UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática

DERIVADA CLÁSICA DE FUNCIONES REALES A DERIVADA EN EL SENTIDO DE LAS DISTRIBUCIONES

TESIS

Presentado por:

Bach. WILSÓN CHANINI CHOQUECOTA

Para optar el Título Profesional de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TACNA – PERÚ

2021

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS No 350

*En la ciudad de Tacna, a través de la plataforma Google Meet con Link: **meet.google.com/syo-dhkq-nox,** usando los correos institucionales de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann de Tacna, debido a la Pandemia del Covid 19; siendo las **18:00** horas del día **26** de octubre del 2020, estando presente el Jurado Calificador nominado por Resolución de Facultad No **9754-2020-FACI-UN/JBG**, conformado por los siguientes docentes*

Dr. LUIS ANDRÉS AMAYA CEDRÓN	*PRESIDENTE*
Dr. HUMBERTO BENITO VARGAS PICHÓN	*SECRETARIO*
MSc. LUIS CESAR MÉNDEZ AVALOS	*MIEMBRO*

Acto seguido, se dio lectura a la Resolución correspondiente, y del mismo modo se dio lectura al Artículo 25 del Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias.

*A continuación, el Presidente de Jurado instó al Bachiller: **WILSÓN CHANINI CHOQUECOTA**, a exponer la Tesis titulada: **DERIVADA CLÁSICA DE FUNCIONES REALES A DERIVADA EN EL SENTIDO DE LAS DISTRIBUCIONES.***

*Siendo las 18:50 horas, el tesista concluye su exposición, luego se procedió a la formulación de preguntas por parte de los miembros del Jurado Calificador. Terminado este proceso, se invitó a que los miembros del Jurado emitan su calificación de acuerdo a reglamento. El promedio de la calificación dio el siguiente resultado: **Aprobado por unanimidad**, con el **calificativo de bueno (16),** de acuerdo al Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias.*

*Siendo las **19:00** horas, se dio por concluido el acto de sustentación de la Tesis, firmando los señores miembros del Jurado Calificador, en señal de conformidad.*

Dr. Luis Andrés AMAYA CEDRÓN
PRESIDENTE

Dr. Humberto Benito VARGAS PICHÓN
SECRETARIO

MSc. Luis Cesar MÉNDEZ AVALOS MIEMBRO

DEDICATORIA

Dedico esta Tesis a mis padres Francisco Chanini Arana y Juana Victoria Choquecota Riva por su apoyo incondicional en la parte moral y económica, que ha sido indispensable durante mi formación profesional.

A mis hermanos Ivan, Carlos, Yudith y Richard por brindarme su apoyo en el transcurso de mi carrera Universitaria.

A toda mi familia que es lo mejor y lo más valioso que Dios me ha dado.

AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios, por su constante compañía por guiarme por darme la fortaleza para afrontar las dificultades y por permitirme cumplir el sueño más grande de mi vida. Un agradecimiento especial al MSc. Jhony Alfonso Chávez Delgado, mi asesor. Por su apoyo incondicional en esta investigación y a todos mis profesores por sus enseñanzas que posibilitaron el logro de uno de mis grandes anhelos.

CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

El presente informe de Tesis tiene como objetivo establecer una expresión de funciones generalizadas en las cuales se pueda extender el cálculo diferencial ordinario, las cuales tienen ciertas dificultades creadas por la existencia de funciones no diferenciables, a una cierta condición de proposiciones muchos más amplia que las condiciones de funciones diferenciables en sentido ordinario. Se emplearon los métodos deductivo - inductivo para asociar las derivadas a toda función localmente integrable y funciones singulares. Como resultados se obtuvo que toda función real de variable real continua es una función generalizada. Luego, toda función generalizada debe poseer derivadas, que han de ser funciones generalizadas. Para funciones diferenciables en sentido clásico, la nueva derivada debe coincidir con la derivada ordinaria. Por consiguiente, toda función generalizada debe ser infinitamente diferenciable. Asimismo, las reglas formales del cálculo diferencial deben seguir en la actualidad. Finalmente, el estudio de las funciones generalizadas es un instrumento muy útil en la transformada de Laplace de funciones generalizadas.

Palabras clave: Derivada ordinaria, funciones generalizadas, funciones singulares.

ABSTRACT

The objective of this thesis report is to establish an expression of generalized functions in which ordinary differential calculus can be extended, which have certain difficulties created by the existence of non-differentiable functions, to a certain condition of propositions much broader than those of conditions of differentiable functions in the ordinary sense. The deductive-inductive methods were used to associate the derivatives to all locally integrable functions and singular functions. As results it was obtained that every real function of continuous real variable is a generalized function. Therefore, every generalized functions must have derivatives, which must be generalized functions. For differentiable functions in the classical sense, the new derivative must coincide with the ordinary derivative. Therefore, every generalized function must be infinitely differentiable. Likewise, the formal rules of differential calculus must be followed today. Finally, the study of generalized functions is a very useful tool in the Laplace transform of generalized functions.

KeyWords: Ordinary derivative, generalized functions, singular functions.

INTRODUCCIÓN

La teoría de funciones generalizadas exime al cálculo diferencial ordinario de ciertas situaciones constituida por la existencia de funciones no diferenciables. Para conseguirlo, el procedimiento consiste en ampliar el cálculo diferencial a un grupo de nuevos propósitos denominados distribuciones reales mucha más amplia que los grupos de funciones diferenciales en sentido ordinario. En nuestro informe de investigación las integrales son tomadas con respecto a la medida de Lebesgue extendidas a toda la recta de números reales. Asimismo, se consideró un espacio vectorial de todas las funciones infinitamente diferenciables que tiene soporte compacto. Entonces, para toda función localmente integrable y toda función infinitamente diferenciable con soporte compacto, la integral existe. Además, dicho espacio vectorial contiene suficientes funciones, en el sentido de que dichas funciones están unívocamente determinadas por las integrales, excepto un conjunto de medida nula. En el caso que la función sea diferenciable o no, se puede asociar una derivada a toda función localmente integrable.

Las funciones generalizadas serán aquellas formas lineales definidas en los espacios vectoriales de todas las funciones infinitamente diferenciables que tienen soporte compacto que resulten continuas con respecto a una topología. Algunos resultados que una expresión generalizada debería tener para ser de utilidad en campo de las ciencias formales, definidas en un conjunto abierto de números reales, es que toda función continua y no continua debe ser una función generalizada. Luego, toda función generalizada debe tener derivadas ordinarias, que han de ser también funciones generalizadas o distribuciones. Asimismo, para funciones diferenciales en sentido ordinario, la nueva derivada debe coincidir con la derivada ordinaria. Por lo tanto, toda función generalizada es infinitamente diferenciables. Finalmente, todas las proposiciones del cálculo diferencial ordinario deben seguir en la actualidad.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

1.1. Planteamiento del problema

Un informe de investigación importante del origen de las funciones generalizadas está relacionados con los físicos teóricos, ingenieros e investigadores que utilizaban desde el siglo XIX en diversas operaciones matemáticas en resolver sencillamente diferentes tipos de ecuaciones funcionales. Estas reglas preestablecidas, que adolecen de la falta de rigor matemático, se dirigen a consecuencias convenientes.

Un instrumento fundamental es la utilización de ciertas "funciones" singulares, como la denominada "función" delta de Dirac, aunque establecida claramente por Kirchoff en su investigación de la ecuación de evolución de la onda en un trabajo publicado en el año 1882, realmente aparece más o menos sobre expuesta a lo largo de la historia, en relación con los diferentes contenidos cómo son las series de Fourier. Teoría analítica del calor, 1822. Asimismo, las funciones de Green, etc. Más elocuente es la utilización de la "función" delta de Dirac por parte de físicos y de investigadores.

Asimismo, el ingeniero eléctrico Heaviside a fines del siglo XIX, estableció las relaciones entre las distintas cantidades de difícil justificación matemática, basado en argumentaciones relacionados con la experiencia y que alcanzó una gran divulgación a principios del siglo XX. Las funciones generalizadas integran un mundo matemático ideal de los físicos teóricos, las funciones reales continuas o no continuas son siempre derivables, las series pueden derivarse o integrarse, etc. Asimismo, este mundo matemático tienen funciones localmente integrables y las distintas funciones singulares, como la delta de Dirac y sus derivadas.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

a) ¿En qué condiciones es posible establecer una expresión generalizada de la derivada ordinaria de funciones reales a derivada como función generalizada?

1.2.2. Problemas específicos

- **a)** ¿En qué condiciones es posible establecer una expresión generalizada de la primera derivada ordinaria como función generalizada de funciones continuas y singulares?
- **b)** ¿En qué condiciones es posible establecer una expresión generalizada de la segunda derivada ordinaria como función generalizada de funciones continuas y singulares?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

a) Establecer una expresión generalizada de la derivada ordinaria de funciones reales a derivada como función generalizada.

1.3.2. Objetivos específicos

- **a)** Establecer una expresión generalizada de la primera derivada ordinaria como función generalizada de funciones continuas y singulares.
- **b)** Establecer una expresión generalizada de la segunda derivada ordinaria como función generalizada de funciones continuas y singulares.

1.4. Justificación y limitaciones de la investigación

El presente informe de tesis se justifica principalmente por liberar el cálculo ordinario de ciertas dificultades creadas por la existencia de funciones no diferenciables desarrollando un método que consiste en ampliar a una clase de materias denominada funciones generalizadas. Asimismo, una de las propiedades más sobresalientes de esta teoría es que permite aplicar técnicas de la transformada de Fourier a muchos problemas de ecuaciones en derivadas parciales en lo que tales procedimientos no eran aplicables con los métodos ordinarios. Actualmente la teoría de las funciones generalizadas sigue siendo una línea de investigación en el área del análisis funcional, ecuaciones diferenciales parciales y la transformada de Fourier.

1.5. Variables e indicadores

1.5.1. Variables

1.5.1.1. Variable independiente

a) Función diferenciable con continuidad

1.5.1.2. Variable dependiente

a) Asocia una derivada a toda función localmente integrable

1.5.2. Indicadores

1.5.2.1. Variable independiente

a) Funciones infinitamente diferenciable que tienen soporte compacto y funciones localmente integrable

1.5.2.2. Variable dependiente

a) Existencia de la integral

1.6. Hipótesis

1.6.1. Hipótesis general

a) Si es posible establecer una expresión generalizada de la derivada clásica de funciones reales a derivada como función generalizada.

1.6.2. Hipótesis específicas

- **a)** Sí es posible establecer una expresión generalizada de la primera derivada como función generalizada de funciones continuas y singulares asociando la primera derivada a toda función localmente integrable.
- **b)** Si es posible establecer una expresión generalizada de la segunda derivada como función generalizada de funciones continuas y singulares asociando la segunda derivada a toda función localmente integrable.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

Un instrumento matemático importante en las ecuaciones diferenciales parciales fue introducida aproximadamente a la mitad de los años 1930 por Sobolev, los denominados espacios de Sobolev. El delimita estos recientes creados espacios de funciones, y prueba lo más fundamental de sus proposiciones que está contenida en las desigualdades de Sobolev. En estos nuevos espacios de Sobolev las definiciones de derivada débil y solución débil de una ecuación diferencial parcial tienen mejores fundamentos matemáticos. En particular en el caso de una dimensión, los espacios de Sobolev fueron creados por Banach en 1992, pero usando la norma. Asimismo, Laurent Schwartz en el año 1950 presenta una nueva investigación para las soluciones débiles de las ecuaciones diferenciales parciales. El aumenta la condición de las funciones a una nueva condición de enunciados matemáticos, las funciones generalizadas, en la cual se puede definir operaciones matemáticas que conservan las operaciones básicas del análisis matemático, agregando la suma y el producto de funciones con derivada continua, derivada además, con ciertas restricciones, convolución de funciones generalizadas y transformada de Fourier de funciones generalizadas. Esta teoría matemática diseña un nuevo sistema y hace más claro los conceptos anteriores de distribuciones hechas por Heaviside, Hadamrd, Leray y Sobolev en ecuaciones en derivadas parciales, y por Wiener, Bochner y Carleman en análisis de Fourier.

2.2. Fundamentos teóricos

2.2.1. Funciones reales y singulares

Definición 2.2.1.1. (Función real signo)

La función singular $sgn:\langle -\infty,+\infty\rangle \to \langle -\infty,+\infty\rangle$ signo se define:

$$sgn(x)=\begin{cases} 1\,, & x>0 \\ 0\,, & x=0 \\ -1\,, & x<0 \end{cases}\;;\; Dom\, sgn(x)=\langle -\infty,+\infty\rangle\,,\; Ran\, sgn(x)=\{-1,0,1\}$$

Definición 2.2.1.2. (Función real escalera unitaria)

La función singular $\mathcal{U}_b:\langle -\infty,+\infty\rangle \to \langle -\infty,+\infty\rangle$ escalera unitaria en b se define como

$$\mathcal{U}_b(x)=\mathcal{U}(x-b)=\begin{cases} 1\,, & x>b \\ 0\,, & x\le b \end{cases};\; Dom\,\mathcal{U}_b(x)=\langle -\infty,+\infty\rangle\,,\; Ran\,\mathcal{U}_b(x)=\{1,0\}$$

Definición 2.2.1.3. (Función real raíz cuadrada)

La función continua $\sqrt{\ }:\langle -\infty,+\infty\rangle \to \langle -\infty,+\infty\rangle$ raíz cuadrada la definimos por

$$y=\sqrt{x}\;;\; Dom\sqrt{x}=[0,+\infty\rangle\,,\; Ran\sqrt{x}=[0,+\infty\rangle$$

Definición 2.2.1.4. (Función real exponencial)

Para todo $a>0$, $a\neq 1$ se define la función continua exponencial como

$$y=a^{x}\;;\; Dom\, f(x)=\langle -\infty,+\infty\rangle\,,\; Ran\, f(x)=\mathbb{R}^{+}$$

Definición 2.2.1.5. (Función real logarítmica)

Para todo $a>1$, se define la función continua logarítmica como

$$y=log_a x\;;\; Dom\, f(x)=\mathbb{R}^{+},\; Ran\, f(x)=\langle -\infty,+\infty\rangle$$

Definición 2.2.1.6. (Función real seno)

La función continua $sen:\langle -\infty,+\infty\rangle \to \langle -\infty,+\infty\rangle$ seno se define

$$y=sen(x);\; Dom\, sen(x)=\langle -\infty,+\infty\rangle,\; Ran\, sen(x)=[-1,1]$$

Definición 2.2.1.7. (Función real coseno)

La función continua $cos:\langle -\infty,+\infty\rangle \to \langle -\infty,+\infty\rangle$ coseno se define

$$y=cos(x);\; Dom\, cos(x)=\langle -\infty,+\infty\rangle,\; Ran\, cos(x)=[-1,1]$$

Definición 2.2.1.8. (Función real tangente)

La función continua $tan:\langle -\infty,+\infty\rangle \to \langle -\infty,+\infty\rangle$ tangente definida como

$$y=tan(x)=\frac{sen(x)}{cos(x)}\;;\; Dom\ tan(x)=\langle -\infty,+\infty\rangle-\left\{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right),k\in\mathbb{Z}\right\}\; Ran\, tan(x)=\langle -\infty,+\infty\rangle$$

Definición 2.2.1.9. (Función especial Heaviside)

La función singular $\mathcal{H}:\langle -\infty,+\infty\rangle \to \langle 0,1\rangle$ Heaviside se define como

$$\mathcal{H}(\overline{x}) = \begin{cases} 1 \ \ si \ \overline{x} \geq 0 \\ 0 \ \ si \ \overline{x} < 0 \end{cases}, \forall \overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$$

Definición 2.2.1.10. (Función especial delta de Dirac)

La función singular delta de Dirac se define

$$\delta_{\mathcal{D}}(\overline{x}) = \begin{cases} +\infty \ ; \ si \ \overline{x} = 0 \\ \ \ 0 \ ; \ si \ \overline{x} \neq 0 \end{cases}$$

donde

$$\int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} \delta_{\mathcal{D}}(\overline{x}) d\overline{x} = 1$$

2.2.2. Derivada ordinaria de una función real

Definición 2.2.2.1. (Primera derivada ordinaria)

Sean $\mathcal{Z} \subset \langle -\infty, +\infty \rangle$, $a_0 \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{Z}'\left(\mathcal{Z}' = \{a_0 \in \langle -\infty, +\infty \rangle \right.$ / punto de acumulación de $\left.\mathcal{Z}\}\right)$ y sea $g : \mathcal{Z} \to \langle -\infty, +\infty \rangle$ una función real en a_0. Se define la primera derivada ordinaria de g en el punto a_0 como

$$\lim_{z \to a_0} \frac{g(z) - g(a_0)}{z - a_0}$$

siempre que exista el límite.

Notación 2.2.2.1. La derivada de la función g en el punto a_0 la denotamos por $g'(a_0)$ es decir $g'(a_0) = \lim_{z \to a_0} \dfrac{g(z) - g(a_0)}{z - a_0}$

Observaciones 2.2.2.1.

1) Si $z = a_0 + h$ entonces la primera derivada ordinaria de la función g en a_0 se escribe

$$g'(a_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a_0 + h) - g(a_0)}{h}$$

2) geométricamente la primera derivada ordinaria $g'(a_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica $\overline{y} = g(a)$ en el punto $(a_0, g(a_0))$

3) Si $a_0 \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{Z}'$ entonces

$$g'(a_0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a_0 + h) - f(a_0)}{h}$$

$$g'\left(a_0^+\right)=\lim_{z\to a_0^+}\frac{f(z)-f(a_0)}{z\text{-}a_0}$$

Se denomina la primera derivada ordinaria por la derecha de g en a_0 siempre que exista el límite

4) Si $a_0 \in Z \cap Z'$ entonces

$$g'\left(a_0^-\right)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a_0+h)-f(a_0)}{h}$$

$$g'\left(a_0^-\right)=\lim_{z\to a_0^-}\frac{f(z)-f(a_0)}{z\text{-}a_0}$$

Se denomina la primera derivada ordinaria por la izquierda de g en a_0 siempre que exista el límite

5) g es derivable en a_0 sí y solo si existen $g'\left(a_0^+\right)$ y $g'\left(a_0^-\right)$ tal que $g'\left(a_0^+\right)=g'\left(a_0^-\right)=g'\left(a_0\right)$

Ejemplo 2.2.2.1. Sea $sen:\langle-\infty,+\infty\rangle\to\langle-\infty,+\infty\rangle$ una función tal que $g(\overline{x})=sen(\overline{x})$. Calcular $g'(a_0)$, $a_0\in\langle-\infty,+\infty\rangle$.

