

# **UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN**

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática

## **GENERALIZACIÓN DE LA INTEGRAL CLÁSICA A INTEGRAL DE ORDEN ARBITRARIO**

**TESIS**

Presentada por:

**Bach. BLANCA MAYUMI GOMEZ CHALLO**

Para optar el Título Profesional de:

**LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

TACNA-PERÚ

2022

## ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N° 351

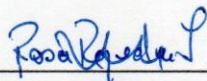
En la ciudad de Tacna, a través de la plataforma Google Meet con Link: <https://meet.google.com/jyv-wwwr-dtv>, usando los correos institucionales de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann de Tacna, debido a la Pandemia del Covid 19; siendo las **17:00** horas del día Martes **27** de octubre del 2020, estando presente el Jurado Calificador nominado por **RESOLUCIÓN DE FACULTAD N° 9755-2020- FACI/UNJBG**, conformado por los siguientes docentes:

Dra. ROSA MARÍA REQUELME IBAÑEZ	PRESIDENTE
Dr. HEBER MELBIN CABRERA CRUZ	SECRETARIO
Dr. LUIS ASUNCIÓN LÓPEZ PUYCAN	MIEMBRO

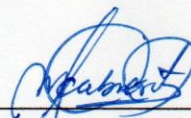
Acto seguido, se dió lectura a la Resolución correspondiente, y del mismo modo se dió lectura al Artículo 22 del Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias. A continuación, la Presidenta del Jurado instó a la Bachiller: **BLANCA MAYUMI GOMEZ CHALLO**, a exponer la Tesis titulada: **GENERALIZACIÓN DE LA INTEGRAL CLÁSICA A INTEGRAL DE ORDEN ARBITRARIO**.

Siendo las 17:40 horas, la tesista concluye su exposición, luego se procedió a la formulación de preguntas por parte de los miembros del Jurado Calificador. Terminado este proceso, se invitó a que los miembros del Jurado emitan su calificación de acuerdo a reglamento. El promedio de la calificación dio el siguiente resultado: **Aprobado por unanimidad**, con **el calificativo de bueno (16)**, de acuerdo al Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias.

Siendo las 18:20 horas, se dio por concluido el acto de sustentación de la Tesis, firmando los señores miembros del Jurado Calificador, en señal de conformidad.



\_\_\_\_\_  
Dra. Rosa María REQUELME IBAÑEZ  
PRESIDENTE



\_\_\_\_\_  
Dr. Heber Melbin CABRERA CRUZ  
SECRETARIO



\_\_\_\_\_  
Dr. Luis Asunción LÓPEZ PUYCAN  
MIEMBRO

## **DEDICATORIA**

*Esta tesis está dedicada a mi padre, quien me enseñó que el mejor conocimiento que se puede tener es el que se aprende a sí mismo. También está dedicado a mi madre, quien me enseñó que la tarea más difícil se puede lograr si se hace con paciencia. Ellos se han preocupado de mí desde el momento en que llegué a este mundo y me han formado para saber cómo luchar y salir victorioso ante las adversidades de la vida. Cinco años después, sus enseñanzas perduran, y aquí estoy, con un nuevo logro exitosamente conseguido, mi informe final de tesis.*

## **AGRADECIMIENTO**

*Gracias a Dios por darme la sabiduría y la capacidad para poder comprender cada uno de los conocimientos aprendidos a lo largo de mi carrera.*

*A mis padres por todo el apoyo brindado en cada momento de mi vida, por cada una de sus palabras de aliento para poder cumplir este sueño de ser profesional.*

*A mis hermanos Jack, Ángel y Edilberto por ayudarme cuando más los necesite, por escucharme, por sus muestras de cariño y sobre todo por sus consejos a no abandonar mis metas.*

*Al docente Jhony Chávez Delgado por todas las enseñanzas aprendidas a lo largo de mi carrera, por cada una de las agradables clases, por su apoyo incondicional y la confianza para realizar y culminar la presente tesis.*

## CONTENIDO

<b>DEDICATORIA.....</b>	<b>iii</b>
<b>AGRADECIMIENTO.....</b>	<b>iv</b>
<b>RESUMEN.....</b>	<b>vi</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>viii</b>
<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO I: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>2</b>
1.1. Descripción de la realidad problemática.....	2
1.2. Definición del problema.....	3
1.3. Objetivos de la investigación.....	3
1.4. Hipótesis de la investigación.....	4
1.5. Justificación y limitaciones de la investigación.....	4
<b>CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO.....</b>	<b>5</b>
2.1. Antecedentes del problema.....	5
2.2. Bases teóricas.....	6
2.3. Marco conceptual.....	25
<b>CAPÍTULO III: MÉTODO.....</b>	<b>33</b>
3.1. Variables.....	33
3.2. Tipo de investigación.....	33
3.3. Diseño de investigación.....	33
3.4. Población de estudio y su procedimiento matemático de elección.....	34
3.5. Procedimiento del método y sistema en Matemáticas.....	34
3.6. Análisis matemático de los datos.....	35
<b>CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.....</b>	<b>36</b>
4.1. Presentación de resultados por variables.....	36
4.2. Discusión de resultados.....	51
<b>CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....</b>	<b>53</b>
5.1. Conclusiones.....	53
5.2. Recomendaciones.....	53
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>54</b>

<b>ANEXOS .....</b>	<b>56</b>
Anexo 1: Operadores de Integración .....	57
Anexo 2: Interpretación Geométrica .....	58
Anexo 3: Operador de integración no entero .....	60
Anexo 4: Matriz de Consistencia .....	61

## RESUMEN

Este informe de tesis tiene como objetivo demostrar la generalización del operador de integración ordinario de Cavalieri-Fermat al operador de integración de Riemann-Liouville de orden no entero en un intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  que actualmente es de interés para la investigación y sus aplicaciones en economía, ciencias de la vida, ingeniería y otras ciencias aplicadas. En este caso, presentamos la teoría básica de las diferentes aproximaciones del operador de integración de orden entero, utilizando la función Euleriana Gamma y el problema de Cauchy; que se utiliza en la generalización del operador de integración a partir de la integral iterada n-ésima entera de una función real que tiene n-ésima integral iterada. De manera similar, usamos el método deductivo para la demostración del problema de Cauchy. Asimismo, esta teoría se ha aplicado al análisis del operador de integración no entero de funciones reales: constante, potencia, logaritmo y exponencial. Finalmente, utilizando el método inductivo se ejemplificó usando las propiedades de la integral no entera de Riemann-Liouville.

**Palabras claves:** Operador de integración Riemann-Liouville, operador de integración Riemann-Liouville de la función constante, operador de integración Riemann-Liouville de la función potencia, operador de integración Riemann-Liouville de la función logarítmica, operador de integración Riemann-Liouville de la función exponencial.

## ABSTRACT

This thesis report aims to demonstrate the generalization of the ordinary Cavalieri-Fermat integration operator to the Riemann-Liouville integration operator of non-integer order on an interval  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  that is currently of interest for research and its applications in economics, life sciences, engineering and other applied sciences. In this case, we present the basic theory of the different approximations of the integer order integration operator, using the Eulerian function Gamma and the Cauchy formula; which is used in the generalization of the integration operator from the  $n$ th integer iterated integral of a real function having  $n$ th iterated integral. Similarly, we use the deductive method for the proof of Cauchy's formula. Likewise, this theory has been applied to the analysis of the non-integer integration operator of real functions: constant, power, logarithm and exponential. Finally, using the inductive method, it was exemplified using the properties of the non-integer Riemann-Liouville integral.

**Keywords:** Riemann-Liouville integration operator, Riemann-Liouville integration operator of the constant function, Riemann-Liouville integration operator of the power function, Riemann-Liouville integration operator of the logarithmic function, Riemann-Liouville integration operator of the exponential function.

# INTRODUCCIÓN

La integral no entera se ocupa de las investigaciones de los denominados operadores de integración de orden no entero sobre dominios de funciones reales y de la investigación de sus aplicaciones.

Desde el cálculo de la integral de Cavalieri y Fermat hasta la integral no entera tiene en su haber una larga historia y ha sido objeto de interés por grandes matemáticos, por ejemplo, Euler ,Laplace ,Fourier ,Liouville ,Riemann ,Laurent, Hardy o Littlewood .Sus orígenes se remontan al año 1695,donde se tiene la primera referencia escrita debida a la carta que L'Hopital dirige a Leibniz.

El propósito de este informe de tesis es determinar la generalización del operador de integración entero de Cavalieri y Fermat al operador de integración no entero de Riemann-Liouville. Se empleó el método inductivo-deductivo para extender a una clase más amplia de funciones las proposiciones de los operadores de integración no entera haciendo uso de las funciones Eulerianas y el análisis de Cauchy. Como resultado se determina que el operador de integración de Riemann-Liouville es una extensión del operador de integración Cavalieri y Fermat; se extienden también los operadores de integración Riemann-Liouville de la funciones reales :constante ,potencia ,logaritmo ,exponencial. Así mismo ,la extensión del operador de orden no entero de RiemannLiouville se justifica porque permite aplicar su teoría a operadores de derivación arbitraria y a las ecuaciones diferenciales no entera de Riemann-Liouville, teoría de la probabilidad, estadística, teoría electromagnética y teoría de fluidos.

# CAPÍTULO I

## EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

### 1.1. Descripción de la realidad problemática

El cálculo integral no entero se ocupa del estudio de los denominados operadores de integración Riemann Liouville sobre dominios de funciones reales o complejas.

El cálculo integral no entero, conocido como cálculo integral fraccionario, es una rama del análisis matemático, destinado a extender el cálculo integral entero a una clase más amplia de funciones, como propusieron de forma independiente Cavalieri -Fermat.

La noción de extender los operadores de integración de Cavalieri a los operadores de integración de Riemann-Liouville es prácticamente tan antigua que apareció con el nacimiento de la propia integral de Cavalieri-Fermat. La primera notación de la integral fue realizada por el mismo Gottfried Leibniz, posteriormente surgiría la notación de Harold Thayer Davis de la integral iterada  ${}_a\mathcal{D}_x^{-n}f(x)$  , y surgirían las siguientes cuestiones: ¿Cuál sería el análisis de sustituir  $-n$  por un número racional?, a lo que muchos ilustres matemáticos responderían con una lucidez que esta aparente discusión permitiría mañana sacar interesantes y útiles deducciones. Es por este hecho positivo que a este conocimiento se le denominó de manera inédita el nombre de integral no entera, siglos después se extendió a la siguiente pregunta: ¿Qué sentido tendría sustituir  $n$  por un número irracional ,fraccional o complejo?, lo que lleva a una respuesta asertiva, para la cual el operador de integración no entero de Riemann-Liouville es el más apropiado. Pero, en cualquier entorno, es natural plantear los siguientes problemas.

## **1.2. Definición del problema**

### **1.2.1. Problema general**

¿Bajo qué condiciones determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero?

### **1.2.2. Problemas específicos**

- a) ¿ Bajo qué condiciones determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero  $\nu$  de la función constante?
- b) ¿ Bajo qué condiciones determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero  $\nu$  de la función potencia?
- c) ¿ Bajo qué condiciones determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero  $\nu$  de la función logaritmo?
- d) ¿ Bajo qué condiciones determinar la extensión del operador de la integración entero al operador de integración de orden no entero  $\nu$  de la función exponencial?

## **1.3. Objetivos de la investigación**

### **1.3.1. Objetivo general**

Determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero.

### **1.3.2. Objetivos específicos**

- a) Determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero  $\nu$  de la función constante.
- b) Determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero  $\nu$  de la función potencia.
- c) Determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero  $\nu$  de la función logaritmo.
- d) Determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero  $\nu$  de la función exponencial.

## **1.4. Hipótesis de la investigación**

### **1.4.1. Hipótesis general**

Se puede determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero.

### **1.4.2. Hipótesis específicas**

- a) Se puede determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero  $\nu$  de la función potencia.
- b) Se puede determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero  $\nu$  de la función potencia.
- c) Se puede determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero  $\nu$  de la función logaritmo.
- d) Se puede determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero  $\nu$  de la función exponencial.

## **1.5. Justificación y limitaciones de la investigación**

El presente informe de tesis es un problema sobre la extensión del operador de integración entera al operador de integración de orden no entero de Riemann-Liouville la que se justifica porque permitirá aplicar su teoría a operadores de derivación arbitraria y a las ecuaciones diferenciales no entera de Riemann-Liouville, teoría de la probabilidad, estadística, teoría electromagnética y teoría de fluidos. Así como también a establecer la organización del pensamiento, propiedades y reglas de la integral no entera para que sea una investigación auto contenido e inteligible que pueda tener utilidad como referencia futura a los investigadores y estudiantes de las ciencias formales y fácticas como economía, las ciencias de la vida, la ingeniería y otras ciencias aplicadas.

## **CAPÍTULO II**

### **MARCO TEÓRICO**

#### **2.1. Antecedentes del problema**

Es en 1738 que aparece la primera ampliación de la derivada entera de la mano de Euler, quien observa que el resultado del análisis de la derivada de orden entero de la función potencia tiene un significado para el orden no entero [7]. En 1820, Laplace propuso la noción de diferenciación de orden no entero para funciones que pueden manifestarse como una integral [13]. Posteriormente, en 1819, Lacroix, siguiendo la idea de Euler, dio la fórmula exacta para un proceso sistemático y continuo de la derivada de medio orden para la función potencia [12]. Finalmente, en 1822, Fourier sugirió utilizar la derivada no entera como una definición a partir de un punto de integrales iteradas [8].

Se considera que el cálculo no entero comienza con las investigaciones de Liouville publicadas entre 1832 y 1835, lo que lo convierte en el padre del cálculo no entero. Una de las definiciones que ofrece Liouville se basa en la fórmula para derivar una función exponencial y adapta su definición a la derivada no entera [14].

En 1876, se publicó el desarrollo de Bernhard Riemann de una teoría de operaciones no enteras que utilizó una extensión de una serie de Taylor para deducir su problema para operadores integrativos no enteros [19].

En 1974 apareció el primer texto de la integral no entera de Oldham-Spanier dedicado íntegramente al cálculo no entero, ambos investigadores conocedores en electroquímica [17].

En 1993 apareció la monografía Samko-Kilbas-Marichev, que es la más amplia y completa obra escrita sobre el cálculo no entero y sus aplicaciones a la teoría de funciones y a las ecuaciones diferenciales e integrales [20].

