UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL HIPERBÓLICA HOMOGÉNEA QUE MODELA LAS VIBRACIONES DE UNA CUERDA

TESIS

Presentada por:

Bach. WALTER GIL ZEGARRA CCAMA

Para optar el Título Profesional de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TACNA – PERÚ

2024

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N° 427

En la ciudad de Tacna, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann; siendo las 11:00 horas del día 02 de octubre del 2024, estando presentes el Jurado Calificador nominado por Resolución de Facultad N° 11049-2024-FACI-UN/JBG conformado por los siguientes docentes:

Dr. Humberto Benito Vargas Pichón	Presidente
Dr. Dionicio Milton Chávez Muñoz	Secretario
Dr. Luis Andrés Amaya Cedrón	Vocal

Acto seguido, se dio lectura a la Resolución correspondiente y del mismo modo se dio lectura al artículo 22 del Reglamento de la Facultad de Ciencias. A continuación el Presidente del Jurado instó al Bachiller Walter Gil Zegarra Ccama a exponer la Tesis titulada "Solución de una ecuación diferencial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda" para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática. Siendo las 11:50 horas el tesista concluye su exposición; en seguida se procedió a la formulación de preguntas por parte de los miembros del Jurado. Terminado este acto, se invita a los miembros del Jurado emitan su calificación de acuerdo al Reglamento. El promedio de calificación dio el siguiente resultado: unanimidad con nota de dieciséis (16) de Acuerdo al Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann.

Siendo las 12:10 horas, se dio por concluido el acto de sustentación de la Tesis, firmando los señores miembros del Jurado Calificador, en señal de conformidad.

Dr. Humberto Benito Vargas Pichón
Presidente

Dr. Dionicio Milton Chávez Muñoz
Secretario

Dr. Luis Andrés Amaya Cedrón
Vocal

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Luis Andrés Amaya Cedrón, en mi condición de asesor acreditado por la Resolución de Facultad R.F. Nº 10424-2022-FACI-UN/JBG de la tesis titulada: **"SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERECIAL HIPERBÓLICA HOMOGÉNEA QUE MODELA LAS VIBRACIONES DE UNA CUERDA"**, presentado por el Bachiller Walter Gil Zegarra Ccama para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, habiendo cumplido con lo establecido en el Reglamento de originalidad y de similitud de trabajo de investigación y producción intelectual, considerando que según la revisión, evaluación y análisis realizado a través del software de similitud textual TURNITIN cuenta con el nivel de similitud cuyo porcentaje es 9% por lo que **CERTIFICO LA SIMILARIDAD** de la tesis, la cual está de acuerdo al nivel **PERMITIDO**, para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio Institucional**.

Se emite el presente certificado con fines de continuar con los trámites respectivos para su obtención del título profesional.

Firma del Asesor

DNI Nº 17906098

Nombre y Apellido del Asesor: Luis Andrés Amaya Cedrón

Firma del Tesista

Walter Gil Zegarra Ccama

DEDICATORIA

- A la Santísima Trinidad, Nuestra Señora, Nuestro Señor de Locumba, Nuestro Señor del Santo Sepulcro y Nuestro Señor de San Bartolomé de Juli.

- A mis padres Gil y Margarita, a mis apreciados hermanos a quienes dedico con mucho cariño.

- A mi esposa Luzmila y apreciados hijos Kenedy, Kevin y Álvaro, motivo de superación y ejemplo.

AGRADECIMIENTO

A la Universidad Nacional "Jorge Basadre Grohmann" Alma Mater de la educación superior.

A mis maestros catedráticos de la Escuela Profesional de Matemática, por su valioso aporte y amplio conocimiento demostrado durante mi formación profesional en epistemología de la matemática pura.

A mi Asesor Dr. Luis Andrés Amaya Cedrón por su apoyo y orientación profesional en el desarrollo de la investigación en Matemática Pura.

Al Msc. Jhony Alfonso Chávez Delgado, por su asesoría, orientación y apoyo durante el desarrollo de Seminario de Tesis I y II en Matemática Pura de la presente Tesis.

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

El propósito de este informe de tesis es establecer la solución de una ecuación diferencial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda. Para esto se empleó el método inductivo - deductivo y así obtener la solución por medio de series de Fourier de la ecuación de una onda unidimensional la cual se altera en su posición de equilibrio. Como resultado se establece que, si la serie de Fourier de una función dada en forma trigonométrica converge en cada punto, se obtiene la solución de la ecuación de la onda unidimensional homogénea, Ecuación Diferencial Parcial de segundo orden, lineal e hiperbólica usando el método de Fourier. La solución de una Ecuación Diferencial Hiperbólica Homogénea se justifica principalmente porque este tipo de ecuaciones modelan las pequeñas vibraciones de una cuerda elástica, la propagación de una onda acústica o electromagnética en un medio elástico las cuales son solucionadas con la ayuda del Análisis Funcional y las Ecuaciones Diferenciales Parciales. A demás se usó el programa Wolfram Mathematica, Fortran F90, Fortran F95 y GNU Octave para el comparativo del análisis numérico de diferencias finitas de la onda unidimensional con la solución exacta y los gráficos correspondientes.

Palabras clave: Ecuación Diferencial Hiperbólica, vibraciones de una cuerda, Series de Fourier, Método de Fourier, análisis numérico, diferencias finitas.

ABSTRACT

The purpose of this thesis report is to establish the solution of a homogeneous hyperbolic differential equation that models the vibrations of a string. The inductive and deductive method was used to develop the Fourier series solution of the equation of a one-dimensional wave that is altered in its equilibrium position. As a result, it is established that if the Fourier series of a function, given in trigonometric form converge at each point, the solution of the equation of the homogeneous one-dimensional wave, linear and hyperbolic second-order Partial Differential Equation is obtained using the Fourier method. The solution of a Homogeneous Hyperbolic Differential Equation is mainly justified because this type of equation model the small vibrations of an elastic rope, the propagation of an acoustic or electromagnetic wave in an elastic medium, which are solved with the help of Functional Analysis and the Equations Partial Differentials. In addition, the Wolfram Mathematica, Fortran F90, Fortran F95 and GNU Octave programs were used to compare the numerical analysis of finite differences of the one-dimensional wave with the exact solution and the corresponding graphs.

Keywords: Hyperbolic Differential Equation. String vibrations, Fourier series, Fourier Method, numerical analysis, finite differences.

INTRODUCCIÓN

El trabajo de investigación denominada “Solución de una ecuación diferencial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda” configura el comportamiento de ondas unidimensionales que se genera al soltar o perturbar su estado de equilibrio de una cuerda atada en ambos extremos, mediante una expresión matemática de Ecuación Diferencial Parcial (EDP) de segundo orden de manera analítica y mediante análisis numérico usando software científico.

El método de diferencias finitas permite aproximar a la solución exacta y en ella el dominio conformado por el espacio y el tiempo a partir de nodos para aproximar las segundas derivadas parciales con polinomios de segundo grado centrados en el punto (x_i, t_j).

El objetivo del trabajo de investigación es contrastar la solución exacta y el resultado por análisis numérico a través de la programación en software científico Fortran F90, Fortran F95, Wolfram Mathematica y GNU Octave de diferencias finitas con valores iniciales y de contorno, la cual está estructurado en cuatro capítulos de la siguiente manera: Planteamiento del estudio, preliminares como antecedentes, Series de Fourier, resultados y discusión.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO

1.1. Descripción de la realidad problemática

El fenómeno de la ecuación de una onda en particular es una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) de segundo orden, lineal e hiperbólica dadas las variables independientes x e y, así mismo la variable dependiente $u = u(x, y)$, del dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, dada por $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$, pero como la Ecuación Diferencial Parcial es de segundo orden, debemos tener presente que $A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0$, para $B^2 - 4AC > 0$, garantiza que la ecuación no sea trivial, y es importante para validar que tenga soluciones significativas y en conjunto estas condiciones son importantes para el estudio de la Ecuación Diferencial Parcial que describe la propagación de ondas en un medio continuo. Su clasificación es de tres tipos: ondas mecánicas, electromagnéticas y materiales.

Las ondas mecánicas, sustentadas por las leyes de Newton encontradas en ondas del mar, ondas sísmicas y sonoras.

Las ondas electromagnéticas se propagan en medios materiales y en los rayos ultravioletas, rayos X, microondas, etc.

Las ondas materiales, ligadas a las partículas fundamentales, son usadas en el campo cuántico y tecnologías modernas.
En relación con la dirección de la propagación, las ondas se clasifican como unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales. Las unidimensionales se propagan en una sola dirección, por ejemplo, en cuerdas y resortes, las bidimensionales se propagan a través de una superficie, como la superficie de un lago y las ondas tridimensionales en todas las direcciones del espacio tridimensional.

Supongamos que una cuerda es alterada de su posición de equilibrio a una cierta altura y luego se suelta con velocidad cero, de modo que vibre libremente. Por lo tanto, el desplazamiento vertical debe satisfacer el problema del valor inicial y de contorno. Así, en todo este contexto es natural formular los siguientes problemas.

1.2. Definición del problema

1.2.1. Problema General

¿Es posible establecer la solución analítica y por análisis numérico la ecuación diferencial parcial hiperbólica que modela las vibraciones de una cuerda?

1.2.2. Problemas Específicos

a) ¿Bajo qué condiciones es posible establecer la solución analítica la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda?

b) ¿Bajo qué condiciones es posible establecer la solución por análisis numérico la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda?

c) ¿En qué medida se aproximan la solución analítica y por análisis numérico la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo General

Establecer la solución analítica y por análisis numérico la ecuación diferencial parcial hiperbólica que modela las vibraciones de una cuerda.

1.3.2. Objetivos específicos

a) Establecer la solución analítica de la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda.

b) Establecer la solución por análisis numérico la solución de la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda.

c) Interpretar la aproximación entre la solución analítica y por análisis numérico la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda.

1.4 Justificación e importancia de la investigación

La tesis de investigación denominada: "Solución de una Ecuación Diferencial Hiperbólica Homogénea que modela las vibraciones de una cuerda", se justifica principalmente por la importancia de conocer la relación o diferencia que existe en su solución analítica exacta y solución aproximada por diferencias finitas empleando el software científico Fortran F95 de la ecuación de la onda de cuerda atada en ambos extremos durante su vibración, lo cual tiene mucha importancia, pues existen numerosas aplicaciones en las ciencias matemáticas de este tipo de ecuaciones que modelan las pequeñas vibraciones de una membrana flexible y elástica, así mismo modelan la propagación de una onda acústica o electromagnética en un medio elástico las cuales son solucionadas con la ayuda del Análisis Funcional y las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

La vibración generada en la cuerda atada de ambos extremos es matematizada a través de las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas homogéneas y para muchos, estos movimientos son de gran interés desde una mirada física y matemática, despreciándose en este caso las fuerzas de fricción, fuerzas internas, fuerzas externas y gravedad; pero, considerando la importancia de las derivadas parciales en diferencias finitas con condición inicial y de frontera, se realiza la aproximación de la solución analítica y numérica para la ecuación de la onda, haciendo uso del software científico Fortran F95 y los resultados del desarrollo de las series de Fourier son corroboradas de manera gráfica con el GNU Octave y Wolfram Mathematica.

Actualmente la investigación sobre la solución de una ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela el comportamiento de la cuerda sigue siendo una línea de trabajo en el ámbito de la Teoría de Distribuciones y los Espacios de Sobolev para abordar conocimiento, reflexión, debate y aporte académico en centros de educación superior y en el caso particular desde la Escuela Profesional de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann de Tacna.

1.5. Variables

a) **Variable de estudio 1**

Solución de la Ecuación Diferencial Parcial de la cuerda de manera analítica.

b) **Variable de estudio 2**

Solución de la Ecuación Diferencial Parcial de la cuerda por análisis numérico.

c) **Variable de estudio 3**

Interpretación de aproximación por análisis numérico a la solución analítica exacta de la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda.

1.6. Hipótesis de la investigación

1.6.1. Hipótesis General

Se puede establecer la solución analítica y por análisis numérico la ecuación diferencial parcial hiperbólica que modela las vibraciones de una cuerda.

1.6.2. Hipótesis Específicas

a) Se puede establecer la solución analítica de una ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda.

b) Se puede establecer la solución por análisis numérico la solución de la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda.

c) Se puede interpretar la aproximación entre la solución analítica y por análisis numérico la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda.

CAPÍTULO II

PRELIMINARES

2.1. Antecedentes de la investigación

2.1.1. Antecedentes internacionales

a) Ruiza, Fernandez y Tamayo (2004), destaca que las investigaciones de Pierre de Fermat se iniciaron 1629, como premio a los aportes de Apolonio al uso del sistema de coordenadas cartesianas para resolver problemas geométricos y situaciones algebraicas, lo que se denomina geometría analítica. Destacando aportes de Francois Viete tales como: ecuaciones de la recta, hipérbolas, parábolas y circunferencias.

   Fermat también es reconocido como uno de los matemáticos que dio este salto cuántico al Cálculo y el primero en estudiar problemas de máximos y mínimos (ya en 1636 mediante el método que ahora llamamos “derivada” registrado por primera vez), en los tiempos de las obras del obispo francés Nicolás de Oresme.

   Fue posible crear un algoritmo diferencial, para determinar los valores máximos y mínimos de una curva polinómica y trazar las tangentes correspondientes; todos estos logros allanaron el camino para el desarrollo posterior del cálculo de Newton y Leibniz.

b) Sánchez y Valdés (2021), Jacob Bernoulli es considerado el primero de la familia en estudiar en una universidad, el primero en ciencias matemáticas, el primero en obtener el Grado de Doctor y el primero en ser nombrado como profesor de matemáticas de la familia en la Universidad de Basilea. Su carrera científica giró en torno a la esencia del estudio de las curvas utilizando el nuevo Cálculo.

   Al final de este trabajo, Jacob propuso como su desafío lo que denominamos el problema de la catenaria: consiste de encontrar la forma matemática que tomaría una cuerda (o cadena), perfectamente elástica y uniforme, atada en ambos extremos por la acción de su propio peso.

   El trabajo en el que Jacob resolvió es el problema de la braquistócrona fue el título original “La decisión sobre el problema de mi hermano, que planteó otro problema” dos nuevos problemas. Anteriormente mencioné el hallazgo del camino más rápido entre una familia específica de cicloides y lo acelerado resuelto por Johann.

c) Piñeros y Garzón (2009), en su artículo producto del resultado de su proyecto de investigación titulado “Modelado matemático de procesos de ingeniería mecánica y biomédica, financiado por la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá” sobre la solución numérica de la ecuación de onda de la Revista Journal Ingeniería y Universidad, señala que las soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales parciales han evolucionado con el tiempo, pero aún están sujetas a investigación y desarrollo continuo. En su trabajo publicado, propuso dos métodos para la solución computacional de ecuaciones de onda que involucran problemas de tiempo: el Método de Diferencias Finitas (DF) y el de Newmark. En comparación con el DF, el método de Newmark tiene una alta precisión y una excelente convergencia. Mientras, el método de DF es fácil de implementar. Para comparar los dos métodos, se han adoptado dos problemas de prueba típicos en Fortran: un problema de prueba con una membrana cuadrada con bordes completamente fijos y una velocidad inicial ubicada en el centro, y un problema de prueba con una viga empotrada simple con una velocidad inicial ubicada en uno de sus extremos. Cada uno de estos problemas se puede implementar utilizando métodos de elemento finitos en el espacio.

El presente trabajo de investigación recoge el aporte del método de diferencias finitas en Fortran para contrastar con la solución analítica exacta y por análisis numérico la ecuación de la onda unidimensional de una cuerda.

d) Gómez, J. y Gómez, D. (2021), en su trabajo de investigación de final de carrera en matemáticas, concluyó: “Una de las aplicaciones más importantes de la ecuación de onda se refiere a los llamados sistemas oscilatorios. En este trabajo, el problema de describir las fluctuaciones de un medio es si es homogéneo o no”. En este trabajo estudiamos un problema que describe las oscilaciones de un medio, ya sea en estado homogéneo o mixto, preservando su borde, teniendo en cuenta su posición inicial y velocidad. El problema se formula dentro de un marco abstracto que garantiza la existencia y unicidad de la solución. Luego se identifican soluciones para algunos casos específicos. A similitud, el trabajo de investigación a desarrollarse consiste en establecer específicamente las ecuaciones de las vibraciones de la cuerda hiperbólica homogénea y sus valores por método analítico y por Análisis Numérico.

2.1.2. Antecedentes nacionales

a) Poemape, B. (2021), en su informe de Tesis titulada: "Consistencia, estabilidad y convergencia de la solución de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas mediante la utilización de diferencias finitas", menciona: el método de diferencias finitas debe ser suficientemente consistente y estable. También considera que el número de iteraciones, se debe tener criterio con respecto al número de pasos en la variable espacial y variable temporal, ya que debe cumplirse la condición CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) para la estabilidad del método. Es por ello que la presente tesis toma como referencia de aplicación de la consistencia, estabilidad y convergencia en la validación de estos parámetros de investigación en la solución de la Ecuación Diferencial Parcial Hiperbólica Homogénea que modela las vibraciones de una cuerda.

b) Santamaría, A. y Ramirez, J. (2015), en su informe de Tesis titulada: "Diferencias Finitas Asistido con Matlab en la Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas" concluyen: se determina la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas de segundo orden utilizando el método de diferencias finitas por su discretización, valorando al Matlab como una herramienta digital de gran soporte de apoyo en la solución numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas. También se resalta que la aplicación de métodos clásicos (Separación de Variables, Transformada de Laplace) y el método de diferencias finitas progresivas en la solución de EDP Hiperbólicas, se verifica que los resultados son semejantes.

A diferencia el presente trabajo de investigación usa el software científico Fortran F95, Wolfram Mathematica y GNU Octave con el método de diferencias finitas centradas en la solución de EDP Hiperbólicas.

2.1.3. Antecedentes regionales

a) Amaya y Cabrera (2013), en su trabajo de informe final del PROIN 2012, denominada "Métodos de diferencias finitas para la solución de ecuaciones en derivadas parciales elípticas, parabólicas e hiperbólicas" mencionan: la obtención de fórmulas en diferencias finitas aproximan las derivadas parciales en un punto del dominio con el objeto de sustituir dichas expresiones en la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden, permite aproximar los resultados a la solución analítica. Así mismo el presente trabajo de investigación establece el movimiento vibratorio de las ondas y su expresión matemática relacionada con la Ecuación Diferencial Parcial Hiperbólica Homogénea e interpreta los resultados del procedimiento analítico y por Análisis Numérico del comportamiento de la onda unidimensional.

b) Chávez, Becerra, Rodriguez y López (2017), en su informe final de investigación titulada “Existencia y unicidad de la solución generalizada de una ecuación diferencial hiperbólica que modela la propagación de una onda en un medio elástico sometida a una fuerza externa” llegan a la conclusión que existe solución débil para el problema hiperbólico, es decir de una función $u: [0,T] \to H_0^1(\Omega)$, satisfaciendo que:

$$\frac{d}{dt}(u'(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v) \qquad \text{en } D'(0,T) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

También mencionan que la solución generalizada $u: [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ del problema hiperbólico es única. Es en esa mirada que, se realiza la presente investigación a través de la solución de una Ecuación Diferencial Hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda mediante solución analítica y Análisis Numérico.

c) Amaya, L. (2018), en su artículo publicado denominado “Solución numérica para la ecuación diferencial parcial hiperbólica: la ecuación de la onda” resume que, la solución numérica de la ecuación de la onda, es de aplicación múltiple en las matemáticas y la ingeniería, haciendo uso del software de cálculo simbólico Matlab. A razón de ello, la presente investigación se diferencia por el uso del software científico Wolfram Mathematica, Fortran F95 y GNU Octave acerca de las vibraciones de la onda unidimensional, ejemplos y soluciones.

d) Miñano, W. (2012), en su informe de tesis titulada "Programa del Método del Elemento Finito para Ecuaciones Diferenciales Parciales Parabólicas con Frontera Convexa", concluye la utilización del programa MATLAB, para implementar algoritmos computacionales del método de elemento finito en la optimización del tratamiento de datos de una EDP parabólica con frontera convexa. También desarrolló fórmulas y algoritmos para el método de elementos finitos y utilizó el lenguaje de programación MATLAB para resolver ecuaciones diferenciales parciales parabólicas con límites curvos. A diferencia el presente trabajo de investigación emplea el método de diferencias finitas en la solución de la EDP hiperbólica homogénea unidimensional mediante el uso del software científico Fortran F95.

2.2. Ecuación diferencial

Se denomina Ecuación Diferencial a la ecuación que contiene derivadas o diferenciales. (Carmona, 1992, p.23).

Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales

1. Tipo de una Ecuación Diferencial

a. Ecuación Diferencial Ordinaria

La Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) es una ecuación que comprende variable independiente x, una función $y(x)$ y una o varias derivadas de $y(x)$.

b. Ecuaciones Diferenciales Parciales

Las ecuaciones diferenciales parciales que expresan algunas leyes físicas aparecen derivadas parciales como la ecuación de Laplace, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, es empleada en el estudio de los campos electrostáticos, funciones armónicas, y juegan un papel importante en problemas relacionados con la conductividad térmica, flujo de fluidos y potencial eléctrico. Analizando esta ecuación, tenemos como variable dependiente U y variables independientes x, y.

Stewart, J. (2012, pp.902 - 908), si f es una función de dos variables, sus derivadas parciales son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Notación para derivadas parciales

Si $z = f(x,y)$, denotamos

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Regla para determinar las derivadas parciales de $z = f(x,y)$

a) Para determinar f_x, conservar a y constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a x.

b) Para determinar f_y, conservar a x constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a y.

2. Orden de una Ecuación Diferencial

El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es la derivada de mayor orden presente en la ecuación. (Zill y Cullen, 2009, p.3).

a. **Primer orden:** se presenta de la siguiente forma

$F(x, y, y') = 0$

b. **Segundo orden:** tenemos

$F(x, y, y', y'') = 0$

c. **Tercer orden:**

$F(x, y, y', y'', y''') = 0$

d. **Orden** n

$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$

3. Grado de una ecuación diferencial

a. Lineales

En una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) la variable dependiente y además todas sus derivadas son de primer grado.

Cada coeficiente de y incluso sus derivadas dependen solamente de la variable independiente x (puede ser constante)

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{2.1}$$

b. No lineales

Las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden o superior tienen propiedades de combinaciones lineales que satisfacen el siguiente teorema:

Si se considera que $y_1, y_2, \ldots, y_k$ es la solución de orden n de la ecuación diferencial homogénea en el intervalo I, entonces la combinación lineal

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x) \tag{2.2}$$

En ella las $c_i, i = 1,2, \ldots, k$ es una constante arbitraria, también es una solución de intervalo. Las ecuaciones no lineales no poseen esta capacidad de superposición (Zill y Cullen, 2008, pp.108,146)

Carmona, I. (1992, p.24) plantea ejemplos que corresponde a la clasificación de Ecuaciones Diferenciales:

Ecuación diferencial	Tipo	Orden	Grado	Lineal
$\frac{dy}{dx} = 2e^{-x}$	Ordinaria	1	1	Sí
$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} + kx - \frac{\partial y}{\partial s}$	Parcial	1	1	Sí
$x^2y'' + xy' + y = 0$	Ordinaria	2	1	Sí
$yy'' + x^2y = x$	Ordinaria	2	1	No (el coeficiente de y no depende de x exclusivamente)
$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = c$	Parcial	2	1	Sí
$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - v^2)y = 0$	Ordinaria	2	1	Sí
$\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = kv\left(\frac{\partial^2 m}{\partial n^2}\right)^2$	Parcial	4	1	No
$\left(y^{\mathrm{V}}\right)^3 - y''' + y'' - y^2 = 0$	Ordinaria	5	3	No
$y' + y = x/y$	Ordinaria	1	1	No
$sen\, y' + y = 0$	Ordinaria	1	?	No

2.2.1. Ecuación Diferencial Parcial Lineal

La ecuación presenta una variable dependiente u y la variable independiente x como también la variable independiente y es así que se presenta una Ecuación Diferencial Parcial Lineal de segundo orden dada por

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x,y)u = G(x,y), \qquad (2.3)$$

en ella los coeficientes A, B, C, D, E, F y G son constantes reales o funciones de x e y. Cuando una ecuación diferencial parcial es de orden 2 y lineal es homogénea si $G(x,y) = 0$; caso contrario es no homogénea.

Ejemplo 2.1: tenemos una ecuación diferencial parcial homogénea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Ejemplo 2.2: tenemos una ecuación diferencial parcial no homogénea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

2.2.2. Parte principal de una ecuación diferencial parcial

Se llama parte principal de una ecuación diferencial parcial a la parte de la ecuación que contiene las derivadas de mayor orden.

2.2.3. Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales Parciales de segundo orden

Una Ecuación Diferencial Parcial Lineal de segundo orden con dos variables independientes con coeficientes constantes, está clasificada en tres tipos a partir de Zill y Cullen (2008, p. 530-531),

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0, \qquad (2.4)$$

donde, A, B, C, D, E y F son constantes reales, y se presentan de la siguiente forma:

Entonces se dice que la ecuación diferencial parcial (EDP) es:

a) Hiperbólica, si $B^2-4AC>0$

b) Parabólica, si $B^2-4AC=0$

c) Elíptica, si $B^2-4AC<0$

Ejemplo 2.3: Analizando las siguientes ecuaciones, según propone Zill (2008, p.530), se tiene:

a) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

Solución:

a) Identificando los coeficientes de la EDP

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Tenemos $A=3$, $B=0$ y $C=0$.

