

**UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN**

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática

**EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL  
PROBLEMA VARIACIONAL ELÍPTICO EN LOS  
ESPACIOS DE HILBERT**

**TESIS**

Presentada por:

**Bach. JAVIER ANTONIO HILASACA CONDORI**

Para optar el Título Profesional de:

**LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

TACNA – PERÚ

2023

## ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N° 391

En la ciudad de Tacna, en el auditorio de la Facultad de Ciencias, de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann; siendo las 09:00 horas del día 12 de mayo del 2023, estando presente el jurado calificador nominado por Resolución de Facultad N°10528-2023-FACI-UN/JBG, conformado por los siguientes docentes:

Dr. Luis Andrés Amaya Cedrón	Presidente
Dr. Heber Melbin Cabrera Cruz	Secretario
Dr. Wilder Roger Miñano León	Miembro


Acto seguido, se dio lectura a la resolución correspondiente, y del mismo modo se dio lectura al artículo 22 del Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias.

A continuación, el presidente del jurado instó al bachiller: Javier Antonio Hilasaca Condori, a exponer la tesis titulada EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA VARIACIONAL ELÍPTICO EN LOS ESPACIOS DE HILBERT.

Siendo las 09:35 horas, el tesista concluye su exposición, luego se procedió a la formulación de las preguntas por parte de los miembros del jurado calificador. Terminado este proceso, se invitó a que los miembros del jurado emitan su calificación de acuerdo a reglamento. El promedio de la calificación dio el siguiente resultado: Aprobado por unanimidad, con el calificativo de Quince (15), de acuerdo al Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias.

Siendo las 10:00 horas, se dio por concluido el acto de sustentación de la tesis firmando los señores miembros del jurado calificador, en señal de conformidad.

  
Dr. Luis Andrés Amaya Cedrón  
PRESIDENTE

  
Dr. Heber Melbin Cabrera Cruz  
SECRETARIO

  
Dr. Wilder Roger Miñano León  
MIEMBRO

## CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Jhony Alfonso Chávez Delgado, en mi condición de asesor acreditado por la Resolución de Facultad R.F. N° 10177-2022-FACI-UN/JBG de la tesis titulada: **“EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA VARIACIONAL ELÍPTICO EN LOS ESPACIOS DE HILBERT”**, presentado por el Bachiller Javier Antonio Hilasaca Condori para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, habiendo cumplido con lo establecido en el reglamento de originalidad y de similitud de trabajos de investigación y producción intelectual, considerando que según la revisión, evaluación y análisis realizado a través del software de similitud textual TURNITIN cuenta con el nivel de similitud cuyo porcentaje es 10% por lo que **CERTIFICO LA SIMILARIDAD** de la tesis, la cual está de acuerdo al nivel **PERMITIDO**, para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio Institucional**.

Se emite el presente certificado con fines de continuar con los trámites respectivos para su obtención del título profesional.



Firma del Asesor

DNI: N° 18124030

Nombre y Apellidos del asesor: Jhony Alfonso Chávez Delgado

## **DEDICATORIA**

A Dios: Por la vida y salud que me brinda en mi caminar.

A mi madre: Margarita por su ejemplo de vida.

A mi esposa: Myriam, que me apoya constantemente.

A mis hijos: Valentina y Javier que son mi motor de vida.

A mis docentes: De pregrado y a todos aquellos que colaboraron con su apoyo incondicional en mi formación profesional.

## **AGRADECIMIENTOS**

Al docente Ms. Jhony Alfonso Chávez Delgado, mi amigo, consejero y por el asesoramiento del presente trabajo.

A todos los profesores del departamento de Matemática que contribuyeron en mi formación académica y personal.

## CONTENIDO

<b>DEDICATORIA</b> .....	<b>iv</b>
<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	<b>v</b>
<b>CONTENIDO</b> .....	<b>vi</b>
<b>RESUMEN</b> .....	<b>viii</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>ix</b>
<b>CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
1.1. Antecedentes.....	1
1.2. Definición del problema de investigación.....	2
1.2.1. Problema general .....	2
1.2.2. Problemas específicos.....	2
1.3. Objetivos de la investigación .....	3
1.3.1. Objetivo general.....	3
1.3.2. Objetivos específicos .....	3
1.4. Justificación de la investigación.....	3
<b>CAPÍTULO II: FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b> .....	<b>5</b>
2.1. Antecedentes de la investigación .....	5
2.2. Bases teóricas .....	8
2.2.1. Espacio normado.....	8
2.2.2. Espacios de Hilbert.....	12
<b>CAPÍTULO III: MÉTODO O PROCEDIMIENTO</b> .....	<b>23</b>
3.1. Enfoque metodológico .....	23
3.1.1. Procedimiento del método deductivo.....	23
<b>CAPÍTULO IV: RESULTADOS</b> .....	<b>25</b>
4.1. Descripción .....	25

4.1.1. Problema variacional .....	25
4.1.2. Problema homogéneo de Dirichlet.....	29
4.1.3. Problema de Neumann homogéneo .....	34
<b>CAPÍTULO V: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....</b>	<b>40</b>
<b>CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES .....</b>	<b>41</b>
<b>CAPÍTULO VII: RECOMENDACIONES .....</b>	<b>42</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>43</b>

## RESUMEN

El propósito de esta tesis es establecer la existencia y la unicidad de solución de un problema elíptico variacional en espacios de Hilbert y aplicar su existencia y unicidad a la formulación débil del problema uniforme de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = g & \text{en } \omega \\ u = 0 & \text{en } \gamma \end{cases}$$

y del problema uniforme de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + \ell u = g & \text{en } \omega, \ell > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \gamma \end{cases}$$

donde  $\omega$  abierto limitado de  $\mathbb{R}^n$  con frontera  $\gamma$  bien regular. Se utilizó el método deductivo para demostrar las condiciones suficientes de existencia y unicidad de la dificultad de variación y la parte inductiva se contrastó mediante problemas uniformes de Dirichlet y Neumann. En consecuencia, los resultados a estas dificultades se han extendido a espacios de Sobolev de primer orden, fijando una forma bilineal que satisface las condiciones del teorema de Lax-Milgram. Estas dificultades variacionales se justifican principalmente por las múltiples aplicaciones en la ciencia y en la teoría de las incertidumbres sobre los valores de contorno, lo que permite considerar nuevos problemas que surgen en muchos campos de las matemáticas aplicadas, como el mecanismo de los cuerpos sólidos y métodos numéricos de aproximación con formulaciones débiles en EDPs.

**Palabras claves:** Espacio de Sobolev, Espacio de Hilbert, Dirichlet uniforme, Neumann uniforme.

## ABSTRACT

The purpose of this thesis is to establish the existence and uniqueness of the solution of a variational elliptic problem in Hilbert spaces and apply its existence and uniqueness to the weak formulation of the uniform Dirichlet problem

$$\begin{cases} -\Delta u = g & \text{en } \omega \\ u = 0 & \text{en } \gamma \end{cases}$$

and the uniform Neumann problem

$$\begin{cases} -\Delta u + \ell u = g & \text{en } \omega, \ell > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \gamma \end{cases}$$

Where  $\omega$  open limited of  $\mathbb{R}^n$  with Border  $\gamma$  well regular. The deductive method was used to demonstrate the sufficient conditions of existence and uniqueness of the difficulty of variation and the inductive part was contrasted by means of Dirichlet and Neumann uniform problems. Consequently, the results for these difficulties have been extended to first-order Sobolev spaces, establishing a theorem of bilinear form that satisfies the conditions of the Lax-Milgram theorem. These variational difficulties are mainly justified by the multiple applications in science and in the theory of uncertainties about contour values, which allows considering new problems that arise in many fields of applied mathematics, such as the mechanism of solid bodies and numerical approximation methods with weak formulations in PDEs.

**Keywords:** Sobolev space, Hilbert space, uniform Dirichlet, uniform Neuman

## **CAPÍTULO I**

### **INTRODUCCIÓN**

#### **1.1. Antecedentes**

Afirmar que un problema asociado a una ecuación diferencial parcial (EDP) está bien descrito es saber que la solución es única y depende continuamente de la referencia del problema. Pero, ¿qué es una solución de una EDP? ¿Se debería exigir que el resultado de una EDP sea infinitamente diferenciable? Quizás sería más conveniente requerir una EDP de un orden dado que sus soluciones sean continuas infinitamente diferenciables. Entonces, al menos, todas las derivadas que aparecen en la EDP existirán y serán continuas, aunque es muy probable que algunas derivadas de orden superior no lo hagan. Esta reflexión de resultado será lo que se denomina la solución tradicional de una EDP, que es el concepto más razonable que puede existir. Existen varias estrategias para resolver estas EDP: transformaciones integrales, proceso característico, métodos numéricos, fórmula de la perturbación y métodos de transformada de Fourier, con los que se podría encontrar un resultado clásico. Este concepto de solución tradicional ha sido discutido desde el comienzo de las EDP y finales del siglo XVIII, que fueron estudiadas por D'Alembert, Bernoulli y Laplace. Pero, llegó un momento en que este concepto cambió. Algunas EDPs se pueden resolver en el sentido tradicional, pero muchas otras no. De manera general, notemos que existe una EDP que no tienen soluciones tradicionales, sin embargo están bien descritas si se redefine el concepto de solución, conocida como solución extensiva o débil.