Otro estudio dedicado a la integral no entera es el texto de Miller-Ross [15] que introduce el cálculo no entero y un estudio formal pero interesante de las soluciones explícitas de ciertas ecuaciones diferenciales de orden no entero. Un estudio de operadores integrales no enteros y sus aplicaciones en la teoría de funciones especiales y transformadas integrales por Kiryakova (1994) [11]. Nishimoto (1984) [16], Miller-Ross (1987) [15] estudia las propiedades fundamentales de ciertos operadores de diferenciación e integración no enteros en un dominio complejo.

Finalmente, la investigación que se enmarca dentro del campo del cálculo no entero y que pretende ser una introducción al estudio de las ecuaciones diferenciales enteras de orden no entero asociadas al operador de Riemann-Liouville es el texto de Blanca Bonilla, Anatoly Kilbas y Juan Trujillo [4].

## 2.2. Bases teóricas

### 2.2.1. Función Gamma Euleriana

#### Definición 2.1. (Función Gamma Euleriana)

Sea  $x_1$  un número positivo. La función real Gamma Euleriana

$\gamma: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\gamma(x_1) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{x_1-1} ds$  se denomina función Gamma Euleriana.

a) **Propiedad.**  $\gamma(1) = 1$

#### Prueba

Por definición de la función Gamma Euleriana se tiene:

$$\begin{aligned} \gamma(x_1) &= \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{x_1-1} ds \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-s} ds \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [(-e^{-b}) + 1] \\ &= -e^{-\infty} + 1 \\ \gamma(1) &= 1 \end{aligned}$$

b) **Propiedad.**  $\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}$

**Prueba**

Por definición de la función Gamma Euleriana se tiene:

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{1}{2}-1} ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{-\frac{1}{2}} ds \end{aligned}$$

Cambio de variable	Límite de integración
$s = x_1^2$ $ds = 2x_1 dx_1$	$s = 0 \rightarrow x_1 = 0$ $s = +\infty \rightarrow x_1 = +\infty$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x_1^2} (x_1^{-1})(2x_1) dx_1$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1$$

$$\left[\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1\right) \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-x_2^2} dx_2\right)$$

$$= \left(4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2\right)$$

Cambio de variable	Límite de integración
$r^2$ $= x_1^2 + x_2^2 \begin{cases} x_1 = r \cos(\theta) \\ x_2 = r \sin(\theta) \end{cases}$	$\begin{cases} r \cos(\theta) \Rightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ r \sin(\theta) \Rightarrow 0 \leq r < +\infty \end{cases}$

$$= \left(4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-(r^2)} r \cdot dr d\theta\right)$$

$$= \left(4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta\right)$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}$$

c) **Propiedad.**  $\Gamma(x_1 + 1) = x_1 \Gamma(x_1), x_1 > 0$

**Prueba**

Por definición de la función Gamma Euleriana se tiene:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1 + 1) &= \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{x_1+1-1} ds \\ &= \lim_{d \rightarrow +\infty} \left( \int_0^d e^{-s} s^{x_1} ds \right) \end{aligned}$$

Integración por partes	
$u = s^{x_1}$	$dv = e^{-s} ds$
$du$	$v = -e^{-s}$
$= x_1 s^{x_1-1} ds$	

$$\begin{aligned} &= \lim_{d \rightarrow +\infty} \left( -s e^{-s} \Big|_0^d + \int_0^d e^{-s} x_1 s^{x_1-1} ds \right) \\ &= \lim_{d \rightarrow +\infty} \left( \frac{d^{x_1}}{e^d} \right) + x_1 \lim_{d \rightarrow +\infty} \left( \int_0^d e^{-s} s^{x_1-1} ds \right) \\ &= x_1 \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{x_1-1} ds \end{aligned}$$

$$\Gamma(x_1 + 1) = x_1 \Gamma(x_1)$$

d) **Propiedad.** Si  $x_1$  es un entero no negativo, entonces  $\Gamma(x_1 + 1) = x_1!$

**Prueba**

Para  $x_1 = 0 \Rightarrow \Gamma(0 + 1) = \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{1-1} ds = \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_0^d e^{-s} ds = 1 = 0!$

Hipótesis inductiva: Si  $k = m \Rightarrow \Gamma(k + 1) = k!$

Afirmación:  $x_1 = k + 1 \Rightarrow \Gamma(k + 2) = (k + 1)!$

En efecto, sabemos que:  $\Gamma(k + 1) = k \Gamma(k), k > 0$

$$\Gamma((k + 1) + 1) = (k + 1)\Gamma(k + 1) = (k + 1)k! = (k + 1)!$$

Por tanto  $\Gamma(x_1 + 1) = x_1! \quad \forall x_1 \in \mathbb{Z}_0^+$

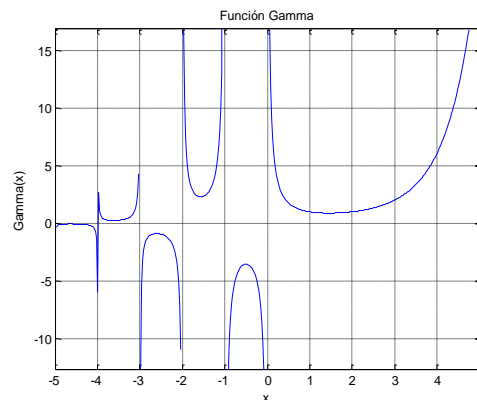
e) **Propiedad.**  $\gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \times 2 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2m-1)\sqrt{\pi}}{2^m}$

**Prueba**

$$\begin{aligned} \gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) &= \gamma\left(\left(m - \frac{1}{2}\right) + 1\right) \\ &= \left(\frac{2m-1}{2}\right) \gamma\left(\left(m - \frac{3}{2}\right) + 1\right) \\ &\vdots \\ &= \left(\frac{2m-1}{2}\right) \left(\frac{2m-3}{2}\right) \left(\frac{2m-5}{2}\right) \times \dots \\ &\quad \times \left(\frac{2m-(2m-1)}{2}\right) \gamma\left(\frac{2m-(2m-1)}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2m-1}{2}\right) \left(\frac{2m-3}{2}\right) \left(\frac{2m-5}{2}\right) \times \dots \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\pi} \\ \gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2m-1)\sqrt{\pi}}{2^m} \end{aligned}$$

### 2.2.2. Gráfica de la Función Gamma Euleriana con el Software Laboratorio de Matrices

```
>> syms x1;
>> ezplot (gamma (x1),[-5,5]),
>> grid on
>> xlabel ('x1')
>> ylabel ('Gamma(x1)')
>> title ('Función Gamma')
```



**Figura 1:** Función Gamma de Euleriana

**Fuente:** Elaboración propia con el Software Laboratorio de Matrices

**2.2.3. Tabla de Valores de la función Gamma Euleriana con el Software Laboratorio de Matrices**

<b>Tabla 2.1:</b> Valores de $\gamma(x_1)$	
$\gamma(x_1) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{x_1-1} ds, x_1 > 0$	
$\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	1.7725 ...
$\gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	0.8862 ...
$\gamma\left(\frac{3}{4}\right)$	1.2254 ...
$\gamma\left(\frac{5}{6}\right)$	1.1288 ...
$\gamma\left(\frac{7}{6}\right)$	0.9277 ...
$\gamma\left(\frac{1}{3}\right)$	2.6789 ...
$\gamma\left(\frac{4}{3}\right)$	0.8930 ...
$\gamma\left(\frac{11}{6}\right)$	0.9407 ...
⋮	⋮
<b>Fuente:</b> Elaboración propia	

Por definición de la función Gamma Euleriana se tiene  $\gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{x-1} ds$

Luego, se obtiene los siguientes valores de la tabla **2.2.1**, usando el software Laboratorio de Matrices:

a) $\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{-\frac{1}{2}} ds$
>> syms s ;
>> y=exp(-s)/sqrt(1/s);
>> int (y,0,inf)
ans = pi^(1/2)
>> pi^(1/2)
ans =1.7725...

$$b) \quad \gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{1}{2}} ds$$

```
>> syms s;
>> y=exp(-s)*(s^(1/2));
>> int (y,0,inf)
ans = pi^(1/2)/2
>> pi^(1/2)/2
ans = 0.8862...
```

$$c) \quad \gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{-\frac{1}{4}} ds$$

```
>> syms s;
>>y=exp(-s)/(s^(-1/4));
>> int (y,0,inf)
ans = gamma(3/4)
>> gamma(3/4)
ans = 1.2254...
```

$$d) \quad \gamma\left(\frac{5}{6}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{-\frac{1}{6}} ds$$

```
>> syms s;
>>y=exp(-s)/(s^(-1/6));
>> int (y,0,inf)
ans = gamma(5/6)
>> gamma(5/6)
ans = 1.1288...
```

$$e) \quad \gamma\left(\frac{7}{6}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{1}{6}} ds$$

```
>> syms s;
>> y=exp(-s)*(s^(1/6));
>> int(y,0,inf)
ans=pi/(3*gamma(5/6))
>> pi/(3*gamma(5/6))
ans = 0.9277...
```

$$f) \quad \gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{-\frac{2}{3}} ds$$

```
>> syms s;
>> y=exp(-s)/(s^(-2/3));
>> int (y,0,inf)
ans =(2*pi*3^(1/2))/(3*gamma(2/3))
>> (2*pi*3^(1/2))/(3*gamma(2/3))
ans =2.6789...
```

$$g) \quad \gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{-\frac{2}{3}} ds$$

```
>> syms s;
>> y=exp(-s)/(s^(-2/3));
>>int(y,0,inf) ans=(2*pi*3^(1/2))/(3*gamma(2/3))
>> (2*pi*3^(1/2))/(3*gamma(2/3))
ans =2.6789...
```

$$h) \quad \gamma\left(\frac{4}{3}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{1}{3}} ds$$

```
>> syms s;
>> y=exp(-s)*(s^(1/3));
>> int (y,0,inf)
ans=(2*pi*3^(1/2))/(9*gamma(2/3))
>> (2*pi*3^(1/2))/(9*gamma(2/3))
ans = 0.8930...
```

$$i) \quad \gamma\left(\frac{11}{6}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{5}{6}} ds$$

```
>> syms s;
>> y=exp(-s)*(s^(5/6));
>> int (y,0,inf)
ans =(5*gamma(5/6))/6
>> (5*gamma(5/6))/6
ans = 0.9407...
```

## 2.2.4. Otras propiedades de la función Gamma Euleriana

### a) Propiedad de Gauss.

$$\gamma(z) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m! m^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+m)}$$

#### Prueba

Por la propiedad de factorial se tiene:

$$z! = z(z-1)!$$

$$(z-1)! = \frac{z!}{z}$$

$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times z \times (z+1)(z+2)\cdots(z+m)}{z \times (z+1)(z+2)\cdots(z+m)}$$

$$= \frac{m!(m+1)(m+2)\cdots(m+z)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+m)}$$

$$= \frac{m! \cdot m^z \cdot \frac{(m+1)}{m} \frac{(m+2)}{m} \cdots \frac{(m+z)}{m}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+m)}$$

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m! \cdot m^z \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{m}\right)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+m)}$$

$$\gamma(z) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m! m^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+m)}$$

### b) Propiedad de Euler.

$$\gamma(z) = \frac{1}{z} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^z \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} \right\}$$

#### Prueba

Por 2.2.4. a) se cumple:

$$\gamma(z) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m! m^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+m)}$$

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots m \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{m+1}{m}\right)^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+m)}$$

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{z} \cdot \frac{\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{m+1}{m}\right)^z}{\frac{1}{1} \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{m}}$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{1}\right)^z \left(1 + \frac{1}{2}\right)^z \left(1 + \frac{1}{3}\right)^z \cdots \left(1 + \frac{1}{m}\right)^z}{\left(1 + \frac{z}{1}\right) \left(1 + \frac{z}{2}\right) \left(1 + \frac{z}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{m}\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{z} \cdot \lim_{m \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^m \left\{ \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \right\} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^z \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} \right\}
\end{aligned}$$

c) **Propiedad de Weierstrass.**

$$\frac{1}{\gamma(z)} = z \cdot e^{\gamma z} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{z}{m}} \left(1 + \frac{z}{m}\right) \right\}$$

donde:  $\gamma = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \lg(m)\right)$

**Prueba**

Por **2.2.4. a)** se cumple:

$$\gamma(z) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m! m^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+m)}$$

Aplicando la inversa de **2.2.4. a)** se tiene:

$$\frac{1}{\gamma(z)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+m)}{m! m^z}$$

$m^z = (e^{\log(m)})^z$

$$= z \cdot \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{z+1}{1}\right) \left(\frac{z+2}{2}\right) \dots \left(\frac{z+m}{m}\right)}{m^z}$$

$$= z \cdot \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{e^z e^{\frac{z}{2}} \dots e^{\frac{z}{m}} \left(1 + \frac{z}{1}\right) e^{-z} \left(1 + \frac{z}{2}\right) e^{-\frac{z}{2}} \dots \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}}{(e^{\log(m)})^z}$$

$$= z \cdot \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \log(m)\right)z} \left(1 + \frac{z}{1}\right) e^{-z} \cdot \left(1 + \frac{z}{2}\right) e^{-z} \dots \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}$$

$$= z \cdot e^{\left[\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \ln(m)\right)\right]z} \cdot \lim_{m \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^m \left\{ e^{-\frac{z}{k}} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \right\}$$

$$= z \cdot e^{\gamma z} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{z}{m}} \left(1 + \frac{z}{m}\right) \right\}$$

## 2.2.5. Función Beta Euleriana

### Definición 2.2. (Función Beta Euleriana)

La aplicación real  $\beta: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Beta Euleriana se define

$$\beta(x_1, x_2) = \int_0^1 s^{x_1-1} (1-s)^{x_2-1} ds, \quad x_1 > 0, x_2 > 0$$

a) **Propiedad.** Si  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , entonces  $\beta(x_1, x_2) = \frac{\gamma(x_1)\gamma(x_2)}{\gamma(x_1+x_2)}$