En este caso, $B^2-4AC=0^2-4(3)(0)=0$

Luego, la Ecuación Diferencial Parcial es Parabólica.

b) De modo similar, para la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Tenemos los siguientes coeficientes: $A = 1$, $B = 0$ y $C = -1$. Sustituyendo los coeficientes en la expresión, $B^2 - 4AC$, obtenemos $(0)^2 - 4(1)(-1) = 4$, es decir $B^2 - 4AC > 0$.

Visto el valor obtenido la Ecuación Diferencial Parcial es Hiperbólica.

c) De igual forma, para la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Se tiene $A = 1$, $B = 0$ y $C = 1$. Reemplazando en la expresión, $B^2 - 4AC$, se obtiene $0^2 - 4(1)(1) = -4 < 0$, entonces la Ecuación Diferencial Parcial es Elíptica.

2.3. Función periódica

Una función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se llama periódica de periodo $T \neq 0$. Si $f(x) = f(x + T)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto se repite para todos los múltiplos enteros de T.

Observación: El valor positivo más pequeño de T se llama periodo fundamental de f.

Teorema 2.1: Sean $f(x), g(x)$ funciones periódicas con periodo T.

$\rightarrow h(x) = af(x) + bg(x), \quad a, b \in \mathbb{R}$, también es periódica con periodo T.

Teorema 2.2: Si T es periodo de $f(x)$ $\rightarrow nT, n$ entero, también es periodo. (Carmona, 1992, p.548)

2.4. Función par e impar

2.4.1. Función par

Sea $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. Se dice que la función f es par cuando cumple las siguientes condiciones:

1. Si $x \in D \Longrightarrow -x \in D$
2. $f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in D$
3. La gráfica de la función f debe ser simétrica respecto al eje Y, lo que significa que si se tiene un punto (x, y) en la gráfica, también debe existir el punto $(-x, y)$.

2.4.2. Función impar

Sea $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. Se dice que la función f es impar cuando cumple las siguientes condiciones:

1. Si $x \in D \Longrightarrow -x \in D$
2. $f(x) = -f(-x) \quad \forall\, x \in D$
3. La gráfica de la función f debe ser simétrica respecto al origen, lo que significa que si se tiene un punto (x, y) en la gráfica, también debe existir el punto $(-x, -y)$.

2.5. Propiedades de suma, diferencia, producto y cociente de funciones

2.5.1. Suma de funciones

1. Si las funciones f y g son pares, entonces la suma de ambas funciones h es par.
2. Si las funciones f y g son impares, entonces la suma de ambas funciones h es impar.
3. Si la función f es par y la función g es impar, entonces la suma de ambas funciones h no puede ser par ni impar, salvo que en algunos casos una de las funciones sea nula.

2.5.2. Diferencia de funciones

1. Si las funciones f y g son pares, entonces la diferencia de ambas funciones h es par.
2. Si las funciones f y g son impares, entonces la diferencia de ambas funciones h es impar.
4. Si la función f es par y la función g es impar, entonces la diferencia de ambas funciones h no puede ser par ni impar, salvo que en algunos casos una de las funciones sea nula.

2.5.3. Producto de funciones

1. Si las funciones f y g son pares, entonces el producto de ambas funciones h es par.
2. Si las funciones f y g son impares, entonces el producto de ambas funciones es par.
3. Si la función f es par y la función g es impar, entonces el producto de ambas funciones h es impar.

2.5.4. Cociente de funciones

1. Si las funciones f y g son pares, entonces el cociente de ambas funciones h es par.
2. Si las funciones f y g son impares, entonces el cociente de ambas funciones h es par.
3. Si la función f es par y la función g es impar, entonces el cociente de ambas funciones h es impar.

2.6. Funciones ortogonales

Gonzáles, P. (2013), sea f_1 y f_2 funciones reales de una variable real definidas en un intervalo $[a, b]$. Su producto interno es el número

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx \quad (2.5)$$

Mientras que f_1 y f_2 son ortogonales si

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1\,(x) \cdot f_2(x)dx = 0 \tag{2.6}$$

Esto significa que las funciones f_1 y f_2 son ortogonales si el producto interno de las dos funciones, calculado mediante la integral en el dominio $[a, b]$, es igual a cero.

Propiedad 2.1. Relaciones trigonométricas de ortogonalidad

Sean $m, n \in \mathbb{R}$. Asimismo:

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad si \quad n \neq m \geq 1; \tag{2.7}$$

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & si\, n \neq m; n, m \geq 1 \\ L, & si\, n = m \geq 1 \\ 2L, & si\, n = m = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & si\, n \neq m; n, m \geq 1 \\ L, & si\, n = m \geq 1 \end{cases} \tag{2.9}$$

Prueba de la ecuación (2.7)

Por razones trigonométricas de la suma de dos arcos, tenemos:

$$sen(A + B) = senA \cos B + sen\; B \cos A$$
$$sen(A - B) = senA \cos B - sen\; B \cos A$$
$$cos(A + B) = cosA \cos B - sen\; A\, \mathrm{sen}\, B$$
$$cos(A - B) = cosA \cos B + sen\; A\, \mathrm{sen}\, B$$

Si sumamos seno suma y seno diferencia, obtenemos:

$$sen(A+B)+sen(A-B)=2senA\cos B$$

$$\Rightarrow \quad senA\cos B=\frac{Sen(A+B)+sen(A-B)}{2}$$

$Si\; n\neq m\geq 1$ y aplicamos apropiadamente la fórmula de cálculo integral:

$$\int sen(au)du=-\frac{\cos(au)}{a}+C$$

Tenemos:

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{sen\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]+sen\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right]\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{-L}{(n+m)\pi}cos\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]+\frac{-L}{(n-m)\pi}cos\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right]\right\}_{-L}^{L}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{-L}{(n+m)\pi}cos\left[\frac{(n+m)\pi L}{L}\right]-\frac{-L}{(n+m)\pi}cos\left[\frac{(n+m)\pi(-L)}{L}\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{-L}{(n-m)\pi}cos\left[\frac{(n-m)\pi L}{L}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{-L}{(n-m)\pi}cos\left[\frac{(n-m)\pi(-L)}{L}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{-L}{(n+m)\pi}cos[(n+m)\pi]+\frac{L}{(n+m)\pi}cos[(n+m)\pi]\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{-L}{(n-m)\pi}cos[(n-m)\pi]+\frac{L}{(n-m)\pi}cos[(n-m)\pi]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{0\}\quad+\frac{1}{2}\{0\}$$

$$=0$$

$$\therefore\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx=0$$

Prueba de la ecuación (2.8)

Por identidades trigonométricas se tiene:

$$cos(A+B) = cosA\cos B - sen\ A\,\mathrm{sen}\,B$$

$$cos(A-B) = cosA\cos B + sen\ A\,\mathrm{sen}\,B$$

Si sumamos coseno suma y coseno diferencia, obtenemos:

$$cos(A+B) + cos(A-B) = 2cosA\cos B$$

$$cosA\cos B = \frac{cos(A+B) + cos(A-B)}{2}$$

Ecuación (2.8.a)

$Si\ n \neq m; n,m \geq 1$ y aplicamos apropiadamente la fórmula de cálculo integral:

$$\int cos(au)du = \frac{\mathrm{sen}(au)}{a} + C$$

Tenemos:

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{cos\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right] + cos\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right]\right\} dx$$

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{sen(n+m)\pi x}{L} + \frac{sen(n-m)\pi x}{L}\right\}_{-L}^{L}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{sen(n+m)\pi L}{L} - \frac{sen(n+m)\pi(-L)}{L}\right\}$$

$$+\left\{\frac{sen(n-m)\pi L}{L} - \frac{sen(n-m)\pi(-L)}{L}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{sen(n+m)\pi - -sen(n+m)\pi\}$$

$$+ \{sen(n-m)\pi - -sen(n-m)\pi\}$$

$$+\{sen(n-m)\pi - -sen(n-m)\pi\}$$

$$= \frac{1}{2}\{2sen(n+m)\pi + 2sen(n-m)\pi\}$$

$$= \frac{1}{2}\{2 \cdot 0 + 2 \cdot 0\}$$

$$= \frac{1}{2}\{0 + 0\}$$

$$\therefore \int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Ecuación (2.8.b)

$Si\ n = m \geq 1$

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left\{cos\left[\frac{(n+n)\pi x}{L}\right] + cos\left[\frac{(n-n)\pi x}{L}\right]\right\} dx$$

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left\{cos\left[\frac{(2n)\pi x}{L}\right] + cos\left[\frac{(0)\pi x}{L}\right]\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left\{cos\left[\frac{(2n)\pi x}{L}\right] + 1\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{L}{2n\pi} sen\left[\frac{(2n)\pi x}{L}\right] + x\right\}_{-L}^{L}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{L}{2n\pi} sen\left[\frac{(2n)\pi L}{L}\right] + L - \left[\frac{L}{2n\pi} sen\left[\frac{(2n)\pi(-L)}{L}\right] + (-L)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{L}{2n\pi} sen[(2n)\pi] + L - \left[\frac{L}{2n\pi} sen[-(2n)\pi] + (-L)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{0 + L - [0 + (-L)]\}$$

$$= \frac{1}{2}\{0 + L - 0 + L\}$$

$$= \frac{1}{2}\{2L\}$$

$$= L$$

$$\therefore \int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = L$$

Ecuación (2.8.c)

$Si\ n = m = 0$

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{cos\left[\frac{(n+n)\pi x}{L}\right] + cos\left[\frac{(n-n)\pi x}{L}\right]\right\} dx$$

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{cos\left[\frac{(2(0)\pi x}{L}\right] + cos\left[\frac{(0)\pi x}{L}\right]\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}(1+1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} 2dx$$

$$= \frac{1}{2}\{2x\}_{-L}^{L}$$

$$= \frac{1}{2}\{2(L) - 2(-L)\}$$

$$= \frac{1}{2}(4L)$$

$$= 2L$$

$$\therefore \int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 2L$$

Prueba de la ecuación (2.9)

$$cos(A + B) = cosA \cos B - sen\, A \operatorname{sen} B$$

$$cos(A - B) = cosA \cos B + sen\, A \operatorname{sen} B$$

$$-cos(A + B) = -[cosA \cos B - sen\, A \operatorname{sen} B]$$

$$cos(A - B) - cos(A + B) = 2sen\, A \operatorname{sen} B$$

$$\Rightarrow \quad sen\, A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[cos(A - B) - cos(A + B)]$$

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left\{cos\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right] - cos\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]\right\} dx$$

Ecuación (2.9.a)

$Si\ n \neq m$

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left\{cos\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right] - cos\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} cos\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right]dx - \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} cos\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{L}{(n-m)\pi}\,sen\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right]\right\}_{-L}^{L} - \left\{\frac{L}{(n+m)}\,sen\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]\right\}_{-L}^{L}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{L}{(n-m)\pi}sen[(n-m)\pi]\right) + \left(\frac{L}{(n-m)\pi}sen[(n-m)\pi]\right)\right.$$

$$\left.-\left[\left(\frac{L}{(n+m)\pi}sen[(n+m)\pi]\right) + \left(\frac{L}{(n+m)\pi}sen[(n+m)\pi]\right)\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2L}{(n-m)\pi}sen[(n-m)\pi]\right) - \left(\frac{2L}{(n+m)\pi}sen[(n+m)\pi]\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(0-0)$$

$$= 0 - 0$$

$$= 0$$

$$\therefore \int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0$$

Ecuación (2.9.b)

$Si\ n = m$

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{cos\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right] - cos\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{1 - cos\left[\frac{(2n)\pi x}{L}\right]\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{[x]_{-L}^{L} - \left[\frac{L}{(2n)\pi} sen\left[\frac{(2n)\pi x}{L}\right]\right]_{-L}^{L}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2L - \left[\frac{2L}{(2n)\pi} sen(2n\pi)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2L - \left[\frac{L}{n\pi} sen\ (2n\pi)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{2L - 0\} = L$$

$$\therefore \int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = L$$

CAPÍTULO III

SERIES DE FOURIER

4.1. Serie de Fourier

Una serie de Fourier corresponde a una serie infinita que converge puntualmente a una función continua y periódica. Sea f una función real continua por partes definida en el intervalo $[-L, L]$, donde L es la mitad del periodo de la función, entonces la serie de Fourier f es la serie trigonométrica y tienen la forma:

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \qquad (3.1)$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0,1,2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0,1,2, \dots$$

Donde los coeficientes de Fourier a_n y b_n son calculados por las fórmulas y a_0 es el coeficiente de la componente constante.

Teorema 3.1: Sea f una función periódica, con periodo 2π y sean $f(x)$ y $f'(x)$ seccionalmente continua en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Entonces la serie de Fourier converge a:

a) $f(x)$ si x es un punto de continuidad.

b) $\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right)$ si x es un punto de discontinuidad.

(Carmona, 1992, p.572)

Teorema 3.2: (De Fourier): Fierros, J. y Rivera, H. (1996, p.21), sea f una función periódica con periodo 2π y suave por partes (es decir, f y f' son continuas por partes) en $[-\pi,\pi]$, entonces, la serie de Fourier de f converge en cada punto del intervalo a

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$$

4.1.1. Los coeficientes de Fourier

Duoandikoetxea, J. (2003, pp.1-4), considera que la serie $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kx) + b_k sen\,(kx)\,]$ converge uniformemente en $[-\pi,\pi]$ a la función f, escribimos la igualdad

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nx) + b_n sen\,(nx)] \tag{3.2}$$

y la integramos en $[-\pi,\pi]$ la convergencia uniforme permite integrar término a término la serie según el Teorema de convergencia uniforme en un intervalo y se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0 \tag{3.3}$$

de donde sale el valor de a_0. Del mismo modo, si multiplicamos la ecuación (3.2) por $\cos(kx)$ e integramos en $[-\pi, \pi]$, la propiedad de ortogonalidad da

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx = \pi a_k \tag{3.4}$$

Haciendo lo mismo con $sen\ (kx)$ llegamos a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(kx)\, dx = \pi b_k \tag{3.5}$$

Entonces los valores a_k, b_k que se obtiene son los siguientes:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(kx)\, dx \tag{3.6}$$

Si f es par (es decir, $f(-x) = f(x)$, se tiene $b_k(f) = 0$ para todo k y la fórmula para a_k se puede escribir

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx \tag{3.7}$$

Cuando f es impar (es decir, $f(-x) = -f(x)$, se tiene $b_k(f) = 0$ para todo k y b_k se puede escribir

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(kx)\, dx \tag{3.8}$$

Monferrato, M. (2009, pp.90-93), sea una función $f: [0, L] \to \mathbb{R}$ continua y diferenciable por tramos, debe expresarse como una serie de Fourier que contenga sólo “seno” o solamente “coseno”. Por así decirlo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \quad (3.9)$$

o bien

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \quad (3.10)$$

Para algunas constantes a, b con $a < b$. Estas representaciones también se denominan “expansiones de rango medio de la serie de Fourier” y se utilizan ampliamente para resolver ecuaciones diferenciales parciales como la ecuación del calor y de onda.

Intentemos usar el teorema de Fourier para obtener estas expresiones, pero esta función f debe ser periódica. Además, para representarlos simplemente como una serie de Fourier de senos, f debe ser impar, y si queremos representarlo simplemente como una serie de Fourier de cosenos, f debe ser par.

4.1.2. Convergencia de la Serie de Fourier

Teorema 3.3: Convergencia de la serie de Fourier en senos.

Si $f: [0, L] \to \mathbb{R}$ es continua y derivable por trozos entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \forall x \in [0, L]$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx$$

Teorema 3.4: Convergencia de la serie de Fourier en cosenos.

Si $f: [0, L] \to \mathbb{R}$ es continua y derivable por partes entonces

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \forall x \in [0, L]$$

donde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx$$

Ejemplo 3.1. Desarrollar en serie de cosenos $f(x) = 2x, \quad 0 < x < 2$

Solución:

Figura 3.1

Función lineal $f(x) = 2x;\ x \in \langle 0; 2\rangle$ *y su predicción simétrica respecto al eje* Y.

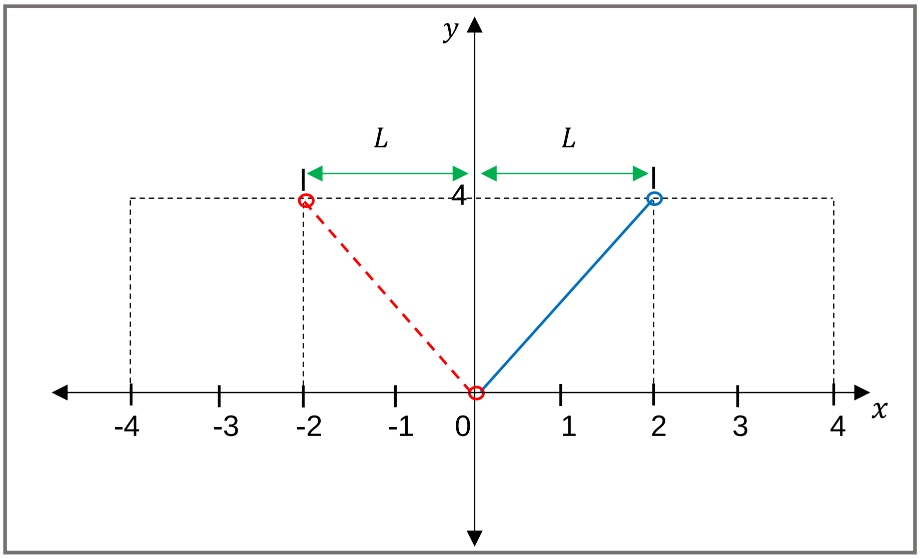
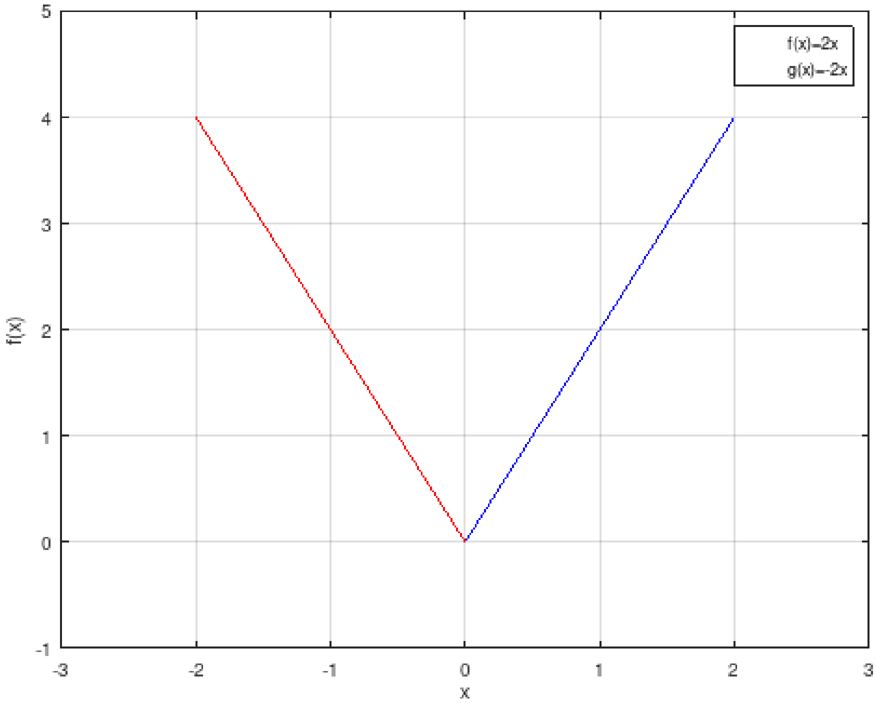


Figura 3.2

Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} 2x; & 0 < x < 2 \\ -2x; & -2 < x < 0 \end{cases}$

obtenida con el programa GNU Octave (versión 6.4.0).



Intervalo : $(0, L)$

Semiperiodo : L, para $L = 2$

Periodo : $T = 2L = 4$

Sea la serie de Fourier:

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

Según la función representado en la figura (3.1) por convergencia en serie de Fourier en cosenos para $b_n = 0$, tenemos:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, dx$$

Donde:

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 2x\, dx = 2\int_0^2 x\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{0=x}^{2=x} = 2\left[\frac{4}{2} - \frac{0}{2}\right] = 4$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$a_n = \frac{2 \cdot 2}{2}\int_0^2 x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$= 2\left(x \cdot \frac{2}{n\pi} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_{0=x}^{2=x} - \int_0^2 \frac{2}{n\pi} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx\right)$$

$$a_n = 2\left(0 + \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{2}{n\pi} cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right)\Bigg|_{0=x}^{2=x}$$

$$= 2\left(\frac{4}{n^2\pi^2} cos(n\pi) - \frac{4}{n^2\pi^2} cos(0)\right)$$

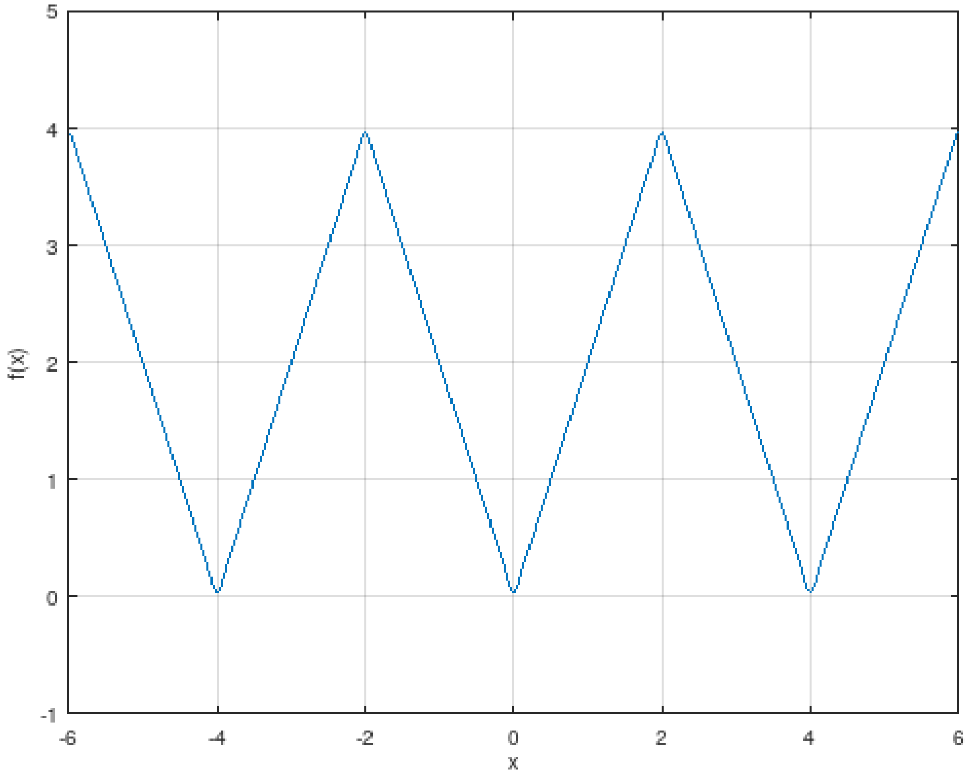
$$a_n = \frac{8}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi) - 1) = \frac{8\cos(n\pi)}{n^2\pi^2} - \frac{8}{n^2\pi^2}$$

Por lo tanto:

$$f(x) \approx 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) - \frac{8}{n^2\pi^2}\right) cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Figura 3.3

Gráfica de aproximación de la función $f(x) \approx 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{n^2\pi^2}cos\,(n\pi) - \frac{8}{n^2\pi^2}\right)cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ a las funciones $f(x) = \begin{cases} 2x; & 0 < x < 2 \\ -2x; & -2 < x < 0 \end{cases}$ para $T = 4$ obtenida con el programa GNU Octave (versión 6.4.0)



Ejemplo 3.2. Desarrollar en series de senos y cosenos la función

$$f(x) = \begin{cases} x; & 0 < x < 4 \\ 8 - x; & 4 < x < 8 \end{cases}$$

Solución:

Por serie de senos: tenemos

Figura 3.4

Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 4 \\ 8 - x, & 4 < x < 8 \end{cases}$ *y su predicción simétrica respecto al origen.*

