}}{s - \delta^2} + \frac{\delta}{s - \delta^2} \right)^2,$$

expandiendo:

$$\frac{1}{(s^{1/2} - \delta)^2} = \frac{1}{s^{-1}(s - \delta^2)^2} + \frac{2\delta}{s^{-1/2}(s - \delta^2)^2} + \frac{\delta^2}{(s - \delta^2)^2}.$$

Suponemos la transformación inversa de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^{1/2} - \delta)^2} \right\} &= t E_t(-1, \delta^2) + E_t(0, \delta^2) + 2\delta t E_t \left(-\frac{1}{2}, \delta^2 \right) + \delta E_t \left(\frac{1}{2}, \delta^2 \right) + \delta^2 t E_t(0; \delta^2) \\ &= (1 + \delta^2 t) E_t(0, \delta^2) + t E_t(-1, \delta^2) + 2\delta t E_t \left(-\frac{1}{2}, \delta^2 \right) + \delta E_t \left(\frac{1}{2}, \delta^2 \right) \end{aligned}$$

Finalmente, la respuesta es

$$y(t) = \left(y(0) + c D^{-\frac{1}{2}} y(0) \right) \left[(1 + \delta^2 t) E_t(0, \delta^2) + 2\delta t E_t \left(-\frac{1}{2}, \delta^2 \right) + \delta E_t \left(\frac{1}{2}, \delta^2 \right) + t E_t(-1, \delta^2) \right].$$

4.2 Existencia y unicidad de la expresión generalizada de la igualdad diferencial lineal de ordenamiento fraccionario

Proposición 4.2.1. (Existencia de soluciones independientes)

Sea $[D^{mv} + c_1 D^{(m-1)v} + \dots + c_{m-1} D^v + c_m D^0]y(t) = 0$ con $v = \frac{1}{q}$ una igualdad diferencial fraccionaria homogénea con factores constantes de ordenamiento (m, q) . Llamamos a $Q(x) = x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_m$ al polinomio característico de la igualdad. Dada que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{Q(s^v)} \right\},$$

Podemos decir que $y(t), Dy(t), \dots, D^{M-1}y(t)$ con $M = [mv]$ forman un conjunto de M respuestas linealmente independientes.

Demostración:

Al superponemos la transformación de Laplace a la igualdad diferencial, obtenemos:

$$\mathcal{L}\{Q(D^\nu)y(t)\} = 0,$$

Utilizando la fórmula de la transformación de Laplace para derivadas fraccionarias, deducimos

$$\mathcal{L}\{Q(D^\nu)y(t)\} = Q(s^\nu)Y(s) - \sum_{r=0}^{M-1} B_r(y)s^r$$

donde los coeficientes $B_r(y)$ son combinaciones lineales de los valores iniciales $D^\alpha y(0)$ para algún α . La única expresión que necesitamos explicitar es

$$B_0(y) = Q(D^\nu)D^{-1}y(0) - c_m D^{-1}y(0),$$

por lo tanto, tenemos:

$$Y(s) = \frac{\sum_{r=0}^{M-1} B_r(y)s^r}{Q(s^\nu)}.$$

Ahora bien, $y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{Q(s^\nu)}\right\}$. Entonces,

$$\mathcal{L}\{Q(D^\nu)y_1(t)\} = Q(s^\nu)Y_1(s) - \sum_{r=0}^{M-1} B_r(y_1)s^r,$$

y en particular $B_0(y_1) = Q(D^\nu)D^{-1}y_1(0) - c_m D^{-1}y_1(0)$, aplicando la frontera de la transformación cuando $s \rightarrow +\infty$ se aproxima a cero, tenemos:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}\{Q(D^\nu)y_1(t)\} = 0,$$

es decir,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left(Q(s^\nu)Y_1(s) - \sum_{r=0}^{N-1} B_r(y_1)s^r \right) = 0,$$

pero,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} Q(s^\nu)Y_1(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} 1 = 1,$$

y al mismo tiempo,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} Q(s^\nu)Y_1(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(s^{mv} Y_1(t) + c_1 s^{(m-1)v} Y_1(t) + \dots + c_m Y_1(t) \right).$$

Aplicando la proposición del valor inicial a la transformación de Laplace, obtenemos

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} Q(s^\nu) Y_1(s) = D^{n\nu-1} y_1(t) + c_1 D^{(m-1)\nu-1} y_1(t) + \dots + c_{m-1} D^{\nu-1} y_1(t) \\ + c_m \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{Q(s^\nu)}.$$

El ultimo límite es cero, y aplicando el teorema fundamental del cálculo fraccionario, la expresión se reduce a:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} Q(s^\nu) Y_1(s) = Q(D^\nu) D^{-1} y_1(0) - c_m D^{-1} y_1(0) = B_0(y_1),$$

de donde se deduce inmediatamente que:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sum_{r=0}^{M-1} B_r(y_1) s^r = B_0(y_1) = 1,$$

lo que implica que $B_r(y_1) = 0$ para $r \neq 0$. En particular, $\mathcal{L}\{Q(D^\nu)y_1(t)\} = 0$ y, por lo tanto $y_1(t)$ es una respuesta de la igualdad fraccional.