**Prueba**

$$\gamma(x_1) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{x_1-1} ds$$

Cambio de variable	Límites de integración
$s = x_1^2$	$s = 0 \rightarrow x_1 = 0$
$ds = 2x_1 dx_1$	$s = +\infty \rightarrow x_1 = +\infty$

$$\gamma(x_1) = \int_0^{+\infty} e^{-x_1^2} x_1^{2x_1-2} 2x_1 dx_1 = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x_1^2} x_1^{2x_1-1} dx_1$$

$$\gamma(x_2) = \int_0^{+\infty} e^{-x_2^2} x_2^{2x_2-2} 2x_2 dx_2 = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x_2^2} x_2^{2x_2-1} dx_2$$

$$\gamma(x_1)\gamma(x_2) = \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-x_1^2} x_1^{2x_1-1} dx_1\right) \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-x_2^2} x_2^{2x_2-1} dx_2\right)$$

$$\gamma(x_1)\gamma(x_2) = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)} x_1^{2x_1-1} x_2^{2x_2-1} dx_1 dx_2$$

Cambio de variable	Límite de integración
$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \begin{cases} x_1 = r \cos\theta \\ x_2 = r \sin\theta \end{cases}$	$\begin{cases} r \cos\theta \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ r \sin\theta \Rightarrow 0 \leq r < +\infty \end{cases}$

El Jacobiano de la matriz de transformación es:

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dr} & \frac{dx_1}{d\theta} \\ \frac{dx_2}{dr} & \frac{dx_2}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r \sin\theta \\ \sin\theta & r \cos\theta \end{vmatrix} = |r \cos^2\theta + r \sin^2\theta| = r$$

$$\begin{aligned} \gamma(x_1)\gamma(x_2) &= \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2x_1-1} r^{2x_2-1} r dr\right) \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x_1-1}\theta \sin^{2x_2-1}\theta d\theta\right) \\ &= \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{(2x_1+2x_2-1)} dr\right) \beta(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Cambio de variable	Límites de integración
$s = r^2 \rightarrow \sqrt{s} = r$	$r = 0 \rightarrow s = 0$
$\frac{1}{2\sqrt{s}} ds = dr$	$r = +\infty \rightarrow s = +\infty$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{+\infty} e^{-s} \left(\frac{1}{s^2}\right)^{2x_1+2x_2-1} \left(\frac{1}{2\sqrt{s}}\right) ds \beta(x_1, x_2) \\
&= \beta(x_1, x_2) \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{x_1+x_2-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds \\
&= \beta(x_1, x_2) \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{(x_1+x_2)-1} ds \\
&= \beta(x_1, x_2) \gamma(x_1 + x_2) \\
\beta(x_1, x_2) &= \frac{\gamma(x_1)\gamma(x_2)}{\gamma(x_1 + x_2)}
\end{aligned}$$

b) **Propiedad.** Si  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , entonces  $\beta(x_1, x_2) = \beta(x_2, x_1)$

**Prueba**

$$\beta(x_1, x_2) = \int_0^1 s^{x_1-1} (1-s)^{x_2-1} ds$$

Cambio de variable	Límites de integración
$s = 1 - s$	$s = 0 \rightarrow s = 1$
$-ds = ds$	$s = 1 \rightarrow s = 0$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^1 (1-s)^{x_1-1} s^{x_2-1} ds \\
&= \int_0^1 s^{x_2-1} (1-s)^{x_1-1} ds
\end{aligned}$$

$$\beta(x_1, x_2) = \beta(x_2, x_1)$$

c) **Propiedad.** Si  $\int_0^{+\infty} \frac{x_1^{m-1}}{1+x_1} dx_1 = \frac{\pi}{\text{sen}(m\pi)} \Rightarrow \gamma(m) \gamma(m-1) = \frac{\pi}{\text{sen}(m\pi)}$

**Prueba**

Cambio de variable	Límites de integración
$x_1 = \frac{x_2}{1-x_2}$	$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 0$
$dx_2 = \frac{1}{(1-x_2)^2} dx_2$	$x_1 = \infty \rightarrow x_2 = 1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x_1^{m-1}}{1+x_1} dx = \int_0^1 \frac{\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)^{m-1} + \left(\frac{1}{(1-x_2)^2}\right)}{1 + \left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)} dx_2$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{\left(\frac{x_2^{m-1}}{(1-x_2)^{m-1}}\right) \left(\frac{1}{(1-x_2)^2}\right)}{\frac{x_2}{1-x_2}} dx_2 \\
&= \int_0^1 \frac{x_2^{m-1}}{(1-x_2)^m} dx_2 \\
&= \int_0^1 x_2^{m-1} (1-x_2)^{(1-m)-1} dx_2 \\
&= \frac{\gamma(m) \gamma(1-m)}{\gamma(m+1-m)} \\
&= \gamma(m) \gamma(1-m) \\
&= \frac{\pi}{\text{sen}(m\pi)}
\end{aligned}$$

d) **Propiedad.** Si  $2x_1 \in \mathbb{Z}_0^+$ , entonces

$$2^{2x_1-1} = \gamma(x_1) \gamma\left(x_1 + \frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2} \gamma(2x_1)$$

**Prueba**

$$\beta(x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{s^{x_1-1}}{s^{1-x_1}} (1-s)^{x_1-1} ds = \frac{\gamma(x_1) \gamma(x_2)}{\gamma(x_1+x_2)} = \int_0^1 s^{x_1-1} (1-s)^{x_2-1} ds$$

Suponiendo que  $x_1 = x_2$  se obtiene

$$\frac{\gamma(x_1) \gamma(x_1)}{\gamma(2x_1)} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} s^{x_1-1} (1-s)^{x_1-1} ds$$

Cambio de variable	Límites de integración
$s = \frac{1-u^{1/2}}{2}$	$s = \frac{1}{2} \rightarrow u = 0$
$ds = -\frac{1}{4} u^{-\frac{1}{2}} du$	$s = 0 \rightarrow u = 1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{4} \int_0^1 \left(\frac{1-u^{1/2}}{2}\right)^{x_1-1} \left(1 - \frac{1-u^{1/2}}{2}\right)^{x_1-1} \left(\frac{1}{u^{1/2}}\right) du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-u)^{x_1-1} u^{-\frac{1}{2}}}{2^{x_1-1} 2^{x_1-1}} du \\
&= \frac{1}{2^{2x_1-1}} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{x_1-1} du
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^{2x_1-1}} \beta\left(\frac{1}{2}, x_1\right)$$

$$= \frac{1}{2^{2x_1-1}} \frac{\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\gamma(x_1)}{\gamma\left(\frac{1}{2} + x_1\right)}$$

$$2^{2x_1-1} \cdot \gamma(x_1) \gamma\left(x_1 + \frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2} \gamma(2x_1)$$

## 2.2.6. Función Digamma Euleriana

### Definición 2.3. (Función Psi Euleriana)

La función real  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Psi Euleriana se define como

$$\psi(x_1) = \frac{d}{dx_1} \log \gamma(x_1) = \frac{\gamma'(x_1)}{\gamma(x_1)}; x_1 > 0$$

Observación:

A la Psi Euleriana se le conoce como la función digamma Euleriana.

### Definición 2.4. (Función Digamma Euleriana)

La función real  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Digamma Euleriana se define como

$$\psi(x_1) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-x_1 s}}{1 - e^{-s}} \right) ds, x_1 > 0$$

a) **Propiedad.**  $\psi(x_1 + 1) = \psi(x_1) + \frac{1}{x_1}, x_1 > 0$

#### Prueba

Se sabe que  $\gamma(x_1 + 1) = x_1 \gamma(x_1)$

Logaritmo  $\ln(\gamma(x_1 + 1)) = \ln(x_1) + \ln(\gamma(x_1))$

Derivando  $\frac{\gamma'(x_1+1)}{\gamma(x_1+1)} = \frac{1}{x_1} + \frac{\gamma'(x_1)}{\gamma(x_1)}$

$$\psi(x_1 + 1) = \frac{1}{x_1} + \psi(x_1)$$

$$= \frac{1}{x_1} - \lambda - \frac{1}{x_1} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m + x_1} \right)$$

$$= -\lambda + \sum_{x_1=1}^{\infty} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m + z} \right)$$

Por lo tanto  $\psi(x_1 + 1) = \frac{1}{x_1} + \psi(x_1)$

b) **Propiedad.**

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \ln(m) \right\} = 0.57721566490153286060651 \dots = \lambda$$

### Prueba

$$1 - \ln(1) = 1$$

$$1 + \frac{1}{2} - \ln(2) = 0,8068528 \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ln(3) = 0,734721 \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ln(4) = 0,6970389 \dots$$

$$\lambda = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln(m) \right] = 0,57721566 \dots$$

c) **Propiedad.** Si  $\alpha > -1$  y  $\beta > -1$  entonces

$$\lambda'(1) = \int_0^1 \frac{x_1^\alpha - x_1^\beta}{1 - x_1} dx_1 = \psi(\beta + 1) - \psi(\alpha + 1)$$

### Prueba

Por la **2.2.6. a)** se tiene:

$$\psi(z) = -\lambda + \int_0^1 \frac{1 - x_1^{z-1}}{1 - x_1} dx_1$$

Entonces tenemos

$$\psi(\beta + 1) = -\lambda + \int_0^1 \frac{1 - x_1^{\beta+1-1}}{1 - x_1} dx_1 = -\lambda + \int_0^1 \frac{1 - x_1^\beta}{1 - x_1} dx_1$$

$$\psi(\alpha + 1) = -\lambda + \int_0^1 \frac{1 - x_1^{\alpha+1-1}}{1 - x_1} dx_1 = -\lambda + \int_0^1 \frac{1 - x_1^\alpha}{1 - x_1} dx_1$$

Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} \lambda'(1) &= \psi(\beta + 1) - \psi(\alpha + 1) \\ &= -\lambda + \int_0^1 \frac{1 - x_1^\beta}{1 - x_1} dx_1 - \left( -\lambda + \int_0^1 \frac{1 - x_1^\alpha}{1 - x_1} dx_1 \right) \\ &= \int_0^1 \frac{x_1^\alpha - x_1^\beta}{1 - x_1} dx_1 \end{aligned}$$

### 2.2.1.7. Derivada de la función Gamma Euleriana

#### Definición 2.5. (Derivada $\psi(1)$ )

$$\lambda'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx = -0.577215664901532860606512090 \dots = -\lambda$$

Observación:

$$\psi(1) = \lambda'(1) = -\lambda$$

### 2.2.7. Tabla de valores de la función Digamma Euleriana utilizando el Software Laboratorio de Matrices

Escribiendo la definición de derivada  $\psi(1)$  en laboratorio de matrices se tiene:

```
>> syms x;
>> y=exp(-x)*log(x);
>> int(y,0,inf)
ans =-eulergamma
```

<b>Tabla 2.2.</b> Valores de la función Psi Euleriana	
$\psi(x_1) = \frac{\gamma'(x_1)}{\gamma(x_1)}, x_1 > 0$	
$\psi(1)$	$-\lambda$
$\psi(m + 1)$	$-\lambda + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$
$\psi\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\lambda - 2 \ln(2)$
$\psi\left(\frac{1}{3}\right)$	$-\lambda - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \ln(3)$
$\psi\left(\frac{1}{4}\right)$	$-\lambda - \frac{\pi}{2} - 3 \ln(3)$
<b>Fuente:</b> Elaboración propia.	

Por definición de derivada  $\psi(1)$  tenemos  $\psi(x_1) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-x_1 s}}{1-e^{-s}} \right) ds$ . Luego, se obtiene los siguientes valores de la Tabla 2.2.2, usando el software Laboratorio de Matrices:

a)	$\psi(1) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{1-e^{-s}} \right) ds$
<pre>&gt;&gt; syms s; &gt;&gt; y=(exp(-s)/s)-(exp(-s)/(1-exp(-s))); &gt;&gt; int(y,0,inf) ans =-eulergamma</pre>	

$$b) \quad \psi(2) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>>y1=(exp(-s)/s)-(exp(-2*s)/(1-exp(-s)));
>> int(y1,0,inf)
ans = 1 - eulergamma
```

$$c) \quad \psi(3) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>>y2=(exp(-s)/s)-(exp(-3*s)/(1-exp(-s)));
>> int(y2,0,inf)
ans = 3/2 - eulergamma
```

$$d) \quad \psi(4) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>>y3=(exp(-s)/s)-(exp(-4*s)/(1-exp(s)));
>> int(y3,0,inf)
ans = 11/6 - eulergamma
```

$$e) \quad \psi(5) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>>y4=(exp(-s)/s)-(exp(-5*s)/(1-exp(-s)));
>> int(y4,0,inf)
ans = 25/12 - eulergamma
```

$$f) \quad \psi(6) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-6s}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>>y5=(exp(-s)/s)-(exp(-6*s)/(1-exp(-s)));
>> int(y5,0,inf)
ans = 137/60 - eulergamma
```

g)	$\psi(7) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-7s}}{1-e^{-s}} \right) ds$
<pre>&gt;&gt; syms s; &gt;&gt; y7=(exp(-s)/s)-(exp(-7*s)/(1-exp(-s))); &gt;&gt; int(y7,0,inf) ans = 49/20 – eulergamma</pre>	

h)	$\psi(8) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-8s}}{1-e^{-s}} \right) ds$
<pre>&gt;&gt; syms s; &gt;&gt; y8=(exp(-s)/s)-(exp(-8*s)/(1-exp(-s))); &gt;&gt; int(y8,0,inf) ans = 363/140 – eulergamma</pre>	

i)	$\psi(9) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-9s}}{1-e^{-s}} \right) ds$
<pre>&gt;&gt; syms s; &gt;&gt; y9=(exp(-s)/s)-(exp(-9*s)/(1-exp(-s))); &gt;&gt; int(y9,0,inf) ans = 761/280 – eulergamma</pre>	

j)	$\psi(10) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-10s}}{1-e^{-s}} \right) ds$
<pre>&gt;&gt; syms s; &gt;&gt; y10=(exp(-s)/s)-(exp(-10*s)/(1-exp(-s))); &gt;&gt; int(y10,0,inf) ans = 7129/2520 – eulergamma</pre>	

k)	$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-\frac{s}{2}}}{1-e^{-s}} \right) ds$
<pre>&gt;&gt; syms s; &gt;&gt; y=(exp(-s)/s)-exp(-s/2)/(1-exp(-s)); &gt;&gt; int(y,0,inf) ans = - eulergamma - log(4)</pre>	

$$l) \quad \psi\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-\frac{3s}{2}}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>>y1=(exp(-s)/s)-exp((-3*s)/2)/(1-exp(-s));
>> int(y1,0,inf)
ans = 2 - log(4) - eulergamma
```