Al dar forma a ciertos eventos materiales con aplicaciones de ingeniería, las ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales son mecanismos matemáticos muy útiles que ayudan a explicar las manifestaciones y predecir su comportamiento. Esta tesis utiliza un razonamiento físico matemático, la ecuación de las deformaciones de una membrana elástica en posición de equilibrio, formulada en Dirichlet, Neumann o problemas mixtos y determinada en los espacios de Hilbert, lo que permite proponer un resultado débil o un resultado generalizado. Se analiza la existencia, unicidad y caracterización de este tipo de soluciones en espacios funcionales adecuados. Estos problemas son aplicaciones de un resultado general demostrado por Lax-Milgram. Pero, en todo este marco, es habitual formular las siguientes dificultades.

## **1.2. Definición del problema de investigación**

### **1.2.1. Problema general**

- a) ¿Bajo qué condiciones es posible establecer la existencia y unicidad de la solución del problema variacional elíptico en espacios de Hilbert?

### **1.2.2. Problemas específicos**

- a) ¿Bajo qué condiciones es posible aplicar la existencia y unicidad de la solución del problema variacional elíptico a situaciones de un problema de Dirichlet uniforme?
- b) ¿Bajo qué condiciones es posible aplicar la existencia y unicidad de la solución del problema variacional elíptico a situaciones de un problema de Neumann uniforme?

### **1.3. Objetivos de la investigación**

#### **1.3.1. Objetivo general**

- a) Establecer la existencia y unicidad de la solución del problema variacional elíptico en espacios de Hilbert.

#### **1.3.2. Objetivos específicos**

- a) Aplicar la existencia y unicidad de la solución del problema variacional elíptico a situaciones de un problema de Dirichlet uniforme.
- b) Aplicar la existencia y unicidad de la solución del problema variacional elíptico a situaciones de un problema de Neumann uniforme.

### **1.4. Justificación de la investigación**

La tesis de investigación sobre la existencia y unicidad de la solución del problema variacional elíptico en espacios de Hilbert se justifica principalmente por las numerosas aplicaciones en ciencia y teoría de las dificultades variacionales que representan, lo cual es una exposición muy natural de la teoría de las cuestiones de frontera que permite considerar nuevas dificultades que surgen en muchos campos de las matemáticas aplicadas, como la dinámica de la materia sólida y los métodos de ecuaciones numéricas para la proximidad de resultados débiles de las EDPs. El éxito de las ecuaciones diferenciales parciales radica en su capacidad para configurar una amplia variedad de eventos materiales, ecológicos, bioquímicos y financieros, entre otros. De manera similar, la principal herramienta matemática utilizada para probar la existencia y unicidad de resultados débiles en cuestiones variacionales elípticos es el teorema de Lax-Milgram, que proporciona una base teórica para el método de elementos finitos. Actualmente, la formulación variacional de dificultades elípticas en espacios

de Hilbert es un eje de investigación en el campo de las ecuaciones diferenciales parciales.

## **CAPÍTULO II**

### **FUNDAMENTOS TEÓRICOS**

#### **2.1. Antecedentes de la investigación**

A principios del siglo XIX, la ciencia de la afluencia de calor se convirtió en un tema de gran importancia práctica, debido a las necesidades de la fabricación del acero, pero también al beneficio cada vez mayor de la estructura interna del orbe, y especialmente el calentamiento dentro del cuerpo celeste. No existe una forma directa de medir la calefacción a miles de kilómetros o más por debajo de la superficie de la tierra. Por lo tanto, las únicas medidas disponibles eran ambiguas y era sustancial comprender cómo se produce la afluencia de calor a través de cuerpos de diferentes composiciones (Ortiz, 2004).

En 1812, Joseph Fourier presentó un artículo sobre la afluencia de calor a la Academia de Ciencias de Francia. El resultado de su trabajo es que si extendemos el transporte del calentamiento de la serie de Fourier inicial mediante una sucesión de funciones de seno y coseno, podemos leer inmediatamente cómo es la afluencia del calor a través del cuerpo a lo largo del tiempo. Fourier lo dio por sentado y ahí empezaron los obstáculos; algunos de sus contemporáneos habían estado inquietos durante mucho tiempo por este problema, por las ondas de radio, y estaban convencidos de que era mucho más difícil de lo que parecía (Morris, 1972).

La "función" delta de Dirac ha dado efectos extraordinarios a los físicos, que la han utilizado en ciertos campos, especialmente en el mecanismo

cuántico. Estas indiscutibles “funciones” que operaron muy bien y dieron buenos beneficios también fueron útiles en la teoría de la probabilidad y en otras ramas de las ciencias formales y la física, pero estas “funciones” tenían un pequeño problema: no subsistían, porque su descripción y el “proceder” era antagónico a la particularidad de las funciones (Usunáriz, 2012).

Sergel Levovich Sobolev (1908-1989), en su obra “Nuevo proceso para solucionar el problema de las ecuaciones hiperbólicas normales”, presentó un método inédito de solución de Cauchy para ecuaciones hiperbólicas normales (ecuaciones diferenciales parciales con valor inicial, sumando la ecuación de la onda). En este trabajo, Sobolev describe lo que por lo regular se denominan espacios de Sobolev y presenta, entre otras cosas, los conocimientos de funciones de prueba, funciones lineales, funciones generalizadas y derivadas, resultados débiles, que son esenciales en el análisis funcional y, más especialmente en la teoría de las distribuciones (Ortiz, 2004).

Para este concepto de solución desconocido, Sobolev y Schwartz (1915-2002) establecieron los renombrados espacios de Sobolev. Estos espacios funcionales se sustentan en la abstracción de derivada extensiva, constituida por funciones integrables según Lebesgue, ya que las derivadas universalizado también corresponde a este espacio. Asimismo, estos espacios se han convertido en un ambiente para el análisis de estudios de derivadas parciales con dificultades variacionales elípticos en los que no se puede obtener un resultado claro, sino que se analiza el proceder propio de la existencia y unicidad de la solución en derivadas parciales, importa saber cómo se comportaran estos resultados, incluso si no conocemos su forma expandida.

El teorema de Lax- Milgram fue mostrado por primera vez en 1954 por Arthur Milgram y Peter Lax para respaldar la teoría de ecuaciones diferenciales parciales que estaba en pleno auge en ese instante. Este teorema se emplea en preguntas variacionales para la existencia y unicidad extendida de varias dificultades de valores en la frontera que aparecen en las EDP (Ortiz, 2004).

En el marco de esta investigación preliminar, se pueden descubrir resultados débiles para la existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales parciales. Así tenemos a Chávez Machado Elfren, quien realizó la investigación sobre existencia de resultados débiles de un sistema elíptico no lineal a través del teorema de Schauder, donde concluyó que las ecuaciones elípticas no lineales y la ecuación elíptica anisotrópica configuran diversas manifestaciones físicas, por lo que es un resultado a tales ecuaciones. En este trabajo, se demuestra la existencia de un resultado débil de las dos ecuaciones aplicando el teorema del punto fijo de Schauder (Chávez, 2015).

De la misma forma, Torres Jaci Sandy efectuó la investigación de la existencia y unicidad de la solución débil de la ecuación de Poisson con la condición de frontera de Robin, donde concluyó que, para aplicar el teorema de Lax-Milgram, es imprescindible que la formulación variacional reduzca el objeto de estudio de forma bilineal y funcional, para adaptarlo al enunciado del teorema y así obtener un único resultado débil (Torres, 2021).