Afirmación: Las derivadas de $y_1(t)$ hasta orden $M - 1$ también son soluciones. En efecto, según el postulado de valor inicial para la transformación de Laplace, tenemos:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} s^{k+1} \mathcal{L}\{y_1(t)\} = D^k y_1(0) \text{ para } k \in \mathbb{N},$$

pero también:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} s^{k+1} \mathcal{L}\{y_1(t)\} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s^{k+1}}{Q(s^\nu)} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s^{k+1}}{s^{n\nu}}.$$

Sí $k \leq M - 2$, este límite es cero (recordemos $M = \lceil m\nu \rceil$), por lo tanto:

$$D^k y_1(0) = 0 \text{ para estos } k \leq M - 2.$$

Esto nos permite probar la conmutatividad de los operadores

$$D^\nu [D^j y_1(t)] = D^j [D^\nu y_1(t)], \text{ para todo } \nu \in \mathbb{R} \text{ y } j = \overline{0, M-1},$$

por lo tanto:

$$Q(D^\nu) [D^j y_1(t)] = D^j [Q(D^\nu) y_1(t)], j = \overline{0, M-1}.$$

Como $Q(D^\nu) y_1(t) = 0$, concluimos que

$$Q(D^\nu) [D^j y_1(t)] = 0, j = \overline{0, M-1}.$$

Finalmente, para probar la independencia lineal, observamos que:

$$\mathcal{L}\{D^j y_1(t)\} = \frac{s^j}{Q(s^\nu)}, j \leq M - 1.$$

Estas correspondencias son linealmente independientes, y dado que la transformación de Laplace es lineal y biyectiva, se deduce que

$$y_1(t), y_2(t) = Dy_1(t), \dots, y_M(t) = D^{M-1}y_1(t)$$

son linealmente independientes.

Proposición 4.2.2. (Descomposición de un polinomio de raíces diferentes)

Sea $Q(x) = x^m + c_1x^{m-1} + \dots + c_m$ un polinomio con raíces distintas $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$. Entonces:

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{1}{Q'(\beta_1)(x - \beta_1)} + \frac{1}{Q'(\beta_2)(x - \beta_2)} + \dots + \frac{1}{Q'(\beta_m)(x - \beta_m)}.$$

Demostración:

Consideramos

$$\begin{aligned} Q'(\beta_1) &= (\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3) \dots (\beta_1 - \beta_m) \\ Q'(\beta_2) &= (\beta_2 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_3) \dots (\beta_2 - \beta_m) \\ &\vdots \\ Q'(\beta_m) &= (\beta_m - \beta_1)(\beta_m - \beta_2) \dots (\beta_m - \beta_{m-1}) \end{aligned}$$

Nosotros definimos

$$I(x) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{Q'(\beta_k)} \left\{ \prod_{j \neq k}^m (x - \beta_j) \right\}$$

y comprobamos que $I(x) = 1$.

El fundamento es que $I(\beta_i) = 1$ para $i = 1, \dots, m$. Dado que $I(x)$ es un polinomio de grado menor que m y encaja en m puntos diversos, es esencialmente persistente.

Por lo tanto, dividiendo ambos lados de la expresión anterior por $Q(x)$, obtenemos la identidad de fracciones parciales:

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{1}{Q'(\beta_1)(x - \beta_1)} + \frac{1}{Q'(\beta_2)(x - \beta_2)} + \dots + \frac{1}{Q'(\beta_m)(x - \beta_m)}.$$

Proposición 4.2.3. (Normalización de un polinomio de raíces diferentes)

Sea $Q(x) = x^m + c_1x^{m-1} + \dots + c_m$ un polinomio cuyas raíces $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ son todas distintas. Entonces, se cumple que

$$\sum_{k=1}^m \frac{\beta_k^n}{Q'(\beta_k)} = 0, n = \overline{0, m-2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^m \frac{\beta_k^{m-1}}{Q'(\beta_k)} = 1, n = m-1$$

Demostración:

Consideramos el producto

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m (x - \beta_j) = x^{m-1} + b_1^{(k)} x^{m-2} + \dots + b_{m-1}^{(k)} = \sum_{j=0}^{m-1} b_j^{(k)} x^{m-1-j}$$

para ciertos coeficientes $b_i^{(k)}$, con la condición $b_0^{(k)} = 0$. Además, tenemos

$$Q(x) = (x - \beta_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m (x - \beta_j), \quad k = \overline{1, m}.$$

Igualando coeficientes de la expresión anterior, obtenemos:

$$c_j = b_j^{(k)} - \beta_k b_{j-1}^{(k)}, \quad j = \overline{1, m-1}$$

$$c_m = -\beta_k b_{j-1}^{(k)}$$

De esto se deduce la relación

$$b_j^{(k)} = c_j + \alpha_k c_j + \beta_k^2 c_{j-1} + c_k^j c_0.$$

Por otro lado, la Proposición 4.2.2 establece que:

$$\frac{1}{q(x)} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{Q'(\beta_k)} \frac{1}{x - \beta_k}$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por $Q(x)$, obtenemos:

$$1 = \sum_{k=1}^m \frac{1}{Q'(\beta_k)} \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m (x - \beta_j) \right\} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{Q'(\beta_k)} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} b_j^{(k)} x^{m-1-j} \right\}.$$

Reordenando los términos, obtenemos:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{1}{Q'(\beta_k)} b_j^{(k)} \right\} x^{m-1-j},$$

De esta última igualdad, deducimos que:

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{Q'(\beta_k)} b_j^{(k)} = 0, \quad j = \overline{0, m-2}$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{Q'(\beta_k)} b_{m-1}^{(k)} = 1.$$

En particular, al sustituir la expresión para $b_j^{(k)}$, obtenemos:

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{Q'(\beta_k)} \{c_j + \beta_k c_j + \beta_k^2 c_{j-1} + c_k^j\} = 0, \quad j = \overline{0, m-2},$$

desarrollando caso por caso:

Para $j = 0$: $\sum_{k=1}^m \frac{1}{Q'(\beta_k)} c_0 = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^m \frac{1}{Q'(\beta_k)} = 0$, ya que $c_0 = 1$.

