

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN - TACNA

Escuela de Posgrado

DOCTORADO EN CIENCIAS AMBIENTALES

**MODELO MATEMÁTICO PARA DETERMINAR LA CONCENTRACIÓN
DE MONÓXIDO DE CARBONO EMITIDO POR LOS VEHÍCULOS
QUE TRANSITAN POR LA INTERSECCIÓN DE LAS AVENIDAS
FRANCISCO BOLOGNESI Y GUSTAVO PINTO, TACNA - 2014**

TESIS

PRESENTADA POR:

M.Sc. VALERIO BONIFACIO CHÁVEZ ANTICONA

Para optar el Grado Académico de:

DOCTOR EN CIENCIAS AMBIENTALES

TACNA - PERÚ

2016

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN – TACNA

Escuela de Posgrado

DOCTORADO EN CIENCIAS AMBIENTALES

**MODELO MATEMÁTICO PARA DETERMINAR LA CONCENTRACIÓN
DE MONÓXIDO DE CARBONO EMITIDO POR LOS VEHÍCULOS
QUE TRANSITAN POR LA INTERSECCIÓN DE LAS
AVENIDAS FRANCISCO BOLOGNESI Y
GUSTAVO PINTO, TACNA – 2014**

Tesis sustentada y aprobada el 13 de junio del 2016; estando el jurado calificador integrado por:

PRESIDENTE :



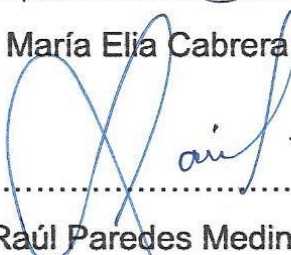
.....
Dr. Alberto Savino Pacheco Pacheco

SECRETARIA :



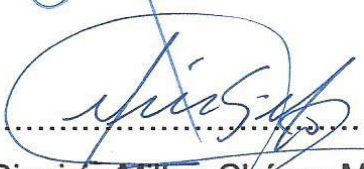
.....
Dra. María Elia Cabrera Navarrete

MIEMBRO :



.....
Dr. Raúl Paredes Medina

ASESOR :



.....
Dr. Dionicio Milton Chávez Muñoz

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento especial a mis señores padres Enrique y Francisca por haberme dado la vida y los valores que poseo en la actualidad.

Un agradecimiento muy especial para mi esposa Elvira y a mi hijo José, que con su comprensión me han ayudado a seguir luchando en este largo camino emprendido en sacrificio del tiempo que no pude compartir con ellos a su lado.

Agradezco a mis hermanos, Juan, Felipe, Jacobo, Olga y Jorge por su apoyo incondicional.

CONTENIDO

Agradecimientos.....	iii
Lista de simbología utilizada.....	viii
RESUMEN.....	xiii
ABSTRACT.....	xiv
RESUMO.....	xv
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	17
1.1 Problema general.....	17
1.2 Problemas específicos.....	17
1.3 Objetivos.....	18
1.3.1 Objetivo general.....	18
1.3.2 Objetivos específicos.....	19
1.4 Hipótesis.....	19
1.4.1 Hipótesis general.....	19
1.4.2 Hipótesis específicas.....	20
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO.....	22
CAPÍTULO III: SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL MODELO MATEMÁTICO.....	62
CAPÍTULO IV: MARCO METODOLÓGICO.....	116

4.1	Caracterización o tipo del diseño de la investigación.....	116
4.2.	Identificación del área más vulnerable a la exposición por monóxido de carbono.....	117
4.3	Acciones y actividades para la ejecución de la toma de datos.....	117
4.4	Estrategia de evaluación.....	118
4.5	Evaluación de las concentraciones de CO.....	120
4.5.1	Método de medición.....	120
4.5.2	Equipo utilizado.....	120
4.6	Datos.....	120
4.6.1	Los datos tomados durante el estudio.....	120
4.7	Descripción del uso de los equipos en la toma de los datos.....	122
	CAPÍTULO V: RESULTADOS.....	124
	CAPÍTULO VI: DISCUSIÓN.....	145
	CONCLUSIONES.....	151
	RECOMENDACIONES.....	155
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	158
	ANEXOS.....	184