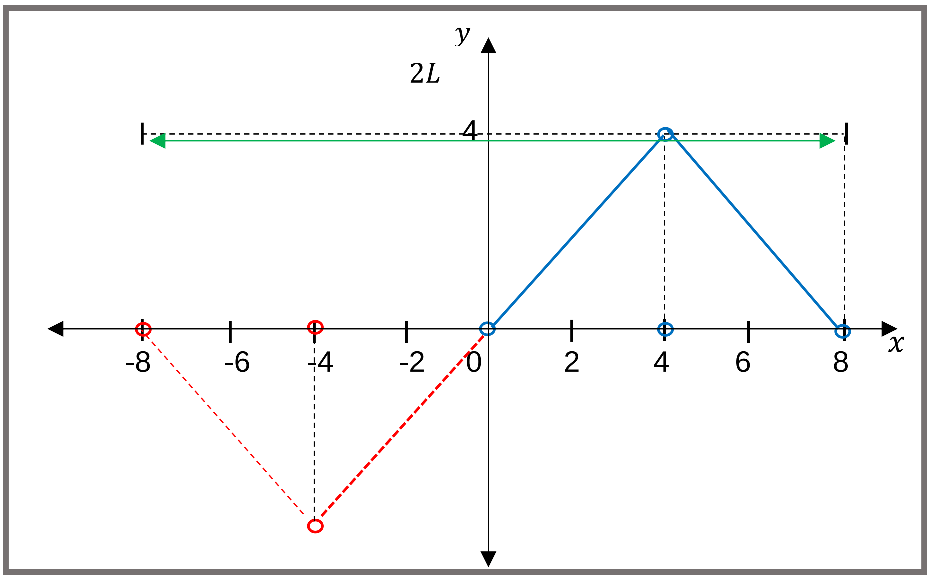
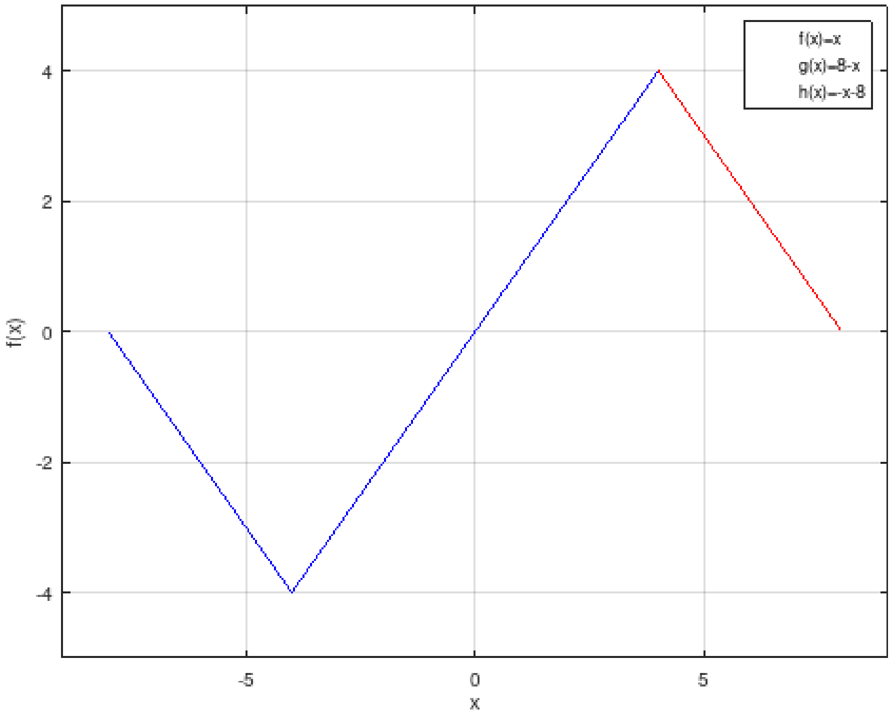


Figura 3.5

Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x, & -4 < x < 4 \\ 8 - x, & 4 < x < 8 \\ -x - 8, & -8 < x < -4 \end{cases}$ *obtenida con el programa GNU Octave (versión 6.4.0).*



Intervalo : $(0, L)$

Semiperiodo : L, para $L = 8$

Periodo : $T = 2L = 16$

Sea la serie de Fourier:

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

Según la función representado en la figura (3.5) en serie de Fourier en senos para $a_n = 0$, tenemos:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Calculamos b_n:

Por ser función semiperiódica de la Serie de Fourier en senos que se extiende, tenemos:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{8}\int_0^8 f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^4 x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx + \int_4^8 (8-x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-xcos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\frac{8}{n\pi} + \frac{8^2}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right]_0^4$$

$$+\frac{1}{4}\left[-(8-x)cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\frac{8}{n\pi} - \frac{8^2}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right]_4^8$$

$$= \frac{1}{4}\left[-xcos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\frac{8}{n\pi} + \frac{64}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right]_0^4$$

$$+\frac{1}{4}\left[-(8-x)cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\frac{8}{n\pi} - \frac{64}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right]_4^8$$

$$= \frac{1}{4}\left\{-\frac{32}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{64}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\frac{32}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{64}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= -\frac{8}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{16}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{8}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{16}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{16}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{16}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{32}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

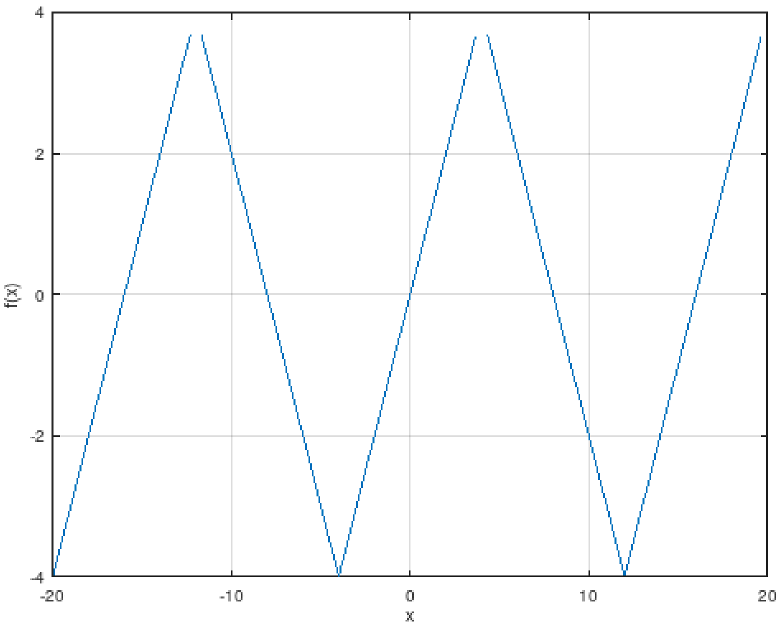
Por lo tanto, reemplazando en:

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{n\pi x}{8}\right)$$

Figura 3.6

Gráfica de aproximación de la función de la serie de Fourier $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{n\pi x}{8}\right)$ *obtenida con el programa GNU Octave (versión 6.4.0)*



Por serie de cosenos: tenemos

Periodo : $T = 2L = 16$

Figura 3.7

Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 4 \\ 8 - x, & 4 < x < 8 \end{cases}$ *y su predicción simétrica respecto al eje* Y

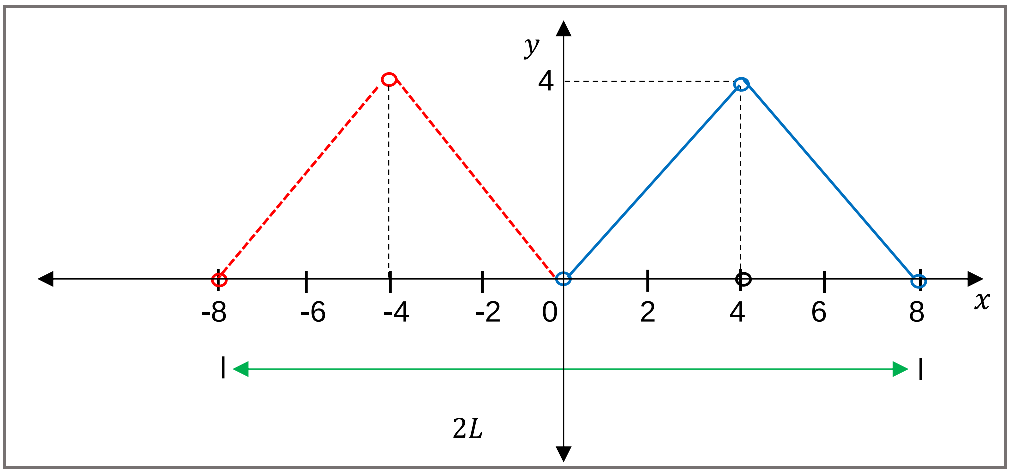
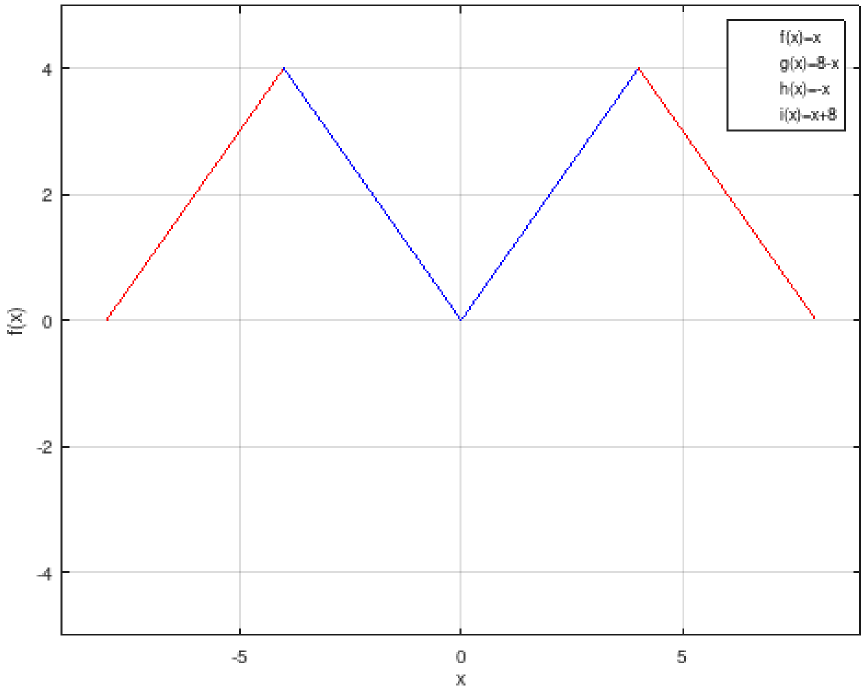


Figura 3.8

Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 4 \\ 8 - x, & 4 < x < 8 \\ -x; & -4 < x < 0 \\ x + 8; & -8 < x < -4 \end{cases}$

obtenida con el programa GNU Octave (versión 6.4.0).



Sea la serie de Fourier:

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

Según la función semiperiódica representado en la figura (3.7) en serie de Fourier en cosenos para $b_n = 0$, tenemos:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \forall x \in [0, L]$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

Calculamos a_0 y a_n:

$$a_0 = \frac{1}{8}\left\{\int_{-8}^{-4}(x+8)dx + \int_{-4}^{0}-xdx + \int_{0}^{4}xdx + \int_{4}^{8}(8-x)dx\right\}$$

$$a_0 = 4$$

$$a_0 = \frac{2}{8}\int_0^8 f(x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^4 xdx + \int_4^8 (8-x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 + \frac{1}{4}\left[8x - \frac{x^2}{2}\right]_4^8$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{16}{2} - 0\right) + \frac{1}{4}\left\{64 - \frac{64}{2} - \left(32 - \frac{16}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}(8) + \frac{1}{4}\{32 - 24\}$$

$$= 2 + 2$$

$$a_0 = 4$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$a_n = \frac{2}{8}\int_0^8 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx$$

$$a_n = \frac{1}{4}\left[\int_0^4 x cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx + \int_4^8 (8-x)\,cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left[x\frac{8}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right]_{x=0}^{x=4} - \int_0^4 \frac{8}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx\right\}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\left[(8-x)\frac{8}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right]_{x=4}^{x=8} - \int_4^8 -1\cdot\frac{8}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{32}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left[\frac{8^2}{n^2\pi^2}cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right]_{x=0}^{x=4}\right) + \frac{1}{4}\left(0 - \frac{4(8)}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left[-\frac{64}{n^2\pi^2}cos\frac{n\pi x}{8}\right]_{x=4}^{x=8}$$

$$= \frac{8}{1}\cdot\frac{1}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{16}{n^2\pi^2}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{16}{n^2\pi^2} - \frac{8}{1}\cdot\frac{1}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left[-\frac{64}{n^2\pi^2}cos(n\pi) + \frac{64}{n^2\pi^2}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{16}{n^2\pi^2}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{16}{n^2\pi^2} + \frac{1}{4}\left[-\frac{64}{n^2\pi^2}cos(n\pi) + \frac{64}{n^2\pi^2}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{16}{n^2\pi^2}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{16}{n^2\pi^2} - \frac{16}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) + \frac{16}{n^2\pi^2}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{32}{n^2\pi^2}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{16}{n^2\pi^2} - \frac{16}{n^2\pi^2}cos(n\pi)$$

Por lo tanto:

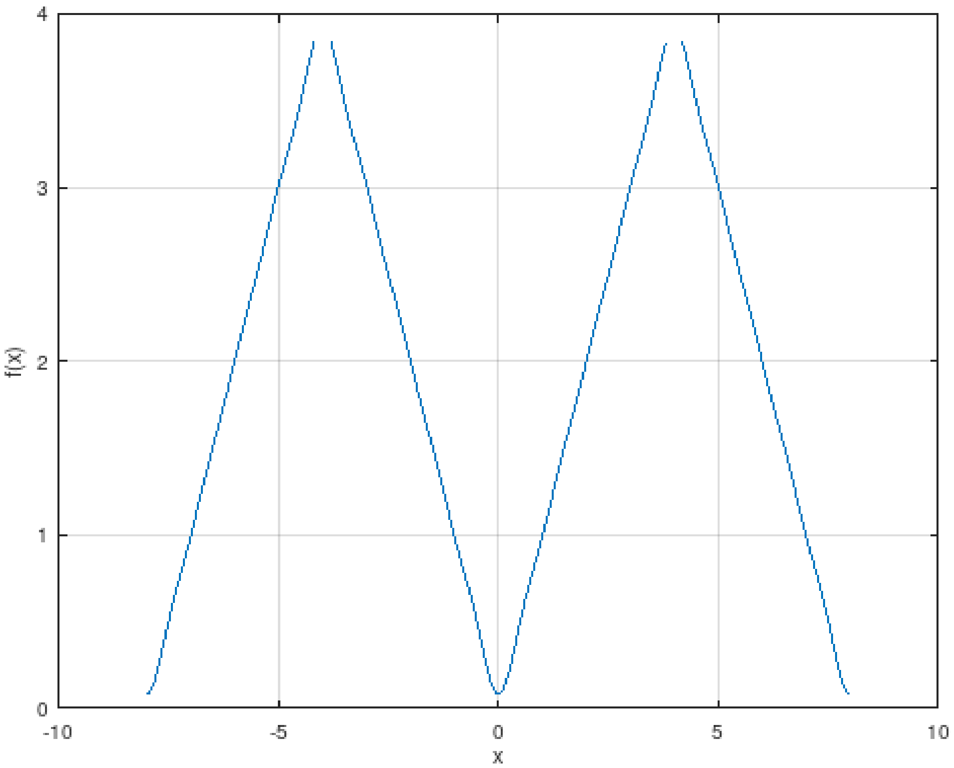
$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$f(x) \approx \frac{4}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{32}{n^2\pi^2}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{16}{n^2\pi^2} - \frac{16}{n^2\pi^2}\cos n\,\pi\right)cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)$$

$$f(x) \approx 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{32}{n^2\pi^2}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{16}{n^2\pi^2} - \frac{16}{n^2\pi^2}\cos n\,\pi\right)cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)$$

Figura 3.9

Gráfica de aproximación de la función $f(x) \approx 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{32}{n^2\pi^2} cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{16}{n^2\pi^2} - \frac{16}{n^2\pi^2} \cos n\,\pi \right) cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)$ a las funciones $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 4 \\ 8 - x, & 4 < x < 8 \\ -x; & -4 < x < 0 \\ x + 8; & -8 < x < -4 \end{cases}$ *obtenida con el programa GNU Octave (versión 6.4.0).*



Ejemplo 3.3. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función periódica de periodo 2π, definida por

$$f(x) = x^2, \quad -\boldsymbol{\pi} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{\pi}$$

Solución:

Figura 3.10

Esbozo de gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2$, $T = 2\pi$, $x \in [-\pi, \pi]$

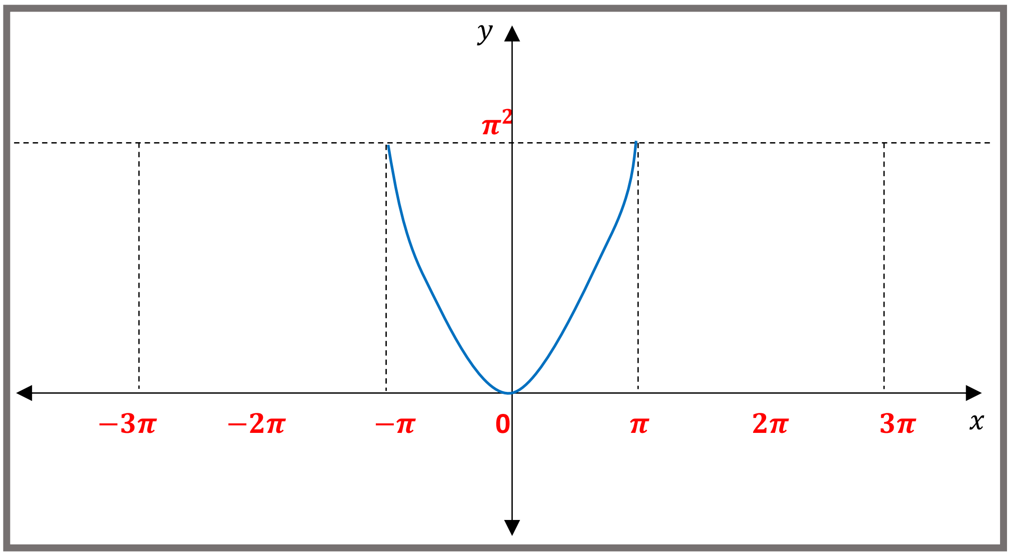
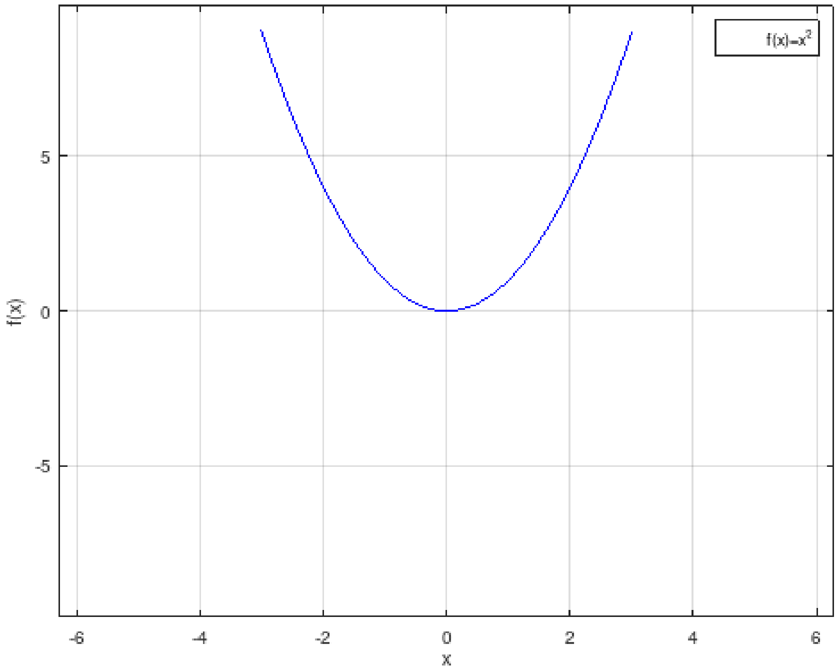


Figura 3.11

Gráfica de la función $f(x) = x^2,\ \ T = 2\pi; x \in [-\pi, \pi]$ *obtenida con el programa GNU Octave (versión 6.4.0).*



Queremos determinar la serie de Fourier de la función f.

En efecto, primero se calcula los coeficientes $a_0, a_n\ y\ b_n$

En este caso, se obtiene:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 cos\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 cos(mx)dx$$

Usando integración por partes:

$u = x^2$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $dv = \cos(mx)\,dx$

$du = 2xdx$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $v = \frac{sen(mx)}{m}$

Entonces

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 cos(mx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x^2\,\frac{sen(mx)}{m}\bigg|_{x=-\boldsymbol{\pi}}^{x=\boldsymbol{\pi}} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\,\frac{sen(mx)}{m}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x^2\,\frac{sen(mx)}{m}\bigg|_{x=-\boldsymbol{\pi}}^{x=\boldsymbol{\pi}} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\,\frac{sen(mx)}{m}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi^2\,\frac{sen(m\pi)}{m} - \pi^2\,\frac{sen(m\pi)}{m} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\,\frac{sen(mx)}{m}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 - 0 - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\,\frac{sen(mx)}{m}\,dx\right)$$

Luego

$$a_n = -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\frac{sen(mx)}{m}\,dx$$

Integrando por partes una vez más y considerando:

$u = x$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $dv = \frac{sen(mx)}{m}dx$

$du = dx$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $v = -\frac{\cos\,(mx)}{m^2}$

Tenemos:

$$a_n = -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\frac{sen(mx)}{m}\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{-x \cdot cos(mx)}{m^2}\right]\begin{matrix} x = \pi \\ x = -\pi \end{matrix} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{cos(mx)}{m^2}dx\right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{-(\pi)cos(m\pi)}{m^2} - \frac{-(-\pi)\cos(m \cdot -\pi)}{m^2}\right) - \frac{sen(m \cdot x)}{m^3}\right]_{-\pi}^{\pi}\right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left\{\left(-\frac{(\pi)cos(m\pi)}{m^2} - \frac{(\pi)\cos(m \cdot \pi)}{m^2}\right) - \frac{sen(m \cdot x)}{m^3}\right]_{-\pi}^{\pi}\right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left\{\frac{-2\pi cos(m\pi)}{m^2} - \left(\frac{sen(m\pi)}{m^3} - \frac{sen(m \cdot -\pi)}{m^3}\right)\right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left\{\frac{-2\pi cos(m\pi)}{m^2} - \left(\frac{sen(m\pi)}{m^3} + \frac{sen(m \cdot \pi)}{m^3}\right)\right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left\{\frac{-2\pi cos(m\pi)}{m^2} - (0 + 0)\right\} = 4\left\{\frac{cos(m\pi)}{m^2}\right\}$$

$$a_n = \frac{4(-1)^m}{m^2}$$

Calculando el coeficiente b_n y sabiendo que el producto de una función par por una función impar resulta una función impar, es decir:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 sen\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right)dx = 0$$

Sustituyendo los coeficientes encontrados, tenemos que la Serie de Fourier que representa la función $f(x) = x^2$ es:

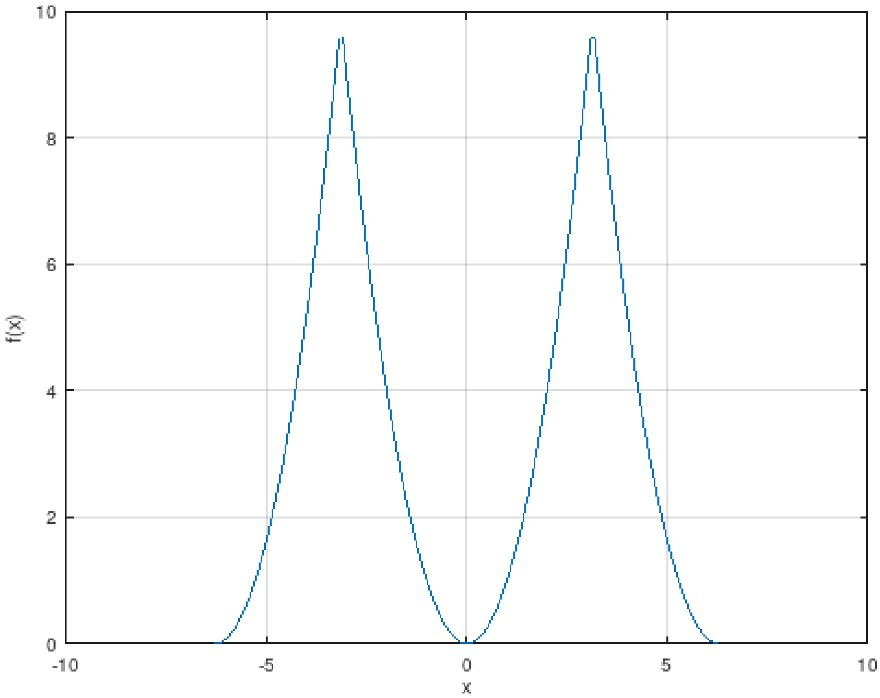
$$f(x) \approx \frac{\frac{2\pi^2}{3}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^m}{m^2}cos\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right) + 0 \cdot sen\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^m}{m^2}\cos(mx)$$

$$f(x) = x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos(mx)$$

Figura 3.12

Gráfica de aproximación de la serie de Fourier, $f(x) \approx \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos(mx)$*, a la función* $f(x) = x^2$*,* $x \in [-2\pi, 2\pi]$ *obtenida con el programa GNU Octave (versión 6.4.0).*



4.1.3. Convergencia puntual de la Serie de Fourier

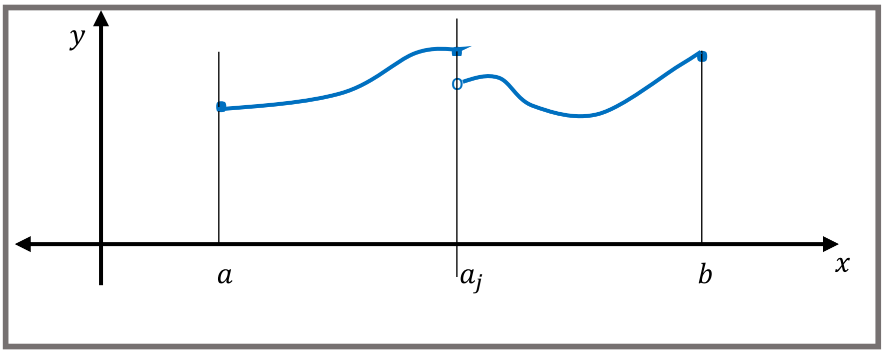
4.1.3.1. Función seccionalmente continua

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es seccionalmente continua si contiene un número finito de discontinuidades de salto, es decir, si $a < b$, existen
$a \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq b$ tales que f es continua en cada intervalo abierto $(a_j, a_{j+1}), j = 1,2, \dots, n-1,$ y existen los límites laterales para cada punto de discontinuidad.

$$f(x^+) = \lim_{x \to a_j^+} f(x) \quad \text{y} \quad f(x^-) = \lim_{x \to a_j^-} f(x) \tag{3.11}$$

Figura 3.13

Función seccionalmente continua



3.1.3.2. Función seccionalmente diferenciable

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es seccionalmente diferenciable si es seccionalmente continua y sus derivadas de la función f, son seccionalmente continua.