$$m) \quad \psi\left(\frac{4}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-\frac{4s}{2}}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>>y2=(exp(-s)/s)-exp((-4*s)/2)/(1-exp(-s));
>> int(y2,0,inf)
ans = 1 - eulergamma
```

$$n) \quad \psi\left(\frac{5}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-\frac{5s}{2}}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>>y3=(exp(-s)/s)-exp((-5*s)/2)/(1-exp(-s));
>> int(y3,0,inf)
ans = 8/3 - log(4) - eulergamma
```

$$o) \quad \psi\left(\frac{6}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-\frac{6s}{2}}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>>y4=(exp(-s)/s)-exp((-6*s)/2)/(1-exp(-s));
>> int(y4,0,inf)
ans = 3/2 - eulergamma
```

$$p) \quad \psi\left(\frac{7}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-\frac{7s}{2}}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>>y5=(exp(-s)/s)-exp((-7*s)/2)/(1-exp(-s));
>> int(y5,0,inf)
ans = 46/15 - log(4) - eulergamma
```

$$q) \quad \psi\left(\frac{8}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-\frac{8s}{2}}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>> y6=(exp(-s)/s)-exp((-8*s)/2)/(1-exp(-s));
>> int(y6,0,inf)
ans = 11/6 - eulergamma
```

$$r) \quad \psi\left(\frac{9}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-\frac{9s}{2}}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>> y7=(exp(-s)/s)-exp((-9*s)/2)/(1-exp(-s));
>> int(y7,0,inf)
ans = 352/105 - log(4) - eulergamma
```

$$s) \quad \psi\left(\frac{10}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-\frac{10s}{2}}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>> y8=(exp(-s)/s)-exp((-10*s)/2)/(1-exp(-s));
>> int(y8,0,inf)
ans = 25/12 - eulergamma
```

$$t) \quad \psi\left(\frac{1}{3}\right) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-\frac{s}{3}}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>> y21=(exp(-s)/s)-exp(-s/3)/(1-exp(-s));
>> int(y21,0,inf)
ans = - eulergamma - (3*log(3))/2 - (pi*3^(1/2))/6
```

$$u) \quad \psi\left(\frac{1}{4}\right) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-\frac{s}{4}}}{1-e^{-s}} \right) ds$$

```
>> syms s;
>> y22=(exp(-s)/s)-exp(-s/4)/(1-exp(-s));
>> int(y22,0,inf)
ans = - eulergamma - pi/2 - log(8)
```

v)	$\psi\left(\frac{2}{3}\right) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-\frac{2s}{3}}}{1-e^{-s}} \right) ds$
	<pre>&gt;&gt; syms s; &gt;&gt; y23=(exp(-s)/s)-exp((-2*s)/3)/(1-exp(-s)); &gt;&gt; int(y23,0,inf)</pre>

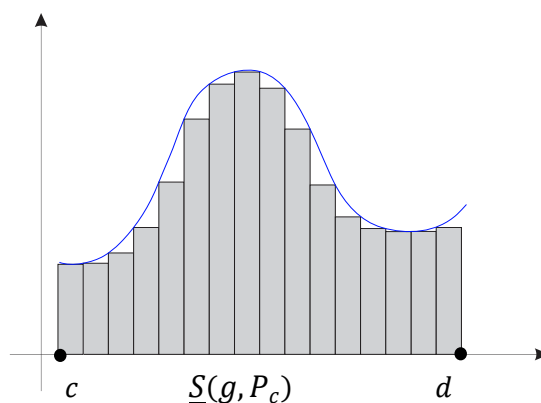
## 2.3.Marco conceptual

### 2.3.1.Operator de integración entera (Suma Superior e Inferior)

#### Definición 2.6. (Suma Inferior)

Sea la función real  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, una partición  $P_c = \{c = s_0, s_1, \dots, s_n = d\}$  y el  $k$ -ésimo intervalo de  $P_c$ ,  $I_k = [s_{k-1}, s_k]$ . Para  $k = \overline{1, n}$ , se define la suma inferior de  $g$  correspondiente a la partición  $P_c$  se define como:

$$\underline{S}(g, P_c) = \sum_{k=1}^n m_k (s_k - s_{k-1})$$



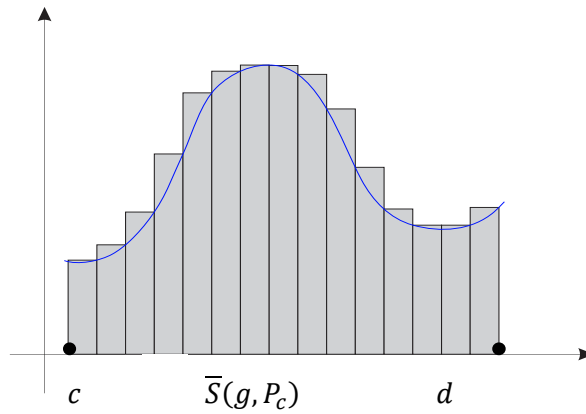
**Figura 2:** Suma Inferior  $\underline{S}(g, P_c)$

**Fuente:** Elaboración Propia

#### Definición 2.7. (Suma Superior)

Sea la función real  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, una partición  $P_c = \{c = s_0, s_1, \dots, s_n = d\}$  y el  $k$ -ésimo intervalo de  $P_c$ ,  $I_k = [s_{k-1}, s_k]$ . Para  $k = \overline{1, n}$ , se define la suma superior de  $g$  correspondiente a la partición  $P_c$  se define como:

$$\bar{S}(g, P_c) = \sum_{k=1}^n M_k (s_k - s_{k-1})$$



**Figura 3:** Suma Superior  $\bar{S}(g, P_c)$

**Fuente:** Elaboración Propia

**Definición 2.8. (Operador de integración entero Inferior)**

Sea la función real  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, e  $I = [c, d]$ . El operador de integración entero inferior de  $g$  en  $I$  se define

$$\underline{S}(g, P_c) = \int_{c-}^d g(x) dx$$

**Definición 2.9. (Operador de integración entero Superior)**

Sea la función real  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, e  $I = [c, d]$ . El operador de integración entero superior de  $g$  en  $I$  se define

$$\bar{S}(g, P_c) = \int_c^{d-} g(x) dx$$

**Definición 2.10. (Integral Definida entera)**

Sea  $g = [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada  $g$ , e integrable sobre  $[c, d]$  si y solo si

$$\int_{c-}^d g(x) dx = \int_c^{d-} g(x) dx$$

Notación:

Si  $g$  es integrable sobre  $[c, d]$  entonces la integral entera de  $g$  sobre  $I$  se denota:

$$\int_c^d g(x) dx$$

**Teorema (1° Teorema Elemental de la Integral entera)**

Sea la función real  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[c, d]$  y

$G(x) = \int_c^x g(s) ds \quad \forall s \in [c, d]$ . Entonces  $G'(x) = g(x)$ .

### Prueba

Se debe demostrar que  $G'(x) = g(x)$ . En efecto,

$$G(x) = \int_c^x g(s) ds$$

$$G(x+h) = \int_c^{x+h} g(s) ds$$

Entonces:

$$\begin{aligned} G(x+h) - G(x) &= \int_c^{x+h} g(s) ds - \int_c^x g(s) ds \\ &= \int_c^x g(s) ds + \int_x^{x+h} g(s) ds - \int_c^x g(s) ds \\ \frac{G(x+h) - G(x)}{h} &= \frac{1}{h} \int_c^{x+h} g(s) ds \end{aligned} \quad (2.1)$$

Por hipótesis  $g$  es continua y por el teorema de valor intermedio  $\exists e \in [x, x+h]$  tal que se cumple:

$$\begin{aligned} \int_c^{x+h} g(s) ds &= g(e)(x+h-x) \\ &= g(e)h \end{aligned} \quad (2.2)$$

Reemplazando (2.2) en (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} &= \frac{1}{h} \int_c^{x+h} g(s) ds \\ &= \frac{g(e)h}{h} \\ &= g(e) \end{aligned}$$

Aplicando límites a  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} g(e)$ ,  $e \in [x, x+h]$

$$G'(x) = g(x)$$

### Teorema (2° Teorema Elemental de la Integral entera)

Sea una función real  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[c, d]$ . Entonces se cumple

$\int_c^d g(x) dx = G(d) - G(c)$ , donde  $G$  es una función continua en  $[c, d]$  tal que  $G'(x) = g(x)$ .

### Prueba

Sea  $f(x) = \int_c^x g(s) ds$  y  $f$  continua en  $[c, d]$

Entonces  $f'(x) = g(x) = \mathcal{G}'(x)$ . Luego  $f$  es una antiderivada de  $\mathcal{G}$

$\mathcal{G}(x) - f(x) = k$	
$\mathcal{G}(d) = k + f(d) = k + \int_c^d g(s)ds$	$\mathcal{G}(c) = k + f(c) = k$
$\mathcal{G}(d) - \mathcal{G}(c) = k + \int_c^d g(s)ds - k = \int_c^d g(s)ds$	

Por lo tanto  $\int_c^d g(x)dx = \mathcal{G}(d) - \mathcal{G}(c)$

**Definición 2.11. (Operador de Integración entera)**

Un operador  ${}_c\mathcal{D}_t: \mathcal{R}([c, d]) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g \rightarrow {}_c\mathcal{D}_t g(x) = \int_c^t g(s)ds, \forall t \in [c, d]$  es llamado operador de integración entero.

Observación:

- a)  $\mathcal{R}([c, d]): = \{g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } g \text{ es integrable según Riemann}\}$
- b) Para  $n \in \mathbb{N}$ , se utiliza el símbolo  ${}_c\mathcal{D}_t^{-n}$ , para denotar la n-ésima iteración de operador de integración entera  ${}_c\mathcal{D}_t$ , es decir:

$$\begin{aligned} {}_c\mathcal{D}_t^{-1} &= {}_c\mathcal{D}_t \\ {}_c\mathcal{D}_t^{-2} &= {}_c\mathcal{D}_t {}_c\mathcal{D}_t \\ &\vdots \\ {}_c\mathcal{D}_t^{-n} &= {}_c\mathcal{D}_t {}_c\mathcal{D}_t^{n-1} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

**Definición 2.12. (Fubini y la Integral entera)**

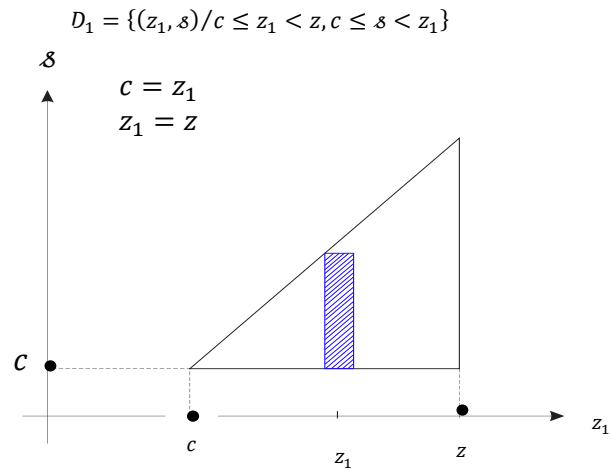
Sea una función real  $\mathcal{G}: [c, d] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $d > z$ . Entonces se define

$$\int_c^z dz_1 \int_d^{z_1} \mathcal{G}(z_1, s)ds = \int_c^z ds \int_s^z \mathcal{G}(z_1, s)dz_1 = \int_c^z (z - s)\mathcal{G}(z_1, s)ds$$

Notación:

Se denota  ${}_c\mathcal{D}_z^{-2} g(z) = \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} g(s)ds$ .

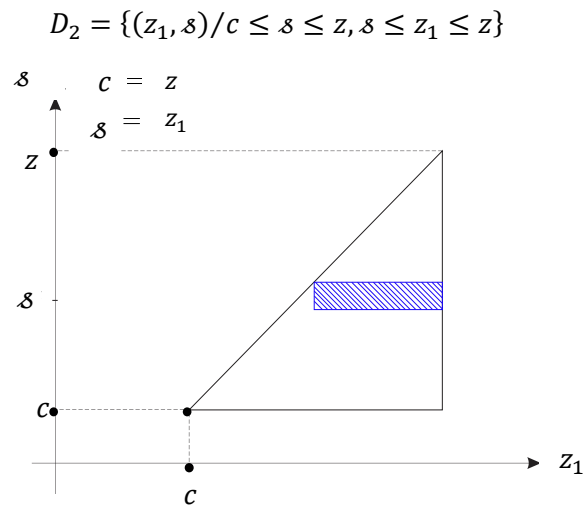
En particular  $\mathcal{G}(z_1, s) = g(s)$  se tiene gráficamente la región  $D_1$



**Figura 4:**Región  $D_1$

**Fuente:** Elaboración propia

Asimismo, se tiene gráficamente la región  $D_2$



**Figura 5:**Región  $D_2$

**Fuente:** Elaboración propia

**Ejemplo 1.** El operador de integración entera  $n = 2$

$$\begin{aligned} {}_c\mathcal{D}_z^{-2} &= \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} g(s) ds \\ &= \int_c^z g(s) ds \int_s^z dz_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto  ${}_c\mathcal{D}_z^{-2} = \int_c^z (z - c)g(s) ds$

**Ejemplo 2.** El operador de integración entera  $n = 3$

$$\begin{aligned}
 {}_c\mathcal{D}_z^{-3}g(z) &= \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} dz_2 \int_c^{z_2} g(s)ds \\
 &= \int_c^z dz_1 \left[ \int_c^{z_1} ds \int_s^{z_1} g(s)dz_2 \right] \\
 &= \int_c^z dz_1 \left[ \int_c^{z_1} g(s)ds \int_s^{z_1} dz_2 \right] \\
 &= \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} (z_1 - s)g(s)ds \\
 &= \int_c^z g(s)ds \int_s^z (z_1 - s)dz_1
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  ${}_c\mathcal{D}_z^{-3}g(x) = \frac{1}{1.2} \int_c^z (z - s)^2 g(s)ds$

**Ejemplo 3.** El operador de integración entera  $n = 4$

$$\begin{aligned}
 {}_c\mathcal{D}_z^{-4}g(z) &= \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} dz_2 \int_c^{z_2} dz_3 \int_c^{z_3} g(s)ds \\
 &= \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} dz_2 \left[ \int_c^{z_2} g(s)ds \int_s^{z_2} dz_3 \right] \\
 &= \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} dz_2 \int_c^{z_2} (z_2 - s)g(s)ds \\
 &= \int_c^z dz_1 \left[ \int_c^{z_1} g(s)ds \int_s^{z_1} (z_2 - s)dz_2 \right] \\
 &= \frac{1}{1.2} \int_c^z g(s)ds \int_s^z (z_1 - s)^2 dz_1
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  ${}_c\mathcal{D}_z^{-4}g(z) = \frac{1}{1.2.3} \int_c^z (z - s)^3 g(s)ds$