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Concentración de CO promedio y datos meteorológicos (invierno: del 11 al 16 de agosto).....	125
Tabla 2. Concentración de CO promedio y datos meteorológicos (primavera: del 17 al 22 de noviembre).....	126
Tabla 3. Concentración de CO promedio y datos meteorológicos (verano: del 26 al 31 de enero).....	127
Tabla 4. Concentración de CO promedio y datos meteorológicos (otoño: del 04 al 09 de mayo).....	128
Tabla 5. Concentración promedio de CO observada (CO_o) y predicha (CO_p) (invierno: del 11 al 16 de agosto).....	130
Tabla 6. Concentración promedio de CO observada (CO_o) y predicha (CO_p) (primavera: del 17 al 22 de noviembre)..	131
Tabla 7. Concentración promedio de CO observada (CO_o) y predicha (CO_p) (verano: del 26 al 31 de enero).....	132
Tabla 8. Concentración promedio de CO observada (CO_o) y predicha (CO_p) (otoño: del 04 al 09 de mayo)	133
Tabla 9. Comparación de concentración promedio de CO observada (CO_o) y predicha (CO_p)	134
Tabla 10. Tipos de unidades de los contaminantes atmosféricos...	145

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. La viscosidad.....	28
Figura 2. Volumen de control.....	53
Figura 3. Volumen de control a través del cual circula un fluido.....	56
Figura 4. Dominio espacial considerado para este estudio.....	66
Figura 5. Concentración de CO de las diferentes estaciones del año en sus respectivas semanas de monitoreo.....	139
Figura 6. Concentraciones de CO _o y CO _p durante la estación de invierno.....	140
Figura 7. Concentraciones de CO _o y CO _p durante la estación de primavera.....	141
Figura 8. Concentraciones de CO _o y CO _p durante la estación de verano.....	142
Figura 9. Concentraciones de CO _o y CO _p durante la estación de otoño.....	143

LISTA DE SIMBOLOGÍA UTILIZADA

A	Área de superficie
C	Concentración molar total de la mezcla
\bar{C}_A	Concentración molar volumétrica del componente A
\bar{C}_B	Concentración molar volumétrica del componente B
CITT	Técnica de la Transformada Integral de Clásica
CO	Monóxido de carbono
CO _o	Valores observados de monóxido de carbono
CO _p	Valores predichas de monóxido de carbono
D _{AB}	Coeficiente de difusión del componente A a través del componente B.
EDF	Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales
ECA	Estándar Nacional de Calidad Ambiental del Aire
F	Fuerza tangencial
GITT	Técnica de la Transformada Integral Generalizada

GILTT	Técnica de la Transformada de Laplace Integral Generalizada
GPS	Posicionamiento Global Satelital
H	Altura considerada como capa límite atmosférica
HC	Hidrocarburos libres
H _s	Altura de la fuente de emisión
H _{ref}	Altura de referencia
\vec{J}_{A_z}	Flujo másico del componente A en dirección del eje z
$\vec{J}_{A_z}^*$	Flujo molar del componente A en dirección del eje z
\vec{j}_i	Densidad de flujo másico de difusión relativa a la velocidad \vec{u}
\vec{j}_i^*	Densidad de flujo másico de difusión relativa a la velocidad \vec{V}
\vec{J}_i	Densidad de flujo molar de difusión relativa a la velocidad \vec{u}
\vec{J}_i^*	Densidad de flujo molar de difusión relativa a la velocidad \vec{V}
K	Kelvin