3.1.3.3. Teorema de Dini

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua a trozos, 2π periódica y tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que existen y son finitos los siguientes límites:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{t} = L^+ \text{ y } \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x+t)-f(x^-)}{t} = L^- \qquad (3.12)$$

Entonces, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$S_\infty(f)(x_0) = \lim_{n\to +\infty} S_n(f)(x_0) = \frac{f(x_0{}^+)+f(x_0{}^-)}{2} \qquad (3.13)$$

Cuando f es continua los puntos $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$ coinciden. Por lo tanto, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.1:

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en las hipótesis del Teorema de Dini. Entonces $S_n(f)$ converge puntualmente a f en $\mathbb{R}$. O lo que es equivalente:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k sen(kx)$$

Se recomienda que:

Sea f una función impar y $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Sea f una función par y $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Sea f y g dos funciones pares (o impares) $\Rightarrow f \cdot g(x)$ es una función par.

Sea f una función par y g una función impar $\Rightarrow f \cdot g(x)$ es una función impar.

Considerando la ecuación (3.1), de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable de periodo $2L$**.** La función converge, en cada punto x, para $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, es decir:

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \quad (3.14)$$

Prueba 3.1:

Considere $f(y)$ como una función $[-L, L]$. Haciendo las debidas sustituciones de los coeficientes de Fourier tenemos:

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{n}\left(a_k cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right)$$

Tal que

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y) cos\left(\frac{k\pi y}{L}\right) dy$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y) sen\left(\frac{k\pi y}{L}\right) dy$$

Sustituyendo en la suma de la serie de Fourier tenemos

$$S_n(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y) dy +$$

$$+\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\left[cos\left(\frac{k\pi y}{L}\right) cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + sen\left(\frac{k\pi y}{L}\right) sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right] dy\right)$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)sen(b)$

En la suma parcial tenemos:

$$S_n(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)dy + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{k\pi x}{L} - \frac{k\pi y}{L}\right) f(y)dy$$

$$S_n(x) = \int_{-L}^{L}\frac{1}{L}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos\left(\frac{k\pi}{L}(x-y)\right)\right] f(y)dy \qquad (3.15)$$

3.1.3.4. Núcleo de Dirichlet

La función $D_n(x) = \frac{1}{L}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]$ es conocida como el Núcleo de Dirichlet y satisface las siguientes propiedades:

$\boldsymbol{D_1}$) D_n es una función par, es decir, $D_n(x) = D_n(-x)$

$\boldsymbol{D_2}$) $\displaystyle\int_{-L}^{L} D_n(x)dx = 1$

$\boldsymbol{D_3}$) D_n es una función continua

$\boldsymbol{D_4}$) D_n es una función periódica de periodo $2L$.

$\boldsymbol{D_5}$) $D_n(0) = \dfrac{1}{L}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$

$\boldsymbol{D_6}$) La expresión compacto de $D_n(x)$, para $x \neq 0; \pm 2L;\ \pm 4L; \ldots$ está dado por $D_n(x) = \frac{1}{2L}\frac{sen\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}}{sen\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}$

Desarrollando las propiedades, tenemos:

1) D_n es una función par:

En efecto, $D_n(-x) = \frac{1}{L}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos\left(\frac{-k\pi x}{L}\right)\right]$

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]$$

$$= D_n(x)$$

2) $\int_{-L}^{L} D_n(x)\, dx = 1$

En efecto, $\int_{-L}^{L} D_n(x) = 2\int_{0}^{L} D_n(x)dx$

$$= \frac{2}{L}\int_{0}^{L}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right)dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_{0}^{L}\frac{1}{2}dx + \frac{2}{L}\int_{0}^{L}\sum_{k=1}^{n} cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \left[\frac{2}{L}\cdot\frac{1x}{2}\right]_0^L + \frac{2}{L}\int_{0}^{L}\left(cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \cdots \right.$$

$$\left. + \, cos\left(\frac{2\pi n}{L}\right)\right)dx$$

$$= \frac{L}{L} + \frac{2}{L}\left[\left(\frac{L}{\pi}sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)\right]_0^L + \left[\left(\frac{L}{2\pi}sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)\right]_0^L + \cdots$$

$$+ \left[\left(\frac{L}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\right]_0^L$$

$$= 1 + \frac{2}{L}(0 + 0 + \cdots + 0)$$

$$= 1$$

3) D_n es una función continua

En efecto, las componentes del Núcleo de Dirichlet son continuas.

4) D_n es una función periódica de periodo $2L$ por la hipótesis de la proposición.

5) $D_n(0) = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{L}$

En efecto $D_n(x) = \frac{1}{L}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]$

$$D_n(0) = \frac{1}{L}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} 1\right] = \frac{1}{L}\left[\frac{1}{2} + n\right]$$

$$D_n(0) = \frac{n + \frac{1}{2}}{L}$$

6) La expresión compacto de $D_n(x)$, para $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \ldots$ está dada por

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \cdot \frac{sen\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}}{sen\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}$$

En efecto

Calculemos la expresión

$$S_n(\theta) = 1 + \sum_{L=1}^{n} \cos{(k\theta)}, \qquad \theta = \frac{\pi x}{L}$$

Se tiene que tomar sólo la parte real ($\mathcal{R}e(\cdot)$), ya que la suma en si puede ser un número complejo.

$$S_n(\theta) = \mathcal{R}e\left(1 + \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right)$$

y que $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, $z \neq 1$

Luego,

$$S_n(\theta) = \mathcal{R}e\left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right)$$

$$S_n(\theta) = \mathcal{R}e\,\frac{e^{\frac{-i\theta}{2}}}{e^{\frac{-i\theta}{2}}}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right) = \mathcal{R}e\ \frac{e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{-i\theta}{2}+i(n+1)\theta}}{e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{-i\theta}{2}+i\theta}}$$

$$= \mathcal{R}e\ \frac{e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{i\theta(n+\frac{1}{2})}}{e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} \qquad para \quad \theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$$

$$= \mathcal{R}e\ \frac{e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}{cos\frac{\theta}{2}^{\frac{-isen\theta}{2}} - \left(cos\frac{\theta}{2} + i \cdot sen\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \mathcal{R}e\ \frac{cos\frac{\theta}{2} - i\ sen\frac{\theta}{2} - \left(cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + i\ sen\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)}{-2i\ sen\frac{\theta}{2}}$$

$$S_n(\theta) = \frac{sen\frac{\theta}{2} + sen\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2sen\frac{\theta}{2}}$$

Entonces se tiene que

$$S_n(x) = \frac{sen\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi x}{L}\right) + sen(n+1)\frac{\pi x}{L}}{2sen\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi x}{L}\right)}$$

Pero, tenemos que

$$S_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} cos \cdot \frac{\pi x}{L}$$

Sabemos que

$$D_n(x) = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2} + S_n(x) - 1\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(S_n(x) - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{sen\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi x}{L}\right) + sen\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2}}{2sen\left(\frac{1}{2}\frac{\pi x}{L}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2} + \frac{sen\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2}}{2sen\left(\frac{1}{2}\frac{\pi x}{L}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2L}\frac{sen\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}}{sen\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}$$

Por lo tanto

$$D_n(x) = \frac{1}{2L}\frac{sen\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}}{sen\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} \qquad (3.16)$$

$x \neq 0, \qquad \pm 2L, \pm 4L, \pm \cdots$

Partiendo de

$$S_n(x) = \int_{-L}^{L} \frac{1}{L}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos\left(\frac{k\pi}{L}(x-y)\right)\right] f(y)dy$$

Utilizando

$D_n(x) = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos\,\frac{k\pi x}{L}\right)$ y

$$D_n(x) = \frac{1}{2L}\frac{sen\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}}{sen\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}$$

Reescribiendo la variable independiente tenemos $y = x - t$

Tenemos

$$S_n(x) = \int_{-L}^{L} D_n(x-y)f(y)dy = \int_{-L+x}^{L+x} D_n(t)f(x-t)dt \qquad (3.17)$$

Como D_n y f son periódicas de periodo $2L$ y la suma parcial S_n se puede reescribir como

$$S_n(x) = \int_{-L}^{L} D_n(t)f(x-t)dt \qquad (3.18)$$

Usando el dato de que $D_n(t)$ es una función par, tenemos que

$$S_n(x) = \int_{-L}^{0} D_n(t)f(x-t)dt + \int_{0}^{L} D_n(t)f(x-t)dt \qquad (3.19)$$

$$= -\int_{L}^{0} D_n(-t)f(x+t)dt + \int_{0}^{L} D_n(t)f(x-t)dt$$

$$= \int_{0}^{L} D_n(t)f(x+t)dt + \int_{0}^{L} D_n(t)f(x-t)dt$$

$$= \int_{0}^{L} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt \qquad (3.20)$$

Por lo tanto, obtenemos la siguiente expresión

Para $e_n = S_n(x) - \left[\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\right]$ definida como

$$e_n(x) = \int_{0}^{L} D_n(t)\{[f(x+t)-f(x^+)] + [f(x-t)-f(x^-)]\}dt \qquad (3.21)$$

En efecto

$$e_n(x) = \int_{0}^{L} D_n(t)\{[f(x+t)-f(x^+)] + [f(x-t)-f(x^-)]\}dt$$

$$e_n(x) = \int_{0}^{L} D_n(t)\{[f(x+t)+f(x-t)] - [f(x^+)+f(x^-)]\}dt$$

$$= \int_{0}^{L} D_n \left\{ [f(x+t)-f(x-t))] - \int_{0}^{L} D_n(t)\,[f(x^+)-f(x^-)] \right\} dt$$

$$= S_n(x) - \{f(x^+)+f(x^-)\} \int_{0}^{L} D_n(t)\,dt$$

$$e_n(x) = S_n(x) - \frac{\{f(x^+)+f(x^-)\}}{2} \qquad (3.22)$$

Supongamos que f es seccionalmente continua, entonces existen las derivadas laterales en cada punto de x

Entonces, dado $x = x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$S_\infty(f)(x_0) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} \qquad (3.23)$$

Cuando f es continua los puntos $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$ coinciden. Por lo tanto, se cumple por corolario que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en las hipótesis del Teorema de Dini. Entonces $S_n(f)(x_0)$ converge puntualmente a f en $\mathbb{R}$. O lo que es equivalente:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k sen(kx) \qquad (3.24)$$

$$\frac{1}{2}[f(x^+) - f(x^-)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \qquad (3.25)$$

Ejemplo 3.4. Calcular la Serie de Fourier de la función periódica a trozos de periodo 2 definida en $[0, 2\rangle$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in [0,1\rangle \\ 0, & si\ x \in [1,2\rangle \end{cases}$$

Solución:

Figura 3.14.

Gráfica de la función a trozos $f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in [0,1\rangle \\ 0, & si\ x \in [1,2\rangle \end{cases}$

$T = 2, x \in [0,2\rangle$

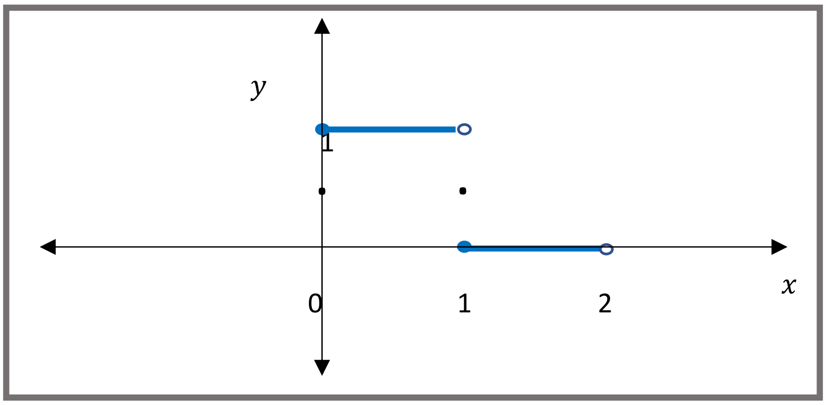
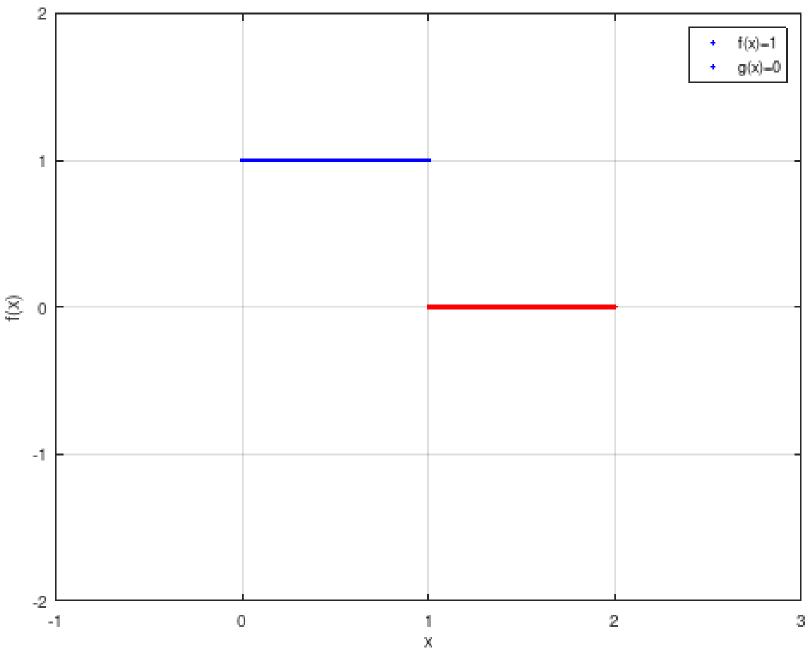


Figura 3.15

Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x < 1 \\ 0; & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ $T = 2$, $x \in [0,2\rangle$*, obtenida con el programa GNU Octave (versión 6.4.0).*



Calculamos:

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

Sean los coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \qquad\qquad a_0 = \frac{2}{T}\int_{a}^{a+T} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

Intervalo : $[0,1[$

Semiperiodo : L

Como $2L = 2$ y la función es integrable en $[0,2]$, inicialmente calculamos los coeficientes de la serie

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{1} 1dx + \int_{1}^{2} 0dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{0}^{2} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{1}\right)dx = \int_{0}^{1} 1\cdot\cos\left(\frac{m\pi x}{1}\right)dx$$

$$+ \int_{1}^{2} 0\cdot\cos\left(\frac{m\pi x}{1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{m\pi}sen(m\pi x)\Big|_{0}^{1} + 0$$

$$= \frac{1}{m\pi}sen(m\pi\cdot 1) - \frac{1}{m\pi}sen(m\pi\cdot 0)$$

$$= \frac{1}{m\pi} sen(m\pi) - 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{1}\right) dx = \int_0^1 \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{1}\right) dx$$

$$= \frac{-\,cos(m\pi x)}{m\pi}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{-\,cos(m\pi \cdot 1)}{m\pi} - \frac{-\,cos(m\pi \cdot 0)}{m\pi} = \frac{-\,cos(m\pi)}{m\pi} - \frac{-\,cos(0)}{m\pi}$$

$$= \frac{-\,cos(m\pi)}{m\pi} + \frac{1}{m\pi}$$

$$= \frac{1 - cos(m\pi)}{m\pi}$$

$$b_n = \frac{1-(-1)^m}{m\pi}$$

Entonces:

$$b_n = \frac{1-(-1)^m}{m\pi} = \begin{cases} 0, & m\ par \\ \dfrac{2}{m\pi}, & m\ impar \end{cases}$$

Por lo tanto: la serie de Fourier de f es:

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2}\cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0 + b_n sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{m\pi}\cdot sen\left(\frac{m\pi x}{1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{1\pi} + \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{5\pi} + \cdots \right) \cdot sen\big((2k-1)\pi x\big)$$

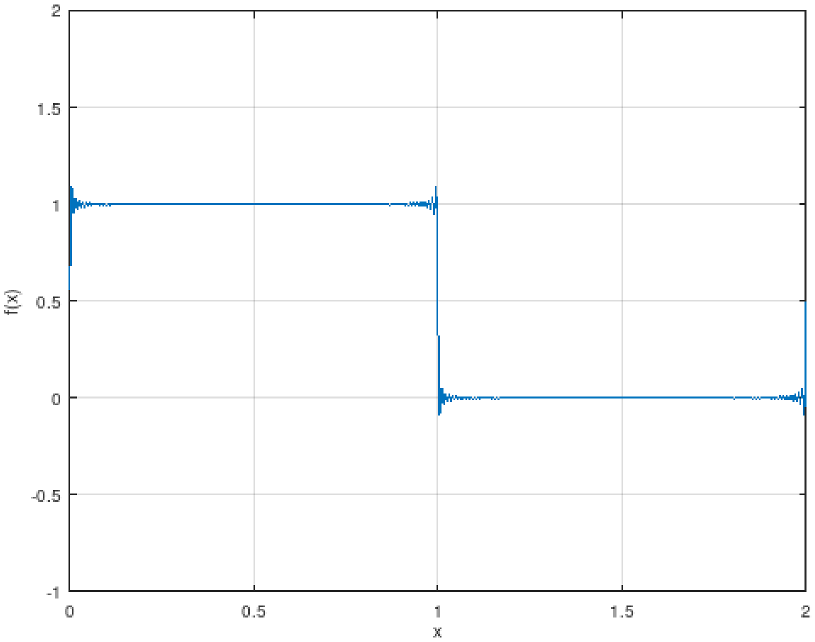
$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2k-1} \right) \cdot sen\big((2k-1)\pi x\big)$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \frac{2\mathrm{sen}((2\mathrm{k}-1)\pi\mathrm{x})}{\pi(2\mathrm{k}-1)}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{sen((2k-1)\pi x)}{2k-1}$$

Figura 3.16

Gráfica de aproximación de la serie de Fourier $f(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sen((2k-1)\pi x)}{2k-1}$ *a la función* $f(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x < 1 \\ 0; & 1 \leq x < 2 \end{cases}$, *obtenida con el programa GNU Octave (versión 6.4.0)*



La función f satisface la definición ecuación (3.14) de la Serie de Fourier, entonces la serie converge para $f(x)$ si x es un valor no entero y converge para $\frac{1}{2}$ si x es un valor entero.

Figura 3.17

Gráfica de la función a trozos $f(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x < 1 \\ 0; & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ $T = 2,\ x \in [0, 2\rangle$, *converge a ½.*

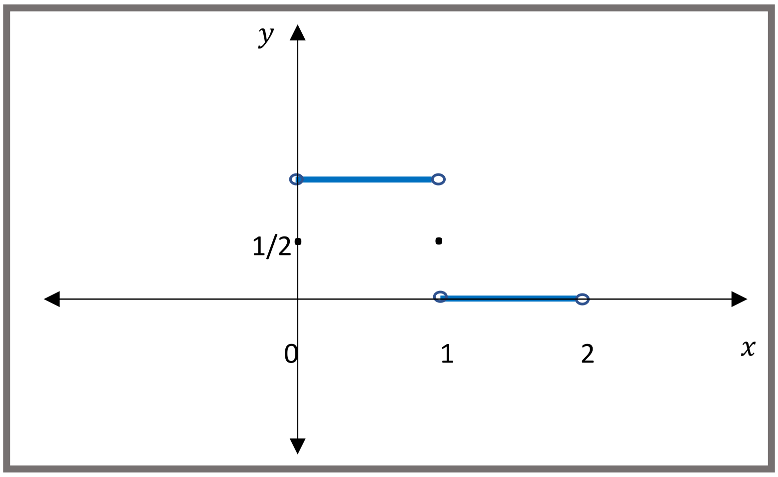
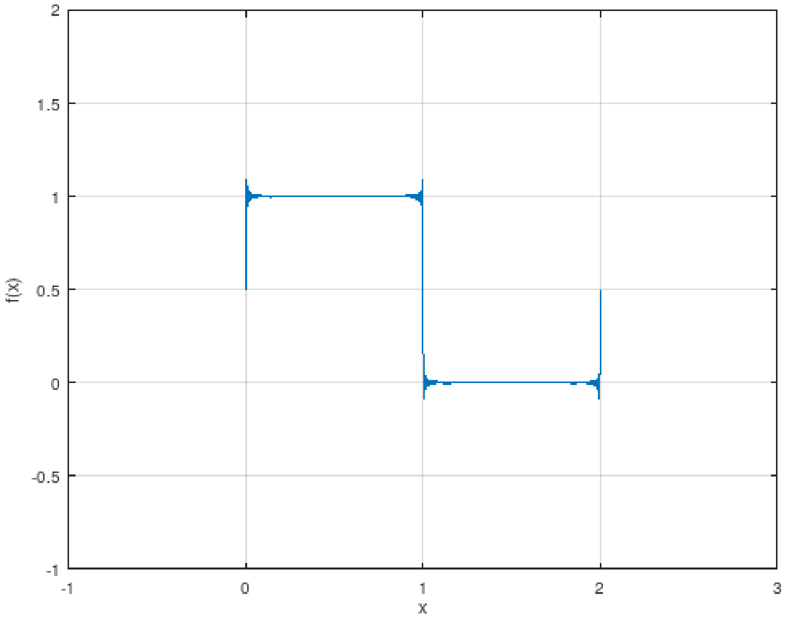


Figura 3.18

Gráfica de la función a trozos $f(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x < 1 \\ 0; & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ $T = 2,\ x \in [0, 2\rangle$, *converge a ½, obtenida con el programa GNU Octave (versión 6.4.0).*



CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado se muestra el desarrollo de la Ecuación Diferencial Parcial Hiperbólica Homogénea, en particular la ecuación de la cuerda de onda unidimensional, mediante el método de solución analítica y por análisis numérico a través de la implementación del software científico específico (Fortran F95) además, se complementa con diversos gráficos haciendo uso de Wolfram Mathematica 12.2 y GNU Octave.

4.1.1. Ecuación de la onda

La ecuación de la onda es una Ecuación Diferencial Parcial de segundo orden, lineal e hiperbólica dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

donde $u(x,t)$ es la función desconocida, α es una constante que representa la velocidad de propagación de la información en el sistema o constante dependiente de las condiciones físicas del problema y las derivadas parciales son respecto a t y x, respectivamente.

En relación con la dirección de propagación, las ondas se clasifican como unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales. La propagación unidimensional es una de las direcciones como, por ejemplo: las cuerdas y resortes, las bidimensionales se propaga de una superficie como las aguas de lago después de una piedra arrojada en él y las tridimensionales se propaga en todas las dimensiones un ejemplo de la cual es la propagación de la luz.

4.1.2. Problemas de valor inicial y frontera

Un problema de condiciones de frontera consiste en que la cuerda está fija según la figura 4.1 y figura 4.3, al eje x en $x = 0$ y en $x = L$ durante todo el tiempo. Interpretando así las dos condiciones de frontera (CF).

Para una cuerda que vibra se puede especificar el desplazamiento inicial $f(x)$ así como la velocidad inicial $g(x)$. En expresiones matemáticas se busca una función $u(x,t)$ que satisface la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ y las dos condiciones iniciales:

$$u(x,0) = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \qquad 0 < x < L \tag{4.2}$$

y sus extremos fijos

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{4.3}$$

Figura 4.1

Cuerda en equilibrio atada en ambos extremos.

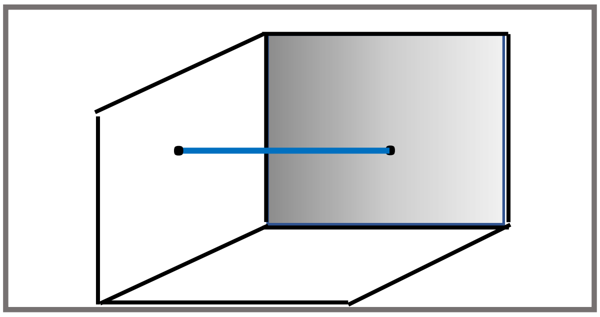


Figura 4.2

Cuerda alterada de su posición de equilibrio para ser soltada.