Solución:

$$\frac{dg(a_0)}{d\overline{x}}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{sen(a_0+h)-sen(a_0)}{h}\right)$$

$$g'(a_0)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{sen(a_0)cos(h)+cos(a_0)sen(h)-sen(a_0)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{sen(a_0)\left[cos(h)-1\right]+cos(a_0)sen(h)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{sen(a_0)\left[cos(h)-1\right]}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{cos(a_0)sen(h)}{h}\right)$$

$$=sen(a_0)\lim_{h\to 0}\left(\frac{cos(h)-1}{h}\right)+cos(a_0)\lim_{h\to 0}\left(\frac{sen(h)}{h}\right)$$

$$g'(a_0)=cos(a_0)$$

Ejemplo 2.2.2.2. Sea $cos:\langle-\infty,+\infty\rangle\to\langle-\infty,+\infty\rangle$ una función continua tal que $g(\overline{x})=cos(\overline{x})$. Calcular $g'(a_0)$, $a_0\in\langle-\infty,+\infty\rangle$

Solución:

$$\frac{dg(a_0)}{dx}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(a_0+h)-\cos(a_0)}{h}\right)$$

$$g'(a_0)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(a_0)\cos(h)-\operatorname{sen}(a_0)\operatorname{sen}(h)-\cos(a_0)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(a_0)\left[\cos(h)-1\right]-\operatorname{sen}(a_0)\operatorname{sen}(h)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(a_0)\left[\cos(h)-1\right]}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(a_0)\operatorname{sen}(h)}{h}\right)$$

$$=\cos(a_0)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)-\operatorname{sen}(a_0)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right)$$

$$g'(a_0)=-\operatorname{sen}(a_0)$$

Ejemplo 2.2.2.3. Sea $g:\langle-\infty,+\infty\rangle\to\langle-\infty,+\infty\rangle$ una función continua tal que $\overline{y}=\overline{x}^m$.

Calcular $\overline{y}'(a_0)$, $a_0\in\langle-\infty,+\infty\rangle$

Solución:

Por la fórmula de Newton sabemos

$$(a_1+b_1)^m=\binom{m}{0}a_1^m b_1^0+\binom{m}{1}a_1^{(m-1)}b_1^1+\binom{m}{2}a_1^{(m-2)}b_1^2+\ldots+\binom{m}{m}a_1^0 b_1^m$$

Aplicando esta fórmula en la primera derivada ordinaria se tiene

$$\frac{d\overline{y}(a_0)}{d\overline{x}}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{(a_0+h)^m-a_0^m}{h}\right)$$

$$\overline{y}'(a_0)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\binom{m}{0}a_0^m+\binom{m}{1}a_0^{m-1}h+\binom{m}{2}a_0^{m-2}h^2+\ldots+a_0^0h^m-a_0^m}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\binom{m}{1}a_0^{m-1}\right)$$

$$=\frac{m!}{1!(m-1)!}a_0^{(m-1)}$$

$$=\frac{m\times(m-1)!}{1!(m-1)!}a_0^{(m-1)}$$

$$\overline{y}'(a_0)=ma_0^{m-1}$$

Ejemplo 2.2.2.4. Sea $log_e : \langle 0,+\infty\rangle \rightarrow \langle -\infty,+\infty\rangle$ una función tal que $\overline{y}(\overline{x}) = log_e(\overline{x})$, $\overline{x} > 0$. Calcular $\overline{y}'(a_0)$, $a_0 \in \langle -\infty,+\infty\rangle$.

Solución:

Aplicando la definición de la primera derivada ordinaria

$$\frac{d\overline{y}(a_0)}{d\overline{x}} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{log_e(a_0+h) - ln(a_0)}{h}\right)$$

$$\overline{y}'(a_0) = \lim_{h\to 0}\frac{log_e\left(\frac{a_0+h}{a_0}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \times \frac{1}{h} \times log_e\left(\frac{a_0}{a_0} + \frac{h}{a_0}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \times log_e\left(1+\frac{h}{a_0}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$= log_e\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{a_0}\right)^{\frac{1}{h}\times\frac{a_0}{a_0}}\right]$$

$$= log_e\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{a_0}\right)^{\frac{a_0}{h}\times\frac{1}{a_0}}\right]$$

$$= log_e\left[e^{\frac{1}{a_0}}\right]$$

$$= \frac{1}{a_0} \times log_e[e]$$

$$\overline{y}'(a_0) = \frac{1}{a_0}$$

Ejemplo 2.2.2.5. Sea $exp : \langle -\infty,+\infty\rangle \rightarrow \langle -\infty,+\infty\rangle$ una función continua tal que $\overline{y}(\overline{x}) = exp(\overline{x})$. Calcular $\overline{y}'(a_0)$, $a_0 \in \langle -\infty,+\infty\rangle$

Solución:

Aplicando la definición de la primera derivada ordinaria

$$\frac{d\overline{y}(a_0)}{d\overline{x}} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{exp(a_0+h) - exp(a_0)}{h}\right)$$

$$\bar{y}'(a_0) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{exp(a_0)\times exp(h) - exp(a_0)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{exp(a_0)exp(h) - 1)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{exp(a_0)\left((1+h)^{\frac{h}{h}} - 1\right)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{exp(a_0)(h)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(exp(a_0)\right)$$

$$\bar{y}'(a_0) = exp(a_0)$$

Definición 2.2.2.2. (Derivada ordinaria de orden superior)

La segunda derivada ordinaria de $g:\langle -\infty,+\infty\rangle \to \langle -\infty,+\infty\rangle$ denotado por $g''(a_0)$ se define

$$g''(a_0) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(a_0+h) - g'(a_0)}{h}$$

Ejemplo 2.2.2.6. Sea $sen:\langle -\infty,+\infty\rangle \to \langle -\infty,+\infty\rangle$ una función definida $\bar{y}(\bar{x}) = sen(\bar{x})$. Calcular $\bar{y}''(a_0)$, $a_0 \in \langle -\infty,+\infty\rangle$

Solución:

Aplicando la definición de la segunda derivada ordinaria

$$\bar{y}''(a_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\bar{y}'(a_0+h) - \bar{y}'(a_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{cos(a_0+h) - cos(a_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{cos(a_0)cos(h) - sen(a_0)sen(h) - cos(a_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{cos(a_0)\left[cos(h) - 1\right] - sen(a_0)sen(h)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(a_0)\left[\cos(h)-1\right]}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a_0)\operatorname{sen}(h)}{h}\\
&= \cos(a_0)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} - \operatorname{sen}(a_0)\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}
\end{aligned}
$$

$$\overline{y}''(a_0) = -\operatorname{sen}(a_0)$$

Ejemplo 2.2.2.7. Sea $\cos : \langle -\infty, +\infty \rangle \to \langle -\infty, +\infty \rangle$ una función definida $\overline{y}(\overline{x}) = \cos(\overline{x})$.

Hallar $\overline{y}''(a_0),\ a_0 \in \langle -\infty, +\infty \rangle$

Solución:

Aplicando la definición de la segunda derivada ordinaria

$$
\begin{aligned}
\overline{y}''(a_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\overline{y}'(a_0+h)-\overline{y}'(a_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a_0+h)-\cos(a_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(a_0)\cos(h)-\cos(a_0)\operatorname{sen}(h)+\operatorname{sen}(a_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(a_0)\left[\cos(h)-1\right]-\cos(a_0)\operatorname{sen}(h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(a_0)\left[\cos(h)-1\right]}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\cos(a_0)\operatorname{sen}(h)}{h}\\
&= -\operatorname{sen}(a_0)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} - \cos(a_0)\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}
\end{aligned}
$$

$$\overline{y}''(a_0) = -\cos(a_0)$$

Definición 2.2.2.3. (Operador de la primera derivada ordinaria)

El Operador $\mathcal{D} : \eta'(\langle -\infty, +\infty \rangle) \to \langle -\infty, +\infty \rangle$ definido por

$$\mathcal{D}(g) = \frac{dg(\overline{x})}{d\overline{x}} = g'(\overline{x});\ \forall \overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$$

Se denomina el operador de la primera derivada ordinaria en $\eta'(\langle -\infty, +\infty \rangle) = \{ g : \langle -\infty, +\infty \rangle \to \langle -\infty, +\infty \rangle$ / g es diferenciable$\}$

Observación 2.2.2.2.

El operador de la primera derivada ordinaria es lineal que cumple

$$\mathcal{D}(u+v)(\overline{x})=\mathcal{D}u(\overline{x})+\mathcal{D}v(\overline{x})$$
$$=(u+v)'(\overline{x})$$
$$=(u'+v')(\overline{x})$$
$$=u'(\overline{x})+v'(\overline{x})$$
$$\mathcal{D}(u+v)(\overline{x})=\mathcal{D}u(\overline{x})+\mathcal{D}v(\overline{x});\ \forall u,v\in\xi'(\langle-\infty,+\infty\rangle)$$

$$\mathcal{D}(\beta u)(\overline{x})=\beta\mathcal{D}u(\overline{x})$$
$$=(\beta u)'(\overline{x})(\beta u)'(\overline{x})$$
$$=(\beta u')(\overline{x})$$
$$\mathcal{D}(\beta u)(\overline{x})=\beta u'(\overline{x});\ \forall\beta\in\langle-\infty,+\infty\rangle,\forall u\in\xi'(\langle-\infty,+\infty\rangle)$$

2.2.3. Función continua en los reales

Definición 2.2.3.1. (Función continua en los reales)

Sean $\mathcal{D}\subset\langle-\infty,+\infty\rangle$ y $g{:}\mathcal{D}\to\langle-\infty,+\infty\rangle$ una función real y $a_0\in\mathcal{D}$. Se dice que g es continua en el punto a_0 si y solo si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ /\ \overline{x}\in\mathcal{D}om(g)$ y $|\overline{x}-a_0|<\varepsilon$ entonces $|g(\overline{x})-g(a_0)|<\varepsilon$.

Ejemplo 2.2.3.1. Estudiar la función continua de $g{:}\langle-\infty,+\infty\rangle\to\langle-\infty,+\infty\rangle$ en el punto $x_0=3$ con la condición de que

$$f(x_0)=\begin{cases} x_0^{\ 2} & si\ x_0<3 \\ 9 & si\ x_0\geq 3\end{cases}$$

Solución

i) $g(3)=9$

ii) $\lim\limits_{x_0\to 3^+}9=9$, $\lim\limits_{x_0\to 3^-}x_0^{\ 2}=9$

Es decir, $\lim\limits_{x_0\to 3^+}9=\lim\limits_{x_0\to 3^-}x_0^{\ 2}=\lim\limits_{x_0\to 3}g(x_0)=9$

iii) $g(3)=9=\lim\limits_{x_0\to 3}g(x_0)$

Definición 2.2.3.2. (Continuidad en el espacio euclidiano-q)

Sea $X\neq\phi$ un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^q$ y $\overline{a}_0\in X$. Se dice que $g{:}X\to\mathbb{R}^q$ es una función continua en $\overline{a}_0$ sí y solo si $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ tal que si $\overline{x}\in X$, $\|\overline{x}-\overline{a}_0\|<\delta$ entonces $\|g(\overline{x})-g(\overline{a}_0)\|<\varepsilon$.

2.3. Marco conceptual

El espacio real de funciones $C^{\infty}(\omega)$ serán analizados sobre un conjunto abierto $\omega \subset \langle -\infty,+\infty \rangle$.

2.3.1. Función test

Definición 2.3.1.1. (Soporte de una función real)

Sea $\varphi : \langle -\infty,+\infty \rangle \to \langle -\infty,+\infty \rangle$ una función real de variable real. Se denomina soporte de φ, denotado por soporteφ, al conjunto soporte$\varphi = \overline{\{ \overline{x} \in \langle -\infty,+\infty \rangle \,/\, \varphi(\overline{x}) \neq 0 \}}$.

Ejemplo 2.3.1.1. Sea $\varphi : \langle -\infty,+\infty \rangle \to \langle -\infty,+\infty \rangle$ tal que $\varphi(\overline{x}) = 3\overline{x}$ entonces

$$\text{soporte}\,\varphi = \overline{\{ \overline{x} \in \langle -\infty,+\infty \rangle \,/\, \varphi(\overline{x}) \neq 0 \}}$$
$$\text{soporte}\,\varphi = \overline{\{ \overline{x} \in \langle -\infty,+\infty \rangle \,/\, \overline{x} \in \langle -\infty,0 \rangle \cup \overline{x} \in \langle 0,+\infty \rangle \}}$$
$$\text{soporte}\,\varphi = \langle -\infty,+\infty \rangle$$

Ejemplo 2.3.1.2. Sea $\varphi : \langle 0,5 \rangle \to \langle -\infty,+\infty \rangle$ tal que $\varphi(\overline{x}) = 5$ entonces

$$\text{soporte}\,\varphi = \overline{\{ \overline{x} \in \langle 0,5 \rangle \,/\, \phi(\overline{x}) \neq 0 \}}$$
$$\text{soporte}\,\varphi = [0,5]$$

Definición 2.3.1.2. (Espacio real $C_0^{\infty}(\omega)$)

El espacio real $C_0^{\infty}(\langle -\infty,+\infty \rangle)$ es el espacio de las funciones infinitamente diferenciables en $\langle -\infty,+\infty \rangle$ con soporte compacto en $\langle -\infty,+\infty \rangle$.

Ejemplo 2.3.1.3. Sea $\omega = \langle -\infty,+\infty \rangle$ y considere la función real

$$\varphi(\overline{x}) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-\overline{x}^2}} & , |\overline{x}| < 1 \\ 0 & , |\overline{x}| \geq 1 \end{cases}$$

$\forall \overline{x} \in \langle -\infty,+\infty \rangle$ se verifica las siguientes propiedades

i) Existe $\varphi \in C^{\infty}(\langle -\infty,+\infty \rangle)$

$$\varphi'(\overline{x}) = \frac{2e^{-\frac{1}{1-\overline{x}^2}}\,\overline{x}}{\left(1-\overline{x}^2\right)^2}$$

$$\varphi''(\overline{x}) = \frac{4e^{-\frac{1}{1-\overline{x}^2}}\overline{x}^2}{\left(1-\overline{x}^2\right)^4} + \frac{8e^{-\frac{1}{1-\overline{x}^2}}\overline{x}^2}{\left(1-\overline{x}^2\right)^3} + \frac{2e^{-\frac{1}{1-\overline{x}^2}}}{\left(1-\overline{x}^2\right)^2}$$

ii) sop $\varphi = \overline{\{\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle \,/\, \varphi(\overline{x}) \neq 0\}}$

soporte $\varphi = \overline{\{\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle \,/\, |\overline{x}| < 1\}}$

soporte $\varphi = \overline{\{\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle \,/\, -1 < \overline{x} < 1\}}$

soporte $\varphi = [-1,1]$ es compacto

Definición 2.3.1.3. (Convergencia de una función real)

Se dice que una sucesión de funciones reales (φ_n) de $C_0^\infty(\langle -\infty, +\infty \rangle)$ converge para cero si cumple soporte$(\varphi_n) \subset \mathcal{K}_0$, donde $\mathcal{K}_0$ es un conjunto compacto en $\langle -\infty, +\infty \rangle$ $\forall n = 1,2,3,\ldots$, (φ_n) tiende uniformemente a cero en $\langle -\infty, +\infty \rangle$, con reunión de derivadas ordinarias de cualquier orden.

Definición 2.3.1.4. (Función real de prueba)

El espacio real $C_0^\infty(\langle -\infty, +\infty \rangle)$ con la idea de convergencia real en $C_0^\infty(\langle -\infty, +\infty \rangle)$ se denomina espacio de función real de prueba.

Notación 2.3.1.1. Espacio de función real de prueba se denota por $\mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$.

2.3.2. Funciones generalizadas

Definición 2.3.2.1. (Funcional lineal real)

Sea $\mathcal{W}$ un espacio real se dice que una funcional lineal real sobre $\mathcal{W}$ es una transformación lineal de $\mathcal{W}$ en $\langle -\infty, +\infty \rangle$.

Definición 2.3.2.2. (Funciones generalizadas)

Una distribución real en ω es una funcional lineal $\mathcal{U} : \mathcal{D}(\omega) \to \langle -\infty, +\infty \rangle$ continua

Notación 2.3.2.1. El espacio real de una función generalizada se denota por $\mathcal{D}'(\omega)$

Observación 2.3.2.1.

$\mathcal{U} : \mathcal{D}(\omega) \to \langle -\infty, +\infty \rangle$ es una función generalizada si:

$$\xi \to \langle \mathcal{U}, \xi \rangle$$

i) $\langle \mathcal{U}, \xi_1 + \xi_2 \rangle = \langle \mathcal{U}, \xi_1 \rangle + \langle \mathcal{U}, \xi_2 \rangle \quad \forall \xi_1 \xi_2 \in \mathcal{D}(\omega)$

ii) $\langle \mathcal{U}, \beta\xi \rangle = \beta \langle \mathcal{U}, \xi \rangle \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\omega),\ \beta \in \langle -\infty, +\infty \rangle$

iii) Si $(\xi_n) \subset \mathcal{D}(\omega)$ tal que $\xi_n \to 0$ en $\mathcal{D}(\omega)$ entonces $\langle \mathcal{U}, \xi_n \rangle \to 0$

Proposición 2.3.2.1. Sea una función continua $g:[c,d] \to \langle -\infty, +\infty \rangle$. Si

$$\int_{\langle c,d \rangle} g(r) k'(r)\, dr = 0,\ \forall k \in \mathcal{W}_0([c,d])$$

Tal que $\mathcal{W}_0([c,d]) := \{ k \in C^1[c,d] : k(c) = k(d) = 0 \}$. Entonces g es constante en el intervalo cerrado $[c,d]$.

Prueba.