## 2.2. Bases teóricas

### 2.2.1. Espacio normado

#### Definición 2.2.1.1. (Campo)

Un conjunto  $\mathbb{K} \neq \emptyset$  se llama campo, si las operaciones de Suma y Producto están definidas  $\mathbb{K}$  y satisfacen las siguientes propiedades:

#### i) ADICIÓN $+$ : $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$

$$(a, b) \mapsto a + b$$

- a)  $a + (b + c) = (a + b) + c$
- b)  $a + b = b + a$
- c)  $\exists! 0 \in \mathbb{K}: 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{K}$
- d)  $\forall a \in \mathbb{K}, \exists -a \in \mathbb{K}: a + (-a) = 0$

#### ii) MULTIPLICACIÓN $*$ : $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$

$$(a, b) \mapsto a * b$$

- a)  $a * (b * c) = (a * b) * c$
- b)  $a * b = b * a$
- c)  $\exists! 1 \in \mathbb{K}: 1 * a = a, \forall a \in \mathbb{K}$
- d)  $\forall a \neq 0, \exists! a^{-1}: a * a^{-1} = 1$

#### iii) Propiedad distributiva del producto respecto a la suma

$$a * (b + c) = a * b + a * c$$

(Lázaro, 2017)

### Definición 2.2.1.2. (Grupo Abeliano)

Sea  $\mathcal{G}$  un conjunto, y  $*$  una operación sobre  $\mathcal{G}$  que verifica las propiedades

- i.  $(a * b) * c = a * (b * c), \quad \forall a, b, c \in \mathcal{G}$
- ii.  $\exists e \in \mathcal{G}: e * a = a * e = a, \quad \forall a \in \mathcal{G}$
- iii.  $\forall a \in \mathcal{G}, \exists a' \in \mathcal{G}: a * a' = a' * a = e$
- iv.  $a * b = b * a, \quad \forall a, b \in \mathcal{G}$

Entonces  $(\mathcal{G}, *)$  se llama grupo si satisface las propiedades (i), (ii), (iii) y si  $(\mathcal{G}, *)$  cumple las propiedades (i), (ii), (iii), (iv) se llama grupo abeliano o grupo conmutativo.

(Jerónimo, Sabia, Tesauri, 2008).

### Definición 2.2.1.3. (Acción)

Sean  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{F}$  dos conjuntos. Una acción de  $\mathcal{E}$  sobre  $\mathcal{F}$  es una función  $*$ :  
 $\mathcal{E} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ .

**Notación:**  $*(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \mathcal{E} * \mathcal{F}$

(Jerónimo, Sabia, Tesauri, 2008).

### Definición 2.2.1.4. (Espacio Vectorial)

Sea  $(\mathbb{K}, +, *)$  un cuerpo,  $\mathcal{V}$  un conjunto no vacío,  $+$  una operación sobre  $\mathcal{V}$  y sea  $*$  una Acción de  $\mathbb{K}$  sobre  $\mathcal{V}$ . Decimos que  $(\mathcal{V}, +, *)$  está en  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial si se cumplen las siguientes condiciones:

- i)  $(\mathcal{V}, +)$  es un grupo Abeliano.

ii) Acción  $*$ :  $\mathbb{K} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  satisfice

a)  $a * (v_1 + v_2) = a * v_1 + a * v_2 \quad \forall a \in \mathbb{K}; \forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}$

b)  $(a + b) * v_1 = a * v_1 + b * v_1 \quad \forall a, b \in \mathbb{K}; \forall v_1 \in \mathcal{V}$

c)  $1 * v_1 = v_1 \quad \forall v_1 \in \mathcal{V}$

d)  $(a * b) * v_1 = a * (b * v_1) \quad \forall a, b \in \mathbb{K}; \forall v_1 \in \mathcal{V}$

(Jerónimo, Sabia, Tesauri, 2008).

#### **Definición 2.2.1.5. (Sub Espacio Vectorial)**

Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial- $\mathbb{K}$ . Se dice que un subconjunto no vacío  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$  si la suma y el producto de los escalares (de  $\mathcal{V}$ ) son una operación y una Acción sobre  $\mathcal{V}_1$  que lo convierten en un espacio vectorial- $\mathbb{K}$ .

(Jerónimo, Sabia, Tesauri, 2008).

#### **Definición 2.2.1.6. (Métrica)**

Una métrica sobre un conjunto  $\mathcal{V}$  es una función  $d: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  que asocia a cada par ordenado de elementos  $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$  un número real  $d(v_1, v_2)$ , llamado distancia de  $v_1$  a  $v_2$  tal que se cumplen las siguientes condiciones para todo  $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}$ .

i)  $d(v_1, v_1) = 0$

ii) Sea  $v_1 \neq v_2$ , entonces  $d(v_1, v_2) > 0$

iii)  $d(v_1, v_2) = d(v_2, v_1)$

iv)  $d(v_1, v_2) = d(v_2, v_1)$

v)  $d(v_1, v_2) \leq d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2) \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}$

(Lages, 2014).

**Definición 2.2.1.7. (Sucesión de Cauchy en espacio métrico)**

Una sucesión  $(v_n)$  en un espacio métrico  $(\mathcal{V}, d)$  se dice que es una sucesión de Cauchy si para todo  $\delta > 0$  existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n, m \geq N_0 \implies d(v_n, v_m) < \delta$  o equivalentemente  $d(v_n, v_m) \rightarrow 0$

(Lima, 2014).

**Definición 2.2.1.8. (Espacio Métrico Completo)**

Si cualquier sucesión de Cauchy en un espacio métrico es convergente  $(\mathcal{V}, d)$ . Entonces  $(\mathcal{V}, d)$  se llama espacio métrico completo.

(Hasan, 2018).

**Definición 2.2.1.9. (Espacio Normado)**

Un espacio normado es un par  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ , donde  $\mathcal{V}$  es un espacio vectorial  $-\mathbb{R}$  y  $\|\cdot\|: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función norma tal que para todo  $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$  y  $a \in \mathbb{R}$  verifica las siguientes condiciones:

- i)  $\|v_1\| \geq 0$  y  $\|v_1\| = 0 \iff v_1 = 0$
- ii)  $\|av_1\| = |a|\|v_1\|$
- iii)  $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$

(Kreyszig, 1989).

**Definición 2.2.1.10. (Espacio de Banach)**

Un espacio normado  $\mathcal{V}$  se denomina espacio de Banach si cualquier sucesión de Cauchy es convergente, es decir,  $\|v_n - v_m\| \rightarrow 0$  cuando  $n, m \rightarrow \infty$ ,  $\forall v_n, v_m \in \mathcal{V}$ . (Hasan, 2018).

## 2.2.2. Espacios de Hilbert

### Definición 2.2.2.1. (Espacio Producto Interno o Espacio Pre Hilbert)

Supongamos que  $\mathcal{V}$  es un espacio vectorial real. Entonces se dice que una función, denotada por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  en el campo subyacente  $\mathbb{R}$ , es un producto interno de elementos  $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}$  si se cumplen las siguientes condiciones:

- i)  $\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle, \forall v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}$
- ii)  $\langle av_1, v_2 \rangle = a\langle v_1, v_2 \rangle, \forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}$  y  $a \in \mathbb{R}$
- iii)  $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle, \forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}$
- iv)  $\langle v_1, v_1 \rangle \geq 0, \forall v_1 \in \mathcal{V}$  y  $\langle v_1, v_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0$

(Hasan, 2018).

**Notación:** El producto interno se denota por  $\mathbb{V} = (\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

### Definición 2.2.2.2. (Sucesión de Cauchy en Espacio con producto interno)

Una sucesión  $(x_n)$  en un espacio de producto interno  $\mathbb{V}$  se dice que es una sucesión de Cauchy si, para  $\delta > 0$  existe  $\mathcal{N}$  tal que

$$\|x_n - x_m\| = \langle x_n - x_m, x_n - x_m \rangle^{1/2} < \delta \text{ para } n, m > \mathcal{N}$$

**Notación:**  $\langle x, x \rangle$  es denotado por  $\|x\|^2$  es decir  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$

(Hasan, 2018).

### Definición 2.2.2.3. (Espacio de Hilbert)

Si cualquier sucesión de Cauchy es un espacio producto escalar  $\mathbb{V}$  es convergente, es decir, para  $x_n, x_m \in \mathcal{H}$  tenemos que  $\langle x_n - x_m, x_n - x_m \rangle \rightarrow 0$

cuando  $n, m \rightarrow \infty$ , entonces existe  $v \in \mathcal{H}$  tal que  $\langle v_n - v, v_n - v \rangle \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces  $\mathcal{H}$  se llama un espacio de Hilbert.

**Observación 2.2.2.1.**

i) Un espacio producto interno se denomina espacio de Hilbert si es completo

(Hasan, 2018).

**Definición 2.2.2.4. (Vectores ortogonales)**

Dos vectores  $v_1$  e  $v_2$  en un espacio de producto interno  $\mathbb{V}$  son ortogonales, denotados por  $v_1 \perp v_2$ , si  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ ,  $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}$

(Hasan, 2018).