**Ejemplo 4.** El operador de integración entera  $n = 5$

$${}_c\mathcal{D}_z^{-5}g(z) = \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} dz_2 \int_c^{z_2} dz_3 \int_c^{z_3} dz_4 \int_c^{z_4} g(s)ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} dz_2 \int_c^{z_2} dz_3 \left[ \int_c^{z_3} g(s) ds \int_s^{z_3} dz_4 \right] \\
&= \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} dz_2 \int_c^{z_2} dz_3 \left[ \int_c^{z_3} ds \int_c^{z_3} g(s) dz_4 \right] \\
&= \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} dz_2 \left[ \int_c^{z_2} dz_3 \int_c^{z_3} (z_3 - s) g(s) ds \right] \\
&= \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} dz_2 \left[ \int_c^{z_2} g(s) ds \int_s^{z_2} (z_3 - c) dz_3 \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_c^z dz_1 \left[ \int_c^{z_1} dz_2 \int_c^{z_2} (z_2 - s)^2 g(s) ds \right] \\
&= \frac{1}{1.2.3} \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} (z_1 - s)^3 g(s) ds
\end{aligned}$$

Por lo tanto  ${}_c\mathcal{D}_z^{-5}g(z) = \frac{1}{1.2.3.4} \int_c^z (z - s)^4 g(s) ds$

**Ejemplo 5.** El operador de integración  $n = 6$

$$\begin{aligned}
{}_c\mathcal{D}_z^{-6}f(x) &= \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} dz_2 \int_c^{z_2} dz_3 \int_c^{z_3} dz_4 \int_c^{z_4} dz_5 \int_c^{z_5} g(s) ds \\
&= \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} dz_2 \int_c^{z_2} dz_3 \left[ \int_c^{z_3} g(s) ds \int_s^{z_3} (z_4 - s) dz_4 \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_c^z dz_1 \int_c^{z_1} dz_2 \left[ \int_c^{z_2} dz_3 \int_s^{z_2} (z_3 - s)^2 g(s) ds \right] \\
&= \frac{1}{2.3} \int_c^z dz_1 \left[ \int_c^{z_1} g(s) ds \int_s^{z_1} (z_2 - s)^3 dz_2 \right] \\
&= \frac{1}{2.3.4} \int_c^z g(s) dt \int_s^z (z_1 - s)^4 dz_1 \\
{}_c\mathcal{D}_z^{-6}g(z) &= \frac{1}{2.3.4.5} \int_c^z (z - s)^5 g(s) ds
\end{aligned}$$

Expresando la generalización de la integral entera de Cauchy-Fubini se tiene:

$${}_c\mathcal{D}_z^{-n}g(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int_c^z (z-s)^{n-1} g(s) ds = \frac{1}{\gamma(n)} \int_c^z (z-s)^{n-1} g(s) ds.$$

De forma inductiva debemos mostrar que

$${}_c\mathcal{D}_z^{-n}g(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int_c^z (z-s)^{n-1} g(s) ds.$$

En efecto, para la hipótesis inductiva  $n = k$  se acepta

$${}_c\mathcal{D}_z^{-k}g(z) = \frac{1}{(k-1)!} \int_c^z (z-s)^{k-1} g(s) ds = \frac{1}{\gamma(k)} \int_c^z (z-s)^{k-1} g(s) ds.$$

Para  $n = k + 1$  se cumple

$$\begin{aligned} {}_c\mathcal{D}_z^{-(k+1)}g(z) &= \int_c^z dz_1 \frac{1}{\gamma(k)} \int_c^{z_1} (z_1-s)^{k-1} g(s) ds \\ &= \frac{1}{\gamma(k)} \int_c^z g(s) ds \int_s^z (z_1-s)^{k-1} dz_1 \\ &= \frac{1}{\gamma(k+1)} \int_c^z (z-s)^k g(s) ds \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto, } {}_c\mathcal{D}_z^{-n}g(z) = \frac{1}{\gamma(n)} \int_c^z (z-s)^{n-1} g(s) ds$$

### 2.3.2. Espacio Funcional $L^1([c, d])$

#### **Definición 2.13. (Espacio de las funciones medibles según Lebesgue)**

El espacio  $L^1([c, d])$  está formado por las funciones medibles  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  para los que  $\int_c^d |g(x_1)| dx_1$  es la integral de Lebesgue, es decir,  $\int_c^d |g(x_1)| dx_1 < \infty$ . La norma de cualquier elemento  $g$  de este espacio se define como  $\|g\| = \int_c^d |g(x_1)| dx_1$ .

# CAPÍTULO III

## MÉTODO

### 3.1. Variables

#### 3.1.1. Variables independiente e indicadores

##### 3.1.1.1. Variable Independiente

Funciones medibles en el sentido de Lebesgue.

##### 3.1.1.2. Indicadores

- a) Función constante en el espacio  $L^1[(c, d)]$ .
- b) Función potencia en el espacio  $L^1[(c, d)]$ .
- c) Función logaritmo en el espacio  $L^1[(c, d)]$ .
- d) Función exponencial en el espacio  $L^1[(c, d)]$ .

#### 3.1.2. Variable dependiente e indicadores

##### 3.1.2.1. Variable dependiente

Operador de integración de Riemann –Liouville.

##### 3.1.2.2. Indicadores

- a) Operador de integración Riemann- Liouville de la constante.
- b) Operador de integración Riemann- Liouville de la potencia.
- c) Operador de integración Riemann- Liouville del logaritmo.
- d) Operador de integración Riemann- Liouville de la exponencial.

### 3.2. Tipo de investigación

Esta tesis, extensión del operador de integración de orden entero a operador de integración de orden no entero, de acuerdo al fin que sigue es esencial, es decir del tipo básica.

### 3.3. Diseño de investigación

La tesis extensión del operador de integración de orden entero a operador de integración de orden no entero de Riemann-Liouville de acuerdo al diseño de investigación es causa y efecto, es decir, explicativa.

### 3.4. Población de estudio y su procedimiento matemático de elección

La tesis corresponde a las ciencias matemáticas y su análisis de investigación considera a los operadores de integración de orden no entero de Riemann - Liouville.

### 3.5. Procedimiento del método y sistema en Matemáticas

#### 3.5.1. Procedimiento de un Método Matemático

<b>Exploración</b>	Se eligió un conjunto de propuestas en todo el operador de integración de Riemann-Liouville para ser elegido en busca de una solución.
<b>Método matemático</b>	Se ha discutido la definición sobre el operador de integración entero al operador de integración no entero. Asimismo, evaluamos con rigurosidad las definiciones basadas en fundamentos teóricos.
<b>Inductivo</b>	Establece reglas de deducción y definición de la función Gamma, Beta y Psi. De manera similar, de la proposición de Cauchy se pasa a otras definiciones, introduciendo nuevos conceptos y propiedades.
<b>Semejanza</b>	Comparamos las proposiciones del operador de integración entero con las proposiciones del operador de integración no entero de Riemann-Liouville.
<b>Deductivo</b>	El operador de integración no entero de Riemann-Liouville ha sido extendido mediante definiciones, teoremas, etc., basados en las reglas de deducción e inducción.

#### 3.5.2. Procedimiento de un Sistema Matemático

<b>Axioma</b>	Es una proposición que, por el grado de prueba y certeza que presenta, se admite sin prueba. En el campo de las ciencias formales, se denomina axioma a un principio fundamental que no se puede demostrar pero que se utiliza para el desarrollo de toda una teoría.
<b>Definición</b>	Una definición es una proposición mediante la cual se intenta establecer sin ambigüedades y con precisión la comprensión de un concepto.

<b>Teorema</b>	Consiste en una proposición que puede demostrarse lógicamente a partir de un axioma u otros teoremas que hayan sido probados previamente. Este proceso de prueba se lleva a cabo mediante ciertas reglas de inferencia.
<b>Lema</b>	Es una proposición que apoya la demostración de un teorema.
<b>Corolario</b>	Es una proposición que sigue inmediatamente a un teorema.

### 3.6. Análisis matemático de los datos

<b>Prueba directa</b>	En la demostración directa, partimos de un enunciado verdadero $r$ y terminamos con el enunciado $s$ . La conclusión $q$ también es verdadera, ya que de una premisa verdadera sólo se puede seguir un enunciado verdadero.
<b>Prueba de inducción completa</b>	Esta prueba consiste en mostrar que el enunciado se cumple para un número natural inicial. Admitimos que se cumple para un número $l$ . Luego mostramos que es cierto para $l + 1$ . Concluimos que el enunciado se cumple para todos los números naturales.
<b>Prueba de reducción al absurdo (indirecta)</b>	La idea es suponer que la proposición a probar es falsa, y de esta suposición, usando deducciones matemáticas, llegamos a una contradicción o algo absurdo, lo que implica que nuestra proposición es verdadera.
<b>Prueba por contraposición (indirecta)</b>	Para hacer una demostración por contraste, se toma como hipótesis la negación de la conclusión denotada por $\sim s$ para obtener la negación de la hipótesis denotada por $\sim r$ como la tesis, la cual puede generalizarse en el caso de que existan varias premisas.

## CAPÍTULO IV

### PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

#### 4.1. Presentación de resultados por variables

##### 4.1.1. Generalización del operador de integración no entero de Riemann-Liouville

$\int_{c^+}^x$  a aplicado  $n$  veces

##### a) Proposición. (Operador de Integración Fubini-Cauchy)

Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $g \in L^1([c, d])$ . El  $n$ -ésimo operador de integración entero de Fubini-Cauchy está dado por

$${}_c \mathcal{D}_z^{-n} g(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_c^z (z-s)^{n-1} g(s) ds, s > c, n \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

##### Prueba.

Sea  $g \in L^1([c, d])$ . Determinar para  $z \in [c, d]$  la función  $g$  con límite de integración inferior  $c = 0$ , es decir,

$${}_0 \mathcal{D}_z^{-1} g(z) = \int_0^z g(s) ds, s > c, n \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

$$\text{Para la integral se tiene } {}_0 \mathcal{D}_z^{-2} g(z) = \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} g(s) ds \quad (4.3)$$

Por la definición de Fubini y la integral entera podemos intercambiar el orden de las integrales en la integral doble (4.3)

$${}_0 \mathcal{D}_z^{-2} g(z) = \int_0^z ds \int_0^z g(s) dz_1$$

$$= \int_0^z g(s) ds \int_0^z dz_1$$

$${}_0 \mathcal{D}_z^{-2} g(z) = \int_0^z (z-s)g(s) ds$$

Ahora consideremos tres integrales

$${}_0 \mathcal{D}_z^{-3} g(z) = \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} g(s) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^z dz_1 \left[ \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} g(s) ds \right] \\
&= \int_0^z g(s) ds \int_0^z (z_1 - s) dz_1 \\
&= \int_0^z \frac{(z-s)^2}{2} g(s) ds \\
{}_0 \mathfrak{D}_z^{-3} g(z) &= \frac{1}{1.2} \int_0^z (z-s)^2 g(s) ds
\end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que para cuatro integrales se tiene:

$${}_0 \mathfrak{D}_z^{-4} g(z) = \frac{1}{1.2.3} \int_0^z (z-s)^3 g(s) ds$$

Entonces para  $n$  integrales se tiene:

$$\begin{aligned}
{}_0 \mathfrak{D}_z^{-n} g(z) &= \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \dots \int_0^{z_{n-2}} dz_{n-1} \int_0^{z_{n-1}} g(s) ds \\
{}_0 \mathfrak{D}_z^{-n} g(z) &= \frac{1}{\gamma(n)} \int_0^z (z-s)^{n-1} g(s) ds, s > c, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Además, como el límite inferior de la integral es arbitrario entonces se obtiene:

$${}_0 \mathfrak{D}_z^{-n} g(z) = \frac{1}{\gamma(n)} \int_0^z (z-s)^{n-1} g(s) ds, s > c, n \in \mathbb{N}$$

Supongamos que para  $n = k$  se cumple (4.1)

$${}_0 \mathfrak{D}_z^{-k} g(z) = \frac{1}{\gamma(k)} \int_c^z (z-s)^{k-1} g(s) ds$$

Entonces se tiene para  $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
{}_c \mathfrak{D}_z^{-(k+1)} g(z) &= \int_c^z dz_1 \frac{1}{\gamma(k)} \int_c^{z_1} (z_1 - s)^{k-1} g(s) ds \\
&= \frac{1}{\gamma(k)} \int_c^z g(s) ds \int_c^z (z_1 - s)^{k-1} dz_1 \\
&= \frac{1}{\gamma(k)} \int_c^z \frac{(z-s)^k}{k} g(s) ds \\
&= \frac{1}{k\gamma(k)} \int_c^z (z-s)^k g(s) ds \\
&= \frac{1}{\gamma(k+1)} \int_c^z (z-s)^k g(s) ds
\end{aligned}$$

La ecuación (4.1) es conocida como la fórmula de Cauchy-Fubini. Extendiendo esta ecuación se tiene:

Para un escalar  $\nu \in \mathbb{R}^+$  y  $g$  una función integrable en  $L^1([c, d])$ . Entonces

$${}_c \mathcal{D}_z^{-\nu} g(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^z (z-s)^{\nu-1} g(s) ds, \quad \text{para todo } z \in [c, d]$$

**Definición 4.1. (Operador de integración no entero de Riemann-Liouville)**

Sea  $\nu \in \mathbb{R}^+$ . El operador de integración de orden no entero  $\nu$  denotado por  ${}_c \mathcal{D}_z^{-\nu}$ , del tipo Riemann-Liouville de una función  $g \in L^1([c, d])$ , se define:

$${}_c \mathcal{D}_z^{-\nu} g(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^z (z-s)^{\nu-1} g(s) ds, \text{ para todo } z \in [c, d]$$

**Ejemplo 1. (Operador de integración Riemann-Liouville)**

Determine el operador de Riemann-Liouville de orden  $\nu = \frac{3}{2}$ , de la función real  $g$  cuya regla de correspondencia es  $g(x_1) = 2$ .