Si e es una función constante arbitraria, entonces $k(\bar{x}) := \int_{\langle c,\bar{x} \rangle} (g(r) - e)\, dr$ es una función derivable y $k'(r) = g(r) - e$ continua en $[c,d]$. Además $k(c) = 0$.

Por tanto, si elegimos $e = \frac{1}{d-c} \int_{\langle c,d \rangle} g(r)\, dr$, entonces

$$k(d) = \int_{\langle c,d \rangle} (g(r) - e)\, dr = \int_{\langle c,d \rangle} g(r)\, dr - e(d-c) = 0$$

luego $k \in \mathcal{W}_0([c,d])$.

Asimismo,

$$\int_{\langle c,d \rangle} (g(r) - e)^2\, dr = \int_{\langle c,d \rangle} (g(r) - e) k'(r)\, dr$$

$$\int_{\langle c,d \rangle} (g(r) - e)^2\, dr = \int_{\langle c,d \rangle} g(r) k'(r)\, dr - e(k(d) - k(c)) = 0$$

Por lo tanto, con la continuidad de g, se tiene que g es una constante.

Definición 2.3.2.3. (Primera derivada de una función generalizada)

La derivada con respecto a la variable $\bar{x}$ de una función generalizada $\mathcal{U}$ sobre un abierto $\langle -\infty, +\infty \rangle$, es una funcional $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \bar{x}}$ lineal continua en el espacio real de función de prueba $\mathcal{D}(\omega)$. Es decir,

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \overline{x}}, \xi \right\rangle = -\left\langle \mathcal{U}, \frac{\partial \xi}{\partial \overline{x}} \right\rangle, \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\omega)$$

Definición 2.3.2.4. (Segunda derivada de una función generalizada)

La segunda derivada con respecto a la variable $\overline{x}$ de una función generalizada $\mathcal{U}$ sobre un abierto $\langle -\infty, +\infty \rangle$, es una funcional $\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \overline{x}^2}$ lineal continua en el espacio real de función de prueba $\mathcal{D}(\omega)$. Es decir,

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \overline{x}^2}, \xi \right\rangle = \left\langle \mathcal{U}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial \overline{x}^2} \right\rangle, \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\omega)$$

Definición 2.3.2.5. (Funciones generalizadas iguales)

Dos funciones generalizadas $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son iguales si se cumple

$$\langle \mathcal{U}_1, \xi \rangle = \langle \mathcal{U}_2, \xi \rangle, \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\omega)$$

Definición 2.3.2.6. (Localmente integrable sobre ω)

Las funciones localmente integrables sobre ω se denota $\mathcal{L}^1_{li}(\omega)$ y se define como

$$\mathcal{L}^1_{li}(\omega) = \left\{ g : \omega \to \langle -\infty, +\infty \rangle \text{ medible para cada } \mathcal{K}o \subset \omega; \int_{\mathcal{K}o} |g(\overline{x})| d\overline{x} < \infty \right\}$$

Definición 2.3.2.7. (Producto interno de una función generalizada)

Dado $g \in \mathcal{L}^1_{li}(\omega)$ la función generalizada inducida por g se define como

$$\langle g, \xi \rangle = \int_{\omega} g \, \xi \, d\overline{x}; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\omega)$$

Ejemplo 2.3.2.1. La función singular "Salto" de Heaviside

$$\mathcal{H}(\overline{x}) = \begin{cases} 0, \overline{x} < 0 \\ 1, \overline{x} \geq 0 \end{cases}, \text{ para todo } \overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$$

Se define como

$$\langle \mathcal{H}, \xi \rangle = \int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} \mathcal{H} \, \xi \, d\overline{x}; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

Ejemplo 2.3.2.2. La función singular "Salto" $\overline{x}^{\beta}_{+}$, con $\beta > 0$, definida por

$$\overline{x}^{\beta}_{+} = \begin{cases} 0, & \overline{x} < 0 \\ \overline{x}^{\beta}, & \overline{x} > 0 \end{cases}, \text{ para todo } x \in (\mathbb{R} - \{0\})$$

Cumple con la condición que $x_+^{\beta} \subset \mathcal{L}_{\text{fi}}^{1}(\langle -\infty,+\infty\rangle)$, porque es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ y tiene un punto no continuo $\bar{x}=0$. Por la **Definición 2.3.2.7.** esta función se define como

$$\left\langle \bar{x}_+^{\beta},\xi \right\rangle = \int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} \bar{x}_+^{\beta}\xi(\bar{x})d\bar{x}, \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty,+\infty\rangle)$$

$$\left\langle \bar{x}_+^{\beta},\alpha \right\rangle = \int_{\langle 0,+\infty\rangle} \bar{x}^{\beta}\xi(\bar{x})d\bar{x}, \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle 0,+\infty\rangle)$$

2.3.3. La integral de Riemann

Proposición 2.3.3.1. (Integral de un producto de funciones)

Sean $f(\bar{x})$ y $g(\bar{x})$ funciones de clase $C^1([c,d])$. Entonces se tiene

$$\int_{[c,d]} fdg = fg\Big]_c^d - \int_{[c,d]} gdf$$

Prueba.

Sean $f = g(\bar{x})$, $g = (\bar{x})$, entonces $f.g = f(\bar{x}).g(\bar{x})$

Derivando un producto de funciones $(f.g)' = g.f'+f.g'$

Integrando sobre $[c,d]$ tenemos

$$\int_{[c,d]} (f.g)'d\bar{x} = \int_{[c,d]} g.f' + \int_{[c,d]} f.g'$$

$$\int_{[c,d]} d(fg) = \int_{[c,d]} gdf + \int_{[c,d]} fdg$$

$$f.g\Big]_c^d = \int_{[c,d]} gdf + \int_{[c,d]} fdg$$

Por lo tanto $\int_{[c,d]} fdg = f(\bar{x})\,g(\bar{x})\Big]_c^d - \int_{[c,d]} gdf$

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1. Tipo de investigación en matemática

El informe de tesis corresponde a las ciencias matemáticas que de acuerdo con el fin que se persigue es de tipo básica que nos llevará a la búsqueda de nuevos conocimientos en la teoría de las transformada de Fourier de funciones generalizadas.

3.2. Diseño de investigación

El diseño del informe de tesis es explicativo porque trata de relacionar la derivada y las funciones localmente integrables.

3.3. Población y muestra en matemáticas

La población de estudio es igual a muestra. El informe de tesis corresponde a las ciencias formales y considera como material las funciones generalizadas.

3.4. Procedimientos y objetos del método axiomático

3.4.1 Procedimientos del método axiomático

Generalización	Se extienden la derivada ordinaria de funciones reales a derivada de funciones generalizadas en una expresión en base a las reglas lógicas y definición.
Analogía	Se confrontan las expresiones de las derivadas ordinarias de funciones reales con las derivadas de las funciones generalizadas.
Inducción	Se determinan las reglas lógicas y la definición de las funciones generalizadas. Asimismo, se transita de una proposición a otras y se sumerge nuevos términos.

Experimentación	Se examinan las proposiciones matemáticas sobre las funciones generalizadas. Evalúa los axiomas expresamente en función de la teoría dada.
Observación	Se seleccionan un conjunto de axiomas sobre la expresión generalizada de la derivada ordinaria de funciones reales a derivada como funciones generalizadas para ser formulados como una solución.

3.4.2. Objetos del método axiomático

Teorema	Son enunciados que se derivan de los axiomas vinculados a la teoría axiomática, cuyas reglas son demostrables.
Lema	Es una proposición que es útil para la evidencia de un teorema.
Axioma	Principio claro y evidente que no necesita demostración.
Definición	Idea o forma que concibe el entendimiento o pensamiento expresado con palabras.
Corolario	Es una proposición que se deriva de un enunciado ya probadas.

3.5. Métodos de demostración en matemática

Inducción completa	Se demuestra que el enunciado es verdadero para un número natural $n=1$. Se acepta la hipótesis inductiva, verdadero para el número natural n, Luego se demuestra que es verdadero para un número natural $n-1$. Finalmente, todos los enunciados son verdaderos.
Directa	Para demostrar un enunciado de la forma $p \Rightarrow q$ se empieza suponiendo que p es verdadero. Luego, se construye una cadena de proposiciones y se finaliza en q.
Contraejemplo	Para demostrar un enunciado en un cuantificador universal es falso, es lo mismo demostrar que el cuantificador existencial es falso.

Contrarecíproca	Para demostrar un enunciado de la forma $p \Rightarrow q$ basta usar su forma equivalente $\sim q \Rightarrow \sim p$.
Contradicción	Para demostrar un enunciado de la forma $p \Rightarrow q$ basta deducir alguna contradicción a partir de la hipótesis.

3.6. Modelo de contrastación y verificación de la hipótesis

En el desarrollo de este informe de tesis se usa el método formal deductivo en expresión generalizada de la derivada de funciones localmente integrales y por otro lado las distintas funciones singulares. Se comprobará las pruebas de las proposiciones y definiciones usando la teoría de las funciones generalizadas de Laurent Schwartz.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

4.1. Expresión de la primera derivada ordinaria de funciones continuas como funciones generalizadas

4.1.1. Expresión de la primera derivada ordinaria de una función algebraica como funciones generalizadas

Si $g(\overline{x}) = a\overline{x}^2 + b\overline{x}$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, a y $b \in \langle 0, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle 2a\overline{x} + b, \xi \rangle;\ \text{para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

4.1.2. Expresión de la primera derivada ordinaria de funciones trigonométricas como funciones generalizadas

i) Si $g(\overline{x}) = sen(a\overline{x})$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, $a \in \langle 0, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle a\cos(a\overline{x}), \xi \rangle;\ \text{para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

ii) Si $g(\overline{x}) = \cos(b\overline{x})$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, $b \in \langle 0, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle -b\, sen(b\overline{x}), \xi \rangle;\ \text{para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

4.1.3. Expresión de la primera derivada ordinaria de la función exponencial como funciones generalizadas

Si $g(\overline{x}) = \exp(a\overline{x})$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, $a \in \langle 0, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle a\exp(a\overline{x}), \xi \rangle;\ \text{para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

4.1.4. Expresión de la primera derivada ordinaria de la función valor absoluto como funciones generalizadas

Si $g(\overline{x}) = |\overline{x}|$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle -\mathcal{H}(\overline{x}) + \mathcal{H}(\overline{x}), \xi \rangle$; para todo $\xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$ 4.1.5. Expresión de la primera derivada ordinaria de la función logaritmo como funciones generalizadas

Si $g(\overline{x}) = \log|\overline{x}|$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \left\langle main\ value \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} \frac{1}{\overline{x}} d\overline{x}, \xi(\overline{x}) \right\rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty, +\infty \rangle\right)$$

4.2. Expresión de la segunda derivada ordinaria de funciones continuas como función generalizada

4.2.1. Expresión de la segunda derivada ordinaria de la función algebraica como función generalizada

Si $g(\overline{x}) = a\overline{x}^2 + b\overline{x}$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, a y $b \in \langle 0, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \langle 2a, \xi \rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty, +\infty \rangle\right)$$

4.2.2. Expresión de la segunda derivada ordinaria de la función trigonométrica como función generalizada

Si $g(\overline{x}) = sen(a\overline{x})$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, $a \in \langle 0, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \left\langle -a^2 sen(a\overline{x}), \xi \right\rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty, +\infty \rangle\right)$$

4.2.3 Expresión de la segunda derivada ordinaria de la función exponencial como función generalizada

Si $g(\overline{x}) = exp(a\overline{x})$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, $a \in \langle 0, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \left\langle a^2\, exp(a\overline{x}), \xi \right\rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty, +\infty \rangle\right)$$

4.2.4. Expresión de la segunda derivada ordinaria de la función logaritmo como función generalizada

Si $g(\overline{x}) = log|\overline{x}|$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \left\langle -main\ value\left(\frac{1}{\overline{x}^2}\right), \xi \right\rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty, +\infty \rangle\right)$$

4.3. Expresión de la primera derivada ordinaria de funciones no continuas como función generalizada

4.3.1. Expresión de la primera derivada ordinaria de la función Heaviside como función generalizada

Si $\mathcal{H}(\overline{x}) = \begin{cases} 1 \ , si\ \overline{x} \geq 0 \\ 0 \ , si\ \overline{x} < 0 \end{cases}$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_{\mathcal{H}}, \xi \right\rangle = \langle \delta_{\mathcal{D}}, \xi \rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty, +\infty \rangle\right)$$

4.3.2. Expresión de la primera derivada ordinaria de la función coseno como función generalizada

Si $g(\overline{x}) = \begin{cases} cos(\overline{x}), \ \overline{x} > 0 \\ 0 \quad , \ \overline{x} < 0 \end{cases}$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle \delta_{\mathcal{D}} \text{-} \mathcal{H}(\overline{x}) sen(\overline{x}), \xi \rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

4.3.3. Expresión de la primera derivada ordinaria de la función seno como función generalizada

Si $g(\overline{x}) = \begin{cases} sen(\overline{x}), \ \overline{x} > 0 \\ 0 \quad , \ \overline{x} < 0 \end{cases}$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle \mathcal{H}(\overline{x}) cos(\overline{x}), \xi \rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

4.3.4. Expresión de la primera derivada ordinaria de la función heaviside exponencial como función generalizada

Si $\mathcal{H}(\overline{x}) = \begin{cases} 1 \ , \ si \ \overline{x} \geq 0 \\ 0 \ , \ si \ \overline{x} < 0 \end{cases}$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_{\mathcal{H}(\overline{x})e^{\lambda(\overline{x})}} - \lambda \mathcal{H}(\overline{x}) e^{\lambda(\overline{x})}, \xi \right\rangle = \left\langle \delta_{\mathcal{D}} e^{\lambda(\overline{x})}, \xi \right\rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

4.4. Expresión de la segunda derivada ordinaria de funciones no continuas como función generalizada

4.4.1. Expresión de la segunda derivada ordinaria de la función heaviside como función generalizada

Si $\mathcal{H}(\overline{x}) = \begin{cases} 1 \ , \ si \ \overline{x} \geq 0 \\ 0 \ , \ si \ \overline{x} < 0 \end{cases}$ para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\langle \mathcal{D}^2 \mathcal{U}_{\mathcal{H}}, \xi \rangle = \langle \text{-}\delta'_{\mathcal{D}}, \xi \rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

4.4.2. Expresión de la segunda derivada ordinaria de la función coseno como función generalizada

Si $g(\overline{x}) = \begin{cases} cos(\overline{x}), \ \overline{x} > 0 \\ 0 \quad , \ \overline{x} < 0 \end{cases}$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\langle \mathcal{D}^2 \mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle \text{-}\delta'_{\mathcal{D}} \text{-} \mathcal{H}(\overline{x}) cos(\overline{x}), \xi \rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

4.4.3. Expresión de la segunda derivada ordinaria de la función seno como función generalizada

Si $g(\overline{x}) = \begin{cases} sen(\overline{x}), & \overline{x} > 0 \\ 0 & , \overline{x} < 0 \end{cases}$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2 \mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \left\langle -\delta_{\mathcal{D}} - \mathcal{H}(\overline{x})\, sen(\overline{x}), \xi \right\rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

4.4.4. Expresión de la 4-esima derivada ordinaria de la función coseno como función generalizada

Si $g(\overline{x}) = |cos(\overline{x})| = \begin{cases} -cos(\overline{x}), & si \;\; cos(\overline{x}) < 0 \\ cos(\overline{x}), & si \;\; cos(\overline{x}) \geq 0 \end{cases}$, entonces se cumple

$$\left\langle \mathcal{D}^4 \mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \left\langle -2\,\delta_{\mathcal{D}}''' + 2\delta_{\mathcal{D}}' - \mathcal{H}(-\overline{x})\cos(\overline{x}) + \mathcal{H}(\overline{x})\cos(\overline{x}), \xi \right\rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

CAPITULO V

DISCUSIÓN

5.1. Expresión de la primera derivada ordinaria de funciones continuas como función generalizada

5.1.1. Expresión de la primera derivada ordinaria de una función algebraica como función generalizada

Proposición 5.1.1.1. Si $g(\overline{x}) = a\overline{x}^2 + b\overline{x}$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, a y $b \in \langle 0, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle 2a\overline{x} + b, \xi \rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.3.** Se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle &= (\mathcal{D}\mathcal{U}_g)(\xi) \\
&= (-1)^1 \langle \mathcal{U}_g, \xi \rangle \\
&= -\langle \mathcal{U}_g, \xi' \rangle \\
&= -\int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} g(\overline{x}) \xi'(\overline{x}) \, d\overline{x}
\end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle &= -\int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} \left(a\overline{x}^2 + b\overline{x} \right) \xi'(\overline{x}) \, d\overline{x} \\
&= -\left[\left(a\overline{x}^2 + b\overline{x} \right) \xi(\overline{x}) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} (2a\overline{x} + b) \xi(\overline{x}) \, d\overline{x}
\end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle = \int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} (2a\overline{x} + b) \xi(\overline{x}) \, d\overline{x}$$

Por lo tanto

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle 2a\overline{x} + b, \xi \rangle; \; \forall \, \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

5.1.2. Expresión de la primera derivada ordinaria de funciones trigonométricas como función generalizada

Proposición 5.1.2.1. Si $g(\overline{x}) = sen(a\overline{x})$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, $a \in \langle 0, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle a\cos(a\overline{x}), \xi \rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.3.** Se tiene

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle &= (\mathcal{D}\mathcal{U}_g)(\xi)\\ &= (-1)^1 \langle \mathcal{U}_g, \xi \rangle\\ &= -\langle \mathcal{U}_g, \xi' \rangle\\ &= -\int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} g(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}\end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle &= -\int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} sen(a\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}\\ &= -\left[sen(a\overline{x})\xi(\overline{x})\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} a\cos(a\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}\end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle = \int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} a\cos(a\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}$$

Por lo tanto

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle a\cos(a\overline{x}), \xi \rangle; \ \forall \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

Proposición 5.1.2.2. Si $g(\overline{x}) = \cos(b\overline{x})$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, $b \in \langle 0, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle -b\, sen(b\overline{x}), \xi \rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.3.** Se tiene