Para $j = 1$: $\sum_{k=1}^m \frac{1}{Q'(\alpha_k)} (c_1 + \beta_k) = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{Q'(\beta_k)} \beta_k = 0$.

De forma más general, para $j = m - 2$:

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{Q'(\beta_k)} \beta_k^{m-2} = 0.$$

Finalmente, para $j = m - 1$:

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{Q'(\beta_k)} \beta_k^{m-1} = 1.$$

Proposición 4.2.4. (Transformación inversa de Laplace en términos de la función Miller-Ross)

Sea $\mu = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, y $\nu \in \mathbb{R}$ tal que $\nu + \mu > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\mu - a} \right\} &= \sum_{j=1}^n c^{j-1} E_t(j\mu - 1, c^q), \text{ y} \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\nu(s^\mu - a)}} \right\} &= \sum_{j=1}^n c^{j-1} E_t(j\mu + \nu - 1, c^q). \end{aligned}$$

Demostración:

Partimos de la identidad:

$$\frac{1}{x - c} = \sum_{j=1}^q c^{j-1} x^{q-j},$$

de la cual obtenemos:

$$\frac{1}{x - c} = \sum_{j=1}^q \frac{c^{j-1} x^{q-j}}{x^q - a^q} = \sum_{j=1}^q \frac{c^{j-1}}{x^{j-q} (x^q - c^q)}$$

Sustituyendo $x = s^\mu$, obtenemos:

$$\frac{1}{s^\mu - c} = \sum_{j=1}^q \frac{c^{j-1}}{s^{\mu j-1} (s^q - c^q)},$$

por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\mu - c} \right\} = \sum_{j=1}^q c^{j-1} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\mu j-1} (s^q - c^q)} \right\}.$$

Sabemos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\mu(s-c)}\right\} = E_t(\mu, c)$, $\nu > -1$, donde E_t denota la función de Miller – Ross. La expresión anterior se deduce de esto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\mu - c}\right\} = \sum_{j=1}^q c^{j-1} E_t(j\mu - 1, c^q),$$

Esto demuestra la primera parte de la proposición.

Para demostrar la segunda parte, observamos que:

$$\frac{1}{s^\nu} \frac{1}{s^\mu - c} = \frac{1}{s^\nu} \sum_{j=1}^q \frac{c^{j-1}}{s^{\mu j-1}(s - c^q)} = \sum_{j=1}^q \frac{c^{j-1}}{s^{\mu j+\nu-1}(s - c^q)},$$

De la primera parte, concluimos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\nu(s^\mu - c)}\right\} = \sum_{j=1}^m c^{j-1} E_t(j\mu + \nu - 1, c^q).$$

Proposición 4.2.5.(Soluciones linealmente independientes de raíces de polinomios diferentes)

Sea $[D^{m\nu} + c_1 D^{(m-1)\nu} + \dots + c_{m-1} D^\nu + c_0 D^0]y(t) = 0$, con $\nu = \frac{1}{q}$, una igualdad diferencial lineal fraccionaria homogénea con factores inalterables de ordenamiento (m, q) . Sea $Q(x) = x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_m$ su polinomio característico, y suponemos que todas sus raíces son simples, es decir, $\beta_1, \dots, \beta_m$. Por la proposición de existencia de soluciones, sabemos que

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{Q(s^\nu)}\right\},$$

es una respuesta de la igualdad. Además, esta respuesta puede expresarse explícitamente como:

$$y_1(t) = \sum_{n=1}^m \left\{ \frac{1}{Q'(\alpha_m)} \sum_{k=0}^{q-1} \beta_m^{q-k-1} E_t(-k\nu, \beta_m^q) \right\}.$$

Demostración:

Dado que

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{Q(s^\nu)}\right\},$$

y recordando que, según la Proposición 4.2.2, se tiene la descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{1}{Q'(\beta_1)(x - \beta_1)} + \frac{1}{Q'(\beta_2)(x - \beta_2)} + \cdots + \frac{1}{Q'(\beta_n)(x - \beta_n)},$$

aplicamos nuevamente la Proposición 4.2.3 a cada término de la expresión anterior. De esta manera, obtenemos inmediatamente el enunciado de la proposición.

Proposición 4.2.6. (El problema de valor inicial para la Existencia y unicidad de soluciones)

Sea $[D^{mv} + c_1 D^{(m-1)v} + \cdots + c_{m-1} D^v + c_m D^0]y(t) = 0$ con $v = \frac{1}{q}$ una igualdad diferencial fraccionaria con factores inalterables y homogénea de ordenamiento (m, q) . Las condiciones iniciales son: $D^{(m-1)v}y(0) = 1, D^{(m-2)v}y(0) = 0, \dots, D^0y(0) = 0$. Entonces, existe una solución única, que es de clase $\mathcal{C}$.