**Definición 2.2.2.5. (Vectores ortonormales)**

Se dice que un conjunto de vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  en un espacio de producto interno  $\mathcal{H}$  es ortonormal si  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ , donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

(Hasan, 2018).

**Teorema 2.2.2.1. (Teorema de la proyección)**

Si  $\mathcal{N}$  es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert  $\mathbb{V}$ , entonces

$$\mathbb{V} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$$

(Hasan, 2018).

**Definición 2.2.2.6. (Operador lineal)**

Sean  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$  espacios vectoriales sobre el campo  $\mathbb{R}$ . Un operador lineal es una aplicación  $\mathcal{T}: \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$  tal que

$$i) \quad \mathcal{T}(v_1 + v_2) = \mathcal{T}v_1 + \mathcal{T}v_2, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$$

$$ii) \quad \mathcal{T}(av_1) = a\mathcal{T}v_1, \forall v_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{T}), \forall a \in \mathbb{R},$$

donde  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$  denota al dominio de la aplicación  $\mathcal{T}$ .

**Observación 2.2.2.2.**

i) Si  $\mathcal{V}_2 = \mathbb{R}$ , entonces el operador lineal  $g: \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathbb{R}$  se llama funcional lineal. (kreyszig, 1989).

**Definición 2.2.2.7. (Funcional lineal acotado)**

Un funcional lineal  $g: \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathbb{R}$  está acotado si existe un número real  $\mathcal{K} > 0$  tal que para todo  $v \in \mathcal{D}(g)$  se cumple  $|g(v)| \leq \mathcal{K}\|v\|_{\mathcal{V}_1}$ .

(kreyszig, 1989).

**Definición 2.2.2.8. (Funcional lineal continua)**

Sea  $g: \mathcal{D}(g) \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional lineal. Entonces  $g$  es continua si y solo si está acotado.

(kreyszig, 1989).

**Definición 2.2.2.9. (Espacio dual)**

Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial- $\mathbb{R}$ , se define el espacio dual (topológico) de  $\mathcal{V}$ , denotado por  $\mathcal{V}^*$ , como

$$\mathcal{V}^* = \{g: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R} / g \text{ es lineal y continuo}\}$$

(Brezis, 2010).

**Definición 2.2.2.10. (Espacio bidual)**

Sea  $\mathcal{X}$  un espacio normado y  $\mathcal{X}^*$  su dual. El espacio bidual  $\mathcal{X}^{**}$  es el dual de  $\mathcal{X}^*$ .

(Brezis, 2010).

**Teorema 2.2.2.2. (Teorema de representación de Riesz)**

Si  $g$  es una funcional lineal acotada en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , entonces existe un único vector  $v_1 \in \mathcal{H}$  tal que  $g(v) = \langle v, v_1 \rangle, \forall v \in \mathcal{H}$ .

Además, se comprueba  $\|g\| = \|v_1\|$ .

(Hasan, 2018).

**2.2.3. Espacios  $L^p$** **Definición 2.2.3.1. (Anillo de conjuntos)**

Sea  $\mathcal{X}$  un conjunto arbitrario, cualquier colección no vacía  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$  tal que  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \mathcal{F}$  y  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} \in \mathcal{F}$  se llama un anillo en  $\mathcal{X}$ .

(Alegría, 2018).

**Definición 2.2.3.2. (Álgebra de conjuntos)**

Sea  $\mathcal{X}$  un conjunto arbitrario, cualquier colección no vacía  $\mathcal{a} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$  tal que  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{a} \Rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \mathcal{a}$  y  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{A} \in \mathcal{a}$  se llama un algebra en  $\mathcal{X}$

(Alegría, 2018).

**Definición 2.2.3.3. (Sigma Álgebra)**

Sea  $\mathcal{X}$  un conjunto arbitrario. Se dice que un algebra  $\mathcal{a}$  es un  $\Sigma$ -álgebra si:

- i)  $\mathcal{X} \in \mathcal{a}$
- ii)  $\mathcal{A} \in \mathcal{a} \Rightarrow \mathcal{A}^c \in \mathcal{a}$

iii) Si  $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de elementos en  $a$ , entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \in a$$

(Alegría, 2018).

**Definición 2.2.3.4. (Espacio medible)**

El par  $(\mathcal{X}, a)$  donde  $\mathcal{X}$  es un conjunto y  $a$  es un  $\Sigma$  –álgebra de  $\mathcal{X}$  se denomina espacio medible, y los elementos de  $a$  son un conjunto medible.

(Alegría, 2018).

**Definición 2.2.3.5. (Medida)**

Una medida en un espacio medible  $(\mathcal{X}, a)$ , es una función positiva  $m: a \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  que satisface:

- i)  $m(\emptyset) = 0$
- ii)  $m$  es numerablemente aditiva. Esto decir, si  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, \dots \in a$  es un conjunto de elementos disjuntos cuya unión este en  $a$ , entonces

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(\mathcal{A}_n)$$

**Observación 2.2.3.1.**

- i)  $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$  es la recta extendida

(Alegría, 2018).

**Definición 2.2.3.6. (Función medible)**

Se dice que una función  $g: \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  es medible o simplemente medible, si para cualquier número real  $\mathcal{K}$  el conjunto  $\{x \in \mathcal{X} / g(x) > \mathcal{K}\}$  pertenece a una  $\Sigma$  –álgebra. (Bartle, 2007).

**Observación 2.2.3.2.**

- i) Se dice que una propiedad se cumple en casi cualquier punto (*c. t. p.*), si los conjuntos de puntos donde no se cumple son de medida nula.
- ii) De ahora en adelante  $\omega$ , denotará un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.2.3.7. (Espacio Lebesgue medible)**

El espacio Lebesgue medible es definido por

$$L^1(\omega) = \left\{ g: \omega \rightarrow \mathbb{R} / g \text{ es medible y } \int_{\omega} |g| < \infty \right\}$$

**Observación 2.2.3.3.**

- i) En este conjunto, consideramos la relación de equivalencia  $\sim$  dada por

$$g \sim h \Rightarrow g = h \quad \text{c. t. p.}$$

- ii) Si  $g \in L^1(\omega)$ , entonces la clase de equivalencia de  $g$ , denotada por  $[g]$  es el conjunto  $[g] = \{g \in L^1(\omega): g \sim h\}$

(Bartle, 2007).

**Definición 2.2.3.8. (Espacio  $L^p$ )**

Sea  $p \in \mathbb{R}, 1 < p < \infty$ , defina  $L^p(\omega) := \{g: \omega \rightarrow \mathbb{R}\}$ , donde  $g$  es medible y  $|g|^p \in L^1(\omega)$ , que es un espacio normado por la norma dada por

$$\|g\|_{L^p} = \left[ \int_{\omega} |g(x)|^p \right]^{1/p}$$

(Bartle, 2007).

**Observación 2.2.3.4.**

- i) El espacio  $L^2(\omega)$  es un espacio de Hilbert para el producto interno definido por

$$\langle g, h \rangle = \int_{\omega} gh$$

**Definición 2.2.3.9. (Exponente conjugado)**

Sea  $1 \leq p \leq \infty$ . Decimos que  $q$  es el exponente conjugado de  $p$  si satisface:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(Brezis, 2010)

**Teorema 2.2.3.1. (Desigualdad de Holder)**

Sean  $g \in L^p(\omega)$  y  $h \in L^q(\omega)$  con  $1 \leq p \leq \infty$ . Entonces  $gh \in L^1(\omega)$  y

$$\int_{\omega} |gh| \leq \|g\|_p \|h\|_q$$

donde  $p$  y  $q$  son exponentes conjugados.

(Brezis, 2010)

**2.2.4. Espacio de distribuciones**

**Definición 2.2.4.1. (Soporte compacto)**

Sea  $g: \omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se define el soporte de  $g$  como

$$\text{sopp}(g) = \overline{\{x \in \omega / g(x) \neq 0\}}$$

(Ruas, 2007)

**Definición 2.2.4.2. (Espacio de funciones prueba)**

Sea  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto. El espacio  $\mathcal{C}_c^\infty(\omega)$  se define como el conjunto de todas las funciones pertenecientes a  $\mathcal{C}^\infty(\omega; \mathbb{R}^n)$  con soporte compacto contenido  $\omega$ , es decir

$$\mathcal{C}_c^\infty(\omega) = \{\psi \in \mathcal{C}^\infty(\omega; \mathbb{R}^n); \psi = 0 \text{ sobre el contorno de } \omega\}$$

**Observación 2.2.4.1.**

i) En particular una función  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega)$  es llamada función de prueba o test.