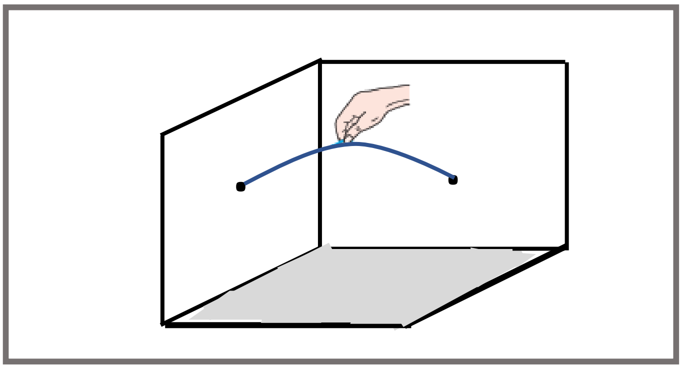
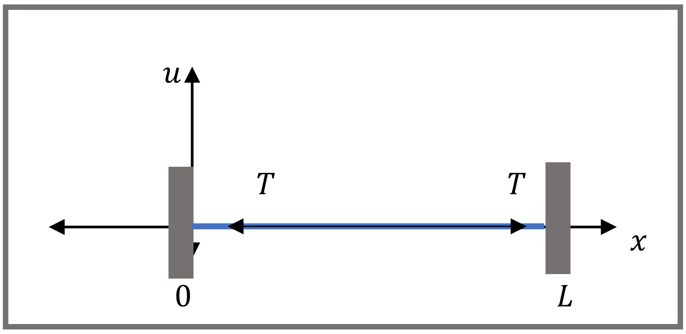


Figura 4.3

Cuerda en posición de equilibrio de longitud L



Siendo:

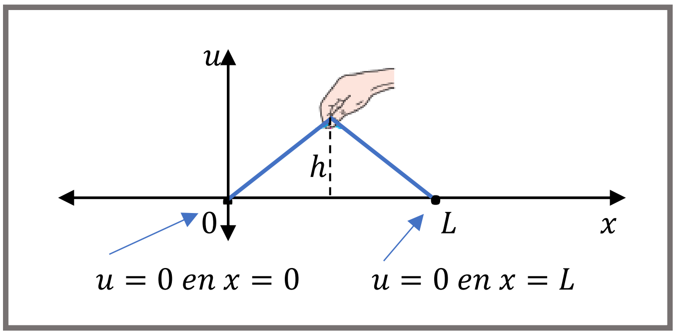
x: puntos de la cuerda en equilibrio

u: desplazamiento vertical de la cuerda

T: tensión de la cuerda

Figura 4.4

Cuerda elástica alterada de su posición de equilibrio para ser soltada.



Supongamos que la cuerda se altera de su posición de equilibrio por el punto medio, una distancia que designamos por h y luego se suelta con velocidad cero en el intervalo $t = 0$, para que vibre libremente por lo tanto el desplazamiento vertical debe satisfacer los problemas de valor inicial y de frontera.

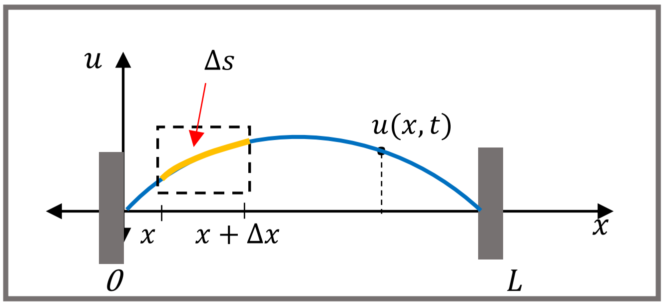
4.1.2.1. Consideraciones de simplificación

Las consideraciones a tomar en cuenta según Rubio, F. (2023) son:

a. La amplitud de vibración de la cuerda es pequeña y cada punto de la misma se mueve solamente en dirección vertical.
b. La cuerda es flexible.
c. Todas las fuerzas de fricción (tanto internas como externas) pueden despreciarse.
d. La masa de la cuerda, por unidad de longitud, es suficientemente pequeña en comparación con la tensión en la misma por lo que, las fuerzas de gravedad pueden despreciarse.
e. La tensión de la cuerda es tangente a la misma (Universidad Nacional Río Cuarto)

Figura 4.5

Esbozo de la cuerda y segmento de cuerda que comienza a vibrar con velocidad inicial de longitud L.



4.1.2.2. Frecuencia de vibración de una cuerda

La frecuencia de vibración de una cuerda tensorial medido en ciclos por segundo, está dado por:

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{e}} \tag{4.4}$$

donde un ciclo por segundo se denomina un Hertz (H_Z)

F: frecuencia de vibración de la cuerda

L: longitud de la cuerda vibrante

T: tensión de la cuerda

e: densidad lineal de la cuerda

Para abordar la solución de este problema según (Rubio, O. 2024) se debe considerar los siguientes puntos:

Primero: saber si existe solución

Segundo: si la solución es única

Tercero: si la solución es bonita

Cuarto: cómo resolver el problema (método)

4.1.3. Métodos de solución

4.1.3.1. Solución analítica

Resolver una ecuación diferencial parcial de segundo orden, como la ecuación de la onda unidimensional, implica obtener una solución exacta empleando técnicas matemáticas formales, sin necesidad de recurrir a aproximaciones numéricas. Entre las que se mencionan, son:

- Método de separación de variables
- Series de Fourier y Sturm-Liouville
- Método de transformada de Laplace
- Método de funciones de Green
- Fórmulas de D'Alembert

4.1.3.2. Solución por métodos numéricos

Los métodos numéricos o aproximación numérica son instrumentos muy poderosos para la resolución de problemas. Capaces de buscar y solucionar sistemas de ecuaciones grandes, geometrías complicadas, imposibles de resolver de manera analítica (Chapra, S. y Canale, R. 2007, pp.4-5).

Si se tiene un amplio dominio en programación computacional y métodos numéricos, estos conocimientos permiten reducir los elevados costos económicos que tiene un software.

Los métodos numéricos son un medio complementariedad de la amplia gama de las matemáticas y nos ofrece una alternativa de solución para cálculos muy complicados.

4.1.3.3. Análisis numérico

El análisis numérico es una de las ramas de las ciencias matemáticas de estos últimos tiempos, cuyas limitaciones no son del todo preciso. Al ser una disciplina se ocupa de describir, analizar y crear algoritmos de manera numérica, permiten resolver diversos problemas matemáticos, con cantidades numéricas, con precisión determinada. Su objetivo es dar un estándar normativo para analizar el comportamiento de los métodos numéricos en diversos problemas, considerando la convergencia, estabilidad, consistencia y errores. (Castillo, G., Faúndez, L., Rivas, D y Irazoqui, E. 2010, p. 5).

Resolver problemas de ecuaciones diferenciales parciales desde una mirada de métodos numéricos y/o análisis numérico es hallar por aproximación numérica (diferencias finitas, elementos finitos, elementos de contorno, etc.) con la denominación de solución aproximada a la solución analítica, exacta.

4.1.4. Modelo matemático para procesos ondulatorios

Los fenómenos oscilatorios de diferente naturaleza (vibraciones de cuerdas, membranas, oscilaciones acústicas del gas en los tubos, oscilaciones electromagnéticas) se describen por las ecuaciones del tipo hiperbólico. (Romero, Moreno y Rodriguez, 2001, p.31)

La más elemental es conocida como la ecuación de vibraciones de la cuerda (ecuación de la onda unidimensional)

Ejemplo 4.1

Hallar $u \in C^2(U)$ tal que:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \ , \quad U: 0 \le x \le L, \quad t > 0 \tag{4.5}$$

Condiciones de frontera: extremos fijos

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \ t > 0 \tag{4.6}$$

Condiciones iniciales: posición inicial y velocidad inicial

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), \qquad 0 \le x \le L \tag{4.7}$$

Siendo x la coordenada espacial, t el tiempo y $\alpha^2 = \frac{T}{\rho}$, donde T es la tensión de la cuerda y ρ su densidad lineal.

4.1.4.1. Solución analítica por el método de separación de variables

El método conocido como método separación de variables consiste básicamente en procurar una solución de la ecuación (4.5) haciendo que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \qquad U: 0 \le x \le L, \quad t > 0$$

sea

$u(x,t) = X(x)T(t)$ en que X es una función que dependen solamente de la variable x además la función T depende de la variable t.

En este caso, sustituyen u en ecuación (4.5) obtenemos:

$$X(x)T''(t) = \propto^2 X''(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{\propto^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Asimismo, debemos tener

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \\ \frac{T''(t)}{\propto^2 T(t)} = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + \lambda \propto^2 T(t) = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

Siendo ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad \lambda > 0,$ se tiene

$r^2 + \lambda = 0$

$r^2 = -\lambda$

$$r = \pm i\sqrt{\lambda} \tag{4.9}$$

Luego

$$X(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{4.10}$$

La ecuación (4.10) es la solución general de la EDO y utilizando las condiciones de contorno

$X(0) = X(L) = 0,$ obtenemos

$$X(0) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot 0\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda} \cdot 0\right) = 0, \qquad c_1 = 0 \tag{4.11}$$

$$X(L) = c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda} \cdot L\right) = 0, \quad si\ c_2 \neq 0 \tag{4.12}$$

$$\Rightarrow sen(\sqrt{\lambda}\cdot L) = 0$$

$$sen(\sqrt{\lambda}\cdot L) = 0 \leftrightarrow \sqrt{\lambda}\cdot L = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, tenemos lo que denominamos autovalores $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, con $n = 1,2,3, \ldots$ y sus autofunciones correspondientes está dada por

$$X_n(x) = c_2 sen\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}}\cdot x\right), \qquad n = 1,2,3, \ldots \tag{4.13}$$

Asumiendo $c_2 = 1$, se tiene

$$X_n(x) = sen\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}}x\right), \qquad n = 1,2,3, \ldots \tag{4.14}$$

Sustituyendo el valor $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ en la EDO

$T''(t) + \lambda\alpha^2 T(t) = 0$, obtenemos

$$T''(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha^2 T(t) = 0 \tag{4.15}$$

$$\left(D^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha^2\right)T(t) = 0 \tag{4.16}$$

$$k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha^2 = 0 \tag{4.17}$$

$$k_1 = i\alpha\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}} \tag{4.18}$$

$$k_2 = -i\alpha\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}} \tag{4.19}$$

Siendo α una constante real positiva, tenemos para cada $n \in \mathbb{N}$ la solución de la EDO.

$$T_n(t) = a_n cos\left(\alpha \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}}\, t\right) + b_n sen\left(\alpha \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}}\, t\right) \tag{4.20}$$

Asimismo, las soluciones de la ecuación (4.5) y las condiciones de contorno ecuación (4.6) son

$$u_n(x,t) = \left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right)\right] sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{4.21}$$

Luego, por el principio de la superposición se tiene

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right)\right] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{4.22}$$

Es también solución de (4.5) sujeto a las condiciones (4.6)

Resta, entonces, encontrar cuales deben ser los valores de las constantes a_n y b_n, $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando la condición inicial en la solución $u(x,t)$, tenemos:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha 0}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi\alpha 0}{L}\right)\right] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{4.23}$$

Luego en términos de función trigonométrica corresponde a las series de Fourier, así:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n = 1,2,3, \dots \tag{4.24}$$

Asimismo, para encontrar b_n vamos a derivar la solución $u(x,t)$ término a término en relación a t y aplicar la condición inicial (4.7). Tenemos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right)\right] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right)\right] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[-a_n \frac{n\pi\alpha}{L} sen\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + b_n \frac{n\pi\alpha}{L} cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right)\right] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-a_n \frac{n\pi\alpha}{L} sen\left(\frac{n\pi\alpha 0}{L}\right) + b_n \frac{n\pi\alpha}{L} cos\left(\frac{n\pi\alpha 0}{L}\right)\right] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$= g(x)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \frac{n\pi\alpha}{L}\right] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x) \tag{4.25}$$

Utilizando las propiedades de la serie de Fourier, se tiene que

$$b_n = \frac{2}{n\pi\alpha}\int_0^L g(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n = 1,2,3, \dots \tag{4.26}$$

Por lo tanto, hemos obtenido la solución del problema de valor inicial y de contorno.

4.1.4.1.1. Ecuación de la cuerda de un violín

Ejemplo 4.2

Se analiza el comportamiento que ocurren cuando se tocan las cuerdas de un instrumento como con violín. Las configuraciones de este comportamiento son descritas por la función $u(x,t)$, solución del problema de valor inicial y de contorno (4.1), con condiciones iniciales

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{a}, & para\ 0 \leq x \leq a \\ \frac{h(x-L)}{a-L}, & para\ \ a \leq x \leq L \end{cases} \tag{4.27}$$

$$g(x) = 0 \tag{4.28}$$

Solución:

Considerando la ecuación 4.21

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) \right] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n = 1,2,3,\dots$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi\alpha}\int_0^L g(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n = 1,2,3,\dots$$

Consideremos la solución para el problema de valor inicial y de frontera

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) \right] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Donde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^a \frac{hx}{a} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{2}{L}\int_a^L \frac{h(x-L)}{a-L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{4.29}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi\alpha}\int_0^L g(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \tag{4.30}$$

Calculando las integrales de los coeficientes de Fourier a_n, separadamente, utilizando integración por partes y asumiendo

$u = \frac{hx}{a}\ y\ \ dv = sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, obtenemos

$du = \frac{h}{a} dx \qquad\qquad v = -\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$$= \frac{2}{L}\int_0^a \frac{hx}{a} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{2}{L}\left[-\frac{hx}{a}\cdot\frac{L}{n\pi}\ cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a -\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\frac{h}{a}dx\right]$$

$$= \frac{2}{L}\left[-\frac{ha}{a}\cdot\frac{L}{n\pi}\ cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) + \frac{Lh}{n\pi a}\int_0^a \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right]$$

$$= \frac{2}{L}\left[-\frac{hL}{n\pi}\ cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) + \frac{Lh}{n\pi a}\cdot\frac{L}{n\pi} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^a$$

$$= \frac{2}{L}\left[-\frac{hL}{n\pi}\ cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) + \frac{L^2 h}{an^2\pi^2} sen\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\right]$$

$$a_n = -\frac{2h}{n\pi} cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) + \frac{2Lh}{an^2\pi^2} sen\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \tag{4.31}$$

Calculando la segunda integral del coeficiente a_n por medio del método de integración por partes, con $u = \frac{h(x-L)}{a-L}$ y $dv = sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$

$du = \frac{h}{a-L}dx \qquad\qquad v = -\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Se sigue que

$$= \frac{2}{L}\int_a^L \frac{h(x-L)}{a-L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{2}{L}\left[-\frac{h(x-L)}{a-L}\cdot\frac{L}{n\pi}\ cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_{x=a}^{x=L} + \int_a^L \frac{h}{a-L}\cdot\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right]$$

$$= \frac{2}{L}\left\{-\frac{h(L-L)}{a-L}\cdot\frac{L}{n\pi}\cdot\cos(n\pi) - \frac{h(a-L)}{a-L}\cdot\frac{L}{n\pi}\ cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\right.$$
$$\left. + \left[\frac{hL^2}{(a-L)n^2\pi^2} sen\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\right]_{x=a}^{x=L}\right\}$$

$$= \frac{2}{L}\left[\frac{h(a-L)}{(a-L)}\cdot\frac{L}{n\pi}\cdot\cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) + \frac{hL^2}{(a-L)n^2\pi^2}\cdot sen\left(\frac{n\pi L}{L}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{hL^2}{(a-L)n^2\pi^2} sen\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\right]$$

$$= \frac{2h}{n\pi} cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - \frac{2hL}{(a-L)n^2\pi^2} sen\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

De este modo, podemos reescribir el coeficiente a_n

$$a_n = \frac{-2h}{n\pi} cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) + \frac{2hL}{an^2\pi^2} sen\left(\frac{n\pi a}{L}\right) + \frac{2h}{n\pi} cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$
$$- \frac{2hL}{(a-L)n^2\pi^2} sen\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \left(\frac{-2h}{n\pi} + \frac{2h}{n\pi}\right) cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) + \left(\frac{2hL}{an^2\pi^2} - \frac{2hL}{(a-L)n^2\pi^2}\right) sen\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

$$= \frac{2hL}{n^2\pi^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a-L}\right) sen\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

Por lo tanto, la función que describe el n-ésimo término de una cuerda de violín será

$$u_n(x,t) = \frac{2hL}{n^2\pi^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a-L}\right) sen\left(\frac{n\pi a}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{n\pi \alpha t}{L}\right) \qquad (4.32)$$

Esta ecuación modela el movimiento transversal de una cuerda al tocar en un determinado tiempo, tenemos que la intensidad del sonido está ligada a la amplitud de las vibraciones y esta amplitud es representada por la oscilación de una onda.

4.1.4.1.2. Ecuación de onda de la cuerda de la guitarra

Ejemplo 4.3

Monferrato, M. (2009, pp.123-125). Plantea:

Una guitarra está apoyada verticalmente contra la pared de un camión. En el instante $t = 0$, el camión choca contra un muro a la velocidad $v_0 = 22{,}2\ m/s$. La función posición o desplazamiento vertical $y(x,t)$ en el instante t de un punto x de una de sus cuerdas que se extiende entre $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}m$ responde a la “ecuación de onda”.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Sujeta a las **condiciones de frontera**

$$u(0,t) = u\left(\frac{1}{2},t\right) = 0, \quad t > 0 \tag{4.33}$$

y las **condiciones iniciales**

$$u(x,0) = 0, \text{ y } \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 22{,}2 \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2} \tag{4.34}$$

$$\alpha = 1$$

a) Hallar la solución de la ecuación

b) Graficar la función solución entre $x = 0\ m$ y $x = \frac{1}{2} m$ entre $t = 0\ s$ y $t = 6\ s$

c) Representar gráficamente los desplazamientos de la cuerda en los instantes $t = \frac{1}{2} s$ y $t = 1\ s$

Solución:

a) Reemplazando en ecuación 4.21, tenemos:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right)\right] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Hallamos los coeficientes:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_n = \frac{2}{0.5}\int_0^{0.5} 0 \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{0.5}\right) dx, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi\alpha}\int_0^{L} g(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi \cdot 1}\int_0^{0.5} 22.2 \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{0.5}\right) dx$$

$$b_n = \frac{44.4}{n\pi}\int_0^{0.5} sen(2n\pi x)\, dx$$

$$b_n = \frac{44.4}{n\pi} \cdot \left[-\frac{sen(2n\pi x)}{2n\pi}\right]_{x=0}^{x=0.5}$$

$$b_n = \frac{44.4}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]$$

La solución de la ecuación de la onda es

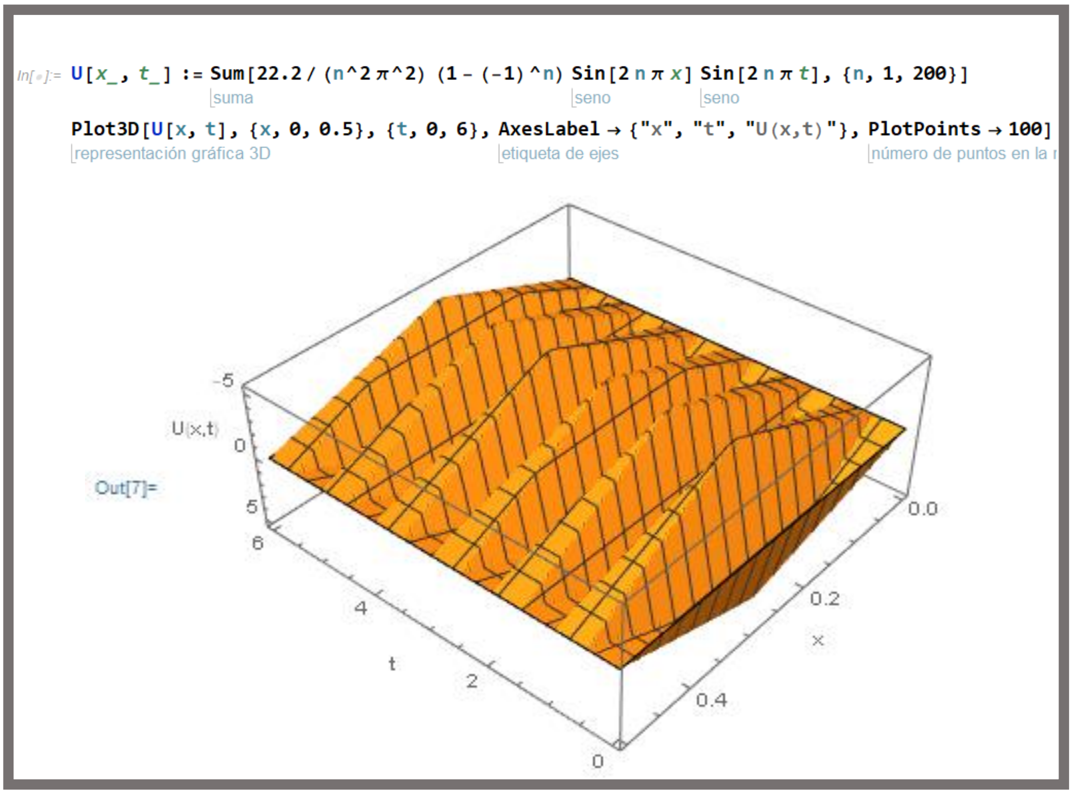
$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{200} \frac{22.2}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n] sen(2n\pi x) sen(2n\pi t) \tag{4.35}$$

b) Graficamos la convergencia $u(x,t)$ considerando los 200 primeros términos de la serie entre $x = 0\ m$ y $x = \frac{1}{2}m$ entre $t = 0\ s$ y $t = 6\ s$

Graficamos:

Figura 4.6

Función de la onda unidimensional durante 6 segundos de longitud 0.5 m, obtenida con el programa Wolfram Mathematica (versión 12.2).



Al representar gráficamente los desplazamientos de la cuerda en los instantes

$t = \frac{1}{2}\, s$ y $t = 1\, s$, tenemos las figuras:

Figura 4.7

Desplazamiento de la cuerda $t = \frac{1}{2}\,s$, obtenida con el programa Wolfram Mathematica (versión 12.2).

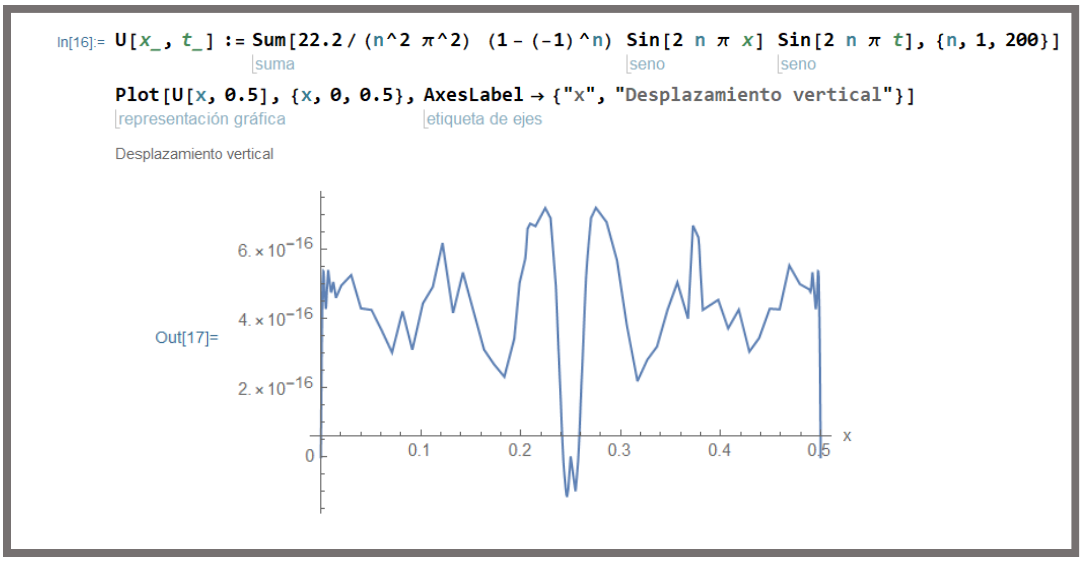
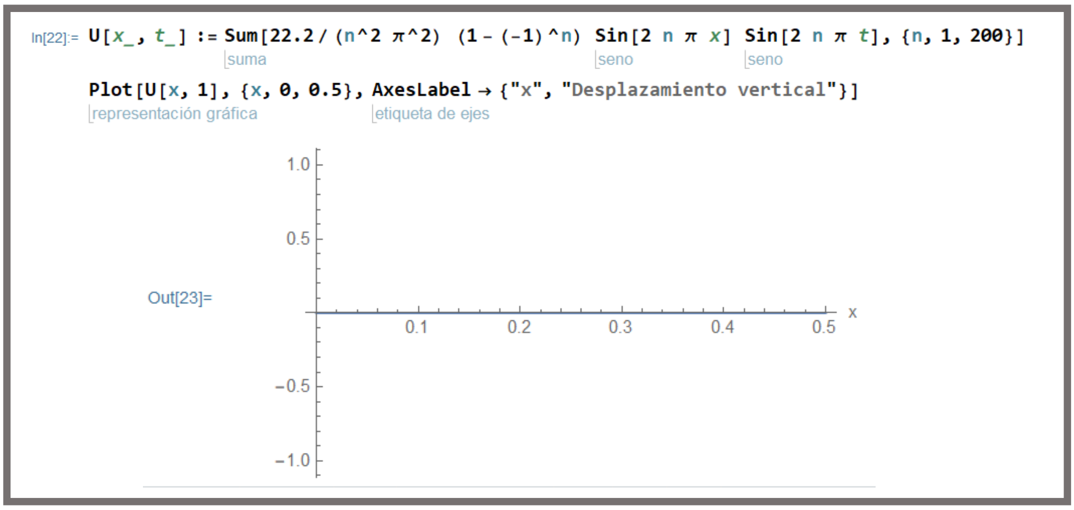


Figura 4.8

Cuerda en equilibrio en $t = 1s$, obtenida con el programa Wolfram Mathematica (versión 12.2).