**Solución:**

Por la definición de integración no entero de Riemann-Liouville se tiene:

$$\begin{aligned} {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\frac{3}{2}} g(x_1) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_c^{x_1} (x_1-s)^{\frac{3}{2}-1} g(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_c^{x_1} 2(x_1-s)^{\frac{1}{2}} ds \end{aligned}$$

Cambio de variable	Límites de integración
$u = x_1 - s$	$s = x_1 \Rightarrow u = 0$
$du = -ds$	$s = c \Rightarrow u = x_1 - c$

$$\Rightarrow {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\frac{3}{2}} (2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x_1-c}^0 2u^{\frac{1}{2}}(-du) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{2}{3} \left( u^{\frac{3}{2}} \right) \right]_0^{x_1-c} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} (x_1 - c)^{\frac{3}{2}}$$

**4.1.2. Linealidad del operador de integración no entero de Riemann-Liouville**

**a) Proposición. (Linealidad del operador de integración Riemann-Liouville)**

Sea  $g, h \in L^1([c, d])$ ,  $c \leq x_1 \leq d$ ,  $\nu \in \mathbb{R}^+$  y el operador Riemann-Liouville  ${}_c \mathcal{D}_x^{-\nu}$  tales que se cumple

$$1. {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} \lambda g(x_1) = \lambda {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} g(x_1), \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

**Prueba**

$$\begin{aligned} {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} \lambda g(x_1) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{x_1} (x_1 - s)^{\nu-1} \lambda g(s) ds \\ &= \lambda \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^{x_1} (x_1 - s)^{\nu-1} g(s) ds \end{aligned}$$

Por lo tanto  ${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} \lambda g(x_1) = \lambda {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} g(x_1)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

2.  ${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} (g + h)(x_1) = {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} g(x_1) + {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} h(x_1)$

**Prueba**

$$\begin{aligned} {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} (g + h)(x_1) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^{x_1} (x_1 - s)^{\nu-1} (g + h)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^{x_1} (x_1 - s)^{\nu-1} g(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^{x_1} (x_1 - s)^{\nu-1} h(s) ds \end{aligned}$$

Por lo tanto  ${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} (g + h)(x_1) = {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} g(x_1) + {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} h(x_1)$

**4.1.3. Operador de integración no entero de Riemann-Liouville de la función constante**

**a) Proposición. (Operador de Integración Riemann-Liouville de la función constante)**

Si  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función real tal que  $g(x_1) = k_1$  entonces el operador Riemann-Liouville  ${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} f(x_1) = \frac{k_1}{\Gamma(\nu+1)} (x - c)^\nu$

**Prueba**

Aplicando la definición de integración no entero de Riemann-Liouville se verifica:

$$\begin{aligned} {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} g(x_1) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^{x_1} (x_1 - s)^{\nu-1} g(s) ds \\ {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} g(x_1) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^{x_1} (x_1 - s)^{\nu-1} k ds \end{aligned} \tag{4.4}$$

Cambio de variable	Límites de integración
$u = x_1 - s$	$s = x_1 \rightarrow u = 0$
$du = -ds$	$s = c \rightarrow u = x_1 - c$

(4.5)

Teniendo en cuenta (4.4) - (4.5) se tiene:

$${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} g(x_1) = \frac{k_1}{\Gamma(\nu)} \int_{x_1-c}^0 u^{\nu-1} (-du)$$

$$= \frac{k_1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{x_1-c} u^{\nu-1} du$$

$${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} g(x_1) = \frac{k_1}{\Gamma(\nu+1)} (x_1 - c)^\nu$$

**Ejemplo 1. (Operador de Integración Riemann-Liouville de la función constante)**

Calcular el operador de Riemann-Liouville orden  $\nu = \frac{2}{3}$  y  $c = 2$  de la función real  $g$  cuya regla de correspondencia es  $g(x_1) = 5$ .

**Solución:**

Aplicando **4.1.3. a)** tenemos:

$${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} k = \frac{k}{\Gamma(\nu+1)} (x_1 - c)^\nu$$

$$= \frac{k}{\Gamma\left(\frac{2}{3} + 1\right)} (x_1 - 2)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{5}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} (x_1 - 2)^{\frac{2}{3}}$$

y por lo tanto por la **Tabla 2.2.1** se obtiene

$${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\frac{2}{3}}(5) = 5.5387(x_1 - 2)^{\frac{2}{3}}$$

**4.1.4. Operador de Integración no entero de Riemann-Liouville de la función potencia**

**a) Proposición. (Operador de Integración Riemann-Liouville de la función potencia)**

Si  $g(x_1) = (x_1 - c)^\lambda, \lambda > 0, x_1 > c$  entonces el operador Riemann-Liouville

$${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} (x_1 - c)^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\nu+\lambda+1)} (x_1 - c)^{\nu+\lambda}$$

**Prueba**

Aplicando la definición de operador no entero de Riemann-Liouville se verifica:

$${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu} (x_1 - c)^\lambda = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^{x_1} (x_1 - s)^{\nu-1} (s - c)^\lambda ds \quad (4.6)$$

Cambio de variable	Límites de integración
$s = c + t(x_1 - c)$	$s = x_1 \rightarrow t = 1$
$ds = (x_1 - c)dt$	$s = c \rightarrow t = 0$

(4.7)

Teniendo en cuenta (4.6) - (4.7) se verifica:

$$\begin{aligned}
{}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu}(x_1 - c)^\lambda &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 [(x_1 - c)(1 - t)]^{\nu-1} [t(x_1 - c)]^\lambda (x_1 - c) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (x_1 - c)^{\nu+\lambda} t^{(\lambda+1)-1} (1 - t)^{\nu-1} dt \\
&= \frac{(x_1 - c)^{\nu+\lambda}}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 t^{(\lambda+1)-1} (1 - t)^{\nu-1} dt
\end{aligned}$$

Luego por la definición de la función Beta Euleriana tenemos la forma:

$${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu}(x_1 - c)^\lambda = \frac{(x_1 - c)^{\nu+\lambda}}{\Gamma(\nu)} \beta(\lambda + 1, \nu)$$

Por **2.2.5.a)** se verifica:

$${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu}(x_1 - c)^\lambda = \frac{(x_1 - c)^{\nu+\lambda} \Gamma(\lambda + 1) \Gamma(\nu)}{\Gamma(\lambda + 1 + \nu)}$$

y por lo tanto se obtiene el operador Riemann-Liouville de la función potencia

$${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu}(x_1 - c)^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 1 + \nu)} (x_1 - c)^{\nu+\lambda} \quad \text{para todo } \nu, \lambda > 0, x_1 > c$$

### **Ejemplo1. (Operador de integración Riemann-Liouville de la función potencia)**

Determine el operador de Riemann -Liouville de orden  $\nu = \frac{1}{2}$  y  $c = 7$  de  $g(x_1) =$

$$\sqrt[3]{x_1 - 7}$$

**Solución:**

A partir de **4.1.4. a)** se tiene:

$$\begin{aligned}
{}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-\nu}(x_1 - c)^\lambda &= \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 1 + \nu)} (x_1 - c)^{\nu+\lambda} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3}\right)} (x_1 - 4)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} (x_1 - 7)^{\frac{5}{6}}
\end{aligned}$$

y por lo tanto por la **Tabla 2.2.1.** se obtiene:

$$= \frac{0.8930 \dots}{2(0.9407 \dots)} (x_1 - 7)^{\frac{5}{6}}$$

#### 4.1.5. Operador de Integración no entero de Riemann-Liouville de la función logaritmo

##### a) **Proposición. (Operador de Integración Riemann-Liouville de la función logaritmo)**

Si la función real  $g(x_1) = \ln(x_1 - c)$  tal que  $x_1 > c$  entonces el operador de Riemann-Liouville

$${}_c \mathfrak{D}_{x_1}^{\nu} \ln(x_1 - c) = \frac{(x_1 - c)^{\nu}}{\Gamma(\nu + 1)} [\ln(x_1 - c) - \gamma - \psi(\nu + 1)],$$

donde:  $\gamma = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \ln(m) \right\}$

##### **Prueba**

A partir de la definición de operador no entero de Riemann-Liouville se verifica:

$${}_c \mathfrak{D}_{x_1}^{-\nu} \ln(x_1 - c) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^{x_1} (x_1 - s)^{\nu-1} \ln(s - c) ds \quad (4.8)$$

Cambio de variable	Límites de integración
$s = c + t(x_1 - c)$	$s = x_1 \rightarrow t = 1$
$x_1 - s = (x_1 - c)(1 - t)$	$s = c \rightarrow t = 0$
$ds = (x_1 - c)dt$	

Teniendo en cuenta (4.8) - (4.9) se tiene:

$$\begin{aligned} {}_c \mathfrak{D}_{x_1}^{-\nu} \ln(x_1 - c) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 [(x_1 - c)(1 - t)]^{\nu-1} \ln[t(x_1 - c)] (x_1 - c) dt \\ &= \frac{(x_1 - c)^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \ln(x_1 - c) \int_0^1 (1 - t)^{\nu-1} dt + \frac{(x_1 - c)^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1 - t)^{\nu-1} \ln(t) dt \end{aligned}$$

Cambio de variable	Límites de integración
$u = 1 - t$	$t = 1 \rightarrow u = 0$
$du = -dt$	$t = 0 \rightarrow u = 1$

Nuevamente teniendo en cuenta el cambio de variable y los límites de integración se tiene :

$$\begin{aligned}
 {}_c \mathfrak{D}_{x_1}^{-\nu} \ln(x_1 - c) &= \frac{(x_1 - c)^\nu}{\nu \Gamma(\nu)} \ln(x_1 - c) + \frac{(x_1 - c)^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (u)^{\nu-1} \ln(1 - u) du \\
 & \quad d(1 - u^\nu) = -\nu u^{\nu-1} du \Rightarrow u^{\nu-1} du = -\frac{d(1 - u^\nu)}{\nu} \\
 &= \frac{(x_1 - c)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \ln(x_1 - c) - \frac{(x_1 - c)^\nu}{\nu \Gamma(\nu)} \int_0^1 \ln(1 - u) d(1 - u^\nu) \\
 &= \frac{(x_1 - c)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \ln(x_1 - c) - \frac{(x_1 - c)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \left[ [\ln(1 - u) (1 - u^\nu)]_0^1 + \int_0^1 \frac{1 - u^\nu}{1 - u} du \right] \\
 &= \frac{(x_1 - c)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \left[ \ln(x_1 - c) - \int_0^1 \frac{1 - u^\nu}{1 - u} du \right]
 \end{aligned}$$

de donde por la **2.2.6. c)** se obtiene el operador Riemann-Liouville de la función logaritmo

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x_1 - c)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} [\ln(x_1 - c) - \psi(\nu + 1) + \psi(0 + 1)] \\
 &= \frac{(x_1 - c)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} [\ln(x_1 - c) - \psi(\nu + 1) - \lambda]
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 1. (Operador de Integración de Riemann-Liouville de la función logaritmo)**

Determine el operador de Riemann –Liouville de orden  $\nu = \frac{1}{3}$  de la función real cuyo regla de correspondencia es  $g(x_1) = \ln(x_1 - 7)$ .

**Solución:**

A partir de **4.1.5. a)** se verifica que:

$$\begin{aligned}
 {}_c \mathfrak{D}_{x_1}^{-\nu} \ln(x_1 - c) &= \frac{(x_1 - c)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} [\ln(x_1 - c) - \psi(\nu + 1) - \lambda] \\
 &= \frac{(x_1 - 7)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)} \left[ \ln(x_1 - 7) - \psi\left(\frac{1}{2} + 1\right) - \lambda \right] \\
 &= \frac{(x_1 - 7)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left[ \ln(x_1 - 7) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) - 2 - \lambda \right]
 \end{aligned}$$

Aplicando la **Tabla 2.2.1.** se tiene:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x_1 - 7}}{0.8862 \dots} [\ln(x_1 - 7) + \lambda + 2 \ln(2) - 2 - \lambda] \\
&= \frac{\sqrt{x_1 - 7}}{0.8862 \dots} [\ln(x_1 - 7) + 2 \ln(2) - 2]
\end{aligned}$$

#### 4.1.6. Operador de Integración no entero de Riemann-Liouville de la función exponencial

##### Definición 4.2. (Función de Mittag - Leffler)

La función del tipo Mittag - Leffler denotado por  $E_{\varphi, \phi}(x)$ , se define como

$$E_{\varphi, \phi}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\varphi n + \phi)} \quad (\varphi, \phi > 0)$$

##### a) Proposición. (Operador de Integración Riemann-Liouville de la función Mittag - Leffler)

Sea  $g(t_1) = e^{ct_1}$  con  $c > 0$ , entonces el operador de Riemann-Liouville

$${}_0 \mathfrak{D}_{t_1}^{-\nu} e^{ct_1} = t_1^{\nu} E_{1, \nu+1}(ct_1)$$

##### Prueba

Sea  $g(t_1) = e^{ct_1}$  con  $c > 0$ , expresando la función exponencial  $e^{ct_1}$  como serie de Maclaurin, tenemos

$${}_0 \mathfrak{D}_{t_1}^{-\nu} e^{ct_1} = \mathfrak{D}^{-\nu} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ct_1)^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_0 \mathfrak{D}_{t_1}^{-\nu} \frac{(ct_1)^k}{k!}$$

Puesto que el operador de Riemann-Liouville el lineal se tiene

$${}_0 \mathfrak{D}_{t_1}^{-\nu} e^{ct_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} {}_0 \mathfrak{D}_{t_1}^{-\nu} t_1^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k + \nu + 1)} t_1^k t_1^{\nu} = t_1^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ct_1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)}$$

Por lo tanto

$${}_0 \mathfrak{D}_{t_1}^{-\nu} e^{ct_1} = t_1^{\nu} E_{1, \nu+1}(ct_1)$$

La cual mediante la potencia arbitraria multiplicada por la función especial del tipo MittagLeffler

##### Definición 4.3. (Función Gamma Incompleta)

La función Gamma Incompleta denotada por  $\gamma^*(\tau, x)$  se define

$$\gamma^*(\tau, x_1) = \frac{1}{x_1^{\tau} \Gamma(\tau)} \int_0^{x_1} t^{\tau-1} e^{-t} dt$$

**b) Proposición. (Operador de Integración Riemann-Liouville de la función Gamma Incompleta)**

Sea  $g(t_1) = e^{ct_1}$ , donde  $c$  es una constante. Entonces el operador de Riemann-Liouville  ${}_0\mathcal{D}_{t_1}^{-\nu}g(t_1) = t_1^\nu e^{vt_1}\gamma^*(\nu, ct_1)$ .