(Ruas, 2007)

**Ejemplo 2.2.4.1.**

Sea  $0 < \ell$  y  $\psi_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\psi_\ell(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } |x| > \ell \\ e^{-\frac{\ell^2}{\ell^2 - x^2}} & , \text{ si } |x| < \ell \end{cases}$$

Mostrar que  $\psi_\ell \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega)$  espacio de función de prueba

**Solución**

$$\text{sopp } \psi_\ell = \{x \in \mathbb{R}: \psi_\ell(x) \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}: |x| < \ell\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}: -\ell < x < \ell\}$$

$$= \overline{\{x \in \mathbb{R}: -\ell < x < \ell\}}$$

$$\text{sopp } \psi_\ell = [-\ell, \ell]$$

$$\psi_{\ell}^m = \frac{p_m(x)e^{-\frac{\ell^2}{\ell^2-x^2}}}{(\ell^2-x^2)^{m+1}}$$

Por lo tanto  $\psi_{\ell} \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\omega)$

**Definición 2.2.4.3. (Convergencia en  $\mathcal{C}_c^{\infty}(\omega)$ )**

Sea  $(\psi_n) \subset \mathcal{C}_c^{\infty}(\omega)$  una sucesión. Se dice que  $(\psi_n)$  converge a  $\psi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\omega)$  si existe un conjunto compacto  $\mathcal{K}_0 \subset \omega$  tal que  $\text{sop}(\psi_n) \subset \mathcal{K}_0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $\psi'_n \rightarrow \psi'$  uniformemente en  $\mathcal{K}_0$ , es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathcal{K}} |\psi'_n(x) - \psi'(x)| = 0$$

(Ruas, 2007).

**Definición 2.2.4.4. (Distribución)**

Sea  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Se dice que  $\mathcal{T}$  es una distribución en  $\omega$  si  $\mathcal{T}: \mathcal{C}_c^{\infty}(\omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , es lineal y continua en el siguiente sentido:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}(\psi_n) = \mathcal{T}(\psi)$ , para cualquier secuencia  $(\psi_n)$  que converge a  $\psi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\omega)$ .

(Ruas, 2007).

**Definición 2.2.4.5. (Espacio de distribución)**

Sea  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto. El espacio de distribuciones  $\mathcal{D}(\omega)$  se define como el dual de  $\mathcal{C}_c^{\infty}(\omega)$ ,  $\mathcal{D}(\omega) := (\mathcal{C}_c^{\infty}(\omega))'$ , es decir,

$$\mathcal{D}(\omega) = \{\mathcal{T}: \mathcal{C}_c^{\infty}(\omega) \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{T} \text{ es lineal y continua}\}$$

(Ruas, 2007).

**Definición 2.2.4.6. (Derivada generalizada o débil)**

Sea  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Decimos que  $g \in L^1_{loc}(\omega)$  es la derivada débil de orden 1 en  $\omega$  si existe una función  $h \in L^1_{loc}(\omega)$  tal que

$$\int_{\omega} g\psi' = - \int_{\omega} h\psi,$$

Para todo  $\psi \in C_c^\infty(\omega)$ .

**Notación:** La derivada débil se denota  $h = g'$

(Ruas, 2007).

**2.2.5. Espacio de Sobolev  $\mathcal{H}^1$**

**Definición 2.2.5.1. (Espacio de Sobolev)**

Sea  $I = (a, b)$ . El espacio de Sobolev  $\mathcal{W}^{1,2}(I)$  es definida por

$$\mathcal{W}^{1,2}(I) := \left\{ g \in L^2(I); \exists h \in L^2(I) \text{ tal que } \int_{\omega} g\psi' = - \int_{\omega} h\psi, \forall \psi \in C_c^1(I) \right\}$$

**Notación:**  $\mathcal{W}^{1,2}(I) = \mathcal{H}^1(I)$

**Observación 2.2.5.1.**

- i)  $\mathcal{H}^1(I)$  es el espacio de todas las funciones de  $L^2(I)$  cuya derivada débil también es una función de  $L^2(I)$ .

(Brezis, 2010).

**Definición 2.2.5.2. ( $\mathcal{H}^1(\omega)$  espacio de Banach)**

El espacio  $\mathcal{H}^1(\omega)$  es un espacio de Banach con norma definida por

$$\|g\|_{\mathcal{H}^1} := \left( \|g\|_{L^2}^2 + \|\nabla g\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

(Brezis, 2010).

**Definición 2.2.5.3. ( $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$  espacio de Hilbert)**

El espacio  $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$  es un espacio de Hilbert cuyo producto escalar está definido por

$$\langle g, h \rangle_{\mathcal{H}^1} := \langle g, h \rangle + \langle g', h' \rangle = \int_{\mathbb{R}} (gh + g'h')$$

(Brezis, 2010).

**Definición 2.2.5.4. ( $\mathcal{H}_0^1(\omega)$  subespacio vectorial de  $\mathcal{H}^1(\omega)$ )**

El espacio  $\mathcal{H}_0^1(\omega)$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{H}^1(\omega)$  definido por

$$\mathcal{H}_0^1(\omega) := \{g \in \mathcal{H}^1(\omega) / g = 0 \text{ sobre } \partial\omega\},$$

donde  $\partial\omega$  es el borde de  $\omega$ .

(Brezis, 2010).

**Definición 2.2.5.5. (Desigualdad de Poincaré)**

Sea  $\mathcal{J}$  un intervalo acotado, entonces existe una constante  $\mathcal{K}$ , tal que

$$\|g\|_{W^{1,p}(\mathcal{J})} \leq \mathcal{K} \|g'\|_{L^p(\mathcal{J})}, \forall g \in W_0^{1,p}(\mathcal{J})$$

(Brezis, 2010).

## CAPÍTULO III

### MÉTODO O PROCEDIMIENTO

#### 3.1. Enfoque metodológico

En esta tesis, se utilizó el método lógico deductivo para demostrar las condiciones de existencia y unicidad del problema de variación elíptica en espacios de Hilbert y se contrastó la parte inductiva a través de las dificultades homogéneas de Dirichlet y de Neumann.

##### 3.1.1. Procedimiento del método deductivo

<b>Revisión bibliográfica</b>	Se compone de libros y tesis sobre el tema. Utilizando las consecuencias del análisis funcional, distribuciones y espacios de Sobolev, se ha propuesto resultados sobre la existencia y unicidad de cuestiones elíptico variacional en los espacios de Hilbert.
<b>Deducción</b>	Las reglas de deducción lógica se basaron en el marco conceptual de la existencia y unicidad de los resultados de preguntas variacionales elípticas en espacios de Hilbert.
<b>Analogía</b>	La forma de dificultad uniforme de Dirichlet se comparó con la situación de dificultad uniforme de Neumann.

<b>Generalización</b>	La existencia y unicidad de los resultados de la cuestión variacional elíptico se han divulgado en teoremas y proposiciones apoyado en reglas de deducción lógica y definiciones.
-----------------------	---

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS

#### 4.1. Descripción

##### 4.1.1. Problema variacional

En general, buscamos determinar una función  $v_1$  a partir de un espacio de funciones  $\mathbb{V}$  que satisfaga la siguiente condición:  $a(v_1, v_2) = g(v_2), \forall v_2 \in \mathbb{V}$ , donde  $g$  es un funcional lineal definida en  $\mathbb{V}$  y  $a$  es una forma bilineal definida en  $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ .

##### **Definición 4.1.1.1. (Forma bilineal continua)**

Una forma bilineal en el espacio de Hilbert  $\mathbb{V}$

$$a: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(v_1, v_2) \mapsto a(v_1, v_2)$$

es continua en  $\mathbb{V}$ , si existe una constante  $\mathcal{K} > 0$  tal que

$$|a(v_1, v_2)| \leq \mathcal{K} \|v_1\| \|v_2\|, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}$$

##### **Definición 4.1.1.2. (Forma bilineal coercitiva)**

Una forma bilineal en el espacio de Hilbert  $\mathbb{V}$ ,  $a: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  es coercitiva en  $\mathbb{V}$  si existe una constante  $\mathcal{K} > 0$  tal que

$$a(v_1, v_1) \geq \mathcal{K} \|v_1\|_{\mathbb{V}}^2, \quad \forall v_1 \in \mathbb{V}$$

### Definición 4.1.1.3. (Forma lineal continua)

Una forma lineal es continua en el espacio de Hilbert  $\mathbb{V}$  si  $g(v_1) \leq \|v_1\|_{\mathbb{V}}, \forall v_1 \in \mathbb{V}$ .

Donde  $g \in \mathbb{V}^*$  (o dual  $\mathbb{V}$ ).