En el segundo 1 se estabiliza la cuerda de la onda, es decir, deja de vibrar

Ejemplo 4.4

Halla la solución analítica de la ecuación de la onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < 1, \qquad t > 0 \tag{4.36}$$

dada las ***condiciones de frontera***

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0 \tag{4.37}$$

y las ***condiciones iniciales***

$$u(x,0) = \text{sen}(\pi x), \text{ y } \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \qquad 0 \le x \le 1 \tag{4.38}$$

Solución:

Reemplazando en la ecuación (4.21), tenemos:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right)\right] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Hallamos los coeficientes a_n y b_n:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 sen(\pi x)\cdot sen\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_n = 2\int_0^1 sen(\pi x)\cdot sen(n\pi x) dx \tag{4.39}$$

Empleando la integral por identidad tenemos:

$$sen(A) \cdot sen(B) = \frac{1}{2}[cos(A-B) - cos(A+B)] \tag{4.40}$$

Al aplicar esta identidad a $sen(\pi x)$ y $sen(n\pi x)$:

$$sen(\pi x) \cdot sen(n\pi x) = \frac{1}{2}\left[cos\big((1-n)\pi x\big) - cos\big((1+n)\pi x\big)\right] \tag{4.41}$$

Se convierte en:

$$a_n = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 \left[cos\big((1-n)\pi x\big) - cos\big((1+n)\pi x\big)\right]dx \tag{4.42}$$

$$a_n = \int_0^1 cos\big((1-n)\pi x\big)dx - \int_0^1 cos\big((1+n)\pi x\big)\,dx$$

$$a_n = \frac{sen\big((1-n)\pi\big)}{(1-n)\pi} - \frac{sen\big((1+n)\pi\big)}{(1+n)\pi} \tag{4.43}$$

Evaluando para $sen(\pi k) = 0$, para cualquier valor entero k.

Evaluando para el segundo sumando $n = 1$

$$\frac{sen\big((1+n)\pi\big)}{(1+n)\pi} = \frac{sen\big((1+1)\pi\big)}{(1+1)\pi} = \frac{sen(2\pi)}{2\pi} = 0$$

$n = 2$

$$\frac{sen\big((1+n)\pi\big)}{(1+n)\pi} = \frac{sen\big((1+2)\pi\big)}{(1+2)\pi} = \frac{sen(3\pi)}{3\pi} = 0$$

Sin embargo, cuando $n = 1,$ tenemos:

$$sen(\pi x) \cdot sen(\pi x) = sen^2(\pi x) \tag{4.44}$$

Al aplicar esta identidad $sen^2(\theta) = \frac{1}{2}[1 - \cos{(2\theta)}]$, tenemos:

$$a_n = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 [1 - \cos(2\pi x)] dx = \int_0^1 [1 - \cos(2\pi x)] dx \tag{4.45}$$

$$a_n = \int_0^1 dx - \int_0^1 \cos(2\pi x)\, dx$$

$$a_n = 1 - \frac{sen(2\pi)}{2\pi} + \frac{sen(0)}{2\pi}$$

$$a_n = 1$$

cuando $n \neq 1,$ tenemos

$$a_n = 0$$

$$a_n = \begin{cases} 1, & si\ n = 1, \\ 0, & si\ n \neq 1 \end{cases}$$

Calculando b_n, tenemos:

$$b_n = \frac{2}{n\pi\alpha} \int_0^L g(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi 2} \int_0^L 0 \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = 0$$

Reemplazando en:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + 0 \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{1}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{1}\right) \right]$$

$$\therefore \boldsymbol{u(x,t) = sen(\pi x)\, cos(2\pi t)} \tag{4.46}$$

4.1.4.2. Solución por análisis numérico

Se desarrolla el análisis numérico por el Método de Diferencias Finitas (MDF) considerando su consistencia, estabilidad y convergencia.

Maco, Salazar, Castillo y Rodriguez (2018), en su aporte científico mencionan: no es sencillo encontrar soluciones analíticas para la ecuación diferencial parabólico, por este motivo, es preciso buscar métodos para hallar soluciones numéricas aproximadas, a razón de ello, es necesario aplicar el análisis numérico para contrastar con mayor rigor científico la denominada “solución de una ecuación diferencial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda” que converge a la solución exacta.

El método numérico es similar a un experimento de laboratorio, en el cual los elementos del conjunto leído nos permiten determinar la distribución de la cantidad medible en el dominio de investigación. Para ello sea desde el analista numérico como el experimentador de laboratorio deben establecer un número finito de valores numéricos como resultado. El método incluye esa tarea de proveer un conjunto de ecuaciones algebraicas para esas incógnitas y prescribir un algoritmo para resolver dichas ecuaciones. (Rubio, O. 1999, p.5)

4.1.4.2.1. Método de diferencias finitas (MDF)

Lara, L., Chávez, Z. y Castañeda, J. (2019, p.8-9), el Método de Diferencias Finitas (MDF) es un método de carácter general que permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales definidas en dominios finitos. Probablemente es el primer método numérico utilizado en la resolución de problemas en dinámica de fluidos y transferencia de calor, así como en problemas electromagnéticos; existe documentación en la que se menciona que Gauss utilizó este método. Su uso se generalizó con la aparición de los primeros ordenadores y la bibliografía sobre el mismo es abundante en los años 60, especialmente en relación con el análisis de guías de ondas. Este método obtiene una solución aproximada de las ecuaciones diferenciales definidas en un dominio o región de trabajo. En dicho dominio estarán definidas las condiciones de contorno o frontera y las condiciones iniciales que marcarán el punto de partida en la solución de problemas concretos.

Los términos explícitos e implícitos están relacionados a los valores del esquema de diferencias finitas y la dependencia de la forma en que se calcula el transcurrir del tiempo.

Las Ecuaciones Diferenciales Parciales es una nueva metodología de trabajo en constante cambio. En ello consideran el desarrollo de la onda desde dos miradas respecto al tiempo: Newmark y Diferencias Finitas (DF). (Piñeiros y Garzon, 2009)

En tal sentido el presente trabajo de investigación denominado "Solución de una ecuación diferencial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda", se desarrolló haciendo del análisis numérico acorde al avance de la ciencia y la tecnología haciendo uso de software científico fortran a la vanguardia de la ciencia y la tecnología como medio de modelación.

Piñeros y Garzón (2009), mencionan que la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales variables en el tiempo es un campo de trabajo en crecimiento. Para hacer esto, tenga en cuenta que existen dos métodos dependientes del tiempo para resolver computacionalmente la ecuación de onda: el método de Newmark y el de Diferencias Finitas (DF).

4.1.4.2.2. Discretización de la ecuación diferencial

El método de diferencias finitas también se llama método de Taylor porque utiliza la fórmula de la serie de Taylor para aproximar un operador diferencial con un operador de diferencias finitas.

Teorema de Taylor. Supongamos que $f \in C^n[a,b]$ y $f^{(n+1)}(x)$ existe en $\langle a,b \rangle$. Sea $x_0 \in [a,b]$, para todo $x \in [a,b]$, existe $\xi(x)$ entre x_0 y x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{4.47}$$

donde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (x - x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{4.48}$$

es un polinomio de grado n alrededor de x_0 y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \tag{4.49}$$

es el residuo o error de truncamiento asociado con el polinomio $P_n(x)$.

Hay tres tipos de diferencias finitas, entre ellos destacan:

1. Diferencias finitas hacia adelante:

En este enfoque, la derivada de una función $f(x)$ en un punto x_0 se calcula utilizando los valores de la función en x_0 y $x_0 + h$, donde h es un paso pequeño. La aproximación de la derivada hacia adelante se define como:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h} \tag{4.50}$$

$$f''(x_i) \approx \frac{-f(x_{i+3})+4f(x_{i+2})-5f(x_{i+1})+2f(x_i)}{h^2} + O(h^2) \tag{4.51}$$

2. Diferencias finitas hacia atrás:

Similar al método hacia adelante, se emplea la diferencia entre x_0 y $x_0 - h$. La aproximación de la derivada hacia atrás se define como:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} \tag{4.52}$$

$$f''(x_i) \approx \frac{2f(x_i)-5f(x_{i-1})+4f\,(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{h^2} + O(h^2) \tag{4.53}$$

3. Diferencias finitas centradas:

Este método ofrece una mayor precisión que los anteriores al tomar diferencias hacia adelante y hacia atrás. La aproximación se define como:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \tag{4.54}$$

En general, si $u \in C^4$

$$f''(x_i) \approx \frac{-f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2) \tag{4.55}$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} \approx \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} + O(h^2) \tag{4.56}$$

4.1.4.2.2.1. Discretización de la variable independiente

La discretización de las variables independientes significa la digitalización de las variables espaciales en un campo finito.

Si consideramos $\Omega = [0, L]$ o $[a, b]$ o un intervalo de forma más general, podemos tratar todos los $\mathbb{R}$ como dominios naturales. Permita un número Δx, llamado espacio, luego divida el dominio en subintervalos equidistantes de longitud Δx.

También es posible dividir subintervalos no igualmente espaciados, como $[x_i, x_{i+1}]$ se considera la longitud Δx_i. De los subintervalos mencionados consideramos los homogéneos.

Malla

Sea Δx un número positivo, la malla considerado en el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}$ son los puntos $\tau = \{x_n\} \subset \Omega$, tal que cada x_n está en el interior o en la frontera de un subdominio tal que $x_{n+1} = x_n + \Delta x$. (Lara, Chávez y Castañeda, 2019, p.10)

Los puntos x_n en la malla se denomina nodos y este proceso de elección no es único.

La norma de la malla como el diámetro del subdominio más grande, es:

$$\Delta x = \|\tau\| = \max_{0 \le i \le n}\{\Delta x_i\} \tag{4.57}$$

En la ecuación de la onda unidimensional homogénea, la variable x representa esa posición en el espacio, mientras la variable t representa el tiempo. Las dos variables se consideran como variables independientes.

4.1.4.2.3. Solución por análisis numérico por el método de diferencias finitas

Ejemplo 4.5

Hallar $u \in C^2(U)$ tal que:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad , \qquad U: 0 \le x \le l, t > 0 \tag{4.58}$$

Condiciones de frontera:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{4.59}$$

Condiciones iniciales:

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), \qquad 0 \le x \le l \tag{4.60}$$

Solución:

Se interpreta las expresiones:

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$: representa la aceleración de la onda,

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$: representa la curvatura o variación espacial de la onda,

α: es una constante física de velocidad de propagación de la onda en el medio

$$\alpha^2 = \frac{T}{\mu} \tag{4.61}$$

T: tensión de la cuerda

μ: densidad lineal de la masa de la cuerda

Así mismo la posición inicial:

$$u(x,0) = \mathrm{f}(x) \tag{4.62}$$

También la velocidad inicial:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \tag{4.63}$$

$$0 \le x \le 1$$

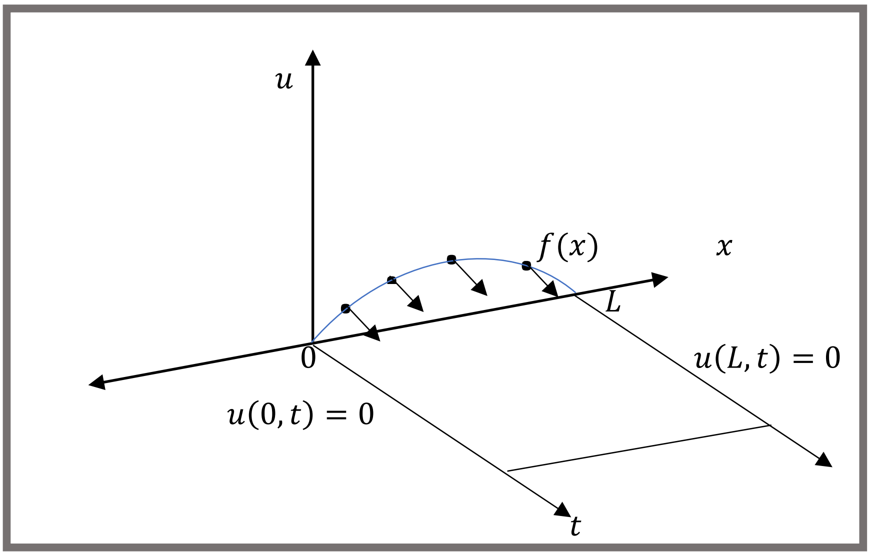
Sujeta a las condiciones de frontera o extremos fijos:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad t > 0 \tag{4.64}$$

De las anteriores se analiza las condiciones de la cuerda:

Figura 4.9

Proyección del comportamiento de la cuerda vibrante



- $h = \frac{L}{m}$, $x_i = ih, \forall i = 0, m$
- $k = paso$, $t_j = jk, j = 0, 1, 2, \ldots$

Para establecer el método de diferencias finitas, se selecciona un entero $m > 0$ y el tamaño de paso $k > 0$ en el eje y de la variable temporal. Con $h = \frac{L}{m}$ tamaño de paso de la variable espacial, entonces los puntos de red $u(x_i, t_j)$ son:

$$x_i = ih, \text{ y } t_j = jk; \ i = 0, 1, 2, \ldots, m; \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.65}$$

El método de diferencias finitas se halla al aproximar las segundas derivadas parciales con polinomios de segundo grado centrados en el punto (x_i, t_j).

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i-1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i+1},t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u(\mu_i,u_j)}{\partial x^4}, \quad t_{j-1} < \mu_j < t_{j+1} \tag{4.66}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \approx \frac{u(x_i,t_{j-1})-2u(x_i,t_j)+u(x_i,t_{j+1})}{k^2} - \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_i,t_j)}{\partial t^4}, \quad x_{i-1} < \xi_i < x_{i+1} \tag{4.67}$$

Sustituyendo en la ecuación (4.58) en derivadas parciales se obtiene:

$$\frac{u(x_i,t_{j-1})-2u(x_i,t_j)+u(x_i,t_{j+1})}{k^2} - \alpha^2\frac{u(x_{i-1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i+1},t_j)}{h^2} =$$

$$= \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_i,t_j)}{\partial t^4} - \frac{\alpha^2 h^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_i,t_j)}{\partial x^4} \to O(h^2+k^2) \tag{4.68}$$

Ecuación en diferencias finitas $u = W$:

$$\frac{W_{i,j+1}-2W_{i,j}+W_{i,j-1}}{k^2} - \alpha^2\frac{W_{i+1,j}-2W_{i,j}+W_{i-1,j}}{h^2} = 0 \tag{4.69}$$

Entonces:

$$\frac{W_{i,j+1}-2W_{i,j}+W_{i,j-1}}{k^2} = \alpha^2\frac{W_{i+1,j}-2W_{i,j}+W_{i-1,j}}{h^2}$$

$$W_{i,j+1}-2W_{i,j}+W_{i,j-1} = \alpha^2\frac{W_{i+1,j}-2W_{i,j}+W_{i-1,j}}{h^2}k^2$$

$$W_{i,j+1} = \alpha^2\frac{W_{i+1,j}-2W_{i,j}+W_{i-1,j}}{h^2}k^2 + 2W_{i,j} - W_{i,j-1}$$

$$W_{i,j+1} = \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}W_{i+1,j} - 2\frac{\alpha^2 k^2}{h^2}W_{i,j} + \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}W_{i-1,j} + 2W_{i,j} - W_{i,j-1}$$

$$W_{i,j+1} = \lambda^2 W_{i+1,j} - 2\lambda^2 W_{i,j} + \lambda^2 W_{i-1,j} + 2W_{i,j} - W_{i,j-1}$$

$$W_{i,j+1} = \lambda^2 W_{i+1,j} - 2\lambda^2 W_{i,j} + 2W_{i,j} + \lambda^2 W_{i-1,j} - W_{i,j-1}$$

$$W_{i,j+1} = \lambda^2 W_{i+1,j} - 2W_{i,j}(\lambda^2-1) + \lambda^2 W_{i-1,j} - W_{i,j-1}$$

$$W_{i,j+1} = \lambda^2 W_{i+1,j} - 2(\lambda^2 - 1)W_{i,j} + \lambda^2 W_{i-1,j} - W_{i,j-1}$$
$$W_{i,j+1} = \lambda^2 W_{i+1,j} + 2(1 - \lambda^2)W_{i,j} + \lambda^2 W_{i-1,j} - W_{i,j-1}$$

$$W_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)W_{i,j} + \lambda^2\left(W_{i+1,j} + W_{i-1,j}\right) - W_{i,j-1} \qquad (4.70)$$

Esta ecuación se mantiene para cada $i = 1,2,\dots,m-1$ y $j = 1,2,\dots$ Las condiciones de frontera proporcionan:

$$W_{0,j} = W_{m,j} = 0, \ \forall j = 1, 2, 3, \dots \qquad (4.71)$$

y la condición inicial implica que

$$W_{i,0} = f(x_i), \quad \forall i = \overline{1, m-1} \qquad (4.72)$$

Se escribe a continuación este conjunto de ecuaciones en forma matricial y nos da

$$\begin{bmatrix} W_{1,j+1} \\ W_{2,j+1} \\ \vdots \\ . \\ W_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1,j} \\ W_{2,j} \\ \vdots \\ . \\ W_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_{1,j-1} \\ W_{2,j-1} \\ \vdots \\ . \\ W_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

(4.73)

Para calcular $w_{i,2}$, deben obtenerse a partir de la condición de velocidad inicial.

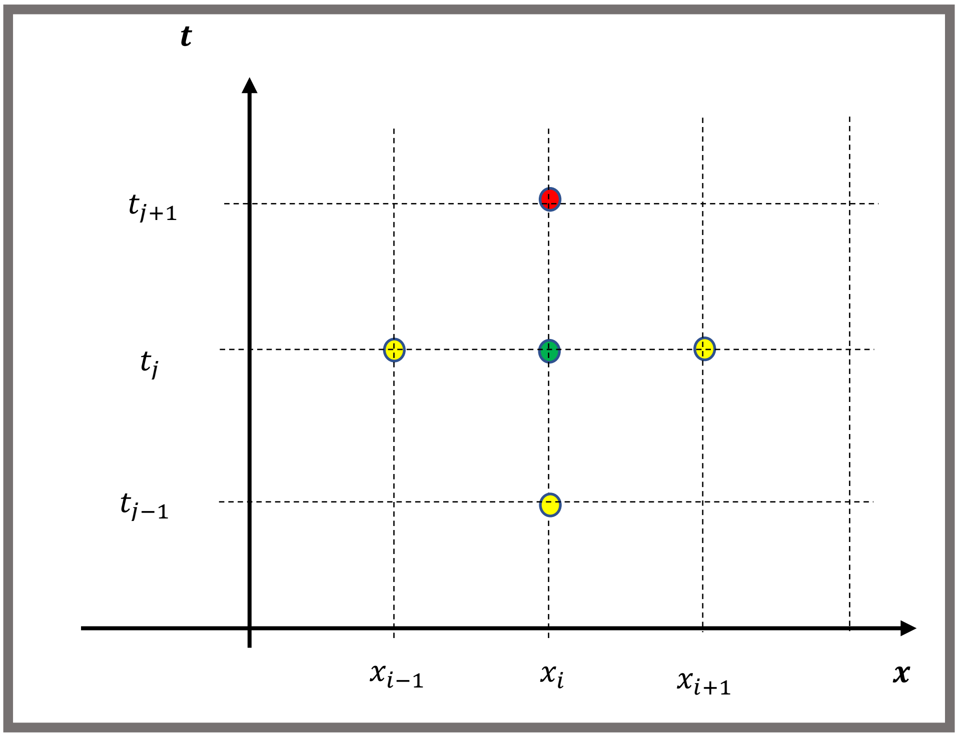
$$\frac{\partial u(x_i,0)}{\partial t} = g(x_i) \quad 0 \leq x \leq l \qquad (4.74)$$

$$W_{i,j} \approx u(x_i, t_j) \tag{4.75}$$

$$\lambda = \frac{k\alpha}{h} \tag{4.76}$$

Figura 4.10

Dibujo para encontrar un nodo de la malla



Para la segunda iteración se aplicaría al despejar a $u(x_i, t_j)$ obteniéndose:

$$u(x_i, t_{j+1}) = 2\left[1 - \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\right] u(x_i, t_j) + \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\left[u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)\right] - u(x_i, t_{j-1}) \tag{4.77}$$

El único problema es que cuando $j = 0$ el último término no se conoce, es decir, que se necesitaría $u(x_i, t_{j-1})$. Sin embargo, la primera iteración completa se puede determinar a partir de las condiciones iniciales, al aproximar la primera derivada parcial con respecto al tiempo.

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{u(x_i,t_1) - u(x_i,t_0)}{k} \tag{4.78}$$

$$g(x_i) = \frac{u(x_i,t_1) - f(x_i)}{k} \tag{4.79}$$

Al despejar a $u(x_i, t_1)$ se obtiene la expresión que permite realizar la primera iteración (iteración cero o valor inicial):

$$u(x_i, t_0) = f(x_i) + kg(x_i) \qquad \forall i = \overline{0, m} \tag{4.80}$$

Condición de estabilidad:

Si se define $\lambda = \frac{\alpha k}{h}$, entonces el método será estable si y sólo si:

$$\lambda \leq 1 \tag{4.81}$$

Ecuación de diferencias finitas para el nivel 0 o condición inicial, tenemos:

$$\left\{\left(x_i, t_j\right)/x_i = hi\,, \quad t_j = kj; \qquad \forall i = \overline{0, m}; \quad \forall j = \overline{0, n}\,\right\}$$

$$u\left(x_i, t_j\right) = f(x_i) + kg(x_i) \qquad i = 0,1,2, \dots, m; \qquad j = 0,1,2, \dots$$

Si existe f'' y la ecuación de diferencias finitas para el nivel 1, es:

$$\left\{\left(x_i, t_j\right)/x_i = hi\,, \quad t_j = kj; \qquad \forall i = \overline{1, m-1}; \quad \forall j = 1,2, \dots\right\}$$

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, t_0) + kg(x_i) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 f''(x_i), \tag{4.82}$$

Ecuación de diferencias finitas para los niveles 2 hacia adelante con error $O(h^2 + k^2)$:

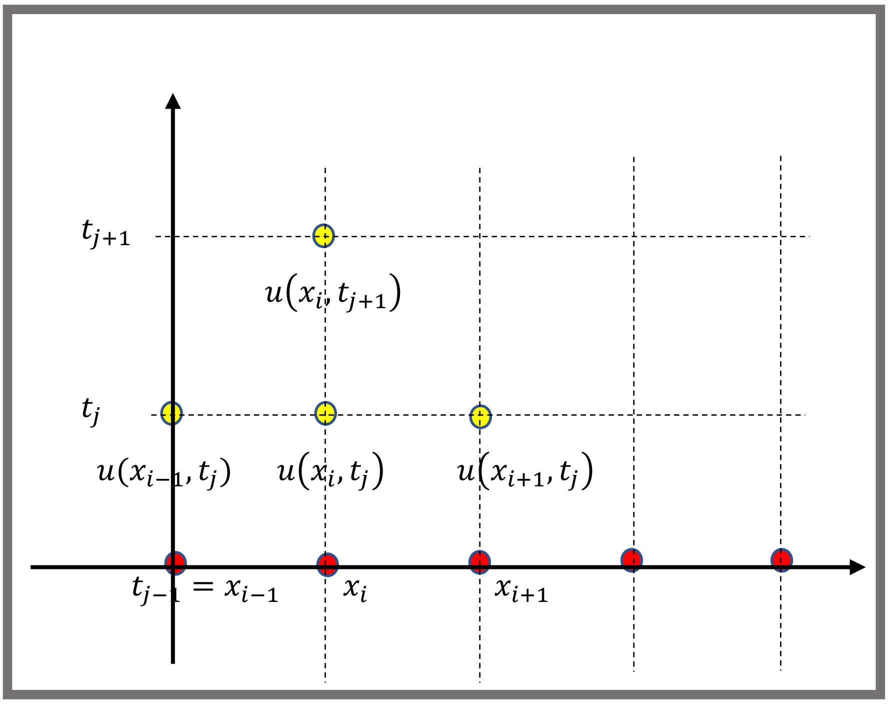
$$\{(x_i, t_j)/x_i = hi\ , \quad t_j = \ kj\ ; \qquad \forall i = \overline{1, m-1}; \quad \forall j = 1,2, \ldots\}$$

$$u(x_i, t_1) = (1 - \lambda^2) f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i-1}) + kg(x_i) \qquad (4.83)$$

$$u(x_i, t_{j+1}) = 2\left[1 - \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\right] \cdot u(x_i, t_j) + \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\left[u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)\right] - u(x_i, t_{j-1}) \qquad (4.84)$$

Figura 4.11

Dibujo de nodos de la malla conociendo nivel inicial o nivel cero



Ejemplo 4.6

Aproxime la solución de la ecuación de la onda del ejemplo 4.4

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < 1, \qquad t > 0$$

dada las ***condiciones de frontera***

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0$$

y las ***condiciones iniciales***

$$u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x), \text{ y } \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Comparar con la solución analítica del problema expresado en (4.46)

$$u(x,t) = \operatorname{sen}(\pi x)\cos(2\pi t)$$

Considere el valor de $h = 0.25$ y $k = 0.1$, y encuentre los valores de $u(x,t)$ cuando $t = 0.3$

Solución:

Siendo la condición de estabilidad

$$\lambda = \frac{\alpha k}{h} \tag{4.85}$$

Los valores de: $h,\ k,\ t$ son

$$h = 0.25, \qquad k = 0.1, \qquad t = 0.3$$

según el problema $\alpha^2 = 4$, entonces $\alpha = 2$

Calculamos "λ":

$$\lambda = \frac{\alpha k}{h} = \frac{2 \times 0.1}{0.25} = 0.8$$
$$\lambda = 0.8$$

Este último resultado asegura que el método no será inestable numéricamente a medida que la simulación avance.