Demostración:

Para obtener la fórmula, observamos que al aplicar la fórmula general obtenida mediante recurrencia j veces y utilizando la proposición 4.2.3, obtenemos la fórmula:

$$y_1(t) = \sum_{n=1}^m \left\{ \frac{1}{Q'(\beta_n)} \sum_{k=0}^{q-1} \beta_n^{q-k-1} E_t(-kv, \beta_n^q) \right\}$$

que se convierte en:

$$y_j(t) = \sum_{n=1}^m \left\{ \frac{1}{P'(\beta_n)} \sum_{k=0}^{q-1} \beta_n^{qj-k-1} E_t(-kv, \beta_n^q) \right\}$$

Aplicar nuevamente la fórmula de recurrencia a esta última expresión, lo que resulta en:

$$E_t(-kv, \beta_m) = \alpha_m^q E_t(1 - kv, \beta_m^q) + \frac{t^{-kv}}{\Gamma(-kv + 1)}$$

Usando nuevamente la Proposición 4.2.3, los términos de t^{-kv} son cero, excepto el que corresponde al caso $j = M$. En este caso, la suma de éstos términos es igual a 1. En conclusión, obtenemos la siguiente representación:

$$y_j(t) = \sum_{n=1}^m \left\{ \frac{1}{Q'(\beta_m)} \sum_{k=0}^{q-1} \beta_n^{q(j+1)-k-1} E_t(1 - kv, \beta_n^q) \right\}, j = \overline{1, m-1}$$

y, si $j = M$, tenemos:

$$y_M(t) = \sum_{n=1}^m \left\{ \frac{1}{Q'(\beta_n)} \sum_{k=0}^{q-1} \beta_n^{q(j+1)-k-1} E_t(1 - kv, \beta_n^q) \right\} + 1,$$

Esta fórmula resulta más practica cuando se cumple ($M = mv$ y todas las raíces del polinomio característico son simples).

La unicidad se deduce directamente de la linealidad de la ecuación y de la unicidad de la transformación de Laplace. Podemos utilizar la proposición de unicidad de la transformación de Laplace porque las funciones $E_t(\rho, \beta)$ son continuas en $[0, d]$ cuando $\rho > 0$.

Ejemplo 4.2.1. (Igualdad diferencial lineal fraccionaria con factores inalterables)

Resuelva la ecuación diferencial lineal fraccionaria de orden mixto con coeficientes constantes:

$$\left(D^{\frac{3}{2}} - 2D^1 - D^{\frac{1}{2}} + 2D^0\right)y(t) = 0, t > 0,$$

con las condiciones iniciales: $D^{-\frac{1}{2}}y(0) = 1, D^0y(0), D^{\frac{1}{2}}y(0) = 4$.

Solución:

Empleando la transformación de Laplace en la igualdad:

$$\left\{s^{\frac{3}{2}}Y(s) - sD^{-\frac{1}{2}}y(0) - D^{\frac{1}{2}}y(0)\right\} - 2\{sY(s) - y(0)\} - \left\{s^{\frac{1}{2}}Y(s) - D^{-\frac{1}{2}}y(0)\right\} + 2Y(s) = 0$$

De ello se deduce que:

$$Y(s)\left\{s^{\frac{3}{2}} - 2s - s^{\frac{1}{2}} + 2\right\} = sD^{-\frac{1}{2}}y(0) + D^{\frac{1}{2}}y(0) - D^{-\frac{1}{2}}y(0) - 2y(0),$$

si cumplen las condiciones iniciales:

$$sD^{-\frac{1}{2}}y(0) + D^{\frac{1}{2}}y(0) - D^{-\frac{1}{2}}y(0) - 2y(0) = s + 1,$$

Entonces,

$$Y(s) = \frac{s + 1}{s^{3/2} - 2s - s^{1/2} + 2},$$

Sustituyendo $\sqrt{s}$ por x , obtenemos:

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{1}{3(x + 1)} - \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{3(x - 2)}.$$

Por lo tanto,

$$Y(s) = \frac{1}{3(\sqrt{s} + 1)} - \frac{1}{\sqrt{s} - 1} + \frac{1}{3(\sqrt{s} - 2)},$$

usando la propiedad

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}-\alpha}\right\} = E_t(-1/2, \alpha^2) + \alpha E_t(0, \alpha^2),$$

obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{3(\sqrt{s}+1)}\right\} = \frac{1}{3}\{E_t(-1/2, 1) - E_t(0, 1)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}-1}\right\} = -E_t(-1/2, 1) - E_t(0, 1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3(s^{1/2}-2)}\right\} = \frac{1}{3}\{E_t(-1/2, 4) + 2E_t(0, 4)\}.$$

La suma de las soluciones del problema del valor inicial es:

$$\begin{aligned} y(s) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3(s^{1/2}+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3(s^{1/2}-2)}\right\} \\ &= -\frac{2}{3}E_t(-1/2, 1) - \frac{4}{3}E_t(0, 1) + \frac{1}{3}E_t(-1/2, 4) + \frac{2}{3}E_t(0, 4). \end{aligned}$$

Proposición 4.2.6. (Existencia y unicidad para el problema no homogéneo)

Sea $g(x)$ una función continua por saltos en $(0, d]$, integrable y de crecimiento acotado por una exponencial. Considere el siguiente problema de Cauchy:

$[D^{mv} + c_1 D^{(m-1)v} + \dots + c_m D^0]y(t) = g(t)$ con $v = \frac{1}{q}$, $M = mv$, y condiciones iniciales $D^{(m-1)v}y(0) = 0, D^{(m-2)v}y(0) = 0 \dots D^0y(0) = 0$. Entonces

$y(t) = \int_0^t K(t-\zeta)g(\zeta)d\zeta$, donde $K(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{Q(s^v)}\right\}$ es la única solución del problema.

Demostración:

Empleando la transformación de Laplace en la igualdad, obtenemos:

$$Q(s^\mu)Y(s) = G(s),$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. De ello se deduce que $Y(s) = \frac{G(s)}{Q(s^\mu)}$.