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\rangle &= (\mathcal{D}\mathcal{U}_g)(\xi)\\ &= (-1)^1\langle \mathcal{U}_g,\xi\rangle\\ &= -\langle \mathcal{U}_g,\xi'\rangle\\ &= -\int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} g(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}\end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\rangle &= -\int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} cos(6\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}\\ &= -\left[cos(6\overline{x})\xi(\overline{x})\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} 6\, sen(6\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}\end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\rangle = -\int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} 6\, sen(6\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}$$

Por lo tanto

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\rangle = \langle -6\, sen(6\overline{x}),\xi\rangle;\ \forall\,\xi\in\mathcal{D}(\langle-\infty,+\infty\rangle)$$

5.1.3. Expresión de la primera derivada ordinaria de la función exponencial como función generalizada

Proposición 5.1.3.1. Si $g(\overline{x}) = exp(a\overline{x})$, para todo, $\overline{x}\in\langle-\infty,+\infty\rangle$, $a\in\langle 0,+\infty\rangle$, entonces se tiene

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\rangle = \langle a\, exp(a\overline{x}),\xi\rangle;\ \text{para todo } \xi\in\mathcal{D}(\langle-\infty,+\infty\rangle)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.3.** Se tiene

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\rangle &= (\mathcal{D}\mathcal{U}_g)(\xi)\\ &= (-1)^1\langle \mathcal{U}_g,\xi\rangle\\ &= -\langle \mathcal{U}_g,\xi'\rangle\\ &= -\int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} g(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}\end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\rangle &= -\int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} exp(a\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}\\ &= -\left[exp(a\overline{x})\xi(\overline{x})\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} a\, exp(a\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}\end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g ,\xi \right\rangle = \int\limits_{\langle -\infty,+\infty\rangle} a\, exp\left(a\overline{x}\right)\xi\left(\overline{x}\right)d\overline{x}$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g ,\xi \right\rangle = \left\langle a\, exp\left(a\overline{x}\right),\xi\right\rangle;\ \forall\, \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty,+\infty\rangle\right)$$

5.1.4. Expresión de la primera derivada ordinaria de la función valor absoluto como función generalizada

Proposición 5.1.4.1. Si $g\left(\overline{x}\right) = \left|\overline{x}\right|$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty,+\infty\rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g ,\xi \right\rangle = \left\langle -\mathcal{H}\left(\overline{x}\right) + \mathcal{H}\left(\overline{x}\right),\xi\right\rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty,+\infty\rangle\right)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.3.** Se tiene

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g ,\xi \right\rangle &= \left(\mathcal{D}\mathcal{U}_g\right)(\xi) \\
&= (-1)^1 \left\langle \mathcal{U}_g ,\xi \right\rangle \\
&= -\left\langle \mathcal{U}_g ,\xi' \right\rangle \\
&= -\int\limits_{\langle -\infty,+\infty\rangle} g\left(\overline{x}\right)\xi'\left(\overline{x}\right)d\overline{x}
\end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g ,\xi \right\rangle &= -\int\limits_{\langle -\infty,+\infty\rangle} g\left(\overline{x}\right)\xi'\left(\overline{x}\right)d\overline{x} \\
&= -\int\limits_{\langle -\infty,0\rangle} \left(-\overline{x}\right)\xi'\left(\overline{x}\right)d\overline{x} - \int\limits_{\langle 0,+\infty\rangle} \left(\overline{x}\right)\xi'\left(\overline{x}\right)d\overline{x} \\
&= -\left[\left(-\overline{x}\right)\xi\left(\overline{x}\right)\right]_{-\infty}^{0} + \int\limits_{\langle -\infty,0\rangle} (-1)\xi\left(\overline{x}\right)d\overline{x} - \left[\left(\overline{x}\right)\xi\left(\overline{x}\right)\right]_{0}^{+\infty} + \int\limits_{\langle 0,+\infty\rangle} (1)\xi\left(\overline{x}\right)d\overline{x}
\end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g ,\xi \right\rangle &= \int\limits_{\langle -\infty,0\rangle} (-1)\xi\left(\overline{x}\right)d\overline{x} + \int\limits_{\langle 0,+\infty\rangle} (1)\xi\left(\overline{x}\right)d\overline{x} \\
&= \int\limits_{\langle -\infty,0\rangle} (-1)\xi\left(\overline{x}\right)d\overline{x} + \int\limits_{\langle -\infty,0\rangle} (0)\xi\left(\overline{x}\right)d\overline{x} + \int\limits_{\langle -\infty,0\rangle} (1)\xi\left(\overline{x}\right)d\overline{x} + \int\limits_{\langle -\infty,0\rangle} (0)\xi\left(\overline{x}\right)d\overline{x} \\
&= -\mathcal{H}\left(\overline{x}\right) + \mathcal{H}\left(\overline{x}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g ,\xi \right\rangle = \left\langle -\mathcal{H}\left(\overline{x}\right) + \mathcal{H}\left(\overline{x}\right),\xi\right\rangle;\ \forall \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty,+\infty\rangle\right)$$

5.1.5. Expresión de la primera derivada ordinaria de la función logaritmo como función generalizada

Proposición 5.1.5.1. Si $g(\overline{x}) = log|\overline{x}|$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \left\langle main\ value \int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} \frac{1}{\overline{x}} d\overline{x}, \xi(\overline{x}) \right\rangle; \text{para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.3.** Se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle &= \left(\mathcal{D}\mathcal{U}_g \right)(\xi) \\ &= (-1)^1 \left\langle \mathcal{U}_g, \xi \right\rangle \\ &= -\left\langle \mathcal{U}_g, \xi' \right\rangle \\ &= -\int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} g(\overline{x})\xi'(\overline{x}) d\overline{x} \end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle &= -\int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} log|\overline{x}|\xi'(\overline{x}) d\overline{x} \\ &= -\lim_{c \to 0} \left[\int_{\langle -\infty,c\rangle} \left(log|\overline{x}| \right) \xi'(\overline{x}) d\overline{x} + \int_{\langle c,+\infty\rangle} \left(log|\overline{x}| \right) \xi'(\overline{x}) d\overline{x} \right] \\ &= -\lim_{c \to 0} \left[\left[log|\overline{x}|\xi(\overline{x}) \right]_{-\infty}^{c} - \int_{\langle -\infty,c\rangle} \left(\frac{1}{\overline{x}} \right) \xi(\overline{x}) d\overline{x} \right] - \lim_{c \to 0} \left[\left[log|\overline{x}|\xi(\overline{x}) \right]_{c}^{+\infty} - \int_{\langle c,+\infty\rangle} \left(\frac{1}{\overline{x}} \right) \xi(\overline{x}) d\overline{x} \right] \end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle &= -\lim_{c \to 0} \left[log|c|\xi(c) - \int_{\langle -\infty,c\rangle} \left(\frac{1}{\overline{x}} \right) \xi(\overline{x}) d\overline{x} \right] - \lim_{c \to 0} \left[-log|c|\xi(c) - \int_{\langle c,+\infty\rangle} \left(\frac{1}{\overline{x}} \right) \xi(\overline{x}) d\overline{x} \right] \\ &= \lim_{c \to 0} \left[-log|c|\xi(c) + log|c|\xi(c) \right] + \lim_{c \to 0} \left[\int_{\langle -\infty,c\rangle} \left(\frac{1}{\overline{x}} \right) \xi(\overline{x}) d\overline{x} + \int_{\langle c,+\infty\rangle} \left(\frac{1}{\overline{x}} \right) \xi(\overline{x}) d\overline{x} \right] \\ &= \lim_{c \to 0} \left[\int_{\langle -\infty,c\rangle} \left(\frac{1}{\overline{x}} \right) \xi(\overline{x}) d\overline{x} + \int_{\langle c,+\infty\rangle} \left(\frac{1}{\overline{x}} \right) \xi(\overline{x}) d\overline{x} \right] \\ &= main\ value \int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} \left(\frac{1}{\overline{x}} \right) \xi(\overline{x}) d\overline{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \left\langle main\ value \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} \frac{1}{\bar{x}} d\bar{x}, \xi(\bar{x}) \right\rangle; \ \forall \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty,+\infty \rangle\right)$$

5.2. Expresión de la segunda derivada ordinaria de funciones continuas como función generalizada

5.2.1. Expresión de la segunda derivada ordinaria de la función algebraica como función generalizada

Proposición 4.3.1.1. Si $g(\bar{x}) = a\bar{x}^2 + b\bar{x}$, para todo, $\bar{x} \in \langle -\infty,+\infty \rangle$, a y $b \in \langle 0,+\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \langle 2a, \xi \rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty,+\infty \rangle\right)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.4.** Se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle &= \left(\mathcal{D}^2\mathcal{U}_g\right)(\xi) \\ &= (-1)^2 \left\langle \mathcal{U}_g, \xi'' \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{U}_g, \xi'' \right\rangle \\ &= \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} g(\bar{x})\xi''(\bar{x})\, d\bar{x} \end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle &= \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} g(\bar{x})\xi''(\bar{x})\, d\bar{x} \\ &= \left[\left(a\bar{x}^2 + b\bar{x}\right)\xi'(\bar{x})\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} \left(2a\bar{x} + b\right)\xi'(\bar{x})\, d\bar{x} \end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = -\int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} \left(2a\bar{x} + b\right)\xi'(\bar{x})\, d\bar{x}$$

Nuevamente por la **Proposición 2.3.3.1.** y **Definición 2.3.1.1.** Se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle &= -\left[\left(2a\bar{x} + b\right)\xi(\bar{x})\, d\bar{x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} (2a)\xi(\bar{x})\, d\bar{x} \\ &= \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} (2a)\xi(\bar{x})\, d\bar{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \langle 2a, \xi \rangle; \ \forall \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty,+\infty \rangle\right)$$

5.2.2. Expresión de la segunda derivada ordinaria de la función trigonométrica como función generalizada

Proposición 4.3.2.1. Si $g(\overline{x}) = sen(a\overline{x})$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, $a \in \langle 0, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\langle \mathcal{D}^2 \mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle -a^2 sen(a\overline{x}), \xi \rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.4.** Se tiene

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}^2 \mathcal{U}_g, \xi \rangle &= (\mathcal{D}^2 \mathcal{U}_g)(\xi) \\ &= (-1)^2 \langle \mathcal{U}_g, \xi'' \rangle \\ &= \langle \mathcal{U}_g, \xi'' \rangle \\ &= \int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} g(\overline{x}) \xi''(\overline{x}) d\overline{x} \end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}^2 \mathcal{U}_g, \xi \rangle &= \int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} g(\overline{x}) \xi''(\overline{x}) d\overline{x} \\ &= \left[(sen(a\overline{x})) \xi'(\overline{x}) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} (a\, cos(\overline{x})) \xi'(\overline{x}) d\overline{x} \end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\langle \mathcal{D}^2 \mathcal{U}_g, \xi \rangle = - \int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} (a\, cos(\overline{x})) \xi'(\overline{x}) d\overline{x}$$

Nuevamente por la **Proposición 2.3.3.1.** y **Definición 2.3.1.1.** Se tiene

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}^2 \mathcal{U}_g, \xi \rangle &= -\left[(a\, cos(\overline{x})) \xi(\overline{x}) d\overline{x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} (a^2 sen(a\overline{x})) \xi(\overline{x}) d\overline{x} \\ &= - \int_{\langle -\infty, +\infty \rangle} (a^2 sen(a\overline{x})) \xi(\overline{x}) d\overline{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle \mathcal{D}^2 \mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle -a^2 sen(a\overline{x}), \xi \rangle; \ \forall\, \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

5.2.3 Expresión de la segunda derivada ordinaria de la función exponencial como función generalizada

Si $g(\overline{x}) = exp(a\overline{x})$, para todo, $\overline{x} \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, $a \in \langle 0, +\infty \rangle$, entonces se tiene

$$\langle \mathcal{D}^2 \mathcal{U}_g, \xi \rangle = \langle a^2\, exp(a\overline{x}), \xi \rangle; \text{ para todo } \xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty, +\infty \rangle)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.4.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &= \left(\mathcal{D}^2\mathcal{U}_g\right)(\xi)\\ &= (-1)^2\left\langle \mathcal{U}_g,\xi''\right\rangle\\ &= \left\langle \mathcal{U}_g,\xi''\right\rangle\\ &= \int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} g(\overline{x})\xi''(\overline{x})\,d\overline{x}\end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &= \int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} g(\overline{x})\xi''(\overline{x})\,d\overline{x}\\ &= \left[\left(exp\left(a\overline{x}\right)\right)\xi'(\overline{x})\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\langle-\infty,+\infty\rangle}\left(a\,exp\left(a\overline{x}\right)\right)\xi'(\overline{x})\,d\overline{x}\end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = -\int_{\langle-\infty,+\infty\rangle}\left(a\,exp\left(a\overline{x}\right)\right)\xi'(\overline{x})\,d\overline{x}$$

Nuevamente por la **Proposición 2.3.3.1.** y **Definición 2.3.1.1.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &= -\left[\left(a\,exp\left(a\overline{x}\right)\right)\xi(\overline{x})\,d\overline{x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\langle-\infty,+\infty\rangle}\left(a^2 exp\left(a\overline{x}\right)\right)\xi(\overline{x})\,d\overline{x}\\ &= \int_{\langle-\infty,+\infty\rangle}\left(a^2 exp\left(a\overline{x}\right)\right)\xi(\overline{x})\,d\overline{x}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = \left\langle a^2\,exp\left(a\overline{x}\right),\xi\right\rangle;\ \forall\,\xi\in\mathcal{D}\left(\langle-\infty,+\infty\rangle\right)$$

5.2.4. Expresión de la segunda derivada ordinaria de la función logaritmo como función generalizada

Proposición 4.2.4.1. Si $g(\overline{x}) = log\left|\overline{x}\right|$, para todo, $\overline{x}\in\langle-\infty,+\infty\rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = \left\langle \text{-}\,main\ value\left(\frac{1}{\overline{x}^2}\right),\xi\right\rangle;\ \text{para todo }\xi\in\mathcal{D}\left(\langle-\infty,+\infty\rangle\right)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.4.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &= \left(\mathcal{D}^2\mathcal{U}_g\right)(\xi)\\ &= (-1)^2\left\langle \mathcal{U}_g,\xi''\right\rangle\\ &= \left\langle \mathcal{U}_g,\xi''\right\rangle\\ &= \int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} g(\overline{x})\xi''(\overline{x})\,d\overline{x}\end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2 \mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} g(\bar{x})\xi''(\bar{x})\,d\bar{x}$$

$$= \lim_{c\to 0}\left[\int_{\langle -\infty,c\rangle} \left(\log|\bar{x}|\right)\xi''(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_{\langle c,+\infty\rangle} \left(\log|\bar{x}|\right)\xi''(\bar{x})\,d\bar{x}\right]$$

$$= \lim_{c\to 0}\left[\left[\log|\bar{x}|\xi'(\bar{x})\right]_{-\infty}^{c} - \int_{\langle -\infty,\mathrm{c}\rangle}\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)\xi'(\bar{x})\,d\bar{x}\right] - \lim_{c\to 0}\left[\left[\log|\bar{x}|\xi'(\bar{x})\right]_{c}^{+\infty} - \int_{\langle c,+\infty\rangle}\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)\xi'(\bar{x})\,d\bar{x}\right]$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\left\langle \mathcal{D}^2 \mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \lim_{c\to 0}\left[\log|c|\xi'(c) - \int_{\langle -\infty,c\rangle}\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)\xi'(\bar{x})\,d\bar{x}\right] - \lim_{c\to 0}\left[\log|c|\xi'(c) - \int_{\langle c,+\infty\rangle}\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)\xi'(\bar{x})\,d\bar{x}\right]$$

$$= -\lim_{c\to 0}\left[\int_{\langle -\infty,c\rangle}\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)\xi'(\bar{x})\,d\bar{x} - \int_{\langle c,+\infty\rangle}\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)\xi'(\bar{x})\,d\bar{x}\right]$$

Nuevamente por la **Proposición 2.3.3.1.** y **Definición 2.3.1.1.** Se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2 \mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = -\lim_{c\to 0}\left[\left[\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)\xi(\bar{x})\right]_{-\infty}^{c} + \int_{\langle -\infty,c\rangle}\left(\frac{1}{\bar{x}^2}\right)\xi(\bar{x})\,d\bar{x} - \left[\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)\xi(\bar{x})\right]_{c}^{\infty} + \int_{\langle c,+\infty\rangle}\left(\frac{1}{\bar{x}^2}\right)\xi(\bar{x})\,d\bar{x}\right]$$

$$= -\lim_{c\to 0}\left[\int_{\langle -\infty,c\rangle}\left(\frac{1}{\bar{x}^2}\right)\xi(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_{\langle c,+\infty\rangle}\left(\frac{1}{\bar{x}^2}\right)\xi(\bar{x})\,d\bar{x}\right]$$

$$= -\textit{main value}\int_{\langle -\infty,+\infty\rangle}\left(\frac{1}{\bar{x}^2}\right)\xi(\bar{x})\,d\bar{x}$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}^2 \mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \left\langle \text{-}\,\textit{main value}\left(\frac{1}{\bar{x}^2}\right), \xi \right\rangle;\ \forall\, \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty,+\infty\rangle\right)$$

5.3. Expresión de la primera derivada ordinaria de funciones no continuas como función generalizada

5.3.1. Expresión de la primera derivada ordinaria de la función Heaviside como función generalizada

Proposición 4.3.1.1. Si $\mathcal{H}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 \ , si\ \bar{x} \geq 0 \\ 0 \ , si\ \bar{x} < 0 \end{cases}$, para todo, $\bar{x} \in \langle -\infty,+\infty\rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_{\mathcal{H}}, \xi \right\rangle = \left\langle \delta_{\mathcal{D}}, \xi \right\rangle;\ \text{para todo}\ \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty,+\infty\rangle\right)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.3.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle &= \left(\mathcal{D}\mathcal{U}_g\right)(\xi) \\ &= (-1)^1 \left\langle \mathcal{U}_g, \xi \right\rangle \\ &= -\left\langle \mathcal{U}_g, \xi' \right\rangle \\ &= -\int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} g(\bar{x})\xi'(\bar{x})d\bar{x}\end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle &= -\int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} \mathcal{H}(\bar{x})\xi'(\bar{x})d\bar{x} \\ &= -\left[\int_{\langle -\infty,0\rangle} \mathcal{H}(\bar{x})\xi'(\bar{x})d\bar{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} \mathcal{H}(\bar{x})\xi'(\bar{x})d\bar{x}\right] \\ &= -\left[\int_{\langle -\infty,0\rangle} 0\,\xi'(\bar{x})d\bar{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} 1\,\xi'(\bar{x})d\bar{x}\right] \\ &= -\int_{\langle 0,+\infty\rangle} \xi'(\bar{x})d\bar{x}\end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle &= -\int_{\langle 0,+\infty\rangle} d\,\xi(\bar{x}) \\ &= -\left(\xi(\infty) - \xi(0)\right) \\ &= \xi(0) = \delta_{\mathcal{D}}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_{\mathcal{H}}, \xi \right\rangle = \left\langle \delta_{\mathcal{D}}, \xi \right\rangle;\ \forall\, \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty,+\infty\rangle\right)$$