### Teorema 4.1.1.1. (Teorema de Lax-Milgram)

Sea  $\mathbb{V}$  un espacio de Hilbert y  $a: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal, continua y coercitiva. Entonces, para cada  $g \in \mathbb{V}^*$  existe un único  $v_1 \in \mathbb{V}$  que satisface la ecuación

$$a(v_1, v_2) = g(v_2), \quad \forall v_2 \in \mathbb{V}$$

#### Demostración:

La prueba se desarrollará a cabo en dos etapas:

#### Existencia:

Sea  $v_0 \in \mathbb{V}$  un elemento fijo. El funcional  $g_{v_0}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  está definido por

$$g_{v_0}(v) = a(v, v_0), \quad v \in \mathbb{V}$$

**1. Afirmación:** El funcional  $g_{v_0}$  definido es lineal y continuo, es decir  $g_{v_0} \in \mathbb{V}^*$ . En efecto, para  $v_3, v_4 \in \mathbb{V}$  y  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  tenemos

$$\begin{aligned} g_{v_0}(\beta_1 v_3 + \beta_2 v_4) &= a(\beta_1 v_3 + \beta_2 v_4, v_0) \\ &= \beta_1 a(v_3, v_0) + \beta_2 a(v_4, v_0) \\ &= \beta_1 g_{v_0}(v_3) + \beta_2 g_{v_0}(v_4) \end{aligned}$$

Además, dado que  $a$  es acotado, se sigue que

$$\|\mathcal{G}_{v_0}\|_{\mathbb{V}^*} = \|a(v_0, v)\|_{\mathbb{V}^*} \leq \mathcal{K}_1 \|v\|_{\mathbb{V}} \|v_0\|_{\mathbb{V}} = \mathcal{K} \|v\|_{\mathbb{V}},$$

donde  $\mathcal{K} := \mathcal{K}_1 \|v_0\|_{\mathbb{V}}$ , se deduce que  $\mathcal{G}_{v_0} \in \mathbb{V}^*$ .

Además, por el Teorema **2.2.2.2.** (teorema de representación de Riesz) se sigue que existe un único  $v_{3\mathcal{G}} \in \mathbb{V}$  tal que

$$a(v_0, v_2) = \langle v_{3\mathcal{G}}, v_2 \rangle, \quad v_2 \in \mathbb{V}$$

El operador  $\mathcal{T}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  está definido por  $\mathcal{T}v_1 = v_{3\mathcal{G}}$ ,  $v_1 \in \mathbb{V}$ . Se sigue que

$$a(v_1, v_2) = \langle \mathcal{T}v_1, v_2 \rangle, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{V}$$

**2. Afirmación:** El operador definido  $\mathcal{T}$  es lineal y acotado. De hecho, sean  $v_3, v_4 \in \mathbb{V}$  y  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ , entonces, para cada  $v_2 \in \mathcal{H}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}(\beta_1 v_3 + \beta_2 v_4), v_2 \rangle &= a(\beta_1 v_3 + \beta_2 v_4, v_2) = \beta_1 a(v_3, v_2) + \beta_2 a(v_4, v_2) \\ &= \langle \beta_1 \mathcal{T}v_3 + \beta_2 \mathcal{T}v_4, v_2 \rangle, \end{aligned}$$

lo que implica la linealidad de  $\mathcal{T}$ .

Ahora, teniendo en cuenta que  $a$  es acotado, se sigue que

$$\|\mathcal{T}\|_{\mathbb{V}}^2 = \langle \mathcal{T}v_1, \mathcal{T}v_1 \rangle = a(v_1, \mathcal{T}v_1) \leq \mathcal{K} \|v_1\|_{\mathbb{V}} \|\mathcal{T}v_1\|_{\mathbb{V}}$$

Entonces  $\|\mathcal{T}v_1\|_{\mathbb{V}} \leq \mathcal{K} \|v_1\|_{\mathbb{V}}$  para todo  $v_1 \in \mathbb{V}$ . Luego, el operador  $\mathcal{T}$  está acotado.

**3. Afirmación:** El operador  $\mathcal{T}$  es inyectivo y el rango de  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{R}(\mathcal{T})$  es cerrado en  $\mathbb{V}$ . En efecto, usando el hecho de que la forma bilineal  $a$  es coercitiva, tenemos

$\mathcal{K}\|v_1\|_{\mathbb{V}}^2 \leq a(v_1, v_1) = \langle \mathcal{T}v_1, v_1 \rangle \leq \|\mathcal{T}v_1\|_{\mathbb{V}}\|v_1\|_{\mathbb{V}}$  , lo que implica

$$\mathcal{K}\|v_1\|_{\mathbb{V}} \leq \|\mathcal{T}v_1\|_{\mathbb{V}}.$$

Luego, si  $v_1 \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$ , entonces  $v_1 = 0$ . Entonces  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \{0\}$ ; es decir,  $\mathcal{T}$  es inyectiva.

**Afirmación:**  $\mathcal{R}(\mathcal{T})$  está cerrado. De hecho, sea  $(v_n) \subset \mathbb{V}$  una sucesión tal que  $\mathcal{T}v_n \rightarrow v$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . En la desigualdad tenemos que si

$$\mathcal{K}\|v_n - v_m\|_{\mathbb{V}} \leq \|\mathcal{T}v_n - \mathcal{T}v_m\|_{\mathbb{V}}, \quad n, m \in \mathbb{N}, n > m$$

Cuando  $n, m \rightarrow \infty$ , se sigue que  $(v_n)$  es una sucesión de Cauchy, y dado que  $\mathbb{V}$  es un espacio de Hilbert (en particular, es completo) existe  $v_2 \in \mathbb{V}$  tal que  $v_n \rightarrow v_2$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Dado que  $\mathcal{T}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  es continua, se deduce que  $v_1 = \mathcal{T}v_1 \in \mathbb{V}$ , para algunos  $v_2 \in \mathbb{V}$ . Por lo tanto, el rango de  $\mathcal{T}$  es cerrado en  $\mathbb{V}$ .

**4. Afirmación:**  $\mathcal{R}(\mathcal{T}) = \mathbb{V}$ . De hecho, supongamos lo contrario, dado que  $\mathcal{R}(\mathcal{T})$  está cerrado en  $\mathbb{V}$ , existe un elemento distinto de cero  $v_3 \in \mathbb{V}$  tal que  $v_3 \in \mathcal{R}(\mathcal{T})^\perp$ . De esto último, se sigue que

$$\mathcal{K}\|v_3\|_{\mathbb{V}}^2 \leq a(v_3, v_3) = \langle \mathcal{T}v_3, v_3 \rangle = 0 \Rightarrow v_3 = 0$$

Lo cual es contradictorio. Entonces  $\mathcal{R}(\mathcal{T}) = \mathbb{V}$ .

**5. Afirmación:** Se verifica la identidad  $a(v_1, v_2) = \mathcal{G}(v_2)$ ,  $\forall v_2 \in \mathbb{V}$ . En efecto, aplicando nuevamente el Teorema 2.2.2.2.(teorema de conceptualización de Riesz) se tiene que existe un único  $v_{3\mathcal{G}} \in \mathbb{V}$  tal que

$$\mathcal{G}(v_2) = \langle v_{3\mathcal{G}}, v_2 \rangle, \quad \forall v_2 \in \mathbb{V}$$

Como el operador  $\mathcal{T}$  es biyectivo, se deduce que existe  $v_1 \in \mathbb{V}$  tal que  $\mathcal{T}v_1 = v_{3g}$ . Entonces

$$a(v_1, v_2) = \langle \mathcal{T}v_1, v_2 \rangle = \langle v_{3g}, v_2 \rangle = g(v_2), \quad v_2 \in \mathbb{V}$$

Esto garantiza la existencia  $v_1 \in \mathbb{V}$  satisfaciendo  $a(v_1, v_2) = g(v_2)$ ,  $\forall v_2 \in \mathbb{V}$

**Unicidad:**

Supongamos que existen elementos  $v_3$  y  $v_4$  pertenecientes a  $\mathbb{V}$  tales que para todo  $v_2 \in \mathbb{V}$  comprobamos que

$$a(v_3, v_2) = g(v_2), \quad a(v_4, v_2) = g(v_2)$$

Restando las desigualdades, se sigue que

$$a(v_3 - v_4, v_2) = 0, \quad \forall v_2 \in \mathbb{V}$$

Poniendo  $v_2 = v_3 - v_4$  y teniendo en cuenta que  $a$  es coercitiva, obtenemos

$$\mathcal{K} \|v_3 - v_4\|_{\mathbb{V}}^2 \leq a(v_3 - v_4, v_3 - v_4) = 0$$

Lo que implica la unicidad ya que  $v_3 = v_4$ .