Aplicando la transformación inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{Q(s^\mu)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s^\mu)^{-1}G(s)\} = \int_0^t k(t-\xi)g(\xi)d\xi,$$

donde $K(t)$ es el núcleo asociado.

La unicidad de la solución se deduce de la unicidad de la transformación de Laplace. Para verificar que se cumplen las condiciones iniciales, observamos que $y(0) = 0$. Además, según la Proposición 4.2.5, $D^j K(0) = 0, j = \overline{1, M-2}$. En particular,

$Dy(t) = K(0)g(t) + \int_0^t k(t-\zeta)g(\zeta)d\zeta$, por lo que $Dy(0) = 0$. En general, tenemos:

$$D^j y(t) = \left[D^{j-1} k(0)g(t) \right]_0^t + \int_0^t D^j [K(t-\zeta)]g(\zeta)d\zeta$$

y, en consecuencia,

$$D^j y(0) = 0, j = \overline{2, M-1}.$$

Ejemplo 4.2.2. (Igualdad diferencial lineal fraccionaria no uniforme)

Resuelva la igualdad diferencial lineal fraccionaria con factores constantes $(D^{2\nu} + cD^\nu)y(t) = \text{sen}(at), t > 0$, con $\nu = \frac{1}{4}$.

Solución:

Empleando la transformación de Laplace, obtenemos:

$$Q(s^\nu)Y(s) = \mathcal{L}\{\text{sen}(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\},$$

por lo tanto,

$$Y(s) = \frac{a}{s^\nu(s^\nu - c)(s^2 + a^2)},$$

ahora, utilizando el desarrollo

$$\frac{1}{s^\nu - c} = \sum_{j=1}^q \frac{c^{j-1}}{s^{\nu j-1}(s - c^q)},$$

se deduce que

$$Y(s) = \sum_{j=1}^q \frac{c^{j-1}}{s^\nu s^{\nu j-1}(s - c^q)(s^2 + a^2)}.$$

Aplicando la descomponiendo en fracciones parciales,

$$\frac{a}{(s^\nu - c)(s^2 + a^2)} = \frac{a}{c^{2q} + a^2} \left(\frac{1}{(s - c^q)} - \frac{s}{(s^2 + a^2)} - \frac{c^q}{(s^2 + a^2)} \right),$$

se obtiene finalmente:

$$Y(s) = \frac{c}{c^{2q} + c^2} \sum_{j=0}^q c^{j-1} \left\{ \frac{1}{s^{\nu(j+1)-1}(s - c^q)} - \frac{s}{s^{\nu(j+1)-1}(s^2 + c^2)} - \frac{c^q}{s^{\nu(j+1)-1}(s^2 + c^2)} \right\}.$$

La transformación inversa de la Laplace da como resultado:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{a}{c^{2q} + b^2} \sum_{j=1}^q c^{j-1} \left\{ E_t((j+1)\nu - 1, c^q) + C_t((j+1)\nu - 1, a) \right. \\ \left. + S_t \frac{c^q}{a} ((j+1)\nu - 1, a) \right\},$$

donde E_t, C_t, S_t denotan las funciones especiales obtenidas en las proposiciones anteriores. En particular, para $q = 4$:

$$y(t) = \frac{a}{ca(c^8 + a^2)} \sum_{j=1}^4 c^j \{ aE_t((j+1)\nu - 1, c^4) + aC_t((j+1)\nu - 1, a) \\ + c^4 S_t((j+1)\nu - 1, a) \}.$$

4.3. Oscilador Armónico Fraccionario Viscoelástico

Ejemplo 4.3.1 (Oscilador Armónico Fraccionario en fluido Newtoniano)

Consideremos ahora un oscilador que opera en un fluido Newtoniano (viscosidad constante) que también presenta propiedades viscoelásticas. La fricción de la estructura se modela mediante el coeficiente de fricción fraccionario $1/2$, en lugar de ser proporcional a la velocidad. El sistema se describe por intermedio de igualdad:

$$D^2 y(t) + 2\tilde{\xi} D^{1/2} y(t) + y(t) = 0,$$

donde $\tilde{\xi}$ es el factor de fricción fraccionario, relacionado con el coeficiente clásico ξ mediante la ley de escala:

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{\varphi_0}}, \varphi_0 = \sqrt{\frac{\rho}{m}}.$$

El polinomio característico del sistema es $Q(x) = x^4 + 2\tilde{\xi}x + 1$. Expresa la solución utilizando la solución del problema homogéneo.

Solución:

Afirmación: Sea $Q(x) = x^4 + 2\tilde{\xi}x + 1$ el polinomio característico, donde $\tilde{\xi}$ es un parámetro. Entonces, $Q(x)$ tiene cuatro raíces reales distintas si

$$\tilde{\xi} \neq -\frac{2}{\sqrt[3]{27}}.$$

Según el criterio de Stürm, una raíz $Q(x)$ es múltiple si, además de hacer que el polinomio sea igual a cero, su derivada también es cero. Calculemos la derivada

$$Q'(x) = 4x^3 + 2\tilde{\xi}.$$

La ecuación $Q'(x) = 0$ tiene una única raíz real,

$$x = \beta = \left(-\frac{\tilde{\xi}}{2}\right)^{1/3},$$

por lo tanto, la ecuación $2\tilde{\xi} = -4\beta^3$. Para que exista una raíz doble, $Q(\beta)$ también debe ser igual 0. Calculando $Q(\beta) = \beta^4 - 4\beta^4 + 1 = -3\beta^4 + 1 = 0$, obtenemos $\beta = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos $2\tilde{\xi} = -\frac{4}{\sqrt[4]{27}}$. Por lo tanto, si

$$\tilde{\xi} \neq -\frac{2}{\sqrt[3]{27}},$$

el polinomio tiene cuatro raíces distintas. Gracias a esto, podemos usar la fórmula

$$y(t) = \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{1}{Q'(\beta_m)} \sum_{k=0}^{q-1} \beta_m^{2q-k-1} E_m(1 - kv, \beta_m^q) \right\}$$

para resolver la ecuación diferencial del oscilador fraccionario, en nuestro caso:

$$y(t) = \sum_{m=1}^4 \left\{ \frac{1}{Q'(\beta_m)} \beta_m^2 [E_t(1/2, \beta_m^2) + \beta_m E_t(1, \beta_m^2)] \right\}.$$