5.3.2. Expresión de la primera derivada ordinaria de la función coseno como función generalizada

Proposición 4.3.2.1. Si $g(\bar{x}) = \begin{cases} cos(\bar{x}),\ \bar{x} > 0 \\ 0 \quad\ ,\ \bar{x} < 0 \end{cases}$, para todo, $\bar{x} \in \langle -\infty,+\infty\rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g, \xi \right\rangle = \left\langle \delta_{\mathcal{D}}\text{-}\mathcal{H}(\bar{x})sen(\bar{x}), \xi \right\rangle;\ \text{para todo } \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty,+\infty\rangle\right)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.3.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &= \left(\mathcal{D}\mathcal{U}_g\right)(\xi)\\ &= (-1)^1\left\langle \mathcal{U}_g,\xi\right\rangle\\ &= -\left\langle \mathcal{U}_g,\xi'\right\rangle\\ &= -\int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} g(\overline{x})\xi'(\overline{x})\,d\overline{x}\end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &= -\int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} g(\overline{x})\xi'(\overline{x})\,d\overline{x}\\ &= -\left[\int_{\langle-\infty,0\rangle} g(\overline{x})\xi'(\overline{x})\,d\overline{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} g(\overline{x})\xi'(\overline{x})\,d\overline{x}\right]\\ &= -\left[\int_{\langle-\infty,0\rangle} 0\,\xi'(\overline{x})\,d\overline{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\overline{x})\xi'(\overline{x})\,d\overline{x}\right]\\ &= -\int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\overline{x})\xi'(\overline{x})\,d\overline{x}\\ &= -\left[cos(\overline{x})\xi(\overline{x})\right]_0^{+\infty} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} -sen(\overline{x})\xi(\overline{x})\,d\overline{x}\end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &= -\left[cos(\overline{x})\xi(\overline{x})\right]_0^{+\infty} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} -sen(\overline{x})\xi(\overline{x})\,d\overline{x}\\ &= -\left[cos(+\infty)\xi(+\infty) - cos(0)\xi(0)\right] - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\overline{x})\xi(\overline{x})\,d\overline{x}\\ &= \xi(0) - \int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} \mathcal{H}(\overline{x})\,sen(\overline{x})\xi(\overline{x})\,d\overline{x}\\ &= \delta_{\mathcal{D}} - \mathcal{H}(\overline{x})\,sen(\overline{x})\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = \left\langle \delta_{\mathcal{D}} - \mathcal{H}(\overline{x})\,sen(\overline{x}),\xi\right\rangle;\ \forall\,\xi\in\mathcal{D}\left(\langle-\infty,+\infty\rangle\right)$$

5.3.3. Expresión de la primera derivada ordinaria de la función seno como función generalizada

Proposición 4.3.3.1. Si $g(\overline{x}) = \begin{cases} sen(\overline{x}), & \overline{x} > 0\\ 0, & \overline{x} < 0\end{cases}$, para todo, $\overline{x}\in\langle-\infty,+\infty\rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = \left\langle \mathcal{H}(\overline{x})\,cos(\overline{x}),\xi\right\rangle;\ \text{para todo } \xi\in\mathcal{D}\left(\langle-\infty,+\infty\rangle\right)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.3.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &= \left(\mathcal{D}\mathcal{U}_g\right)(\xi)\\ &= (-1)^1\left\langle \mathcal{U}_g,\xi\right\rangle\\ &= -\left\langle \mathcal{U}_g,\xi'\right\rangle\\ &= -\int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} g(\bar{x})\xi'(\bar{x})d\bar{x}\end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &= -\int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} g(\bar{x})\xi'(\bar{x})d\bar{x}\\ &= -\left[\int_{\langle-\infty,0\rangle} g(\bar{x})\xi'(\bar{x})d\bar{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} g(\bar{x})\xi'(\bar{x})d\bar{x}\right]\\ &= -\left[\int_{\langle-\infty,0\rangle} 0\,\xi'(\bar{x})d\bar{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\bar{x})\,\xi'(\bar{x})d\bar{x}\right]\\ &= -\int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\bar{x})\xi'(\bar{x})d\bar{x}\\ &= -\left[sen(\bar{x})\xi(\bar{x})\right]_0^{+\infty} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\bar{x})\xi(\bar{x})d\bar{x}\end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &= -\left[sen(\bar{x})\xi(\bar{x})\right]_0^{+\infty} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\bar{x})\xi(\bar{x})d\bar{x}\\ &= -\left[sen(+\infty)\xi(+\infty) - sen(0)\xi(0)\right] + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\bar{x})\xi(\bar{x})d\bar{x}\\ &= \int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} \mathcal{H}(\bar{x})cos(\bar{x})\xi(\bar{x})d\bar{x}\\ &= \mathcal{H}(\bar{x})cos(\bar{x})\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = \left\langle \mathcal{H}(\bar{x})cos(\bar{x}),\xi\right\rangle;\ \forall\,\xi \in \mathcal{D}\left(\langle-\infty,+\infty\rangle\right)$$

5.3.4. Expresión de la primera derivada ordinaria de la función heaviside exponencial como función generalizada

Proposición 4.3.4.1. Si $\mathcal{H}(\bar{x}) = \begin{cases} 1\ ,\ si\ \bar{x} \geq 0 \\ 0\ ,\ si\ \bar{x} < 0 \end{cases}$, para todo, $\bar{x} \in \langle-\infty,+\infty\rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_{\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})}} - \lambda\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})},\xi\right\rangle = \left\langle \delta_{\mathcal{D}}e^{\lambda(\bar{x})},\xi\right\rangle;\ \text{para todo}\ \xi \in \mathcal{D}\left(\langle-\infty,+\infty\rangle\right)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.3.** Se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_{\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})}} - \lambda\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})}, \xi \right\rangle = \left(\mathcal{D}\mathcal{U}_{\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})}} - \lambda\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})}\right)(\xi)$$

$$= (-1)^{1}\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_{\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})}} - \lambda\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})}, \xi' \right\rangle$$

$$= -\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_{\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})}} - \lambda\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})}, \xi' \right\rangle$$

$$= -e^{\lambda(\bar{x})}\int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} \mathcal{H}(\bar{x})\xi'(\bar{x})\,d\bar{x} + \lambda\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})} - \lambda\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})}$$

$$= -e^{\lambda(\bar{x})}\int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} \mathcal{H}(\bar{x})\xi'(\bar{x})\,d\bar{x}$$

$$= -e^{\lambda(\bar{x})}\left[\int_{\langle -\infty,0\rangle} \mathcal{H}(\bar{x})\xi'(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} \mathcal{H}(\bar{x})\xi'(\bar{x})\,d\bar{x}\right]$$

$$= -e^{\lambda(\bar{x})}\left[\int_{\langle -\infty,0\rangle} 0\,\xi'(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} 1\,\xi'(\bar{x})\,d\bar{x}\right]$$

$$= -e^{\lambda(\bar{x})}\left[\int_{\langle 0,+\infty\rangle} \xi'(\bar{x})\,d\bar{x}\right]$$

$$= -e^{\lambda(\bar{x})}\left[\int_{\langle 0,+\infty\rangle} d\,\xi(\bar{x})\right]$$

$$= -e^{\lambda(\bar{x})}\left[\xi(+\infty) - \xi(0)\right]$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_{\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})}} - \lambda\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})}, \xi \right\rangle = e^{\lambda(\bar{x})}\xi(0)$$

$$= e^{\lambda(\bar{x})}\delta_{\mathcal{D}}$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_{\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})}} - \lambda\mathcal{H}(\bar{x})e^{\lambda(\bar{x})}, \xi \right\rangle = \left\langle \delta_{\mathcal{D}} e^{\lambda(\bar{x})}, \xi \right\rangle;\ \forall\, \xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty,+\infty\rangle\right)$$

5.4. Expresión de la segunda derivada ordinaria de funciones no continuas como función generalizada

5.4.1. Expresión de la segunda derivada ordinaria de la función heaviside como función generalizada

Proposición 4.4.1.1. Si $\mathcal{H}\left(\overline{x}\right)=\begin{cases}1 \ , \ si \ \overline{x}\geq 0\\ 0 \ , \ si \ \overline{x}<0\end{cases}$ para todo, $\overline{x}\in\left\langle-\infty,+\infty\right\rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_{\mathcal{H}},\xi\right\rangle=\left\langle -\delta'_{\mathcal{D}},\xi\right\rangle;\text{ para todo }\xi\in\mathcal{D}\left(\left\langle-\infty,+\infty\right\rangle\right)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.4.** Se tiene

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &=\left(\mathcal{D}^2\mathcal{U}_g\right)\left(\xi\right)\\
&=\left(-1\right)^2\left\langle \mathcal{U}_g,\xi''\right\rangle\\
&=\left\langle \mathcal{U}_g,\xi''\right\rangle\\
&=\int_{\left\langle-\infty,+\infty\right\rangle} g\left(\overline{x}\right)\xi''\left(\overline{x}\right)d\overline{x}\\
&=\int_{\left\langle-\infty,+\infty\right\rangle} \mathcal{H}\left(\overline{x}\right)\xi''\left(\overline{x}\right)d\overline{x}\\
&=\int_{\left\langle-\infty,0\right\rangle} \mathcal{H}\left(\overline{x}\right)\xi''\left(\overline{x}\right)d\overline{x}+\int_{\left\langle 0,+\infty\right\rangle} \mathcal{H}\left(\overline{x}\right)\xi''\left(\overline{x}\right)d\overline{x}\\
&=\int_{\left\langle-\infty,0\right\rangle} 0\,\xi''\left(\overline{x}\right)d\overline{x}+\int_{\left\langle 0,+\infty\right\rangle} 1\,\xi''\left(\overline{x}\right)d\overline{x}\\
&=\int_{\left\langle 0,+\infty\right\rangle} \xi''\left(\overline{x}\right)d\overline{x}\\
&=\int_{\left\langle 0,+\infty\right\rangle} d\,\xi'\left(\overline{x}\right)\\
&=\int_{\left\langle 0,+\infty\right\rangle} d\ \xi'\left(\overline{x}\right)\\
&=\left[\xi'\left(\overline{x}\right)\right]_0^{+\infty}\\
&=\xi'\left(+\infty\right)-\xi'\left(0\right)
\end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &=-\xi'\left(0\right)\\
&=-\delta'_{\mathcal{D}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_{\mathcal{H}},\xi \right\rangle = \left\langle -\delta'_{\mathcal{D}},\xi \right\rangle;\ \forall \xi \in \mathcal{D}\left(\left\langle -\infty,+\infty \right\rangle\right)$$

5.4.2. Expresión de la segunda derivada ordinaria de la función coseno como función generalizada

Proposición 4.4.2.1. Si $g(\bar{x}) = \begin{cases} cos(\bar{x}), & \bar{x} > 0 \\ 0 & , \bar{x} < 0 \end{cases}$, para todo, $\bar{x} \in \left\langle -\infty,+\infty \right\rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi \right\rangle = \left\langle -\delta'_{\mathcal{D}} - \mathcal{H}(\bar{x})cos(\bar{x}),\xi \right\rangle; \text{para todo } \xi \in \mathcal{D}\left(\left\langle -\infty,+\infty \right\rangle\right)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.4.** Se tiene

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi \right\rangle &= \left(\mathcal{D}^2\mathcal{U}_g\right)(\xi) \\
&= (-1)^2 \left\langle \mathcal{U}_g,\xi'' \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{U}_g,\xi'' \right\rangle \\
&= \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} g(\bar{x})\xi''(\bar{x})d\bar{x}
\end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi \right\rangle &= \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} g(\bar{x})\xi''(\bar{x})d\bar{x} \\
&= \int_{\langle -\infty,0 \rangle} g(\bar{x})\xi''(\bar{x})d\bar{x} + \int_{\langle 0,+\infty \rangle} g(\bar{x})\xi''(\bar{x})d\bar{x} \\
&= \int_{\langle -\infty,0 \rangle} 0\,\xi''(\bar{x})d\bar{x} + \int_{\langle 0,+\infty \rangle} cos(\bar{x})\xi''(\bar{x})d\bar{x} \\
&= \int_{\langle 0,+\infty \rangle} cos(\bar{x})\xi''(\bar{x})d\bar{x} \\
&= \left[cos(\bar{x})\xi'(\bar{x})\right]_0^{+\infty} + \int_{\langle 0,+\infty \rangle} sen(\bar{x})\xi'(\bar{x})d\bar{x} \\
&= cos(+\infty)\xi'(+\infty) - cos(0)\xi'(0) + \int_{\langle 0,+\infty \rangle} sen(\bar{x})\xi'(\bar{x})d\bar{x}
\end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi \right\rangle = -\delta'_{\mathcal{D}} + \int_{\langle 0,+\infty \rangle} sen(\bar{x})\xi'(\bar{x})d\bar{x}$$

Nuevamente por la **Proposición 2.3.3.1.** y **Definición 2.3.1.1.** Se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = -\delta'_{\mathcal{D}} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\bar{x})\xi'(\bar{x})d\bar{x}$$

$$= -\delta'_{\mathcal{D}} + \left[sen(\bar{x})\xi(\bar{x})\right]_0^{+\infty} - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\bar{x})\xi(\bar{x})d\bar{x}$$

$$= -\delta'_{\mathcal{D}} - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\bar{x})\xi(\bar{x})d\bar{x}$$

$$= -\delta'_{\mathcal{D}} - \mathcal{H}(\bar{x})cos(\bar{x})$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = \left\langle -\delta'_{\mathcal{D}} - \mathcal{H}(\bar{x})cos(\bar{x}),\xi\right\rangle;\ \forall\xi\in\mathcal{D}\left(\langle-\infty,+\infty\rangle\right)$$

5.4.3. Expresión de la segunda derivada ordinaria de la función seno como función generalizada

Proposición 4.4.3.1. Si $g(\bar{x}) = \begin{cases} sen(\bar{x}), & \bar{x}>0 \\ 0 & , \bar{x}<0 \end{cases}$, para todo, $\bar{x}\in\langle-\infty,+\infty\rangle$, entonces se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = \left\langle -\delta_{\mathcal{D}} - \mathcal{H}(\bar{x})sen(\bar{x}),\xi\right\rangle;\ \text{para todo } \xi\in\mathcal{D}\left(\langle-\infty,+\infty\rangle\right)$$

Prueba

Por la **Definición 2.3.2.4.** Se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = \left(\mathcal{D}^2\mathcal{U}_g\right)(\xi)$$

$$= (-1)^2\left\langle \mathcal{U}_g,\xi''\right\rangle$$

$$= \left\langle \mathcal{U}_g,\xi''\right\rangle$$

$$= \int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} g(\bar{x})\xi''(\bar{x})d\bar{x}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = \int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} g(\bar{x})\xi''(\bar{x})d\bar{x}$$

$$= \int_{\langle-\infty,0\rangle} g(\bar{x})\xi''(\bar{x})d\bar{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} g(\bar{x})\xi''(\bar{x})d\bar{x}$$

$$= \int_{\langle-\infty,0\rangle} 0\,\xi''(\bar{x})d\bar{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\bar{x})\xi''(\bar{x})d\bar{x}$$

$$= \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\bar{x})\xi''(\bar{x})d\bar{x}$$

$$=\left[sen\left(\overline{x}\right)\xi'\left(\overline{x}\right)\right]_{0}^{+\infty}-\int_{\langle 0,+\infty\rangle}cos\left(\overline{x}\right)\xi'\left(\overline{x}\right)d\overline{x}$$

$$=sen\left(+\infty\right)\xi'\left(+\infty\right)-sen\left(0\right)\xi'\left(0\right)-\int_{\langle 0,+\infty\rangle}cos\left(\overline{x}\right)\xi'\left(\overline{x}\right)d\overline{x}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\left\langle \mathcal{D}^{2}\mathcal{U}_{g},\xi\right\rangle=-\int_{\langle 0,+\infty\rangle}cos\left(\overline{x}\right)\xi'\left(\overline{x}\right)d\overline{x}$$

Nuevamente por la **Proposición 2.3.3.1.** y **Definición 2.3.1.1.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}^{2}\mathcal{U}_{g},\xi\right\rangle&=-\int_{\langle 0,+\infty\rangle}cos\left(\overline{x}\right)\xi'\left(\overline{x}\right)d\overline{x}\\&=-\left[cos\left(\overline{x}\right)\xi\left(\overline{x}\right)\right]_{0}^{+\infty}-\int_{\langle 0,+\infty\rangle}sen\left(\overline{x}\right)\xi\left(\overline{x}\right)d\overline{x}\\&=-\delta_{\mathcal{D}}-\int_{\langle 0,+\infty\rangle}sen\left(\overline{x}\right)\xi\left(\overline{x}\right)d\overline{x}\\&=-\delta_{\mathcal{D}}-\mathcal{H}\left(\overline{x}\right)sen\left(\overline{x}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}^{2}\mathcal{U}_{g},\xi\right\rangle=\left\langle -\delta_{\mathcal{D}}-\mathcal{H}\left(\overline{x}\right)sen\left(\overline{x}\right),\xi\right\rangle;\ \forall\xi\in\mathcal{D}\left(\left\langle -\infty,+\infty\right\rangle\right)$$