**Prueba**

En efecto, a partir de la definición de operador de integración no entero de Riemann-Liouville se verifica:

$$\begin{aligned} {}_0\mathcal{D}_{t_1}^{-\nu}g(t_1) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\nu-1} g(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\nu-1} e^{cs} ds, \quad \nu > 0 \end{aligned}$$

Cambio de variable	Límites de integración
$x_1 = t_1 - s$	$s = 0 \rightarrow x_1 = t_1$
$-dx_1 = ds$	$s = t \rightarrow x_1 = 0$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{t_1} x_1^{\nu-1} e^{c(t_1-x_1)} (-dx_1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{t_1} x_1^{\nu-1} e^{ct_1} e^{-cx_1} dx_1 \\ &= \frac{e^{ct}}{\Gamma(\nu)} \int_0^{t_1} x_1^{\nu-1} e^{-cx_1} dx_1 \\ &= \frac{t_1^\nu e^{ct}}{t_1^\nu \Gamma(\nu)} \int_0^{t_1} x_1^{\nu-1} e^{-cx_1} dx_1 \\ &= t_1^\nu e^{ct} \frac{1}{t_1^\nu \Gamma(\nu)} \int_0^{t_1} x_1^{\nu-1} e^{-cx_1} dx_1 \end{aligned}$$

$${}_0\mathcal{D}_{t_1}^{-\nu}g(t_1) = t_1^\nu e^{ct_1}\gamma^*(\nu, ct_1)$$

**4.1.7. Semigrupos y Conmutatividad del operador de integración no entero de Riemann-Liouville**

**4.1.7.1. Semigrupos del operador de integración no entero de Riemann-Liouville**

**a) Proposición. (Semigrupos del operador de Integración Riemann-Liouville)**

Sean  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^+$  y  $g \in L^1([c, d])$ . Entonces el operador Riemann-Liouville  ${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_1} {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_2} g(x_1) = {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-(v_1+v_2)} g(x_1)$ ,  $x_1 \in [c, d]$

### Prueba

A partir de la definición de operador de integración no entero de Riemann-Liouville se verifica:

$$\begin{aligned} {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_1} {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_2} g(x_1) &= \frac{1}{\Gamma(v_1)} \int_c^{x_1} (x_1 - t)^{v_1-1} {}_c \mathcal{D}_t^{-v_2} g(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(v_1)} \int_c^{x_1} (x_1 - t)^{v_1-1} dt \frac{1}{\Gamma(v_2)} \int_c^t (t - \tau)^{v_2-1} g(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} \int_c^{x_1} \int_c^t (x_1 - t)^{v_1-1} (t - \tau)^{v_2-1} g(\tau) d\tau dt \end{aligned}$$

Aplicando la definición de Fubini y la integral entera se tiene:

$$= \frac{1}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} \int_c^{x_1} g(\tau) d\tau \int_\tau^{x_1} (x_1 - t)^{v_1-1} (t - \tau)^{v_2-1} dt$$

Cambio de variable	Límites de integración
$t = \tau + s(x_1 - \tau)$	$t = x_1 \rightarrow s = 1$
$dt = (x_1 - \tau)ds$	$t = \tau \rightarrow s = 0$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} \int_c^{x_1} g(\tau) d\tau \int_0^1 [(x_1 - \tau)(1 - s)]^{v_1-1} [s(x_1 - \tau)]^{v_2-1} (x_1 - \tau) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} \int_c^{x_1} g(\tau) (x_1 - \tau)^{(v_1+v_2)-1} d\tau \int_0^1 (1 - s)^{v_1-1} s^{v_2-1} ds \end{aligned}$$

Aplicando la definición de la función Beta Euleriana y por **2.2.5. a)** tenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} \int_c^{x_1} g(\tau) (x_1 - \tau)^{v_1+v_2-1} \frac{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)}{\Gamma(v_1 + v_2)} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(v_1 + v_2)} \int_c^x g(\tau) (x_1 - \tau)^{v_1+v_2-1} d\tau \end{aligned}$$

Por lo tanto  ${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_1} {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_2} f(x) = {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-(v_1+v_2)} g(x_1)$

### 4.1.7.2. Conmutatividad del operador de integración no entero de Riemann-Liouville

a) **Proposición. (Conmutatividad del operador de Integración Riemann-Liouville)**

Sean  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^+$  y  $g \in L^1([c, d])$ . Entonces el operador de Riemann-Liouville

$${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_1} {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_2} g(x_1) = {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_2} {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_1} g(x_1)$$

**Prueba**

A partir de **4.1.7.1. a)** tenemos  ${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_1} {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_2} g(x_1) = {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-(v_1+v_2)} g(x_1)$

Pero  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^+$  entonces

$${}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_1} {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_2} g(x_1) = {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-(v_1+v_2)} g(x_1) = {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-(v_2+v_1)} g(x_1) = {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_2} {}_c \mathcal{D}_{x_1}^{-v_1} g(x_1)$$

**Ejemplo 1.** Sea la función real  $g$  cuya regla de correspondencia es

$g(x_1) = x_1^{\frac{3}{2}}$  y  $v_1 = \frac{3}{2}, v_2 = \frac{5}{2}$ . Determine el operador de Riemann-Liouville:

a)  ${}_0 \mathcal{D}_{x_1}^{-v_1} g(x_1)$

**Solución:**

$${}_0 \mathcal{D}_{x_1}^{-\frac{3}{2}} \left( x_1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}} dt \quad (4.10)$$

Cambio de variable	Límites de integración
$t = sx_1$	$t = x_1 \rightarrow s = 1$
$dt = x_1 ds$	$t = 0 \rightarrow s = 0$

(4.11)

Teniendo en cuenta (4.10) - (4.11) se tiene:

$$\begin{aligned} {}_0 \mathcal{D}_{x_1}^{-\frac{3}{2}} \left( x_1^{\frac{3}{2}} \right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^1 (x_1 - sx_1)^{\frac{1}{2}} (sx_1)^{\frac{3}{2}} x_1 ds \\ &= \frac{x_1^3}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^1 (1-s)^{\frac{1}{2}} (s)^{\frac{3}{2}} ds \\ &= \frac{x_1 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(4)} \\ &= (0.2216 \dots) x_1^3 \end{aligned}$$

b)  ${}_0 \mathcal{D}_{x_1}^{-v_2} g(x_1)$

**Solución:**

$${}_0 \mathcal{D}_{x_1}^{-\frac{5}{2}} \left( x_1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} dt \quad (4.12)$$

Cambio de variable	Límites de integración
$t = sx_1$	$t = x_1 \rightarrow s = 1$
$dt = x_1 ds$	$t = 0 \rightarrow s = 0$

(4.13)

Teniendo en cuenta (4.12) - (4.13) se tiene:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \int_0^1 (x_1 - sx_1)^{\frac{3}{2}} (sx_1)^{\frac{3}{2}} x_1 ds \\ &= \frac{x_1^4}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \int_0^1 (1 - s)^{\frac{3}{2}} (s)^{\frac{3}{2}} ds \\ &= \frac{x_1^4 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma(5)} \end{aligned}$$

$${}_0 \mathcal{D}_{x_1}^{-\frac{5}{2}} \left( x_1^{\frac{3}{2}} \right) = (0.0554 \dots) x_1^4$$

c)  ${}_0 \mathcal{D}_{x_1}^{-v_1} {}_0 \mathcal{D}_{x_1}^{-v_2} g(x_1)$

**Solución:**

$${}_0 \mathcal{D}_{x_1}^{-\frac{3}{2}} {}_0 \mathcal{D}_{x_1}^{-\frac{5}{2}} \left( x_1^{\frac{3}{2}} \right) = {}_0 \mathcal{D}_{x_1}^{-\frac{3}{2}} \left[ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} dt \right]$$

Teniendo en cuenta el resultado de (4.12) se tiene

$$\begin{aligned} &= {}_0 \mathcal{D}_{x_1}^{-\frac{3}{2}} (0.0554 \dots) x_1^4 \\ &= (0.0554 \dots) \left[ {}_0 \mathcal{D}_{x_1}^{-\frac{3}{2}} (x_1^4) \right] \\ &= (0.0554 \dots) \left[ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{\frac{1}{2}} t^4 dt \right] \quad (4.14) \end{aligned}$$

Cambio de variable	Límites de integración
$t = sx_1$	$t = x_1 \rightarrow s = 1$
$dt = x_1 ds$	$t = 0 \rightarrow s = 0$

(4.15)

Nuevamente reemplazando (4.15) en (4.14) se tiene:

$$\begin{aligned}
 &= (0.0554 \dots) \left[ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^1 (x_1 - sx_1)^{\frac{1}{2}} (sx_1)^4 x_1 ds \right] \\
 &= (0.0554 \dots) \left[ \frac{\left(x_1^{\frac{11}{2}}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^1 (1-s)^{\frac{1}{2}} s^4 ds \right] \\
 &= (0.0554 \dots) \left[ \frac{\left(x_1^{\frac{11}{2}}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(5)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{13}{2}\right)} \right] \\
 &= (0.0046 \dots) x_1^{\frac{11}{2}}
 \end{aligned}$$

d)  ${}_0 \mathfrak{D}_{x_1}^{-\nu_2} {}_0 \mathfrak{D}_{x_1}^{-\nu_1} g(x_1)$

**Solución:**

$${}_0 \mathfrak{D}_{x_1}^{-\frac{5}{2}} {}_0 \mathfrak{D}_{x_1}^{-\frac{3}{2}} \left(x_1^{\frac{3}{2}}\right) = {}_0 \mathfrak{D}_{x_1}^{-\frac{5}{2}} \left[ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}} dt \right]$$

Teniendo en cuenta el resultado de (4.10) se tiene

$$\begin{aligned}
 &= {}_0 \mathfrak{D}_{x_1}^{-\frac{5}{2}} (0.2216 \dots) x_1^3 \\
 &= (0.2216 \dots) \left[ {}_0 \mathfrak{D}_{x_1}^{-\frac{5}{2}} (x_1^3) \right] \\
 &= (0.2216 \dots) \left[ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{\frac{3}{2}} t^3 dt \right] \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Cambio de variable	Límites de integración
$t = sx_1$	$t = x_1 \rightarrow s = 1$
$dt = x_1 ds$	$t = 0 \rightarrow s = 0$

(4.17)

Teniendo en cuenta (4.16) - (4.17) se tiene:

$$= (0.2216 \dots) \left[ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \int_0^{x_1} (x_1 - sx_1)^{\frac{3}{2}} (sx_1)^3 x_1 ds \right]$$

$$= (0.2216 \dots) \left[ \frac{\left(x_1^{\frac{11}{2}}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \int_0^1 (1-s)^{\frac{3}{2}} s^3 ds \right]$$

$$= (0.0046 \dots) x_1^{\frac{11}{2}}$$

e)  ${}_0 \mathfrak{D}_{x_1}^{-(v_1+v_2)} g(x_1)$

**Solución:**

$${}_0 \mathfrak{D}_{x_1}^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)} \left(x_1^{\frac{3}{2}}\right) = {}_0 \mathfrak{D}_{x_1}^{-4} \left(x_1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{\Gamma(4)} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^3 t^{\frac{3}{2}} dt \quad (4.18)$$

Cambio de variable	Límites de integración
$t = sx_1$	$t = x_1 \rightarrow s = 1$
$dt = x_1 ds$	$t = 0 \rightarrow s = 0$

(4.19)

Teniendo en cuenta (4.18) - (4.19) se tiene:

$${}_0 \mathfrak{D}_{x_1}^{-4} \left(x_1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{\Gamma(4)} \int_0^1 (x_1 - sx_1)^3 (sx_1)^{\frac{3}{2}} x_1 ds$$

$$= \frac{x_1^{\frac{11}{2}}}{\Gamma(4)} \int_0^1 (1-s)^3 (s)^{\frac{3}{2}} ds$$

$$= \frac{x_1^{\frac{11}{2}} \Gamma(4) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4) \Gamma\left(\frac{13}{2}\right)}$$

$$= (0.0046 \dots) x_1^{\frac{11}{2}}$$

#### 4.1.8. Existencia del operador de Integración no entero de Riemann-Liouville

Sea la función real  $g$  continua en el intervalo semi-infinito  $[0, \infty)$  y fijamos los escalares

$-v, x_1 > 0$ . Si definimos la función  $h(\tau) = -\frac{(x_1 - \tau)^v}{\Gamma(v+1)}$ ,  $0 \leq \tau \leq x_1$  entonces

$$h'(\tau) = \frac{(x_1 - \tau)^{v-1}}{\Gamma(v)} > 0$$

por tanto  $h$  es creciente en  $[0, x_1]$ . Entonces, el operador de integración no entero de Riemann-Liouville se puede expresar como una integral de Riemann-Stieltjes:

$${}_0 \mathfrak{D}_{x_1}^{-\nu} g(x_1) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{x_1} (x_1 - \tau)^{\nu-1} g(\tau) d\tau = \int_0^{x_1} g(\tau) dh(\tau)$$

Como  $g$  es continua y  $h$  es monótona, implican que el operador de integración existe, para todo  $x_1 > 0$ .

## 4.2. Discusión de resultados

**4.2.1.** La extensión del operador de integración no entero de Riemann-Liouville se realizó demostrando la fórmula de Cauchy, y utilizando reiteradamente la definición de Guido Fubini para luego aplicar una demostración inductiva, y finalmente obtener:

$${}_c \mathfrak{D}_z^{-\nu} g(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^z (z - s)^{\nu-1} g(s) ds$$

**4.2.2.** La extensión del operador de integración no entero de Riemann-Liouville de la función constante se efectuó aplicando la definición de Riemann -Liouville, luego se resolvió la integral realizando un cambio de variable y aplicando las propiedades de la función Gamma Euleriana, para finalmente obtener:

$${}_c \mathfrak{D}_{x_1}^{-\nu} = \frac{k}{\Gamma(\nu + 1)} (x_1 - c)^\nu$$

**4.2.3.** La extensión del operador de integración no entero de Riemann-Liouville de la función potencia se realizó aplicando la definición de Riemann -Liouville, luego se resolvió la integral realizando un cambio de variable y aplicando las propiedades de la función Gamma y Beta Euleriana, para finalmente obtener:

$${}_c \mathfrak{D}_{x_1}^{-\nu} (x_1 - c)^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\nu + \lambda + 1)} (x_1 - c)^{\nu+\lambda}$$

**4.2.4.** La extensión del operador de integración no entero de Riemann-Liouville de la función logaritmo se logró aplicando la definición de Riemann-Liouville, luego se resolvió la integral haciendo un cambio de variable y aplicando una integración por partes. De igual forma, se 67 utilizaron las propiedades de las funciones Eulerianas Gamma, Beta y Digamma para finalmente obtener:

$${}_c \mathfrak{D}_{x_1}^{-\nu} \ln(x_1 - c)^\lambda = \frac{(x_1 - c)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} [\ln(x_1 - c) - \lambda - \psi(\nu + 1)]$$

**4.2.5.** La extensión del operador de integración no entero de Riemann-Liouville de la función exponencial se puede hacer de dos maneras:

Primero, escribe la exponencial como una serie de Maclaurin que da la potencia arbitraria multiplicada por la función de Mittag-Leffler, es decir,

$${}_0\mathfrak{D}_t^{-\nu}e^{ct} = t^\nu E_{1,\nu+1}(ct)$$

Segundo, usando la definición de Riemann-Liouville para usar las propiedades de la función Gamma y Gamma Incompleta, es decir,

$${}_0\mathfrak{D}_t^{-\nu}e^{ct} = t^\nu e^{ct} \gamma^*(\nu, ct)$$

# **CAPÍTULO V**

## **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

### **5.1. Conclusiones**

**5.1.1.** Por **4.1.1. a)** el operador de integración no entero de Riemann-Liouville es una extensión del operador de integración entera.