La figura 3 muestra la solución para diferentes valores de $\tilde{\xi}$. Observamos que al aumentar $\tilde{\xi}$ no solo aumenta la amortiguación, sino que también la frecuencia.

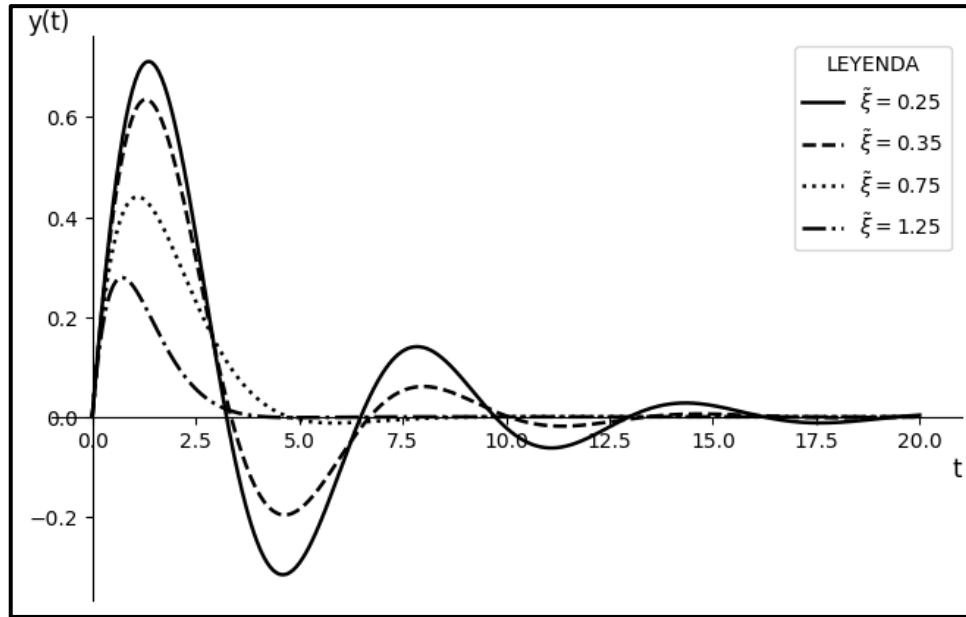


Figura 3. Modelo fraccionario viscoelástico para $\xi = 0.25, 0.35, 0.75, 1.25$

Para comparar los dos modelos, fijamos las constantes $r = 0,35, m = 1$, y $\beta = \frac{1}{4}$.
Obtenemos entonces:

$$\xi = \frac{r}{2\sqrt{\rho m}} = 0,35, \varphi_0 = \sqrt{\frac{\rho}{m}} = \frac{1}{2}, \quad \tilde{\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{\varphi_0}} = 0,49497.$$

La figura 4 muestra los resultados obtenidos bajo estas condiciones.

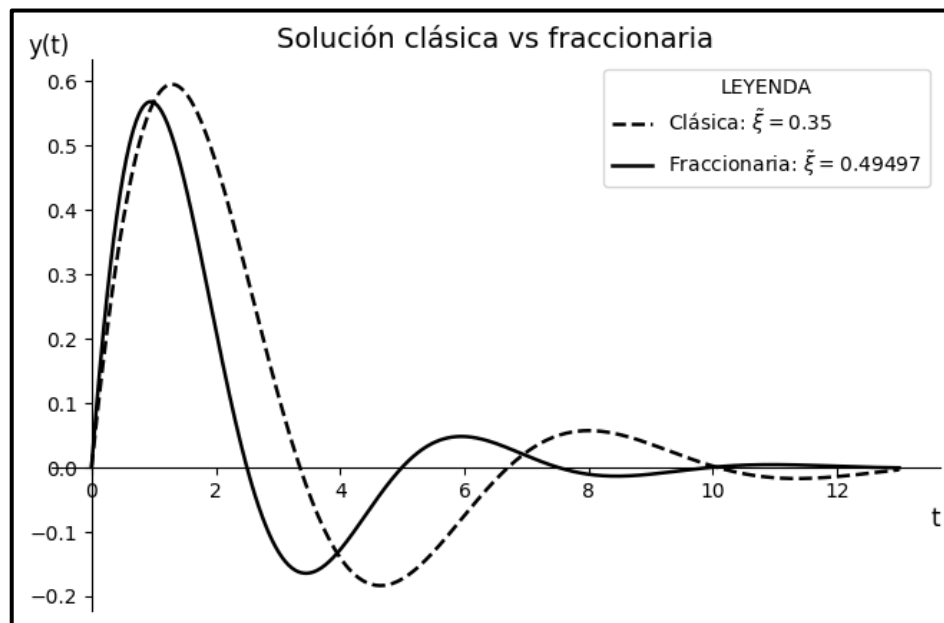


Figura 4. Modelo Clásico y Fraccionario

Ejemplo 4.3.1. (Ecuación fraccionaria no homogénea con valores iniciales)

Dada la ecuación fraccionaria no homogénea:

$$D^2 y(t) + 2\tilde{\xi} D^{1/2} y(t) + y(t) = g(t), \quad g(t) = -3\chi_{[0,1]}(t),$$

con condiciones iniciales $y(0) = 0$, $Dy(0) = 1$. Exprese la solución utilizando la solución del problema homogéneo $\rho(t) = y_h(t)$. Simplifique la integral utilizando la definición de $\chi_{[0,1]}$.