5.4.4. Expresión de la 4-esima derivada ordinaria de la función coseno como función generalizada

Proposición 4.4.4.1. Si $g\left(\overline{x}\right)=\left|cos\left(\overline{x}\right)\right|=\begin{cases}-cos\left(\overline{x}\right),\ si\ \ cos\left(\overline{x}\right)<0\\ cos\left(\overline{x}\right),\ si\ \ cos\left(\overline{x}\right)\geq 0\end{cases}$, entonces se cumple

$$\left\langle \mathcal{D}^{4}\mathcal{U}_{g},\xi\right\rangle=\left\langle -2\,\delta_{\mathcal{D}}'''+2\delta_{\mathcal{D}}'-\mathcal{H}\left(-\overline{x}\right)cos\left(\overline{x}\right)+\mathcal{H}\left(\overline{x}\right)cos\left(\overline{x}\right),\xi\right\rangle;\text{ para todo }\xi\in\mathcal{D}\left(\left\langle -\infty,+\infty\right\rangle\right)$$

Prueba

Expresión de la 1^{ra} **derivada de una distribución real**

Por la **Definición 2.3.2.3.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_{g},\xi\right\rangle&=\left(\mathcal{D}\mathcal{U}_{g}\right)\left(\xi\right)\\&=\left(-1\right)^{1}\left\langle \mathcal{U}_{g},\xi\right\rangle\\&=-\left\langle \mathcal{U}_{g},\xi'\right\rangle\\&=-\int_{\langle -\infty,+\infty\rangle}g\left(\overline{x}\right)\xi'\left(\overline{x}\right)d\overline{x}\end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi \right\rangle = -\int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} \left|cos\left(\bar{x}\right)\right|\xi'\left(\bar{x}\right)d\bar{x}$$

$$= \int_{\langle -\infty,0\rangle} cos\left(\bar{x}\right)\xi'\left(\bar{x}\right)d\bar{x} - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos\left(\bar{x}\right)\xi'\left(\bar{x}\right)d\bar{x}$$

$$= \left[cos\left(\bar{x}\right)\xi\left(\bar{x}\right)\right]_{-\infty}^{0} + \int_{\langle -\infty,0\rangle} sen\left(\bar{x}\right)\xi\left(\bar{x}\right)d\bar{x} - \left[cos\left(\bar{x}\right)\xi\left(\bar{x}\right)\right]_{0}^{+\infty} - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen\left(\bar{x}\right)\xi\left(\bar{x}\right)d\bar{x}$$

$$= cos\left(0\right)\xi\left(0\right) - cos\left(-\infty\right)\xi\left(-\infty\right) + \int_{\langle -\infty,0\rangle} sen\left(\bar{x}\right)\xi\left(\bar{x}\right)d\bar{x} - cos\left(+\infty\right)\xi\left(+\infty\right)$$

$$+ cos\left(0\right)\xi\left(0\right) - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen\left(\bar{x}\right)\xi\left(\bar{x}\right)d\bar{x}$$

$$= 2\xi\left(0\right) - cos\left(-\infty\right)\xi\left(-\infty\right) + \int_{\langle -\infty,0\rangle} sen\left(\bar{x}\right)\xi\left(\bar{x}\right)d\bar{x} - cos\left(+\infty\right)\xi\left(+\infty\right) - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen\left(\bar{x}\right)\xi\left(\bar{x}\right)d\bar{x}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi \right\rangle = 2\xi\left(0\right) + \int_{\langle -\infty,0\rangle} sen\left(\bar{x}\right)\xi\left(\bar{x}\right)d\bar{x} - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen\left(\bar{x}\right)\xi\left(\bar{x}\right)d\bar{x}$$

$$= 2\xi\left(0\right) + \int_{\langle -\infty,0\rangle} sen\left(\bar{x}\right)\xi\left(\bar{x}\right)d\bar{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} 0\, sen\left(\bar{x}\right)\xi\left(\bar{x}\right)d\bar{x} + \int_{\langle -\infty,0\rangle} 0\, sen\left(\bar{x}\right)\xi\left(\bar{x}\right)d\bar{x}$$

$$- \int_{\langle 0,+\infty\rangle} 1\, sen\left(\bar{x}\right)\xi\left(\bar{x}\right)d\bar{x}$$

$$= 2\xi\left(0\right) + \mathcal{H}\left(-\bar{x}\right)sen\left(\bar{x}\right) - \mathcal{H}\left(\bar{x}\right)sen\left(\bar{x}\right)$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}\mathcal{U}_g,\xi \right\rangle = \left\langle 2\delta_{\mathcal{D}} + \mathcal{H}\left(-\bar{x}\right)sen\left(\bar{x}\right) - \mathcal{H}\left(\bar{x}\right)sen\left(\bar{x}\right),\xi \right\rangle;\ \forall\,\xi \in \mathcal{D}\left(\langle -\infty,+\infty\rangle\right)$$

Expresión de la 2^{ra} **derivada de una distribución real**

Por la **Definición 2.3.2.4.** Se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi \right\rangle = \left(\mathcal{D}^2\mathcal{U}_g\right)\left(\xi\right)$$

$$= \left(-1\right)^2 \left\langle \mathcal{U}_g,\xi'' \right\rangle$$

$$= \left\langle \mathcal{U}_g,\xi'' \right\rangle$$

$$= \int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} g\left(\bar{x}\right)\xi''\left(\bar{x}\right)d\bar{x}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = \int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} \left|\cos(\overline{x})\right| \xi''(\overline{x})\, d\overline{x}$$

$$= -\int_{\langle -\infty,0\rangle} \cos(\overline{x})\xi''(\overline{x})d\overline{x} + \int_{\langle 0,\infty\rangle} \cos(\overline{x})\xi''(\overline{x})d\overline{x}$$

$$= -\left[\cos(\overline{x})\xi'(\overline{x})\right]_{-\infty}^{0} - \int_{\langle -\infty,0\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x} + \left[\cos(\overline{x})\xi'(\overline{x})\right]_{0}^{+\infty} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}$$

$$= -\cos(0)\xi'(0) + \cos(-\infty)\xi'(-\infty) - \int_{\langle -\infty,0\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x} + \cos(+\infty)\xi'(+\infty) - \cos(0)\xi'(0) +$$

$$+ \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}$$

$$= -2\xi'(0) + \cos(-\infty)\xi'(-\infty) - \int_{\langle -\infty,0\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x} + \cos(+\infty)\xi'(+\infty) + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = -2\xi'(0) - \int_{\langle -\infty,0\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}$$

Nuevamente por la **Proposición 2.3.3.1.** y **Definición 2.3.1.1.** Se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = -2\xi'(0) - \int_{\langle -\infty,0\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}$$

$$= -2\xi'(0) - \left[sen(\overline{x})\xi(\overline{x})\right]_{-\infty}^{0} + \int_{\langle -\infty,0\rangle} \cos(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x} + \left[sen(\overline{x})\xi(\overline{x})\right]_{0}^{+\infty} -$$

$$- \int_{\langle 0,+\infty\rangle} \cos(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}$$

$$= -2\xi'(0) - sen(0)\xi(0) - sen(-\infty)\xi(-\infty) + \int_{\langle -\infty,0\rangle} \cos(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x} + sen(+\infty)\xi(+\infty) -$$

$$- sen(0)\xi(0) - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} \cos(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}$$

$$= -2\xi'(0) + \int_{\langle -\infty,0\rangle} \cos(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x} - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} \cos(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}$$

$$= -2\delta_D' + \mathcal{H}(-\overline{x})\cos(\overline{x}) - \mathcal{H}(\overline{x})\cos(\overline{x})$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}^2\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = -\left\langle 2\delta_D' + \mathcal{H}(-\overline{x})\cos(\overline{x}) - \mathcal{H}(\overline{x})\cos(\overline{x}),\xi\right\rangle;\ \forall\xi\in\mathcal{D}(\langle -\infty,+\infty\rangle)$$

Expresión de la 3ra **derivada de una distribución real**

Por la **Definición 2.3.2.4.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}^3\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &= \left(\mathcal{D}^3\mathcal{U}_g\right)(\xi)\\ &= (-1)^3\left\langle \mathcal{U}_g,\xi'''\right\rangle\\ &= -\left\langle \mathcal{U}_g,\xi'''\right\rangle\\ &= -\int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} g(\bar{x})\,\xi'''(\bar{x})\,d\bar{x}\end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}^3\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &= -\int_{\langle-\infty,+\infty\rangle} \left|cos(\bar{x})\right|\xi'''(\bar{x})\,d\bar{x}\\ &= \int_{\langle-\infty,0\rangle} cos(\bar{x})\,\xi'''(\bar{x})\,d\bar{x} - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\bar{x})\,\xi'''(\bar{x})\,d\bar{x}\\ &= \left[cos(\bar{x})\,\xi''(\bar{x})\right]_{-\infty}^{0} + \int_{\langle-\infty,0\rangle} sen(\bar{x})\,\xi''(\bar{x})\,d\bar{x} - \left[cos(\bar{x})\,\xi''(\bar{x})\right]_{0}^{+\infty} - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\bar{x})\,\xi''(\bar{x})\,d\bar{x}\\ &= cos(0)\,\xi''(0) - cos(-\infty)\,\xi''(-\infty) + \int_{\langle-\infty,0\rangle} sen(\bar{x})\,\xi''(\bar{x})\,d\bar{x} - cos(+\infty)\,\xi''(+\infty) +\\ &\quad + cos(0)\,\xi''(0) - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\bar{x})\,\xi''(\bar{x})\,d\bar{x}\\ &= 2\,\xi''(0) - cos(-\infty)\,\xi''(-\infty) + \int_{\langle-\infty,0\rangle} sen(\bar{x})\,\xi''(\bar{x})\,d\bar{x} - cos(+\infty)\,\xi''(+\infty) -\\ &\quad - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\bar{x})\,\xi''(\bar{x})\,d\bar{x}\end{aligned}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\left\langle \mathcal{D}^3\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = 2\,\xi''(0) + \int_{\langle-\infty,0\rangle} sen(\bar{x})\,\xi''(\bar{x})\,d\bar{x} - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\bar{x})\,\xi''(\bar{x})\,d\bar{x}$$

Nuevamente por la **Proposición 2.3.3.1.** y **Definición 2.3.1.1.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{D}^3\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle &= 2\,\xi''(0) + \int_{\langle-\infty,0\rangle} sen(\bar{x})\,\xi''(\bar{x})\,d\bar{x} - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\bar{x})\,\xi''(\bar{x})\,d\bar{x}\\ &= 2\,\xi''(0) + \left[sen(\bar{x})\,\xi'(\bar{x})\right]_{-\infty}^{0} - \int_{\langle-\infty,0\rangle} cos(\bar{x})\,\xi'(\bar{x})\,d\bar{x} - \left[sen(\bar{x})\,\xi'(\bar{x})\right]_{0}^{+\infty} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\bar{x})\,\xi'(\bar{x})\,d\bar{x}\\ &= 2\,\xi''(0) + sen(0)\,\xi'(0) - sen(-\infty)\,\xi'(-\infty) - \int_{\langle-\infty,0\rangle} cos(\bar{x})\,\xi'(\bar{x})\,d\bar{x} -\\ &\quad - sen(+\infty)\,\xi'(+\infty) + sen(0)\,\xi'(0) + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\bar{x})\,\xi'(\bar{x})\,d\bar{x}\\ &= 2\,\xi''(0) - \int_{\langle-\infty,0\rangle} cos(\bar{x})\,\xi'(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\bar{x})\,\xi'(\bar{x})\,d\bar{x}\end{aligned}$$

$$=2\xi''(0)-\left[\cos(\overline{x})\xi(\overline{x})\right]_{-\infty}^{0}-\int_{\langle-\infty,0\rangle}\operatorname{sen}(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}+\left[\cos(\overline{x})\xi(\overline{x})\right]_{0}^{+\infty}+\int_{\langle 0,+\infty\rangle}\operatorname{sen}(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=2\xi''(0)-\cos(0)\xi(0)+\cos(-\infty)\xi(-\infty)-\int_{\langle-\infty,0\rangle}\operatorname{sen}(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}+\cos(+\infty)\xi(+\infty)-$$

$$-\cos(0)\xi(0)+\int_{\langle 0,+\infty\rangle}\operatorname{sen}(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=2\xi''(0)-2\xi(0)-\int_{\langle-\infty,0\rangle}\operatorname{sen}(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}+\int_{\langle 0,+\infty\rangle}\operatorname{sen}(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=2\xi''(0)-2\xi(0)-\mathcal{H}(-\overline{x})\operatorname{sen}(\overline{x})+\mathcal{H}(\overline{x})\operatorname{sen}(\overline{x})$$

Por lo tanto

$\left\langle\mathcal{D}^{3}\mathcal{U}_{g},\xi\right\rangle=\left\langle 2\xi''(0)-2\xi(0)-\mathcal{H}(-\overline{x})\operatorname{sen}(\overline{x})+\mathcal{H}(\overline{x})\operatorname{sen}(\overline{x}),\xi\right\rangle$; para todo $\xi\in\mathcal{D}(\langle-\infty,+\infty\rangle)$

Expresión de la 4^{ra} **derivada de una distribución real**

Por la **Definición 2.3.2.4.** Se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle\mathcal{D}^{4}\mathcal{U}_{g},\xi\right\rangle&=\left(\mathcal{D}^{4}\mathcal{U}_{g}\right)(\xi)\\&=(-1)^{4}\left\langle\mathcal{U}_{g},\xi''''\right\rangle\\&=\left\langle\mathcal{U}_{g},\xi''''\right\rangle\\&=\int_{\langle-\infty,+\infty\rangle}g(\overline{x})\xi''''(\overline{x})d\overline{x}\end{aligned}$$

Asimismo, por la **Proposición 2.3.3.1.** Se tiene

$$\left\langle\mathcal{D}^{4}\mathcal{U}_{g},\xi\right\rangle=\int_{\langle-\infty,+\infty\rangle}\left|\cos(\overline{x})\right|\xi''''(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=-\int_{\langle-\infty,0\rangle}\cos(\overline{x})\xi''''(\overline{x})d\overline{x}+\int_{\langle 0,\infty\rangle}\cos(\overline{x})\xi''''(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=-\left[\cos(\overline{x})\xi'''(\overline{x})\right]_{-\infty}^{0}-\int_{\langle-\infty,0\rangle}\operatorname{sen}(\overline{x})\xi'''(\overline{x})d\overline{x}+\left[\cos(\overline{x})\xi'''(\overline{x})\right]_{0}^{+\infty}+\int_{\langle 0,+\infty\rangle}\operatorname{sen}(\overline{x})\xi'''(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=-\cos(0)\xi'''(0)+\cos(-\infty)\xi'''(-\infty)-\int_{\langle-\infty,0\rangle}\operatorname{sen}(\overline{x})\xi'''(\overline{x})d\overline{x}+\cos(+\infty)\xi'''(+\infty)-$$

$$-\cos(0)\xi'''(0)+\int_{\langle 0,+\infty\rangle}\operatorname{sen}(\overline{x})\xi'''(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=-2\xi'''(0)+\cos(-\infty)\xi'''(-\infty)-\int_{\langle-\infty,0\rangle}\operatorname{sen}(\overline{x})\xi'''(\overline{x})d\overline{x}+\cos(+\infty)\xi'''(+\infty)+$$

$$+\int_{\langle 0,+\infty\rangle}\operatorname{sen}(\overline{x})\xi'''(\overline{x})d\overline{x}$$

Luego por la **Definición 2.3.1.1.** Tenemos

$$\left\langle\mathcal{D}^{4}\mathcal{U}_{g},\xi\right\rangle=-2\xi'''(0)-\int_{\langle-\infty,0\rangle}\operatorname{sen}(\overline{x})\xi'''(\overline{x})d\overline{x}+\int_{\langle 0,+\infty\rangle}\operatorname{sen}(\overline{x})\xi'''(\overline{x})d\overline{x}$$

Nuevamente por la **Proposición 2.3.3.1.** y **Definición 2.3.1.1.** Se tiene

$$\left\langle \mathcal{D}^4\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = -2\xi'''(0) - \int_{\langle-\infty,0\rangle} sen(\overline{x})\xi'''(\overline{x})d\overline{x} + \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\overline{x})\xi'''(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=-2\xi'''(0)-\left[sen(\overline{x})\xi''(\overline{x})\right]_{-\infty}^{0} + \int_{\langle-\infty,0\rangle} cos(\overline{x})\xi''(\overline{x})d\overline{x} + \left[sen(\overline{x})\xi''(\overline{x})\right]_{0}^{+\infty} -$$

$$-\int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\overline{x})\xi''(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=-2\xi'''(0)-sen(0)\xi''(0)-sen(-\infty)\xi''(-\infty)+\int_{\langle-\infty,0\rangle} cos(\overline{x})\xi''(\overline{x})d\overline{x} +$$

$$+sen(+\infty)\xi''(+\infty)-sen(0)\xi''(0)-\int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\overline{x})\xi''(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=-2\xi'''(0)+\int_{\langle-\infty,0\rangle} cos(\overline{x})\xi''(\overline{x})d\overline{x} - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\overline{x})\xi''(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=-2\xi'''(0)+\left[cos(\overline{x})\xi'(\overline{x})\right]_{-\infty}^{0} + \int_{\langle-\infty,0\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x} - \left[cos(\overline{x})\xi'(\overline{x})\right]_{0}^{+\infty} -$$

$$-\int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=-2\xi'''(0)+cos(0)\xi'(0)-cos(-\infty)\xi'(-\infty)+\int_{\langle-\infty,0\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}$$

$$-cos(+\infty)\xi'(+\infty)+cos(0)\xi'(0)-\int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=-2\xi'''(0)+2\xi'(0)+\int_{\langle-\infty,0\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x} - \int_{\langle 0,+\infty\rangle} sen(\overline{x})\xi'(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=-2\xi'''(0)+2\xi'(0)+\left[sen(\overline{x})\xi(\overline{x})\right]_{-\infty}^{0} - \int_{\langle-\infty,0\rangle} cos(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x} - \left[sen(\overline{x})\xi(\overline{x})\right]_{0}^{+\infty} +$$

$$+\int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=-2\xi'''(0)+2\xi'(0)+sen(0)\xi(0)-sen(+\infty)\xi(+\infty)-\int_{\langle-\infty,0\rangle} cos(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}$$

$$-sen(+\infty)\xi(+\infty)+sen(0)\xi(0)+\int_{\langle 0,+\infty\rangle} cos(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=-2\xi'''(0)+2\xi'(0)-\int_{\langle-\infty,0\rangle} cos(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x} + \int_{\langle 0,\infty\rangle} cos(\overline{x})\xi(\overline{x})d\overline{x}$$

$$=-2\xi'''(0)+2\xi'(0)-\mathcal{H}(-\overline{x})cos(\overline{x})+\mathcal{H}(\overline{x})cos(\overline{x})$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}^4\mathcal{U}_g,\xi\right\rangle = \left\langle -2\delta_{\mathcal{D}}''' + 2\delta_{\mathcal{D}}' - \mathcal{H}(-\overline{x})cos(\overline{x}) + \mathcal{H}(\overline{x})cos(\overline{x}),\xi\right\rangle;\ \forall\xi\in\mathcal{D}\left(\left\langle -\infty,+\infty\right\rangle\right)$$

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

6.1. Toda función real de variable real continua y no continua es una función generalizada.

6.2. Toda función generalizada debe poseer derivadas, que han de ser funciones generalizadas. Para funciones diferenciables en sentido ordinario, la nueva derivada debe coincidir con la derivada ordinaria. Por consiguiente, toda función generalizada debe ser infinitamente diferenciable.