κ	Comprensibilidad
LS	Latitud sur
LW	Latitud oeste
m	Masa
m_A	Cantidad de masa del componente A
m_B	Cantidad de masa del componente B
m_{A+B}	Masa total de la mezcla
\vec{n}_i	Densidad de flujo másico
\vec{N}_i	Densidad de flujo molar
NNE	Nor noreste
NO_x	Óxidos de nitrógeno
η_A	Número de moles correspondientes al componente A
η_B	Número de moles correspondientes al componente B
OMS	Organización Mundial de la Salud
p	Presión
PBL	Capa límite planetaria

ppm	Partes por millón
SENAMHI	Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología
s. f.	Sin fecha
SSO	Sud sudoeste
τ	Esfuerzo de corte o tensión cizalla
USEPA	Agencia de Protección del Medio Ambiente de los Estados Unidos
μ	Viscosidad dinámica o absoluta
V	Volumen
VC	Volumen de control
V_{A+B}	Volumen total de la mezcla
u_{ref}	Velocidad de referencia
u_x	Velocidad promedio del viento en la dirección del eje x
u_y	Velocidad promedio del viento en la dirección del eje y
u_z	Velocidad promedio del viento en la dirección del eje z
\vec{u}	Velocidad promedio o media de la masa

\vec{V}	Velocidad molar media o promedio
ν	Viscosidad cinemática
X_A	Fracción molar del componente A
X_B	Fracción molar del componente B
Y_0	Valor constante sobre el eje y
ρ	Densidad
ρ_A	Concentración másica volumétrica del componente A
ρ_B	Concentración másica volumétrica del componente B
δ	Función delta de Dirac
α	Coeficiente o exponente de Hellmann
∇	Operador nabra
∇C_A	Gradiente de concentración másica del componente A
∇X_A	Gradiente de fracción molar del componente A
∇^2	Laplaciano

RESUMEN

En estos últimos años a nivel del mundo y en un caso particular la ciudad de Tacna, la población migra del campo a la ciudad; conllevando con ello al incremento de más viviendas, el aumento del parque automotor público y privado. Por otro lado, investigaciones realizadas en otros países demuestran que la mayor concentración por monóxido de carbono emitido por los vehículos se da en las intersecciones de avenidas con presencia de semáforos. Esto nos conllevó a realizar esta investigación con la finalidad de determinar si en la intersección de las avenidas Francisco Bolognesi y Gustavo Pinto; habrá contaminación por monóxido de carbono y que podría estar afectando a la salud de las personas que transitan por dicha intersección. Para ello, deducimos un modelo matemático que nos permita determinar la concentración de monóxido de carbono y contrastarlo con los valores obtenidos por un equipo medidor de dicho contaminante. Llegándose a determinar que si existe contaminación por monóxido de carbono y cuáles de los parámetros meteorológicos influyen más para ello en dicha intersección, más los valores obtenidos del contaminante no superan el valor umbral dado por las normas peruana e internacionales; también determinamos que el modelo matemático deducido es el adecuado.

Palabras clave: modelo matemático, monóxido de carbono, aire.

ABSTRACT

Through these years both in the world and particularly in Tacna, people are moving leaving behind the country life to the city life; entailing the increase of housing, the growth of public and private traffic. To start with, some research done in other countries show that most amount of carbon monoxide vehicles exhausted comes from corners of avenues fitted with traffic lights. That fact did lead us to do this research with the purpose of determining whether there is any car pollution because of carbon dioxide on the corner of Francisco Bolognesi and Gustavo Pinto Avenue, which may have a bad effect on health of passersby. As a result, we designed a mathematic model that may allow us to determine the concentration of carbon monoxide and matching it with data about that polluting matter gathered from a measuring equipment. We determined that there is pollution caused by carbon monoxide as well as what meteorological parameters have an effect on it at this corner, plus values obtained about the contaminant does not go over the maximum value fixed by Peruvian and international regulations; we also determined that the mathematic model designed was suitable enough.

Key words: mathematic model, carbon monoxide, air.