Solución:

Sea $\rho(t) = y_h(t)$ la solución del problema homogéneo:

$$D^2 \rho(t) + 2\tilde{\xi} D^{1/2} \rho(t) + \rho(t) = 0, \rho(0) = 0, D\rho(0) = 1,$$

por la linealidad tenemos

$$y(t) = \rho(t) + \int_0^t \rho(t - \zeta) g(\zeta) d\zeta,$$

sustituyendo $g(\zeta) = -3\chi_{[0,1]}(\zeta)$, tenemos

$$y(t) = \rho(t) - 3 \int_0^t \rho(t - \zeta) \chi_{[0,1]}(\zeta) d\zeta.$$

Como $\chi_{[0,1]}(\zeta) = 1$ si $\zeta \in [0,1]$ y cero fuera:

$$\int_0^t \rho(t - \zeta) \chi_{[0,1]}(\zeta) d\zeta = \int_0^{\min(1,t)} \rho(t - \zeta) d\zeta.$$

Por lo tanto, la solución final es:

$$y(t) = \rho(t) - 3 \int_0^{\min(1,t)} \rho(t - \zeta) d\zeta.$$

CAPÍTULO V

DISCUSIÓN

5.1. Para resolver la expresión generalizada de una igualdad diferencial lineal de ordenamiento fraccionario,

$$\left[D^1 + c_1 D^{\frac{1}{2}} + c_2 D^0 \right] y(t) = 0,$$

su principal ventaja de transformación de Laplace reside en su capacidad para simplificar el problema mediante operaciones algebraicas relativamente sencillas. A lo largo de esta tesis, se han presentado los fundamentos de esta transformada y su extensión al marco del cálculo fraccionario, destacando su capacidad para manejar integrales y, por consiguiente, derivadas no enteras.

Por lo tanto, la transformación de Laplace puede considerarse un implemento significativo para la tesis de ecuaciones diferenciales fraccionarias, ya que permite aplicar reglas bien conocidas del cálculo diferencial clásico a casos más generales. Sin embargo, es crucial definir los límites de las pruebas; el análisis se limita a órdenes racionales. Esta limitación no se debe a un obstáculo conceptual inherente al cálculo fraccionario, sino más bien al deseo de utilizar métodos analíticos más accesibles basados en fundamentos técnicos sólidos .

Esto genera una tensión entre la naturaleza general del cálculo fraccionario, que por principio no se limita a órdenes racionales, y los requisitos metodológicos impuestos por las soluciones analíticas eficientes. Este contraste realza la exigencia de seguir promoviendo técnicas que acrecenten la dimensión del cálculo fraccionario, superando así las restricciones históricas y las limitaciones prácticas actuales.

Para resolver la ecuación diferencial fraccionaria

$$\left[D^1 + c_1 D^{\frac{1}{2}} + c_2 D^0 \right] y(t) = 0,$$

la transformación de Laplace resulta una herramienta esencial para simplificar el problema mediante operaciones algebraicas. Su extensión al cálculo fraccionario permite trabajar con

derivadas no enteras, transponiendo así las reglas habituales del cálculo clásico a este nuevo contexto. Sin embargo, en la práctica, el análisis suele limitarse a órdenes racionales, no por limitaciones conceptuales, sino por la necesidad de métodos más manejables. Esto genera una tensión entre la generalidad teórica del cálculo fraccionario y las exigencias analíticas del mundo real. De ahí la necesidad de promover técnicas que amplíen su alcance.

5.2. Para resolver ecuaciones de distinto orden, establecer una fórmula general que garantice M soluciones linealmente independientes es un paso esencial, especialmente en el momento preciso en que las raíces del polinomio representativo son distintas. Esta construcción no solo facilita el tratamiento analítico del problema, sino que también constituye una extensión natural de los métodos clásicos aplicados a cálculos de distinto orden.

Es importante, sin embargo, destacar una limitación significativa. La proposición de existencia demostrada anteriormente solo garantiza la existencia de M funciones linealmente independientes que son soluciones de la ecuación diferencial. Estas funciones pueden anularse en ciertos puntos, lo que nos impide garantizar la existencia de una respuesta que plazca cualesquiera conjunto de M propiedades iniciales. Este hecho marca una diferencia importante con respecto al caso clásico, donde la teoría garantiza la construcción de soluciones que satisfacen estructuralmente cualquier conjunto de condiciones iniciales.

En particular, el análisis de las fórmulas correspondientes al caso $M = [mv] = mv$ revela que las soluciones obtenidas satisfacen las condiciones iniciales. Por lo tanto solo condiciones iniciales de esta forma permiten establecer un resultado sólido de existencia y unicidad.

Por lo tanto, el análisis destaca que, si bien el marco teórico garantiza la existencia de soluciones linealmente independientes, la estructura de las condiciones iniciales desempeña un papel fundamental en la caracterización de soluciones únicas. Esta observación ilustra tanto la riqueza como la complejidad del cálculo fraccionario y subraya la necesidad de explorar métodos que permitan extender la certeza de la realidad y singularidad más allá de los casos aquí analizados.