6.3. Las proposiciones del cálculo diferencial ordinario deben seguir en la actualidad.

CAPÍTULO VII

RECOMENDACIONES

7.1. Resultaría de gran interés aplicar la teoría de funciones generalizadas al estudio de la topología en el espacio de funciones generalizadas.

7.2. Resultaría de gran interés aplicar la teoría de funciones generalizadas al estudio de la convergencia de función generalizada y series de función generalizada.

7.3. Resultaría de gran interés aplicar la teoría de funciones generalizadas al estudio de la función generalizada de soporte compacto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apóstol, M. (2006). *Análisis matemático.* (2da ed.). Instituto de Tecnología de California: editorial Reverté S.A.

Brinton, G. (2005). *Cálculo en varias variables.* (11va ed.). México, Instituto de Tecnología de Massachusetts: editorial Pearson Educación S.A.

Cornejo, M. & Villalobos, E. & Quintanilla, A. (2008). *Métodos de solución de ecuaciones diferenciales y aplicaciones.* (1ra ed.). México, Instituto Tecnológico de Celaya: editorial Reverté S.A.

García, R. (2005). *Mecánica clásica.* (1ra ed.). México, Universidad Autónoma del Estado México.

Gouyon, R. (1972). *Integración y distribuciones.* (1ra ed.). Francia, Universidad de Toulouse: editorial Reverté S.A.

James, G. (2002). *Matemáticas avanzadas para ingeniería.* (2da ed.). México, editorial Pearson Educación S.A.

Jaruata, E. (2000). *Análisis matemático de una variable fundamentos y aplicaciones.* (1ra ed.). España, Universidad Politécnica de Cataluña: editorial UPC.

Lelong, J. & Arnaudies, J. (2019). *Ecuaciones diferenciales. funciones holomorfas. integrales múltiples.* (2da ed., Tomo IV). Francia, editorial Reverté S.A.

Mejía, F. & Álvarez, R. & Fernández, H. (2005). *Matemáticas previas al cálculo.* (1ra ed.). Colombia, Universidad de Medellín: editorial Universidad de Medellín.

Nagle, R. (2005). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* (4ta ed.). México, editorial Pearson Educación S.A.

ANEXOS

Anexo 1: Matriz de Consistencia

Derivada clásica de funciones reales a derivada en el sentido de las distribuciones

PROBLEMA	OBJETIVO	HIPÓTESIS	VARIABLES	INDICADORES	MUESTRAS	DISEÑO	INSTRUMENTOS
Problema general: ¿En qué condiciones es posible establecer una expresión generalizada de la derivada ordinaria de funciones reales a derivada como función generalizada? **Problemas específicos:** a) ¿En qué condiciones es posible establecer una expresión generalizada de la primera derivada ordinaria como función generalizada de funciones continuas y singulares? b) ¿En qué condiciones es posible establecer una expresión generalizada de la segunda derivada ordinaria como función generalizada de funciones continuas y singulares?	**Objetivo general:** Establecer una expresión generalizada de la derivada ordinaria de funciones reales a derivada como función generalizada. **Objetivos específicos:** a) Establecer una expresión generalizada de la primera derivada ordinaria como función generalizada de funciones continuas y singulares. b) Establecer una expresión generalizada de la segunda derivada ordinaria como función generalizada de funciones continuas y singulares.	**Hipótesis general:** Si es posible establecer una expresión generalizada de la derivada clásica de funciones reales a derivada como función generalizada. **Hipótesis específicas:** a) Sí es posible establecer una expresión generalizada de la primera derivada como función generalizada de funciones continuas y singulares asociando la primera derivada a toda función localmente integrable. b) Si es posible establecer una expresión generalizada de la segunda derivada como función generalizada de funciones continuas y singulares asociando la segunda derivada a toda función localmente integrable.	**Variable independiente:** a) Función diferenciable con continuidad. **Variable dependiente:** a) Asocia una derivada a toda función localmente integrable.	**Variable independiente:** a) Funciones infinitamente diferenciable que tienen soporte compacto y funciones localmente integrable **Variable dependiente:** a) Existencia de la integral	La población de estudio es igual a muestra. El informe de tesis corresponde a las ciencias formales y considera como material las funciones generalizadas.	El diseño del informe de tesis es explicativo porque trata de relacionar la derivada y las funciones localmente integrables.	Generalización Analogía Inducción Experimentación Observación Teorema Lema Axioma Definición Corolario

Anexo 2: Integral indefinida de una distribución real

La integral indefinida de una distribución real consiste en que dada una distribución real $\mathcal{U}_1$, se trata de encontrar una distribución $\mathcal{U}$ tal que $\frac{d\mathcal{U}}{d\bar{x}}=\mathcal{U}_1$.

En forma implícita se tiene

$$\langle \mathcal{U},\xi' \rangle = -\left\langle \frac{d\mathcal{U}}{d\bar{x}},\xi \right\rangle = -\langle \mathcal{U}_1,\xi \rangle$$

Sea $\xi \in \mathcal{D}(\langle -\infty,+\infty \rangle)$, entonces se define

$$\xi_1 = \xi - \xi_0 \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} \xi(\bar{x})\, d\bar{x}$$

donde $\xi_0 \in \mathcal{D}(\langle -\infty,+\infty \rangle)$ y $\int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} \xi_0(t)\,dt = 1$, entonces

$$\int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} \xi_1(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} \xi(\bar{x})\,d\bar{x} - \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} \xi_0(\bar{x})\,d\bar{x} \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} \xi(t)\,dt\,d\bar{x} = 0$$

es decir

$$\xi(\bar{x}) = \int_{\langle -\infty,\bar{x} \rangle} \xi_1(\bar{x})\,d\bar{x} \text{ esta en } \mathcal{D}(\langle -\infty,+\infty \rangle)$$

y se tiene que

$$\xi'(\bar{x}) = \xi_1(\bar{x})$$

Además

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{U},\xi \rangle &= \langle \mathcal{U},\xi_1 \rangle + \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} \xi(\bar{x})\,d\bar{x} \langle \mathcal{U},\xi_0 \rangle \\ &= \langle \mathcal{U},\xi' \rangle + \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} \xi(\bar{x})\,d\bar{x} \langle \mathcal{U},\xi_0 \rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle \mathcal{U},\xi \rangle = -\langle \mathcal{U}',\xi \rangle + \int_{\langle -\infty,+\infty \rangle} \xi(\bar{x})\,d\bar{x} \langle \mathcal{U},\xi_0 \rangle \qquad (1)$$

Luego, dado un $\mathcal{U}_1$, la distribución real de $\mathcal{U}$ se define como aquella distribución que cumple (1).

Ejemplo. Encontrar $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U}' = \delta$

Solución

Aplicando la ecuación (1):

$$\langle \mathcal{U},\xi\rangle = -\langle \delta,\xi\rangle + \int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} \xi(\bar{x})\,d\bar{x}\,\langle \mathcal{U},\xi_0\rangle$$

$$= -\xi(0) + \int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} \xi(\bar{x})\,d\bar{x}\,\langle \mathcal{U},\xi_0\rangle$$

$$= -\int_{\langle -\infty,0\rangle} \xi_1(t)\,dt + \int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} \xi(\bar{x})\,d\bar{x}\,\langle \mathcal{U},\varphi_0\rangle$$

$$= -\int_{\langle -\infty,0\rangle} \xi(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_{\langle -\infty,0\rangle} \xi_0(\bar{x})\,d\bar{x} \times \int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} \xi(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} \xi(\bar{x})\,d\bar{x}\,\langle \mathcal{U},\varphi_0\rangle$$

En particular para ξ_0 se tiene que $\int_{\langle -\infty,0\rangle} \xi_0(\bar{x})\,d\bar{x} = 1$ y $\langle \mathcal{U},\xi_0\rangle = 0$.

Entonces tenemos

$$\langle \mathcal{U},\xi\rangle = -\int_{\langle -\infty,0\rangle} \xi(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} \xi(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_{\langle 0,+\infty\rangle} \xi(\bar{x})\,d\bar{x}$$

$$= \begin{cases} \langle 1,\xi\rangle & si \;\; \bar{x} > 0 \\ \langle 0,\xi\rangle & si \;\; \bar{x} \le 0 \end{cases}$$

Es decir

$$\mathcal{U}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 \; si \; \bar{x} > 0 \\ 0 \; si \; \bar{x} \le 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación $\mathcal{U}' = \delta$ es la distribución real de Heaviside.

Anexo 3: Circunvoluciones de funciones

Definición. Sean f y g dos funciones medibles; su convolución $f*g$ es definida

$$(f*g)(\overline{x}) = \int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} f(\overline{x}-\overline{y})g(\overline{y})d\overline{y} = \int_{\langle -\infty,+\infty\rangle} f(\overline{y})g(\overline{x}-\overline{y})d\overline{y}$$

Siempre que exista la integral

Observación

1. El operador $*$ se conoce como el operador de convolución.
2. La convolución de dos funciones f y g representa en algún sentido la magnitud en la que se superpone g y una versión trasladada de f.
3. El intervalo de integración dependerá del dominio sobre el cual estén definidas las funciones.

Proposición. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ entonces $f*g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y

$$\|f*g\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} \le \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}$$

En efecto:

$$\|f*g\| = \int_{\mathbb{R}} |(f*g)(\overline{x})| d\overline{x} \le \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} |f(\overline{y})||g(\overline{x}-\overline{y})| d\overline{y}\right] d\overline{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(\overline{y})| d\overline{y} \int_{\mathbb{R}} |g(\overline{x}-\overline{y})| d\overline{x} = \|f\|_{\mathcal{L}^1}\|g\|_{\mathcal{L}^1}$$

Es decir $\|f*g\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} \le \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}$

Propiedades:

$f*g = g*f$

$f*(g*h) = (f*g)*h$

$f*(g+h) = f*g + f*h$

$\alpha(f*g) = (\alpha f)*g = f*(\alpha g)$

$\mathcal{D}(f*g) = \mathcal{D}f*g = f*\mathcal{D}g$

$f(\overline{x})*\delta(\overline{x}) = f(\overline{x})$

$f(\overline{x})*\delta(\overline{x}-\overline{x}_0) = f(\overline{x}-\overline{x}_0)$

$f(\overline{x}-\overline{x}_1)*\delta(\overline{x}-\overline{x}_0) = f(\overline{x}-\overline{x}_0-\overline{x}_1)$

Anexo 4: Múltiples índices

Un múltiple índice β es una n-upla ordenada $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ con cada múltiple índice relacionada con el operador diferencial

$\mathcal{D}^{\beta} g = \dfrac{\partial^{|\beta|} g}{\partial \overline{x}_1^{\beta_1} \partial \overline{x}_2^{\beta_2} \ldots \partial \overline{x}_n^{\beta_n}}$, $g : \omega \subset \mathbb{R}^n \to \langle -\infty, +\infty \rangle$ donde $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$ es el orden del operador

Ejemplo 1. Calcular $\mathcal{D}^{\beta} g, \beta = (2,1)$

Solución

$$\beta = (2,1)$$
$$|\beta| = 2+1 = 3$$
$$\Rightarrow \mathcal{D}^{(2,1)} g = \frac{\partial^3 g}{\partial^2 \overline{x}_1 \partial \overline{x}_2}$$

Ejemplo 2. Calcular $\mathcal{D}^{\beta} g, \beta = (1,1,2)$

Solución

$$\beta = (1,1,2)$$
$$|\beta| = 1+1+2 = 4$$
$$\Rightarrow \mathcal{D}^{(1,1,2)} g = \frac{\partial^4 g}{\partial^1 \overline{x}_1 \partial^1 \overline{x}_2 \partial^2 \overline{x}_3}$$

Ejemplo 3. Calcular $\sum\limits_{|\beta|=2} \mathcal{D}^{\beta} g, g : \omega \subset \mathbb{R}^3 \to \langle -\infty, +\infty \rangle$

Solución

$$|\beta| = 2$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 2$$
$$\beta = (2,0,0) \Rightarrow \mathcal{D}^{(2,0,0)} g = \frac{\partial^2 g}{\partial^2 \overline{x}}$$
$$\beta = (0,2,0) \Rightarrow \mathcal{D}^{(0,2,0)} g = \frac{\partial^2 g}{\partial^2 \overline{y}}$$
$$\beta = (0,0,2) \Rightarrow \mathcal{D}^{(0,0,2)} g = \frac{\partial^2 g}{\partial^2 \overline{z}}$$
$$\beta = (1,1,0) \Rightarrow \mathcal{D}^{(1,1,0)} g = \frac{\partial^2 g}{\partial \overline{x} \partial \overline{y}}$$
$$\beta = (1,0,1) \Rightarrow \mathcal{D}^{(1,0,1)} g = \frac{\partial^2 g}{\partial \overline{x} \partial \overline{z}}$$
$$\beta = (0,1,1) \Rightarrow \mathcal{D}^{(0,1,1)} g = \frac{\partial^2 g}{\partial \overline{y} \partial \overline{z}}$$

$$\sum = \frac{\partial^2 g}{\partial^2 \overline{x}} + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 \overline{y}} + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 \overline{z}} + \frac{\partial^2 g}{\partial \overline{x} \partial \overline{y}} + \frac{\partial^2 g}{\partial \overline{x} \partial \overline{z}} + \frac{\partial^2 g}{\partial \overline{y} \partial \overline{z}}$$

En particular $i \neq 1$ $\sum = \dfrac{\partial^2 g}{\partial^2 \overline{x}} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial^2 \overline{y}} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial^2 \overline{z}}$, donde $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial^2 \overline{x}} + \dfrac{\partial^2}{\partial^2 \overline{y}} + \dfrac{\partial^2}{\partial^2 \overline{z}}$