**4.1.2. Problema Homogéneo de Dirichlet**

Consideremos el problema de Dirichlet homogéneo

$$\begin{cases} -\Delta u = g & \text{en } \omega \\ u = 0 & \text{en } \gamma \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $g \in L^2(\omega)$ ,  $\omega$  es abierto limitado de  $\mathbb{R}^n$  con Frontera  $\gamma$  bien regular.

Multiplicando la primera ecuación (4.1) por una función generalizada en  $\omega$ , se obtiene, por medio de la fórmula de Green:

### Problema variacional

$$\sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\omega} g v dx \quad (4.2)$$

**Proposición 4.1.2.1.** Si se cumple el problema (4.2), existe una única solución débil  $u \in \mathcal{H}_0^1(\omega)$  para (4.1).

### Demostración

**Afirmación:**  $a(u, v) = g(v)$  para todo  $v \in \mathcal{H}_0^1(\omega)$ . De hecho, al definir

$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$ ,  $g(v) = \int_{\omega} g v dx$ . Las formas  $a(u, v)$  y  $g(v)$  con  $g \in L^2(\omega)$  verifican las condiciones del Teorema de Lax-Milgram. Es decir,

i)  $a(u, v)$  es bilineal. En efecto, sean  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  y  $u, v, w \in \mathbb{V}$ , luego

$$\begin{aligned} a(\beta_1 u + \beta_2 v, w) &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial(\beta_1 u + \beta_2 v)}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \beta_1 \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \end{aligned}$$

$$= \beta_1 a(u, v) + \beta_2 a(u, w)$$

Por la linealidad de la otra componente, tenemos

$$\begin{aligned} a(u, \beta_1 v + \beta_2 w) &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial(\beta_1 v + \beta_2 w)}{\partial x_i} \cdot dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left( \beta_1 \frac{\partial v}{\partial x_i} + \beta_2 \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \cdot dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \beta_1 \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \\ &= \beta_1 a(u, v) + \beta_2 a(u, w) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $a(u, v)$  es bilineal.

ii)  $a(u, v)$  es continua en  $\mathcal{H}_0^1(\omega)$ . En efecto,

$$|a(u, v)| \leq \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \cdot \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx,$$

donde  $(\cdot, \cdot)$  es el producto escalar en  $L^2(\omega)$ .

De la desigualdad de Cauchy-Schwartz, obtenemos

$$|a(u, v)| \leq \sum_{i=1}^n \left( \int_{\omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left( |u|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( |v|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Es decir,  $|a(u, v)| \leq \|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\omega)} \|v\|_{\mathcal{H}_0^1(\omega)}$ . Entonces  $a(u, v)$  es continua en  $\mathcal{H}_0^1(\omega)$ .

**iii)**  $a(u, u)$  es coercitiva en  $\mathcal{H}_0^1(\omega)$ . De hecho, sea  $u \in \mathcal{H}_0^1(\omega)$ . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2, \\ \|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\omega)}^2 &= |u|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2 \leq \left[ \mathcal{K}_1 \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2 \right] = \\ &= (\mathcal{K}_1 + 1) \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2 = (\mathcal{K}_1 + 1) a(u, u) \end{aligned}$$

Es decir, existe  $\mathcal{K} = \frac{1}{\mathcal{K}_1 + 1}$  tal que  $a(u, u) \geq \mathcal{K}_1 \|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\omega)}^2$ . Entonces  $a(u, u)$  es coercitiva en  $\mathcal{H}_0^1(\omega)$ .

**iv) Afirmación:**  $\mathcal{G} \in (\mathcal{H}_0^1(\omega))'$ . en efecto, sean  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  y  $u, v \in \mathcal{H}_0^1(\omega)$ , entonces

$$\mathcal{G}(\beta_1 u + \beta_2 v) = \int_{\omega} \mathcal{G}(\beta_1 u + \beta_2 v) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_1 \int_{\omega} g u dx + \beta_2 \int_{\omega} g v dx \\
&= \beta_1 g(u) + \beta_2 g(v)
\end{aligned}$$

Es decir,  $g$  es lineal.

Así mismo, de la desigualdad de Cauchy –Schwartz, es decir,

$$|g(v)| = \left| \int_{\omega} g v dx \right| \leq |g|_{L^2(\omega)} |v|_{L^2(\omega)} \leq \mathcal{K}_1 |g|_{L^2(\omega)} \|v\|_{\mathcal{H}_0^1(\omega)}.$$

Usando la desigualdad de Poincaré, se tiene

$$|g(v)| \leq \mathcal{K}_1 |g|_{L^2(\omega)} \|v\|_{\mathcal{H}_0^1(\omega)}$$

Luego, como  $g \in L^2(\omega)$  se tiene

$$|g(v)| \leq \mathcal{K} \|v\|_{\mathcal{H}_0^1(\omega)}.$$

Es decir,  $g$  es continua. Entonces  $g$  es una forma lineal continua en  $\mathcal{H}_0^1(\omega)$ .

Las formas  $a(u, v)$  y  $g(v)$  satisface las condiciones del teorema 4.1.1.1.

Por lo tanto, existe una única solución débil  $u \in \mathcal{H}_0^1(\omega)$  tal que  $a(u, v) = g(v)$ ,  $\forall v \in \mathcal{H}_0^1(\omega)$ , es decir

$$\sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\omega} g v dx, \quad \forall v \in \mathcal{H}_0^1(\omega)$$

### 4.1.3. Problema de Neumann homogéneo

Consideremos el problema homogéneo de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + \ell u = g \text{ en } \omega, & \ell > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ en } \gamma \end{cases} \quad (4.3)$$

donde  $g \in L^2(\omega)$ ,  $\omega$  es abierto limitado de  $\mathbb{R}^n$  con frontera  $\gamma$  bien regular.

Multiplicando la primera ecuación (4.3) por una función generalizada en  $\omega$  y usando la fórmula de Green, se obtiene:

#### Problema variacional

$$\sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \ell \int_{\omega} uv dx = \int_{\omega} gv dx, \quad \ell > 0 \quad (4.4)$$

**Proposición 4.1.3.1.** Si se cumple el problema (4.4), existe una única solución débil  $u \in \mathcal{H}^1(\omega)$  para (4.3).

#### Demostración

**Afirmación:**  $a(u, v) = g(v)$ , para todo  $v \in \mathcal{H}^1(\omega)$ . De hecho, al definir

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \ell \int_{\omega} uv dx, \quad g(v) = \int_{\omega} gv dx, \quad g \in L^2(\omega)$$

Las formas  $a(u, v)$  y  $g(v)$  verifican las condiciones del teorema de Lax-Milgram. Es decir:

**i)**  $a(u, v)$  es bilineal. En efecto, sean  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  y  $u, v, w \in \mathbb{V}$ , luego

$$\begin{aligned}
a(\beta_1 u + \beta_2 v, w) &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial(\beta_1 u + \beta_2 v)}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \ell \int_{\omega} (\beta_1 u + \beta_2 v) w dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \ell \int_{\omega} (\beta_1 u w + \beta_2 v w) dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx + \ell \int_{\omega} (\beta_1 u w + \beta_2 v w) dx \\
&= \beta_1 \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx + \beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx + \beta_1 \left( \ell \int_{\omega} u w dx \right) \\
&\quad + \beta_2 \left( \ell \int_{\omega} v w dx \right) \\
&= \beta_1 \left( \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx + \ell \int_{\omega} u w dx \right) \\
&\quad + \beta_2 \left( \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx + \ell \int_{\omega} v w dx \right) \\
&= \beta_1 a(u, w) + \beta_2 a(v, w)
\end{aligned}$$

Por la linealidad de la otra componente, tenemos:

$$\begin{aligned}
a(u, \beta_1 v + \beta_2 w) &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial(\beta_1 v + \beta_2 w)}{\partial x_i} dx + \ell \int_{\omega} u(\beta_1 v + \beta_2 w) dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left( \beta_1 \frac{\partial v}{\partial x_i} + \beta_2 \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx + \ell \int_{\omega} (\beta_1 u v + \beta_2 u w) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx + \ell \int_{\omega} (\beta_1 uv + \beta_2 uw) dx \\
&= \beta_1 \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx + \beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx + \beta_1 \left( \ell \int_{\omega} uv dx \right) \\
&\quad + \beta_2 \left( \ell \int_{\omega} uw dx \right) \\
&= \beta_1 \left( \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx + \ell \int_{\omega} uv dx \right) \\
&\quad + \beta_2 \left( \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx + \ell \int_{\omega} uw dx \right) \\
&= \beta_1 a(u, v) + \beta_2 a(u, w)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $a(u, v)$  es bilineal.