PUNTOS DE RED PARA EL NIVEL CERO O NIVEL INICIAL

$$\left\{\left(x_i, t_j\right)/x_i = 0{,}25i\ , \quad t_j = \ 0{,}1j\ , \qquad i = 0\colon 4, \qquad j = 0\colon 3\right\}$$

Aplicando la fórmula para diferencias finitas la ecuación (4.80) para el nivel cero, tenemos:

$$u\left(x_i, t_j\right) = f(x_i) + kg(x_i) \qquad \forall i = \overline{0, m} \quad \forall j = \overline{0, n}$$

PUNTOS DE RED PARA EL NIVEL 1

$$\left\{\left(x_i, t_j\right) / \ x_i = 0{,}25i\ , \quad t_j = \ 0{,}1j\ , \qquad i = 1\colon 4, \quad j = 1{,}2, \ldots\right\}$$

Aplicando la fórmula para diferencias finitas ecuación (4.82) para el nivel 1, tenemos:

$$u\left(x_i, t_j\right) = u\left(x_i, t_{j-1}\right) + kg(x_i) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 f''(x_i), \ \ \forall i = \overline{1, m-1}; \quad j = 1$$

PUNTOS DE RED PARA EL NIVEL 2

$$\{(x_i, t_j) \,/\, x_i = 0{,}25i\,,\quad t_j = 0{,}1j\,,\qquad i = 1{:}\,4,\qquad j = 1{,}2{,}3\,\ldots\}$$

Aplicando la fórmula del arreglo matricial (4.73) para diferencias finitas y la ecuación (4.84) para el nivel 2 en adelante, tenemos:

$$\begin{bmatrix} W_{1,j+1} \\ W_{2,j+1} \\ \vdots \\ \cdot \\ W_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1,j} \\ W_{2,j} \\ \vdots \\ \cdot \\ W_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_{1,j-1} \\ W_{2,j-1} \\ \vdots \\ \cdot \\ W_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

$$W_{1,j+1} = \left[2(1-\lambda^2)\cdot W_{1,j} + \ \lambda^2 \cdot W_{2,j} + 0\cdot W_{2,j} + 0 \cdot W_{2,j}\right] - W_{1,j-1}$$

$$u(x_i, t_{j+1}) = 2\left[1 - \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\right]\cdot u(x_i, t_j) + \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\left[u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)\right] - u(x_i, t_{j-1})$$

$\forall i = \overline{1, m-1} \quad \forall j = 1{,}2{,}3, \ldots$

$h = 0.25, \quad k = 0.1$

NIVEL CERO O CONDICIÓN INICIAL (C.I.)

Para la iteración 1 ó C.I., $t = t_0 = 0$ reemplazamos en:

Condiciones iniciales $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ y $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$

$$W(x_i, t_j) = f(x_i) + kg(x_i)$$

$$W(x_i, t_j) = \operatorname{sen}(\pi x_i) + kg(x_i)$$

$$W(x_i, t_j) = \operatorname{sen}(\pi x_i) + k\,\frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial t_j} \quad \forall i = \overline{0, m}$$

$$f(x_i) = u(x,0) = sen(\pi x)$$

$$g(x_i) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$$

$$h = 0.25, \qquad k = 0.1$$

$$W(x_0,t_0) = \text{sen}(\pi x_0) + k\frac{\partial u(x_0,0)}{\partial t_0}$$

$$W(0{,}0) = \text{sen}(\pi \cdot 0) + 0.1 \cdot 0$$

$$W(0{,}0) = 0 + 0$$

$$W(0{,}0) = 0$$

$$W(x_1,t_0) = \text{sen}(\pi x_1) + k\frac{\partial u(x_1,0)}{\partial t_0}$$

$$W(0.25{,}0) = \text{sen}(\pi \cdot 0.25) + 0.1 \cdot 0$$

$$W(0.25{,}0) = 0.707106 + 0$$

$$W(0.25{,}0) = 0.707106$$

$$W(x_2,t_0) = \text{sen}(\pi x_2) + k\frac{\partial u(x_2,0)}{\partial t_0}$$

$$W(0.5{,}0) = \text{sen}(\pi \cdot 0.5) + 0.1 \cdot 0$$

$$W(0.5{,}0) = 1 + 0$$

$$W(0.5{,}0) = 1$$

$$W(x_3,t_0) = \text{sen}(\pi x_3) + k\frac{\partial u(x_3,0)}{\partial t_0}$$

$$W(0.75{,}0) = \text{sen}(\pi \cdot 0.75) + 0.1 \cdot 0$$

$$W(0.75{,}0) = 0.707106 + 0$$

$$W(0.75{,}0) = 0.707106$$

$$W(x_4, t_0) = \mathrm{sen}(\pi x_4) + k\frac{\partial u(x_4, 0)}{\partial t_0}$$

$$W(1{,}0) = \mathrm{sen}(\pi \cdot 1) + 0.1 \cdot 0$$

$$W(1{,}0) = 0 + 0$$

$$W(1{,}0) = 0$$

NIVEL 1

Para la iteración 2, $\boldsymbol{t = t_1 = 0.1}$ reemplazamos en:

Para el caso que $u = W$ esté en C^2. Entonces la ecuación de diferencias finitas para el nivel 1 o 2da fila, tenemos:

$$u(x_i, t_j) = u(x_i, t_{j-1}) + kg(x_i) + \tfrac{k^2}{2}\alpha^2 f''(x_i) \qquad \forall i = \overline{1, m-1}$$

$$f(x_i) = sen(\pi x)$$

$$f'(x_i) = \cos(\pi x)\pi$$

$$f''(x_i) = -\pi^2 sen(\pi x)$$

$$g(x_i) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$$

$$h = 0.25, \qquad k = 0.1$$

$$u(x_1, t_1) = u(x_1, t_0) + kg(x_1) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 f''(x_1)$$

$$u(x_1, t_1) = u(0.25; 0.1)$$

$$u(0.25{,}0.1) = \sin(\pi \cdot 0{,}25) + 0{,}1 \cdot 0 + \frac{(0{,}1)^2}{2} \cdot 2^2(-\pi^2 sen(\pi \cdot 0{,}25))$$

$$u(0.25{,}0.1) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{1}{100} \cdot 2\left(-\pi^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$u(0.25{,}0.1) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{50}\left(\pi^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$u(0.25{,}0.1) = 0{,}70710678 - 0{,}13957728 = 0.5675295$$

$$u(x_i,t_1) = u(x_i,t_0) + kg(x_i) + \tfrac{k^2}{2}\alpha^2 f''(x_i)$$

$$f(x_i) = sen(\pi x)$$

$$f'(x_i) = \cos(\pi x)\pi$$

$$f''(x_i) = -\pi^2 sen(\pi x)$$

$$u(x_2,t_1) = u(x_2,t_0) + kg(x_2) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 f''(x_2)$$

$$u(x_2,t_1) = u(0.5; 0.1)$$

$$u(0.5; 0.1) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0{,}1 \cdot 0 + \frac{(0{,}1)^2}{2} \cdot 2^2 \left(-\pi^2 sen(\frac{\pi}{2})\right)$$

$$u(0.5{,}0.1) = 1 + 0 + \frac{1}{100} \cdot 2(-\pi^2 \cdot 1)$$

$$u(0.5{,}0.1) = 1 + \frac{1}{50} \cdot (-\pi^2)$$

$$u(0.5{,}0.1) = 1 - \frac{\pi^2}{50}$$

$$u(0.5{,}0.1) = 0.80260791$$

$$u(x_i,t_1) = u(x_1,t_0) + kg(x_i) + \tfrac{k^2}{2}\alpha^2 f''(x_i)$$

$$f(x_i) = sen(\pi x)$$

$$f'(x_i) = \cos(\pi x)\pi$$

$$f''(x_i) = -\pi^2 sen(\pi x)$$

$$u(x_3,t_1) = u(x_3,t_0) + kg(x_3) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 f''(x_3)$$

$$u(x_3,t_1) = u(0.75{,}0.1)$$

$$u(0.75{,}1) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 0{,}1 \cdot 0 + \frac{(0{,}1)^2}{2} \cdot 2^2 \left(-\pi^2 sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$u(0.75{,}1) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{1}{100} \cdot 2\left(-\pi^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$u(0.75,1) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{50} \cdot \left(\pi^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$u(0.75,1) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\pi^2(\sqrt{2})}{100}\right)$$

$$u(0.75,1) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2(\sqrt{2})}{100}$$

$$u(0.75,1) = 0.707106 - 0.13957728$$

$$u(0.75,1) = 0.56752872$$

NIVEL 2

Para la iteración 3, $\boldsymbol{t_{j+1} = t_2 = 0,2}$ y las siguientes, reemplazamos en:

$$u(x_i, t_{j+1}) = 2\left[1 - \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\right] \cdot u(x_i, t_j) + \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\left[u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)\right] - u(x_i, t_{j-1})$$

$$\forall i = \overline{1, m-1};\ j = 1$$

$$h = 0.25, \qquad k = 0.1$$

$$u(x_1, t_{1+1}) = 2\left[1 - \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}\right] \cdot u(x_1, t_1) + \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}[u(x_{1-1}, t_1) + u(x_{1+1}, t_1)] - u(x_1, t_{1-1})$$

$$u(x_1, t_2) = 2\left[1 - \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}\right] \cdot u(x_1, t_1) + \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}[u(x_0, t_1) + u(x_2, t_1)] - u(x_1, t_0)$$

Al reemplazar valores y ordenando queda:

$$u(0.25,0.2) = 0.72 * u(x_1, t_1) + 0.64 * u(x_0, t_1) + 0.64u(x_2, t_1) - u(x_1, t_0)$$

$$u(0.25,0.2) = 0.72 * 0,5675295 + 0.64 * 0 + 0.64 * 0,80260791 - 0.707106$$

$$u(0.25,0.2) = 0.40862124 + 0 + 0.513669062 - 0.707106$$

$$u(0.25,0.2) = 0.215184302$$

$$u(x_i, t_{j+1}) = 2\left[1 - \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\right] \cdot u(x_i, t_j) + \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\left[u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)\right] - u(x_i, t_{j-1})$$

$$u(x_2, t_{1+1}) = 2\left[1 - \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}\right] \cdot u(x_2, t_1) + \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}\left[u(x_{2-1}, t_1) + u(x_{2+1}, t_1)\right] - u(x_2, t_{1-1})$$

$$u(x_2, t_2) = 2\left[1 - \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}\right] \cdot u(x_2, t_1) + \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}\left[u(x_1, t_1) + u(x_3, t_1)\right] - u(x_2, t_0)$$

Al reemplazar valores y ordenando queda:

$$u(0.5,0.2) = 0.72 * u(x_2, t_1) + 0.64 * (x_1, t_1) + 0.64u(x_3, t_1) - u(x_2, t_0)$$

$$u(0.5,0.2) = 0.72 * 0,80260791 + 0.64 * 0,5675295 + 0.64 * 0,56752872 - 1$$

$$u(0.5,0.2) = 0.577877695 + 0.36321888 + 0.36321888 - 1$$

$$u(0.5,0.2) = 0.304315455$$

$$u(x_i, t_{j+1}) = 2\left[1 - \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\right] \cdot u(x_i, t_j) + \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\left[u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)\right] - u(x_i, t_{j-1})$$

$$u(x_3,t_{1+1}) = 2\left[1-\frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}\right]\cdot u(x_3,t_1)+\frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}[u(x_{3-1},t_1)+u(x_{3+1},t_1)] - u(x_3,t_{1-1})$$

$$u(x_3,t_2) = 2\left[1-\frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}\right]\cdot u(x_3,t_1)+\frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}[u(x_2,t_1)+u(x_4,t_1)] - u(x_3,t_0)$$

Al reemplazar valores y ordenando queda:

$$u(0.75{,}0.2) = 0.72 * u(x_3,t_1) + 0.64 * u(x_2,t_1) + 0.64u(x_4,t_1) - u(x_3,t_0)$$

$$u(0.75{,}0.2) = 0.72 * 0{,}56752872 + 0.64 * 0{,}80260791 + 0.64 * 0 - 0.707106$$

$$u(0.75{,}0.2) = 1.68 * 0{,}5675295 + 0.64 * 0 + 0.64 * 0{,}80260791 - 0.707106$$

$$u(0.75{,}0.2) = 0.215184302$$

Al aplicar la fórmula del arreglo matricial, tenemos:

$$W_{1,j+1} = \left[2(1-\lambda^2)\cdot W_{1,j} + \ \lambda^2\cdot W_{2,j} + 0\cdot W_{2,j} + 0\cdot W_{2,j}\right] - W_{1,j-1}$$

Cuando $j = 1$

$$W_{1,1+1} = \left[2(1-\lambda^2)\cdot W_{1,1} + \ \lambda^2\cdot W_{2,1} + 0\cdot W_{2,1} + 0\cdot W_{2,1}\right] - W_{1,1-1}$$

$$W_{1,2} = \left[2(1-\lambda^2)\cdot W_{1,1} + \ \lambda^2\cdot W_{2,1} + 0 + 0\right] - W_{1,0}$$

$$W_{1,2} = \left[2(1-\lambda^2)\cdot W_{1,1} + \ \lambda^2\cdot W_{2,1}\right] - W_{1,0}$$

$$W_{1,2} = \left[2\left(1-\frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}\right)\cdot W_{1,1} + \ \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}\cdot W_{2,1}\right] - W_{1,0}$$

$$W_{1,2} = \left[2\left(1 - \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}\right) \cdot 0.5675295 + \ \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2} \cdot 0.80260791\right] - 0.707106$$

$$W_{1,2} = [0.72 \cdot 0.5675295 + \ \ 0.64 \cdot 0.80260791] - 0.707106$$

$$W_{1,2} = [0.408620 + \ \ 0.513668] - 0.707106$$

$$W_{1,2} = 0.922288 - 0.707106$$

$$W_{1,2} = 0.215182$$

NIVEL 3

Para la iteración 4, $t_3 = 0,3$ y las siguientes, reemplazamos en:

$$u(x_i, t_{j+1}) = 2\left[1 - \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\right] \cdot u(x_i, t_j) + \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\left[u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)\right] - u(x_i, t_{j-1})$$

$$h = 0.25, \qquad k = 0.1$$

$$u(x_1, t_{2+1}) = 2\left[1 - \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}\right] \cdot u(x_1, t_2) + \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}[u(x_{1-1}, t_2) + u(x_{1+1}, t_2)] - u(x_1, t_{2-1})$$

$$u(x_1, t_3) = 2\left[1 - \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}\right] \cdot u(x_1, t_2) + \frac{2^2(0,1)^2}{(0,25)^2}[u(x_0, t_2) + u(x_2, t_2)] - u(x_1, t_1)$$

Al reemplazar valores y ordenando queda:

$$u(0.25,0.3) = 0.72 * u(x_1, t_2) + 0.64 * u(x_0, t_2) + 0.64u(x_2, t_2) - u(x_1, t_1)$$

$$u(0.25{,}0.3) = 0.72 * 0.215184302 + 0.64 * 0 + 0.64 * 0.30431545 - 0{,}5675295$$

$$u(0.25{,}0.3) = 0.154932697 + 0 + 0.194761891 - 0.5675295$$

$$u(0.25{,}0.3) = -0.217834131$$

$$u(x_i, t_{j+1}) = 2\left[1 - \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\right] \cdot u(x_i, t_j) + \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\left[u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)\right] - u(x_i, t_{j-1})$$

$$u(x_2, t_{2+1}) = 2\left[1 - \frac{2^2(0{,}1)^2}{(0{,}25)^2}\right] \cdot u(x_2, t_2) + \frac{2^2(0{,}1)^2}{(0{,}25)^2}\left[u(x_{2-1}, t_2) + u(x_{2+1}, t_2)\right] - u(x_2, t_{2-1})$$

$$u(x_2, t_3) = 2\left[1 - \frac{2^2(0{,}1)^2}{(0{,}25)^2}\right] \cdot u(x_2, t_2) + \frac{2^2(0{,}1)^2}{(0{,}25)^2}\left[u(x_1, t_2) + u(x_3, t_2)\right] - u(x_2, t_1)$$

Al reemplazar valores y ordenando queda:

$$u(0.5{,}0.3) = 0.72 * u(x_2, t_2) + 0.64 * (x_1, t_2) + 0.64u(x_3, t_2) - u(x_2, t_1)$$

$$u(0.5{,}0.3) = 0.72 * 0.304315455 + 0.64 * 0.2151843 + 0.64 * 0.2151843 - 0{,}80260791$$

$$u(0.5{,}0.3) = 0.219107128 + 0.137717953 + 0.137717953 - 0.80260791$$

$$u(0.5{,}0.3) = -0.308064876$$

$$u(x_i, t_{j+1}) = 2\left[1 - \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\right] \cdot u(x_i, t_j) + \frac{\alpha^2 k^2}{h^2}\left[u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)\right] - u(x_i, t_{j-1})$$

$$u(x_3, t_{2+1}) = 2\left[1 - \frac{2^2(0{,}1)^2}{(0{,}25)^2}\right] \cdot u(x_3, t_2) + \frac{2^2(0{,}1)^2}{(0{,}25)^2}[u(x_{3-1}, t_2) + u(x_{3+1}, t_2)] - u(x_3, t_{2-1})$$

$$u(x_3, t_3) = 2\left[1 - \frac{2^2(0{,}1)^2}{(0{,}25)^2}\right] \cdot u(x_3, t_2) + \frac{2^2(0{,}1)^2}{(0{,}25)^2}[u(x_2, t_2) + u(x_4, t_2)] - u(x_3, t_1)$$

Al reemplazar valores y ordenando queda:

$$u(0.75{,}0.3) = 0.72 * u(x_3, t_2) + 0.64 * u(x_2, t_2) + 0.64u(x_4, t_2) - u(x_3, t_1)$$

$$u(0.75{,}0.3) = 0.72 * 0.215184302 + 0.64 * 0.304315455 + 0.64 * 0 - 0.56752872$$

$$u(0.75{,}0.3) = 0.154932697 + 0.194761891 + 0 - 0{,}56752872$$

$$u(0.75{,}0.3) = -0.217834131$$

Tabla 4.1

Valores de la altura de la función $u(x,t)$ de la cuerda vibrante aproximada por nodos

$u(x,t)$ (altura de la cuerda de la onda por nodos)		x (variable espacial)				
		0	**0.25**	**0.5**	**0.75**	**1**
t (variable temporal)	**0**	0	0.707106	1.000000	0.707106	0
	0.1	0	0.567529	0.802607	0.567528	0
	0.2	0	0.215184	0.304315	0.215184	0
	0.3	0	−0.217834	−0.308064	−0.217834	0

Tabla 4.2

Error comparativo de solución exacta y aproximada de la ecuación de la onda en nivel 1

x_i	t_1	Solución analítica exacta	Solución aproximada	Error
0.25	**0.1**	0.572061	0.567529	0.004532
0.5	**0.1**	0.809017	0.802607	0.006410
0.75	**0.1**	0.572061	0.567528	0.004533

Análisis e interpretación:

En la tabla 4.2, se presenta la información sobre el comparativo de la solución analítica exacta y solución numérica aproximada. En él se puede apreciar que hay un buen nivel de aproximación con un error de 4.532×10^{-3}, 6.41×10^{-3} y 4.533×10^{-3} en los nodos elegidos cuando $t = 0.1$

Tabla 4.3.

Error comparativo de solución exacta y aproximada de la ecuación de la onda en nivel 2

x_i	t_2	Solución analítica exacta	Solución aproximada	Error
0.25	**0.2**	0.218508	0.215184	0.003324
0.5	**0.2**	0.309017	0.304315	0.004702
0.75	**0.2**	0.218508	0.215184	0.003324

Análisis e interpretación:

En la tabla 4.3, se presenta la información sobre el comparativo de la solución analítica exacta y solución numérica aproximada. En él se puede apreciar que hay un buen nivel de aproximación con un error de 3.324×10^{-3}, 4.702×10^{-3} y 3.324×10^{-3} en los nodos elegidos cuando $t = 0.2$

Tabla 4.4.

Error comparativo de solución exacta y aproximada de la ecuación de la onda en nivel 3, datos del Fortran.

x_i	t_3	**Sol. Analítica**	**Solución aproximada**	**Error** $\lvert \boldsymbol{V_r - V_a} \rvert$
0.25	**0.3**	-0.218508	-0.217834	0.000674
0.50	**0.3**	-0.309017	-0.308064	0.000953
0.75	**0.3**	-0.218508	-0.217834	0.000674

Análisis e interpretación:

En la tabla 4.4, se presenta la información sobre el comparativo de la solución analítica exacta y solución numérica aproximada. En él se puede apreciar que hay un mejor nivel de aproximación con un error de 6.74×10^{-4}, 9.53×10^{-4} y 6.74×10^{-4} en los nodos elegidos cuando $t = 0.3$

4.1.4.2.4. Software numérico

Las soluciones numéricas se pueden desarrollar utilizando software numérico, incluyendo: Fortran F90, Maple, Mathematica, MATLAB, programas escritos en C, Pascal, applets de JAVA, entre otros. (Barden y Faires, 2016, p.28)

Se considera software numérico a los programas informáticos específicos que realizan cálculos numéricos y resuelven problemas matemáticos utilizando métodos numéricos. El software científico se refiere a un término más amplio que cubre una variedad de programas utilizados en el desarrollo de la ciencia como resultado de la investigación. Los ejemplos incluyen MATLAB, Mathematica, Python, así como bibliotecas científicas de dominios específicos como NUmPy, SciPy, pandas y otras.

4.1.4.2.4.1. Implementación computacional en Fortran F95

Actualmente, el lenguaje de programación muy utilizado en la investigación científica es Fortran. Se deriva del inglés “Formula Traslation” y fue creado por IBM en la década de 1950. La estructura de Fortran se ha actualizado continuamente (Fortran 77) a Fortran F95. (Guerrero, 2021)

Los usuarios de Linux o MacOS pueden instalar el compilador de forma remota. En este caso, utilice en editor de texto plano que no aplique formato para editar el código fuente del programa Fortran F90 que se está compilando.

Ortega, A. (2013), al escribir declaraciones de programas, se recomienda incluir comentarios para ayudar a explicar el código y es muy aconsejable después del carácter de admiración “!”, a menos que forme parte del texto.

Hay 5 tipos de datos distintos: entero, real, complejos, carácter y lógico. A partir de estos se pueden definir estructuras de datos más complejas, por lo que tenemos:

- **IMPLICIT NONE:** es una declaración que obliga a declarar a la fuerza todas las variables a emplear.

- **REAL, DIMENSION:** se utiliza para emplear números reales y especificar la dimensión de la matriz.

- **OPEN ([UNIT=]u, FILE=nbf:** accede a archivos externos.

- **DO – ENDDO:** se repite la ejecución al que se denomina bucles.

- **READ O WRITE:** leer datos o transferir datos a un nuevo formato de registro.

- **FUNCTION y SUBROUTINE:** subprogramas.

- **END FUNCTION:** cierra la última sentencia de la subrutina.

- **PROGRAM:** es una declaración para ejecutar el programa, escriba el nombre específico [PROGRAM [nomb_prog]] nomb_prog es el nombre del programa, el cual debe comenzar con una letra y tiene hasta 31 letras, números, guiones y guiones bajos permitido.

- **END PROGRAM:** termina la última frase del programa.