Anexo 5: Gráfica de Funciones

$$g(\bar{x}) = sen(\bar{x})$$

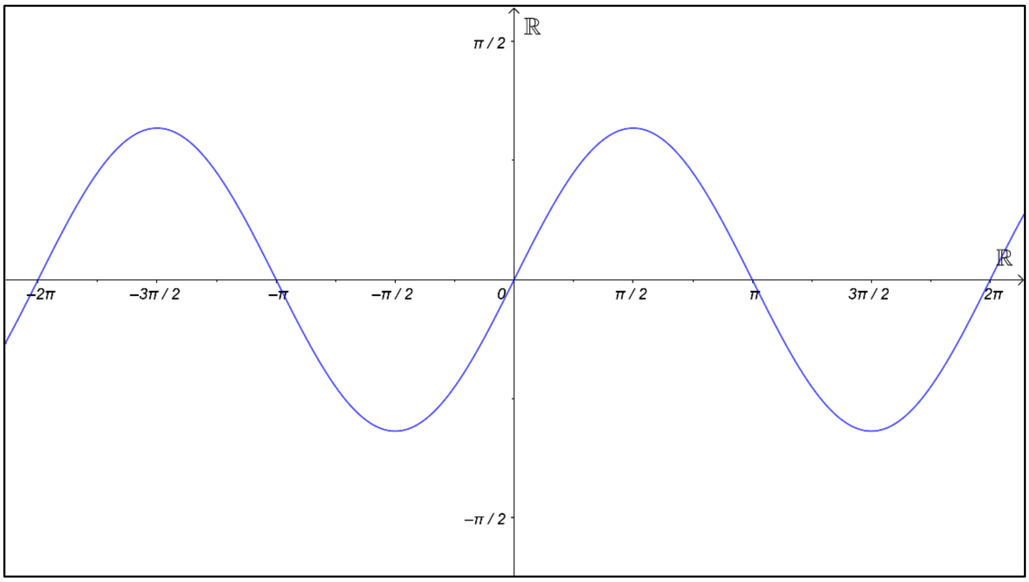

Figura 1: Función Seno
Fuente: Elaboración propia

$$g(\bar{x}) = cos(\bar{x})$$

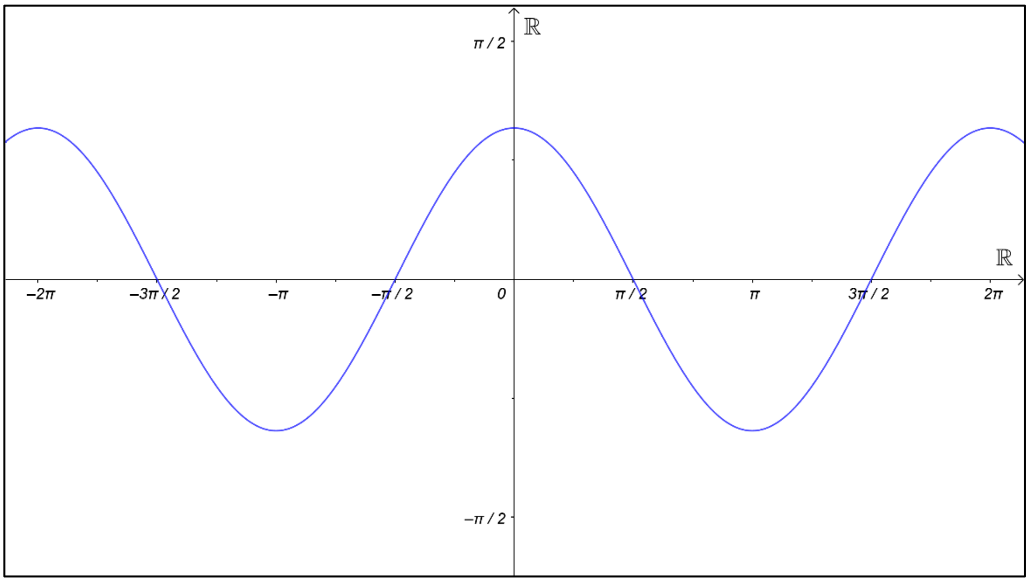

Figura 2: Función Coseno
Fuente: Elaboración propia

$$g(\bar{x}) = \bar{x}^n,\ n=3$$

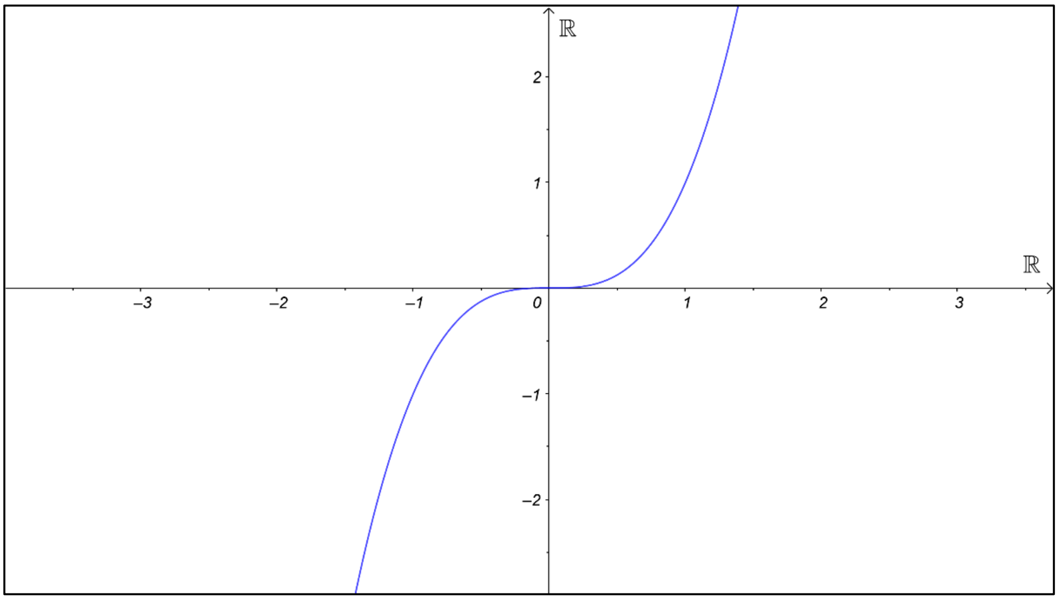

Figura 3: Función Potencia
Fuente: Elaboración propia

$$g(\bar{x}) = ln(\bar{x})$$

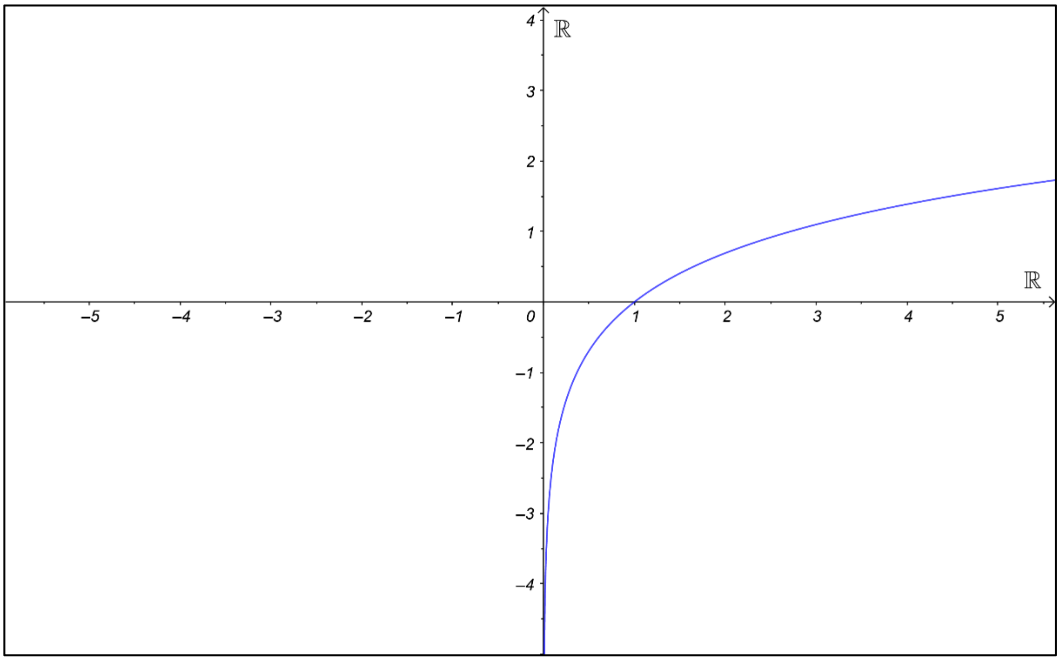

Figura 4: Función Logaritmo natural
Fuente: Elaboración propia

$$g(\bar{x}) = e^{\bar{x}}$$

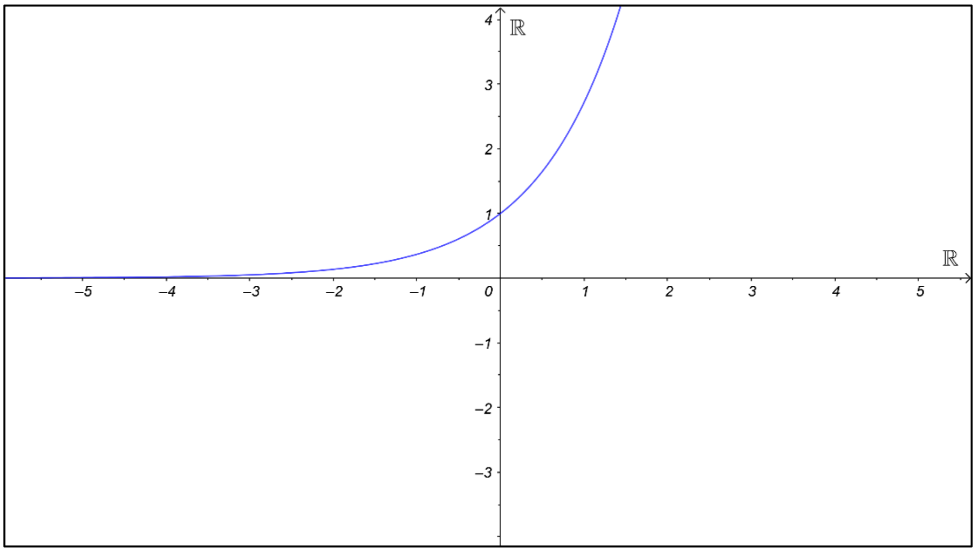

Figura 5: Función Exponencial
Fuente: Elaboración propia

$$g(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & , \bar{x} < 1 \\ sen(\bar{x}) & , \bar{x} > 1 \end{cases}$$

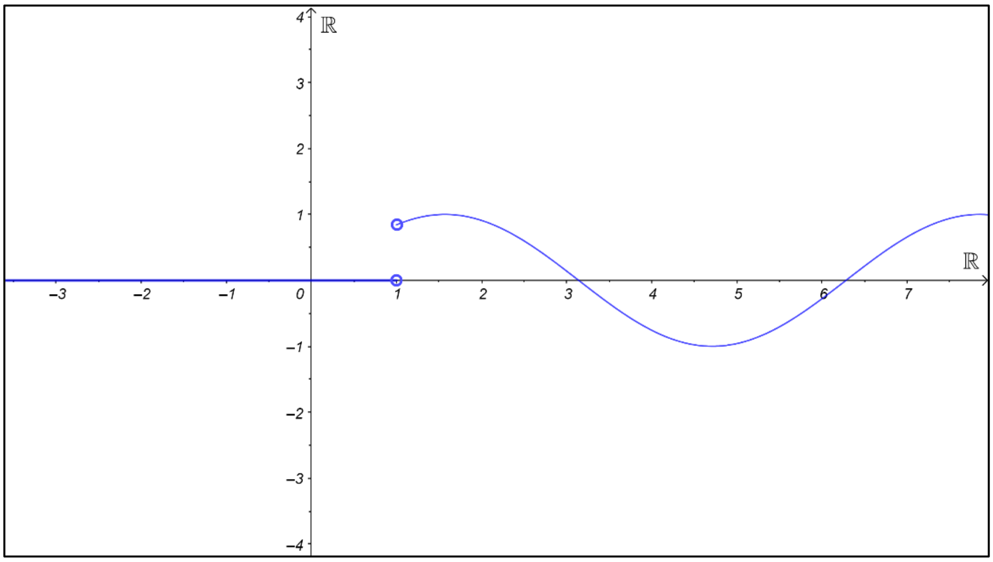

Figura 6: Función definida por partes 1
Fuente: Elaboración propia

$$g(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & , \bar{x} < 0 \\ cos(\bar{x}), & \bar{x} > 0 \end{cases}$$

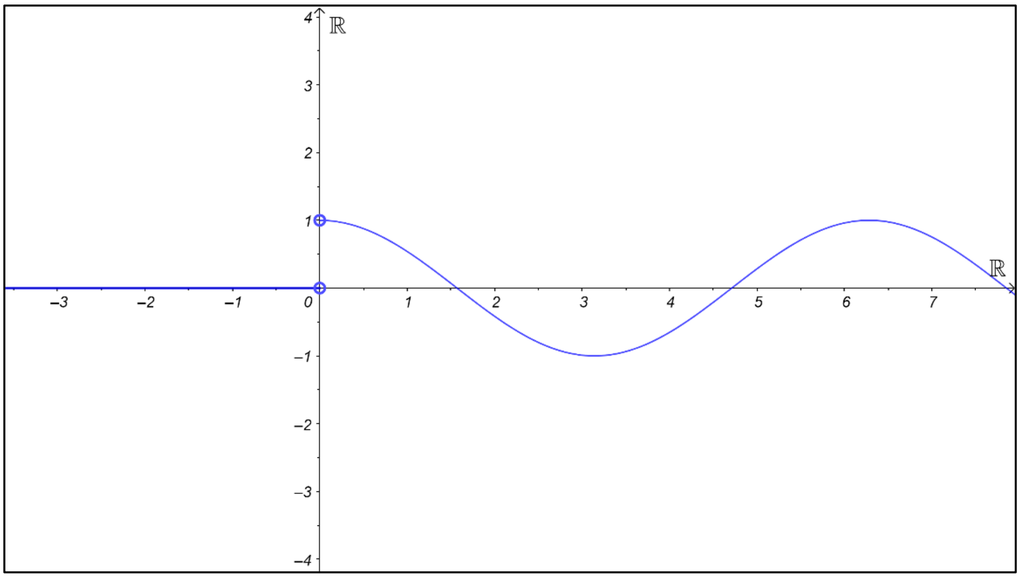

Figura 7: Función definida por partes 2
Fuente: Elaboración propia

$$g(\bar{x}) = \begin{cases} \bar{x}, & \bar{x} \geq 0 \\ -\bar{x}, & \bar{x} < 0 \end{cases}$$

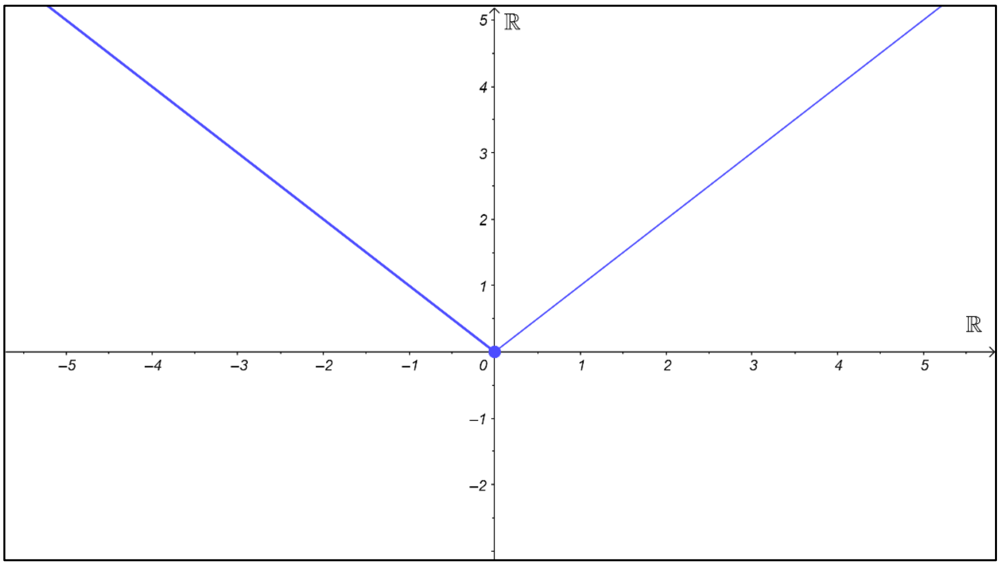

Figura 8: Función definida por partes 3
Fuente: Elaboración propia

$$g(\overline{x})=\begin{cases} 1\ ,\ \overline{x}\geq 0 \\ 0\ ,\ \overline{x}<0 \end{cases}$$

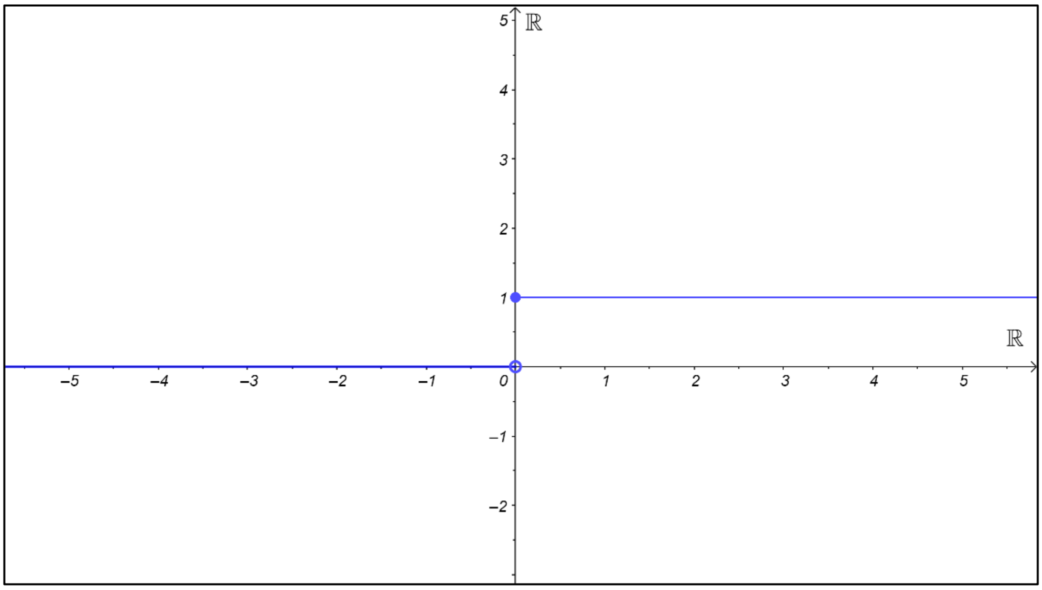

Figura 9: Función definida por partes 4
Fuente: Elaboración propia

$$g(\overline{x})=\begin{cases} e^{\frac{-1}{1-\overline{x}^2}}\ ,|\overline{x}|<1 \\ 0\quad ,|\overline{x}|\geq 1 \end{cases}$$

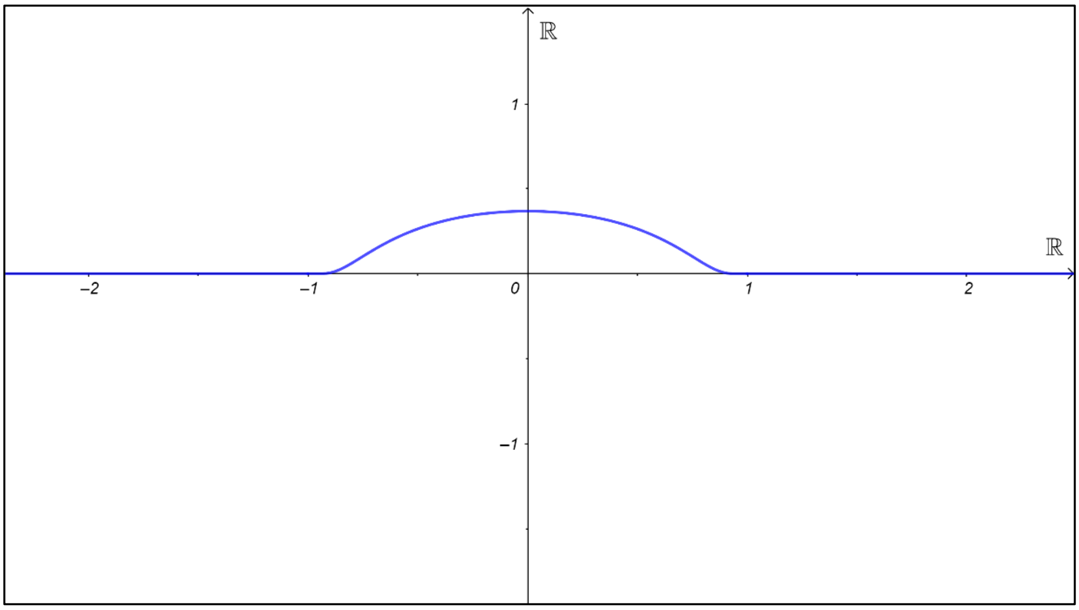

Figura 10: Función definida por partes 5
Fuente: Elaboración propia