ii)  $a(u, v)$  es continua en  $\mathcal{H}^1(\omega)$ . En efecto,

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq \left| \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| + \left| \ell \int_{\omega} uv dx \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \cdot \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx + \ell \int_{\omega} |uv| dx
\end{aligned}$$

Donde  $(\cdot, \cdot)$  es el producto escalar en  $L^2(\omega)$ . De la desigualdad de Cauchy-Schwartz se obtiene

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq \sum_{i=1}^n \left( \int_{\omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \ell \left( \int_{\omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\omega} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \ell |u|_{L^2(\omega)} |v|_{L^2(\omega)} \\
&\leq \ell \left( |u|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( |v|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Es decir,  $|a(u, v)| \leq \ell \|u\|_{\mathcal{H}^1(\omega)} \|v\|_{\mathcal{H}^1(\omega)}$ ,  $\ell > 0$ . Entonces  $a(u, v)$  es continua en  $\mathcal{H}^1(\omega)$ .

iii)  $a(u, u)$  es coercitiva en  $\mathcal{H}^1(\omega)$ . De hecho, sea  $u \in \mathcal{H}^1(\omega)$ . Entonces tenemos

$$a(u, u) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2 + \ell |u|_{L^2(\omega)}^2$$

En particular  $\ell = 1$ , tenemos

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1(\omega)}^2 = |u|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2(\omega)}^2 = a(u, u)$$

Es decir, existe  $\mathcal{K} = 1$  tal que  $a(u, u) = \mathcal{K} \|u\|_{\mathcal{H}^1(\omega)}^2$ . Entonces  $a(u, u)$  es coercitiva en  $\mathcal{H}^1(\omega)$ .

iv) **Afirmación:**  $\mathcal{G} \in (\mathcal{H}^1(\omega))'$ . En efecto, sean  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  y  $u, v \in \mathcal{H}^1(\omega)$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\beta_1 u + \beta_2 v) &= \int_{\omega} \mathcal{G}(\beta_1 u + \beta_2 v) dx \\ &= \beta_1 \int_{\omega} \mathcal{G} u dx + \beta_2 \int_{\omega} \mathcal{G} v dx \\ &= \beta_1 \mathcal{G}(u) + \beta_2 \mathcal{G}(v) \end{aligned}$$

Es decir,  $\mathcal{G}$  es lineal.

De manera similar, de la desigualdad de Cauchy – Schwartz, tenemos

$$|\mathcal{G}(v)| = \left| \int_{\omega} \mathcal{G} v dx \right| \leq |\mathcal{G}|_{L^2(\omega)} |v|_{L^2(\omega)}$$

Usando la desigualdad de Poincaré, se tiene

$$|\mathcal{G}(v)| \leq \mathcal{K}_1 |\mathcal{G}|_{L^2(\omega)} \|v\|_{H^1(\omega)}$$

Luego, como  $\mathcal{G} \in L^2(\omega)$  se tiene

$$|\mathcal{G}(v)| \leq \mathcal{K} \|v\|_{H^1(\omega)}$$

Es decir,  $\mathcal{G}$  es continua. Entonces  $\mathcal{G}$  es una forma lineal continua en  $\mathcal{H}^1(\omega)$ .

Las formas  $a(u, v)$  y  $g(v)$  satisfacen las condiciones del teorema 4.1.1.1.  
Por lo tanto, existe una única solución débil  $u \in \mathcal{H}^1(\omega)$  tal que  $a(u, v) = g(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}^1(\omega)$ , es decir.

$$\sum_{i=1}^n \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \ell \int_{\omega} uv dx = \int_{\omega} gv dx, \forall v \in \mathcal{H}^1(\omega), \ell > 0.$$

## CAPÍTULO V

### ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Uno de los objetivos de esta tesis fue establecer la existencia y unicidad de la solución de cuestiones elíptica variacionales en espacios de Hilbert y aplicarlo a situaciones de problemas uniformes de Dirichlet y de Neumann. El resultado de estos problemas variacionales se da en espacios de Sobolev mediante el teorema de Lax-Milgram en el que las formas bilineales son continuas y coercitivas sobre un espacio de Hilbert, las cuales están representadas por elementos del dual de dicho espacio. Para la demostración, nos hemos basado en un gran porcentaje en el resultado del teorema de Riesz. Este estudio coincide con lo alcanzado por otros matemáticos.

Para el problema de Dirichlet uniforme con una condición de frontera regular, es un problema bien definido, es decir, existe una solución y es única. En otras palabras, hemos obtenido un resultado que pertenece al espacio  $\mathcal{H}_0^1(\omega)$ . Esto indica que es un resultado débil, demostrando que  $a(u, v) = g(v)$  para todo  $v \in \mathcal{H}_0^1(\omega)$  tal que  $a(u, v)$  satisface las condiciones bilinealidad, continuidad y coercitividad del teorema 4.1.1.1. Así, el funcional  $g(v)$  es una forma lineal continua en  $\mathcal{H}_0^1(\omega)$ .

Asimismo, el problema de Neumann uniforme con una condición de frontera regular, es un problema bien definido, es decir, existe una solución y esta es única. En otras palabras, hemos obtenido un resultado que pertenece al espacio  $\mathcal{H}^1(\omega)$ , esto indica que es un resultado débil, demostrando que  $a(u, v) = g(v)$  para todo  $v \in \mathcal{H}^1(\omega)$  tal que  $a(u, v)$  satisface las condiciones del teorema 4.1.1.1., es decir, es bilineal, continua y coercitiva. Así, el funcional  $g(v)$  es una forma lineal continua en  $\mathcal{H}^1(\omega)$ .

## **CAPÍTULO VI**

### **CONCLUSIONES**

**6.1.** La existencia y unicidad de la solución del problema variacional elíptico se presenta, mediante un resultado de los espacios de Hilbert a través del teorema 4.1.1.1.

**6.2.** La existencia y unicidad de solución de significado débil para el problema elíptico uniforme de Dirichlet se establece por la proposición 4.1.2.1.

**6.3.** La existencia y unicidad de solución de significado débil para el problema elíptico uniforme de Neumann se establece por la proposición 4.1.3.1.

## **CAPÍTULO VII**

### **RECOMENDACIONES**

**7.1.** Sería de gran interés estudiar la extensión del teorema de Stampacchia, que da lugar a la teoría de las desigualdades variacionales.

**7.2.** Sería muy interesante estudiar la existencia de una dificultad elíptica de Kirchhoff donde el tema no lineal es localmente coercitivo y no uniforme.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alegría, P. (2018). *Apuntes de teoría de la medida*. Apunte académico. Brasil.

Bartle, R. (2007). *The elements of integration and Lebesgue measure*. Edit. Universidad sao Paulo. Brasil.

Brézis, H. (1984). *Análisis funcional*. Edit. Alianza Springer. Madrid.

Brézis, H. (2010). *Sobolev spaces and Partial Differential Equations*. Edit. Springer. Estados Unidos.

Coelho, F. y Lourenço, M (1997). *Un curso de Álgebra Lineal*. Edit. Sao Paulo. Brasil.

Evans, L. (1997). *Partial Differential Equations*. Edit. American Mathematical Society. Estados Unidos.

Hasan, A. (2018). *Functional Analysis and applications*. Edit. Springer. India.

Jerónimo, G., Sabia, J. y Tesauri, S. (2018). *Álgebra lineal*. Departamento de Matemática de la UBA.

Kreyszig. (1989). *Introductory functional analysis with applications*. Edit. Wiley. Toronto.

Kolmogorov, A. y Fomin S. (1972). *Elementos de la teoría de la función y del análisis funcional*. Edit. Mir. Rusia.

Lima, E. (1993). *Espacios métricos*. Edit. Proyecto Euclides. Brasil.

- Lázaro, M. (2017). *Álgebra lineal*. Lima, Perú: Distribuidora, Imprenta, Editorial, Librería Moshera.
- Morris, K. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial.
- Ortiz, A. (2004). *Tópicos sobre ecuaciones en derivadas parciales*. Edit. UNT. Perú.
- Panzone, R. (2009). *Lecciones preliminares del análisis funcional*. Argentina.
- Ruas, V. (2007). *Introdução aos problemas variacionais*. Edit. Universidad de Sao Paulo. Brasil.
- Soto, E. (2011). *Diccionario ilustrado de conceptos matemáticos*. México.
- Schwartz, L. (1950). *Theorie des distributions*. Hermann, Paris.
- Usunáriz, U. y Usunáriz, P. (2012). *Diccionario biográfico de matemáticos*.
- Waldemar, E. (2015). *Ecuaciones en derivadas parciales: Una introducción a la teoría clásica*.
- Zill, D. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería: Ecuaciones diferenciales*. Edit Mc Graw Hill. Argentina.