**5.1.2.** Por **4.1.2. a)** es posible determinar la extensión del operador de integración no entero de Riemann-Liouville de la función constante.

**5.1.3.** Por **4.1.3. a)** es posible determinar la extensión del operador de integración no entero de Riemann-Liouville de la función potencia.

**5.1.4.** Por **4.1.4. a)** es posible determinar la extensión del operador de integración no entero de Riemann-Liouville de la función logaritmo.

**5.1.5.** Por **4.1.5. a)** es posible determinar la extensión del operador de integración no entero de Riemann-Liouville de la función exponencial mediante la potencia no entera multiplicada por la función especial del tipo Mittag-Leffler.

### **5.2. Recomendaciones**

**5.2.1.** Resultaría de gran interés estudiar los operadores de Integración de Riemann-Liouville sobre intervalos infinitos.

**5.2.2.** Resultaría de gran interés realizar estudios de los operadores de Integración de Riemann-Liouville sobre espacios de funciones generalizadas o funciones de pruebas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Apostol, T. (1967). *Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*. John Wiley & Sons.
- Artin, E. (1964). *The Gamma Function*. Athena Series. Selected Topics in Mathematics.
- Bell, W. (1968). *Special function for scientists and engineers*. D. Van Nostrand Company Ltd.
- Bourbaki, N. (2004). *Integration*. Springer.
- Chaudhry, M. & Zubair, S. (2002). *On a Class of Incomplete Gamma Functions with Applications*. Estados Unidos de América. Chapman .
- Chávez, J. (2018). *Generalización de la Integral de Orden Ordinario a Orden Fraccionario*. Revista Ciencia & Desarrollo - UNJBG, 22(1) ,87-93.
- Chávez, J. & Gomez, B. (2019). *Generalización de la integral clásica a integral de orden arbitrario*. Revista Ciencias - UNJBG, 3(1) ,52-59.
- Despotovic, V., McNaughton, B., Podlubny, I. & Skovranek, T. (2007). *Shadows on the Walls : Geometric Interpretation of Fractional Integration*. Article ID 1664.
- Euler, L. (1738). *De progressionibus transcendentibus*. San Petersburgo. Academiae Scientiarum.
- Fourier, B. (1822). *Théorie Analytique de la Chaleur* . Paris. Chez Firmin.
- Hardy, G. & Littlewood, J. (1928). *Some properties of fractional integrals* , *Math.2*, 27, 565-606.

Hildebrandt, T. (1953). *Integration in abstract spaces*. Bulletin of the American Mathematical Society

Kilbas, A., Srivastava & Trujillo, J. (2006) *Theory And Applications Of Fractional Differential Equations*. Elsevier.

Kiryakova, V. (1998) . *Transform Methods and Special Functions*. Varna. Institute of Mathematics and Informatics.

Laplace, S. (1812). *Théorie Analytique des Probabilités*. . Paris. Imprimeur.

Levedev, N. (1972). *Special functions and their applications*. First. London: Prentice-Hall, Inc.

Liouville, J. (1832). *Mémoire sur questions de Géométrie et de Mécanique*. Polytechnique.

Mainardi, F. (1998) . *Considerations on fractional calculus: Interpretation and applications*. Varna. Institute of Mathematics and Informatics.

Oldham, K. & Spanier, J. (1974). *The fractional calculus*. Academia Press. New York.

Ross, B. (1975). *Fractional calculus and its applications*. New York. Springer.

Ross, B. (1977). *The development of fractional calculus*. Academic Press.

Rudin, W. (1986). *Real and Complex Analysis*. New York. McGraw-Hill.

Stein, E. & Shakarchi, R. (2003). *Complex Analysis*. Princeton University Press.

## **ANEXOS**

### Anexo 1: Operadores de Integración

<b>Operadores de Integración enteros de Liouville-Weyl sobre intervalos semi-infinitos <math>[c, \infty)</math> y <math>(-\infty, d]</math>.</b>	$(\mathfrak{D}_+^{-\nu} g)(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^z (z-t)^{\nu-1} g(t) dt \quad (z > -\infty)$
	$(\mathfrak{D}_-^{-\nu} g)(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_z^{\infty} (t-z)^{\nu-1} g(t) dt \quad (-\infty < z < \infty)$

#### Operadores de Integración no enteros de Hadamard

$$(\mathfrak{D}_+^{-\nu} g)(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^z \frac{g(t)}{\left(\ln \frac{z}{t}\right)^{1-\nu}} \frac{dt}{t} \quad (z > 0, \nu > 0)$$

Esto permitió introducir a Samko-Kilbas –Marichev los siguientes operadores de integración no enteros de Hadamard.

$$(\mathfrak{D}_c^{-\nu} g)(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^z \frac{g(t)}{\left(\ln \frac{z}{t}\right)^{1-\nu}} \frac{dt}{t} \quad (z > c \geq 0, \nu > 0)$$

$$(\mathfrak{D}_d^{-\nu} g)(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_z^d \frac{g(t)}{\left(\ln \frac{t}{z}\right)^{1-\nu}} \frac{dt}{t} \quad (0 < z < d, \nu > 0)$$

$$(\mathfrak{D}_+^{-\nu} g)(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{\infty}^z \frac{g(t)}{\left(\ln \frac{z}{t}\right)^{1-\nu}} \frac{dt}{t} \quad (z > 0, \nu > 0)$$

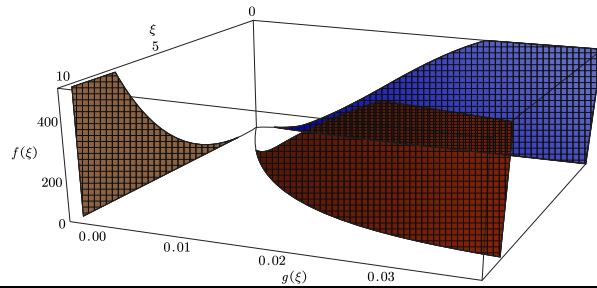
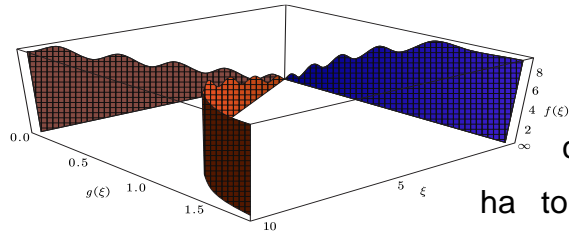
$$(\mathfrak{D}_-^{-\nu} g)(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_z^{\infty} \frac{g(t)}{\left(\ln \frac{t}{z}\right)^{1-\nu}} \frac{dt}{t} \quad (z > 0, \nu > 0)$$

## Anexo 2: Interpretación Geométrica

<p><b>Interpretación geométrica del operador de Integración no entero según Igor Podlubny.</b></p>	<p>1. Por la definición de operador de integración no entero de Riemann-Liouville tenemos:</p> ${}_0\mathcal{D}_z^{-\nu} g(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^z (z - \xi)^{\nu-1} g(\xi) d\xi$ <p>2. Sea la función <math>h_z(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \{z^\nu - (z - \xi)^\nu\}</math></p> <p>3. Derivando con respecto <math>\xi</math> tenemos:</p> $dh(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} (z - \xi)^{\nu-1}$ <p>4. Expresando el operador de integración <math>{}_c\mathcal{D}_z^{-\nu}</math> como</p> ${}_0\mathcal{D}_z^{-\nu} g(z) = \int_0^z g(\xi) dh_x(\xi) d\xi,$ <p>que es una integral de Stieltjes.</p> <p>5. Fijando <math>z &gt; 0</math>, dibujamos el camino <math>\Gamma(\xi) = (\xi, h_z(\xi), g(\xi))</math> en <math>\mathbb{R}^3</math>, uniendo esta curva con su proyección en el plano <math>(\xi, h_z(\xi))</math> formamos una malla curvada o cerco.</p> <p>6. Proyectando la malla sobre la pared <math>(\xi, g(\xi))</math> obtenemos una sombra en la pared cuya área es <math>\int_0^z g(\xi) d\xi</math> (sombra marrón).</p> <p>7. En cambio sí proyectamos la malla sobre la pared <math>(h_z(\xi), g(\xi))</math>, el área de la sombra <math>\int_0^z g(\xi) dh_z(\xi) d\xi = {}_0\mathcal{D}_z^{-\nu} g(z)</math> (sombra azul).</p> <p>8. Cuando más curvada este la malla, mas diferencia hay entre el operador de Integración entero y el operador de Integración no entero entre las respectivas proyecciones en cada pared.</p> <p>9. Para la figura el operador de integración <math>\nu = 0.5</math> la función <math>g(z) = z + 0.5 \sin(3z)</math></p>
--	--

con  $z = 10$ .

10. En cambio en la figura se ha tomado  $v = 0.1$  la función  $g(z) = z^3$  con  $z = 10$ .



### Anexo 3: Operador de integración no entero

<p><b>El operador de Integración no entero vista como la convolución entre funciones</b></p>	<p>1. Definimos la convolución <math>h_1 * h_2</math> entre dos funciones <math>h_1(x_1)</math> y <math>h_2(x_1)</math> como</p> $(h_1 * h_2)(x_1) = \int_0^{x_1} h_1(\tau)h_2(x_1 - \tau)d\tau$ $= \int_0^{x_1} h_1(x_1 - \tau)h_2(\tau) d\tau$ <p>2. Expresamos el operador de Integración no entero como la convolución entre dos funciones, y para ello definimos la función</p> $g_v(x_1) = \frac{x_1^{v-1}}{\Gamma(v)}, \tau > 0.$ <p>3. Por lo tanto</p> ${}_0\mathcal{D}_{x_1}^{-v} h_1(z) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^{x_1} (x_1 - \tau)^{v-1}h_1(\tau)d\tau$ $= (g_v * h_1)(x_1)$ <p>VPO</p>
--	---

## Anexo 4: Matriz de Consistencia

### Generalización de la integral clásica a integral de orden arbitrario

PROBLEMA	OBJETIVO	HIPÓTESIS	VARIABLES	INDICADORES	MUESTRA	DISEÑO	INSTRUMENTO
<p><b>Problema General:</b> ¿Bajo qué condiciones determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero?</p> <p><b>Problemas Específicos:</b> a) ¿Bajo qué condiciones determinar la extensión del operador de integración entera al operador de integración de orden no entero de la función constante? b) ¿Bajo qué condiciones determinar la extensión del operador de integración entera al operador de integración de orden no entero de la función potencia? c) ¿Bajo qué condiciones determinar la extensión del operador de integración entera al operador de integración de orden no entero de la función logaritmo? d) ¿Bajo qué condiciones determinar la extensión del operador de la integración entera al operador de integración de orden no entero de la función exponencial?</p>	<p><b>Objetivo General:</b> Determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero.</p> <p><b>Objetivos Específicos:</b> a) Determinar la extensión del operador de integración entera al operador de integración de orden no entero <math>\nu</math> de la función constante. b) Determinar la extensión del operador de integración entera al operador de integración de orden no entero <math>\nu</math> de la función potencia. c) Determinar la extensión del operador de integración entera al operador de integración de orden no entero <math>\nu</math> de la función logaritmo. d) Determinar la extensión del operador de integración entera al operador de integración de orden no entero <math>\nu</math> de la función exponencial.</p>	<p><b>Hipótesis General:</b> Se puede determinar la extensión del operador de integración entero al operador de integración de orden no entero</p> <p><b>Hipótesis Específicas:</b> a) Se puede determinar la extensión del operador de integración entera al operador de integración de orden no entero <math>\nu</math> de la función potencia. b) Se puede determinar la extensión del operador de integración entera al operador de integración de orden no entero <math>\nu</math> de la función potencia. c) Se puede determinar la extensión del operador de integración entera al operador de integración de orden no entero <math>\nu</math> de la función logaritmo. d) Se puede determinar la extensión del operador de integración entera al operador de integración de orden no entero <math>\nu</math> de la función exponencial.</p>	<p><b>Variable independiente (VI):</b> a) Funciones medibles en el sentido de Lebesgue .</p> <p><b>Variable dependiente (VD):</b> a) Operador de integración de Riemann -Liouville</p>	<p><b>Indicadores de VI:</b> a) Constante del espacio <math>L^1[(c, d)]</math>. b) Potencia del espacio <math>L^1[(c, d)]</math>. c) Logaritmo del espacio <math>L^1[(c, d)]</math>. d) Exponencial del espacio <math>L^1[(c, d)]</math>.</p> <p><b>Indicadores de VD:</b> a) Operador de integración Riemann-Liouville de la constante. b) Operador de integración Riemann-Liouville de la potencia. c) Operador de integración Riemann-Liouville del logaritmo. d) Operador de integración Riemann-Liouville de la exponencial.</p>	<p>Población=Muestra La tesis corresponde a las ciencias matemáticas y su análisis de investigación considera a los operadores de integración de orden no entero de Riemann -Liouville.</p>	<p>De acuerdo al diseño de Investigación es explicativa y de acuerdo al fin que se persigue es de tipo básica, que nos llevará a la búsqueda de nuevos conocimientos en las ecuaciones diferenciales ordinarias arbitrarias.</p>	<p>a) Demostración directa. b) Demostración indirecta. c) Demostración por inducción. d) Teoremas. e) Definiciones. f) Lemas.</p>