5.3. En el oscilador armónico viscoelástico fraccionario, los resultados comparativos permiten realizar varias observaciones relevantes. En primer lugar, el modelo clásico con

fricción proporcional a la velocidad ($\xi = 0.35$) ofrece una descripción limitada de la dinámica del oscilador, ya que no integra adecuadamente los efectos viscoelásticos fraccionarios. Por el contrario, el modelo fraccionario ($\tilde{\xi} = 0.49497$) reproduce un comportamiento más cercano a los datos experimentales al introducir una dependencia no entera en el término disipativo.

En segundo lugar, observamos que la influencia de $\tilde{\xi}$ no se limita a aumentar la amortiguación, sino que también modifica la frecuencia del sistema. Esta característica representa una mejora con respecto al enfoque clásico, aunque plantea nuevos desafíos: la necesidad de una calibración experimental precisa y la dificultad de interpretar físicamente el parámetro fraccional.

En definitiva, el modelo fraccionario puede considerarse una herramienta más completa para describir la dinámica de los osciladores en medios viscoelásticos. Sin embargo, la introducción de términos fraccionarios plantea interrogantes sobre su interpretación física precisa y la estabilidad numérica de sus soluciones. Esto abre nuevas vías de investigación, centradas tanto en la validación experimental como en el desarrollo de métodos de aproximación.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

6.1. La solución de la igualdad diferencial lineal fraccionaria homogénea con factores inalterables de ordenamiento (m, q)

$$\left[D^{\frac{m}{q}} + c_1 D^{\frac{m-1}{q}} + \cdots + c_{m-1} D^{\frac{1}{q}} + c_m D^0 \right] y(t) = 0,$$

puede expresarse explícitamente en términos de transformada inversa de Laplace aplicada a funciones de tipo Miller – Ross (Ejemplo 4.1.3).

6.2. La igualdad diferencial fraccionaria homogénea de ordenamiento (m, q) con factores inalterables y condiciones iniciales apropiadas tiene una solución única, que es de clase $\mathcal{C}$, lo que garantiza su continuidad y diferenciabilidad para el análisis teórico y las aplicaciones prácticas (Proposición 4.2.5).

6.3. El oscilador armónico fraccionario amplía el modelo clásico al incorporar derivadas de orden fraccionario, lo que permite una representación más precisa de la amortiguación viscoelástica. La constante de fricción fraccionaria $\tilde{\xi}$ influye tanto en la amortiguación como en la frecuencia del sistema. Este modelo permite un análisis más sistemático y un ajuste experimental más realista que el oscilador clásico (Ejemplo 4.3.1).

CAPÍTULO VII

RECOMENDACIONES

7.1. Resulta muy interesante profundizar en el estudio de los operadores asociados a las ecuaciones fraccionarias de Pearson y a las densidades fraccionarias de Pearson, dado su potencial para ampliar el marco teórico del cálculo fraccionario.

7.2. En el campo del cálculo fraccionario, sería muy interesante desarrollar investigaciones sobre la existencia de soluciones a problemas de tractores aplicando el principio del punto fijo de Schauder, así como el análisis de respuestas localmente a problema de a tractores utilizando medidas de no compacidad.

7.3. Desde un punto de vista computacional, se recomienda promover la investigación centrada en la construcción de esquemas numéricos que permitan una aproximación cuantitativa de la razón de variación instantánea fraccionaria de Caputo, lo que contribuirá a mejorar la resolución práctica de problemas en este ámbito.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arafet, P., Dominguez A. y Chang, F. (2008). Una Introducción al cálculo fraccionario. Cuba: Universidad de Oriente.
- Bell, W. W. (1968). Special functions for scientists and engineers. D. Van Nostrand Company, Inc.
- Bertram, R.(1975). Fractional calculus and its applications. First. Germany: N.p. Ortgueira, Manuel. (2011). Fractional calculus for scientists and engineers.ed. Portugal: Springer.
- Bonilla, Kilbas, A., and Trujillo, J.(2003). Cálculo fraccionario y ecuaciones diferenciales fraccionarias. Edit. UNED:Madrid.
- Chaudhry, M. A., & Zubar, S. M. (2002). On a class of incomplete gamma functions with applications. United States of America: Academic Press, INC.
- Diethelm, K. (2010). The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type (Vol. 2004). Springer.
- Guerra, J. and Kalla, S.(1990). Aplicaciones del cálculo fraccional para resolver ecuaciones diferenciales. Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia 13 (1).1:6.
- Herrmann, R. (2011). Fractional Calculus: An Introduction for Physicists. World Scientific Publishing Company.VP
- Levedev, N.(1972). Special fuctions and their applications. First. London: Prentice-Hall, Inc.
- Martínez, M. (2019). Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Facultad de Matemática y Estadística. Universidad Politécnica de Catalunya.
- Mathai, A. M., & Haubold, H. J. (2008). Special Functions for Applied Scientists. Springer Science & Business Media.
- Miller, K. and Ross, B.(1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley and Sons: New York.

Oldham, K. and Spanier, J.(1974). The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary orde. Ed. Richard Bellman. 11th ed. United States of America: Academic Press, INC.

Santanu, D.(2011). Functional fractional calculus. Secod. India:Springer. VPO

Zill, D. and Warren, W. (2011). Cálculo de varias variables. 4 ed. China: McGraw Hill. MÑ