PROGRAMA FORTRAN F95 DE LA EDP HIPERBÓLICA HOMOGÉNEA QUE MODELA LA ECUACIÓN DE LA ONDA UNIDIMENSIONAL EJEMPLO 4.6

```
program Onda
implicit none
integer i,j
integer,parameter::n=5 !Particion en direccion la Longitud
integer,parameter::m=4 !Cantidad de intervalos de tiempo
real,dimension(n,m)::u
real::x(n),t(m),g(n)
real:: Alfa,Landa,h,K,F,F1D,F2D,L

open(unit=1,file='x.txt')
open(unit=2,file='t.txt')
open(unit=3,file='u.txt')

L=1.0
k=0.1
Alfa=2.0
h=1.0/(n-1.0)

Landa=alfa*k/h

do i=1,n,1
    x(i)=L-(n-i)*h
end do
```

```
write(1,*)x(:)

do i=1,m,1
    t(i)=k*i
end do
write(2,*)t(:)

do i=1,n,1
    g(i)=0
end do

do i=1,m,1
    u(1,i)=0.0
    u(n,i)=0.0
end do

do i=2,n-1,1
    u(i,1)=F(x(i))+k*g(i)
end do

do i=2,n-1,1
    u(i,2)=F(x(i))+k*g(i)+(k**2.0)*(Alfa**2.0)*F2D(x(i))/2.0
```

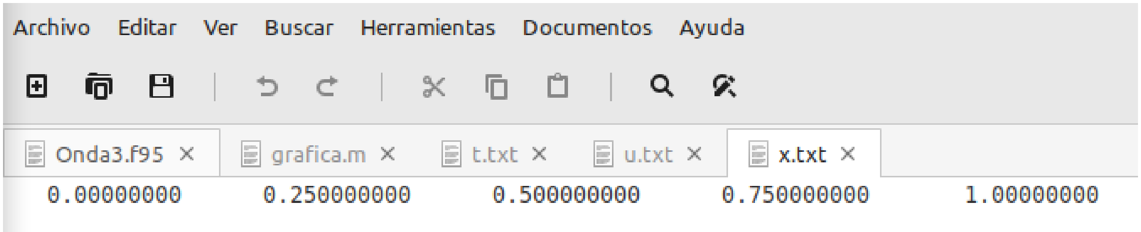
```
do j=2,m-1,1
    do i=2,n-1,1
        u(i,j+1)=2.0*(1.0-Landa**2.0)*u(i,j)+(Landa**2.0)*(u(i-1,j)+u(i+1,j))-u(i,j-1)
    end do
end do

do i=1,m
        write(*,*) u(:,i)
        write(3,*)u(:,i)
end do

close(1)
close(2)
close(3)

end program Onda
```

```
function F(x)    !Función externa
implicit none
Real::F,x,pi,F1D,F2D
pi=3.1416
F = sin(pi*x)
return
end function F

function F1D(x)  !Función externa
implicit none
Real::x,pi,F1D
pi=3.1416
F1D=pi*cos(pi*x)
return
end function F1D

function F2D(x)   !Función externa
implicit none
Real::x,pi,F2D
pi=3.1416
F2D=-(pi**2)*sin(pi*x)
return
end function F2D
```

Fuente: Elaboración propia con apoyo de Torres, P. (2023), Maestría en Ingeniería Matemática. Universidad Nacional de Trujillo.

Tabla 4.5

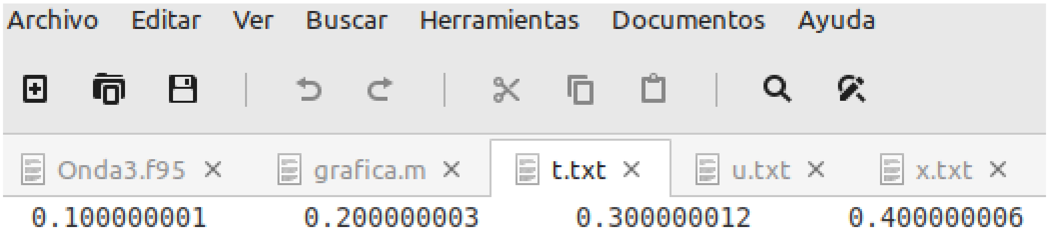
Datos de la variable espacial en el eje x, alojados en ***open (unit=1, file='x.txt')***



0.00000000	0.250000000	0.500000000	0.750000000	1.00000000

Tabla 4.6

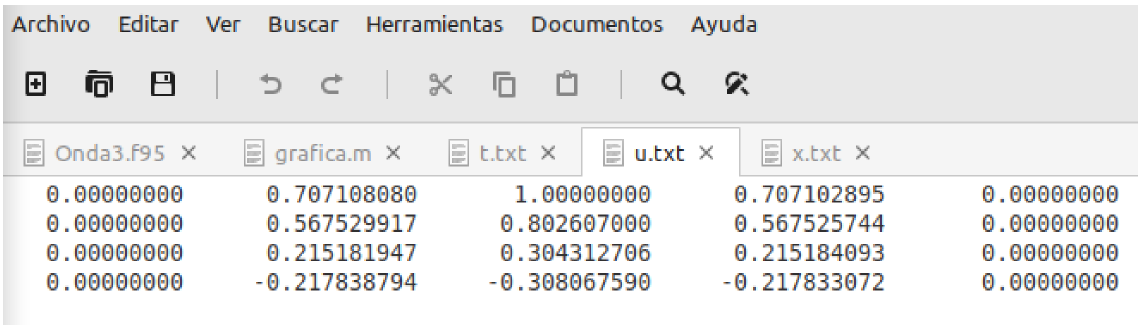
Datos de la variable temporal en el eje y, alojados en ***open (unit=2, file='x.txt')***



0.100000001	0.200000003	0.300000012	0.400000006

Tabla 4.7

Resultados de la solución aproximada del problema 4.6 de la función u alojados ***open (unit=3, file='x.txt')***



0.00000000	0.707108080	1.00000000	0.707102895	0.00000000
0.00000000	0.567529917	0.802607000	0.567525744	0.00000000
0.00000000	0.215181947	0.304312706	0.215184093	0.00000000
0.00000000	-0.217838794	-0.308067590	-0.217833072	0.00000000

Tabla 4.8

Resultados de la solución exacta del problema 4.4 en Fortran F90, compilado.

	x=0	x=0.25	x=0.50	x=0.75	x=1
0.0	0.000000	0.707107	1.000000	0.707107	0.000000
0.1	0.000000	0.572061	0.809017	0.572061	0.000000
0.2	0.000000	0.218508	0.309017	0.218508	0.000000
0.3	-0.000000	-0.218508	-0.309017	-0.218508	-0.000000

Tabla 4.9

Resultados de la solución aproximada del problema 4.6 en Fortran F95, compilado.

walter@walterz:~/UNJBG/Tesis_Onda/Ecuacion$ ./a.out

0.00000000	0.707108080	1.00000000	0.707102895	0.00000000
0.00000000	0.567529917	0.802607000	0.567525744	0.00000000
0.00000000	0.215181947	0.304312706	0.215184093	0.00000000
0.00000000	-0.217838794	-0.308067590	-0.217833072	0.00000000

Figura 4.12

Valores de la altura de la cuerda vibrante por nodos (n=5 y m=4) en Fortran F90 y compilado por solución aproximada.

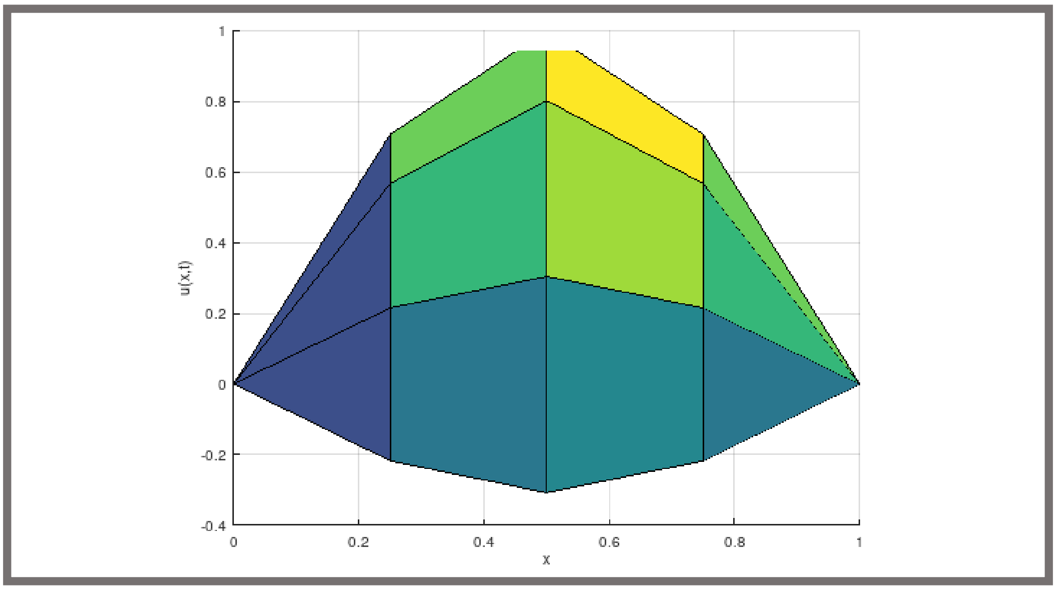


Figura 4.13

Gráfica de altura de la cuerda vibrante por nodos (n=5 y m=4) en Fortran F90 y compilado a ecuación de la onda por solución exacta.

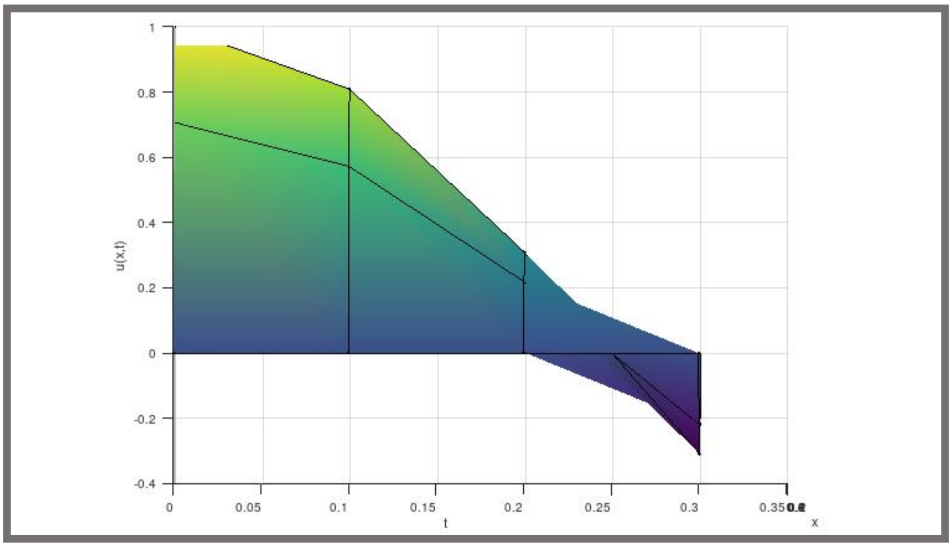
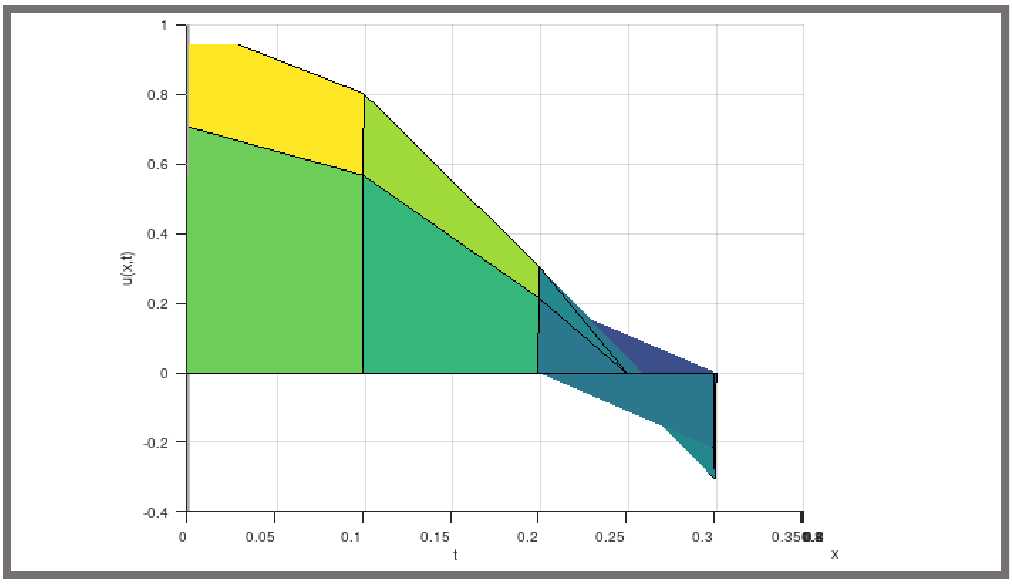


Figura 4.14

Gráfica de altura de la cuerda vibrante por nodos (n=5 y m=4) en Fortran F90 y compilado a ecuación de la onda por solución aproximada.



CONCLUSIONES

a) Se estableció la solución analítica de la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda que se altera de su posición de equilibrio y luego se suelta con velocidad cero para que vibre libremente para aproximar por el método de separación de variables por serie de aproximación de Fourier.

b) Se obtuvo la solución por análisis numérico de la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda que se altera de su posición de equilibrio y luego se suelta con velocidad cero para que vibre libremente por diferencias finitas.

c) Se interpretó la aproximación entre la solución analítica exacta y por análisis numérico aproximada de la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda que se altera de su posición de equilibrio y luego se suelta con velocidad cero para que vibre libremente empleando el software científico Wolfram Mathematica, Fortran F95 y GNU Octave.

d) Se estableció la solución analítica y por análisis numérico la Ecuación Diferencial Parcial Hiperbólica que modela las vibraciones de una cuerda.

RECOMENDACIONES

a) Se sugiere realizar investigaciones sobre la solución de la ecuación de la onda unidimensional no homogénea en el sentido de las transformada de Fourier.

b) Para realizar investigaciones sobre la solución de la ecuación de la onda unidimensional no homogénea, se sugiere desarrollar en el sentido de las distribuciones.

c) Se sugiere realizar investigaciones sobre la ecuación de la onda unidimensional no homogénea en el sentido de las Transformadas de Fourier, Distribución Temperada y su implementación computacional en fortran u otro software científico.

d) Se sugiere realizar investigaciones sobre la solución de la ecuación de la onda unidimensional homogénea por elementos finitos continuos y discontinuos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Amaya, L. y Cabrera, H. (2013). *Métodos de diferencias finitas para la solución de ecuaciones en derivadas parciales elípticas, parabólicas e hiperbólicas.* [Trabajo de informe final del PROIN 2012. Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann. Tacna, Perú].

Amaya, L. (2018). Solución numérica para una ecuación diferencial parcial hiperbólica: la ecuación de onda. *CIENCIAS, 2(1),* 59-65.

Asociación de la Real Academia Española (2020). https://www.significados.com/definicion/ Consultado: 31 de agosto de 2021, 07:39 pm.

Burden, R., Faires, J. y Burden, A. (2016). *Análisis Numérico.* 10ma Edición. México.

Castillo, G., Faúndez, L, Rivas, D. y Irazoqui, E. (2010). *Introducción al Análisis Numérico.* Universidad del Bío-Bío. Facultad de Ciencias y Humanidades.

Chapra, S. y Canale, R. (2007) *Métodos numéricos para ingenieros*. 5ta edición, McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V. México.

Carmona, I. (1992) *Ecuaciones Diferenciales.* Departamento de Matemáticas. Editorial Pearson Educación. 4ta Edición. Impreso en México.

Chávez, J. (2021). *Docente de Seminario de Tesis I. Escuela Profesional de Matemática,* [malla curricular]. Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann. Tacna, Perú.

Chávez, J. (2021). *Docente de Seminario de Tesis II. Escuela Profesional de Matemática,* [malla curricular]. Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann. Tacna, Perú.

Chávez, J., Becerra, a., Rodriguez, E. y López, L. (2017). *Existencia y unicidad de la solución generalizada de una ecuación diferencial hiperbólica que modela la propagación de una onda en un medio elástico sometido a una fuerza externa.* [Trabajo de informe final, Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann. Tacna, Perú].

Cumpa, P. y Estrada, P. (2015). Diferencias Finitas Asistidas con Matlab en la Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas". [Tesis de pregrado, Universidad Nacional "Pedro Ruiz Gallo", Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática, para optar el título profesional de licenciado en matemáticas. Lambayeque – Perú]. https://repositorio.unprg.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12893/434/BC-TES-4115.pdf?sequence=1&isAllowed=y Visitado el 18 de abril de 2023.

Duoandikoetxea, J. (2003). *Lecciones sobre las Series y Transformadas de Fourier. UNAN-Managua.*

Ferragut, L. (2021). *Análisis numérico del método de diferencias finitas para ecuación en derivadas parciales.* Universidad de Salamanca. URI http://hdl.handle.net/10366/145828

Fierros, J., Rivera, H. (1996). *Análisis de la Convergencia de las Series de Fourier.* Tesis para obtener el título de Licenciado en Matemáticas. Universidad de Sonora, División de Ciencias Exactas y Naturales Departamento de Matemáticas.

Franco, A. (2016). Movimiento Ondulatorio: Vibraciones amortiguadas de una cuerda sujeta por ambos extremos. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/ondas/cuerda/cuerda_2.html. Visitado el 09 de abril de 2023.

Gomez, J., Gomez, D. (2021). Vibraciones en medios homogéneos y compuestos. [Trabajo de Fin de Grado para acceder al Grado en Matemáticas. Universidad de Cantabria]. https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/23583/GomezdelagandaraPerezJavier-TFG-Matematicas.pdf?sequence=1 Visitado el 18 de abril de 2023.

Gonzáles, P. (2013). Funciones ortogonales. Slideshare. https://es.slideshare.net/techelectrik/funciones-ortogonales-1

Lara, L., Chávez, Z. y Castañeda, J. (2019). *El Método de Diferencias Finitas, teoría y práctica.* Universidad Privada Antenor Orrego. Trujillo, Perú.

https://static.upao.info/descargas/7785b78834b257ebc32c5fdbbbeb51844110d47e0c1b7621073297f7054588f8feabedcf65f22243e1c94da5fd1fdf63312e1c80f31ef101692d7a1e07e3ba49/el-mEtodo-de-diferencias-finitas.pdf

Maco, W., Salazar R., Castillo P, Y Rodriguez H. (2018). Análisis Numérico para Solucionar Ecuaciones Diferenciales Parciales Parabólicos: Ecuación de Schrodinger en dos dimensiones. Universidad Nacional de Trujillo. La Libertad, Perú. https://revistas.unitru.edu.pe/index.php/BOCIENMAT/article/view/2483/2531 Visitado el 09 de abril de 2023.

Miñano, W. (2012). *Programa del Método del Elemento Finito para Ecuaciones Diferenciales Parciales Parabólicas con Frontera Convexa*. [Tesis de maestría en Computación e Informática, Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann. Tacna, Perú]. Archivo digital. d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net

Monferrato, M. (2009). Análisis de la Ecuación de Onda en los Instrumentos de Cuerda. Universidad Abierta Interamericana Licenciatura en Matemática. https://imgbiblio.vaneduc.edu.ar/fulltext/files/TC087941.pdf

Ortega, A. (2013). Curso Básico de Fortran. https://www.cartagena99.com/recursos/alumnos/apuntes/Curso-Basico.pdf

Piñeros, J. y Garzón, D. (2009). Sobre la solución numérica de la ecuación de onda. *Revista Journal Ingeniería y Universidad*. Visitado el 25 de enero de 2023 http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0123-21262009000200009

Poemape, B. (2021). Consistencia, estabilidad y convergencia de la solución de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas mediante la utilización de diferencias finitas. [Trabajo de investigación para optar el título profesional de Licenciado en Matemáticas, Escuela Profesional de Matemáticas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo - Lambayeque]. Archivo digital.

Romero, S., Moreno, J. Y Rodriguez, I. (2001). Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP's). Universidad de Huelva, Escuela Politécnica Superior de La Rábida. España. http://www.uhu.es/sixto.romero/EDP_libro.pdf. Visitado el 18 de abril de 2023.

Rubio, F. (2023). *Métodos Matemáticos.* [Maestría en Ingeniería Matemática]. Universidad Nacional de Trujillo.

Rubio, O. (1999). Métodos Numéricos para Ecuaciones Diferenciales Parciales y Dinámica de Fluidos Computacional.

Rubio, O. (2024). Método del elemento finito. [Maestría en Ingeniería Matemática]. Universidad Nacional de Trujillo.

Ruiza, M., Fernandez, T. y Tamayo, E. (2004). *Biografía de Pierre Fermat. En Biografías y Vidas, La Enciclopedia Biográfica en Línea.* Barcelona, España. Recuperado de https://www.biografiasyvidas.com/biografia/f/fermat.htm

Santamaría, A. y Ramirez, J. (2015). *Diferencias Finitas Asistido con Matlab en la Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas.* Tesis para optar el título profesional de licenciado en matemáticas. Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo. Lambayeque, Perú. https://repositorio.unprg.edu.pe/handle/20.500.12893/445

Sánchez, C. y Valdes, O. (2021). *Centro Virtual de Divulgación de la Matemáticas*. Universidad de la Habana CubaFacultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas, Bogotá, D.C https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/JhBernoulli3.asp.htm

Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas.* Séptima edición. McMaster University y University of Toronto. México.

Torres, P. (2023). *Programación Científica.* [Maestría en Ingeniería Matemática]. Universidad Nacional de Trujillo.

Universidad de las Palmas de Gran Canaria (2014). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden. https://www2.ulpgc.es/hege/almacen/download/42/42523/tema5.pdf

Universidad Pública de Montevideo. EVA Fing https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/260659/mod_resource/content/5/series_de_fourier.pdf

Universidad Nacional de Río Cuarto, Facultad de Ingeniería (2021). Ecuaciones diferenciales, Ecuación de la Onda, Método de Separación de Variables https://www.youtube.com/watch?v=eZmFSwIzL5o

Universidad Nacional de Río Cuarto, Facultad de Ingeniería (2021). Ecuaciones diferenciales, Ecuación de la Onda Modelado https://www.youtube.com/watch?v=SddjzhEizTI&list=PLSINZNDgDtlnVJCbuecrk2Uc__VLeOPk6&index=2

Zill, D. y Cullen, M. (2008). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, *Vol. 1*, *Ecuaciones Diferenciales*. McGraw-Hill. Tercera edición.

Zill, D. y Cullen, M. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera*. Cengage Learning. Sétima edición.

ANEXOS

ANEXO 01: MATRIZ DE CONSISTENCIA

TÍTULO: Solución de la ecuación diferencial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda
AUTOR: Bachiller Walter Gil Zegarra Ccama

Problema	Objetivos	Hipótesis	Variables	Diseño	Instrumentos
GENERAL: ¿Es posible establecer la solución analítica y por análisis numérico la ecuación diferencial parcial hiperbólica que modela las vibraciones de una cuerda? **ESPECÍFICOS:** a) ¿Bajo qué condiciones es posible establecer la solución analítica la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda? b) ¿Bajo qué condiciones es posible establecer la solución por análisis numérico la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda? c) ¿En qué medida se aproximan la solución analítica y por análisis numérico la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda?	**GENERAL:** Establecer la solución analítica y por análisis numérico la ecuación diferencial parcial hiperbólica que modela las vibraciones de una cuerda. **ESPECÍFICOS:** a) Establecer la solución analítica de la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda. b) Establecer la solución por análisis numérico la solución de la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda. c) Interpretar la aproximación entre la solución analítica y por análisis numérico la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda.	**GENERAL:** Se puede establecer la solución analítica y por análisis numérico la ecuación diferencial parcial hiperbólica que modela las vibraciones de una cuerda. **ESPECÍFICOS:** **a)** Se puede establecer la solución analítica de una ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda. **b)** Se puede establecer la solución por análisis numérico la solución de la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda. **c)** Se puede interpretar la aproximación entre la solución analítica y por análisis numérico la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda.	**a) Variable de estudio 1** Solución de la Ecuación Diferencial Parcial de la cuerda de manera analítica. **b) Variable de estudio 2** Solución de la Ecuación Diferencial Parcial de la cuerda por análisis numérico. **c) Variable de estudio 3** Interpretación de aproximación de por análisis numérico a la solución a la solución analítica exacta de la ecuación diferencial parcial hiperbólica homogénea que modela las vibraciones de una cuerda.	**a)** De acuerdo al diseño de investigación es explicativa porque trata de establecer una solución a las vibraciones de una cuerda unidimensional. **b)** De acuerdo al fin que persigue es de tipo básica que nos llevará a la búsqueda de nuevos conocimientos en la teoría de distribuciones y los espacios de Sobolev.	a) Definiciones b) Conceptos c) Proposiciones d) Teoremas e) Corolarios f) Ejemplos g) Solución analítica h) Solución numérico computacional.

ANEXO 02: SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

u: variable dependiente de una función que contiene dos variables independientes.

x: variable independiente del dominio que pertenece $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

y: variable independiente del dominio que pertenece a $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Ω: sub conjunto del espacio euclidiano bidimensional.

A, B, C, D, E, F, G: constantes o funciones de una ecuación diferencial parcial.

$[0, T]$: intervalo cerrado de 0 a T.

$\rightarrow$: condición, mapea, implica a:

$H_0^1(\Omega)$: solución débil para el problema hiperbólico.

$u'(t)$: primera derivada parcial de la función u respecto al tiempo.

f: función f.

$f(x)$: imagen o rango de la función.

$T, 2L$: periodo "T" o "Periodo $2L$", fuerza de tensión.

$\mathbb{R}$: conjunto de los números reales.

$\forall$: para todo.

(x, y): par ordenado x, y.

L: longitud "L", distancia generalizada, semiperiodo.

$m, n \in \mathbb{R}$: valores que pertenece al conjunto de los números reales.

$\cos(\alpha)$: coseno de la función trigonométrica.

$sen(\alpha)$: seno de la función trigonométrica.

$f(x^+)$: valor de la función cuando x se aproxima por la derecha.

$f(x^-)$: valor de la función cuando x se aproxima por la izquierda.

$\approx$: aproximadamente.

D_n: núcleo de Dirichlet de una función par, continua y periódica.

e: densidad lineal de la cuerda.

F: frecuencia de vibración de la cuerda.

a_0, a_n, b_n o a_k, b_k: coeficientes de la serie de Fourier.