RESUMO

Nestes últimos anos a nível mundial e em caso particular à cidade de Tacna, a população migra do campo à cidade; levando ao incremento de mais vivendas, o aumento do parque automotor. Por outro lado, investigações realizadas em outros países demonstram que a maior concentração de monóxido de carbono emitido pelos veículos, dá-se nas intersecções de avenidas com semáforos. Isto nos levou a realizar esta investigação com a finalidade de se determinar na interseção das avenidas Francisco Bolognesi e Gustavo Pinto; haveria contaminação de monóxido de carbono e que poderia estar afetando à saúde dos transeuntes desta mesma avenida. Por tal motivo, deduziu-se um modelo matemático que permita determinar à concentração de monóxido de carbono e contrastá-lo com os valores obtidos por um equipamento medidor desse poluente. Chegando à constatação da existência de poluição e inclusive os parâmetros meteorológicos que influenciam mais para a mesma intersecção, más os valores obtidos do contaminante não superam atualmente o valor estipulado dado pelas normas peruanas e internacionais; também se determinou que o modelo matemático deduzido foi o correto.

Palavras chave: modelo matemático, monóxido de carbono, ar.

INTRODUCCIÓN

La contaminación del aire es un problema de las grandes aglomeraciones urbanas de todo el mundo. Su estudio y control constituyen un tema complicado porque muchos factores, en gran parte incontrolables, intervienen entre las políticas de control disponibles y los efectos nocivos percibidos por la sociedad. Tales factores incluyen contaminante y la química atmosférica, la topografía y las cuestiones sociales y políticas. De todos los diferentes tipos de contaminación del aire que nos interesa es el producido por el tráfico rodado en las redes urbanas y sobre todo cuando se encuentra en su condición de saturación, donde los vehículos fluyen interrumpido y los retrasos y la creación de paradas ocurren con frecuencia cerca de las intersecciones. (Matzoros & Van Vliet, 1992)

El sistema de control de la calidad del aire en las grandes ciudades debe ser capaz de proporcionar información sobre los niveles máximos de corto plazo de la contaminación, así como sobre el nivel de fondo de la ciudad. A saber los niveles máximos se conectan directamente con la contaminación provocada por el tráfico. A pesar de su

alcance de corta distancia, el conocimiento de los valores de pico y su dispersión es importante, ya que con mayor frecuencia superan los valores umbral. Para predecir correctamente la situación en torno a las construcciones de tráfico como los túneles de carretera, grandes encrucijadas de la ciudad y/o cañones urbanos, las relaciones entre las fuentes y los receptores deben establecerse. En este procedimiento, el tráfico juega un papel importante. (Pospisil, Katolicky, & Jicha, 2004)

En las últimas décadas se han caracterizado por un aumento drástico de la circulación de vehículos, sobre todo en las zonas urbanas. Como consecuencia, la calidad del aire urbano no ha mejorado significativamente, a pesar de las técnicas de control de emisiones de vehículos ampliamente implementadas. Especialmente en las ciudades con edificios relativamente densos que flanquean las calles estrechas, los niveles de contaminación a menudo no cumplen con las normas de calidad del aire. Junto con el monitoreo, la modelización de la contaminación del aire es una herramienta importante para la gestión de la calidad del aire urbano. Pues permite el control eficaz de las estrategias de reducción de emisiones y la predicción de las variaciones en los niveles de contaminación asociados a las modificaciones de la infraestructura urbana. Sin embargo, el modelado de la contaminación del

aire en las zonas urbanas es una tarea bastante difícil, ya que ambos significan el transporte turbulento de contaminantes los cuales están fuertemente influenciadas por los edificios. (Kastner-Klein, Fedorovich, Ketzel, Berkowicz, & Britter, 2003)

El problema de la contaminación del aire en las ciudades se ha vuelto tan grave que hay una necesidad de información oportuna sobre los cambios en el nivel de contaminación. La dispersión de la contaminación del aire es un problema complejo. Se cubre el transporte de contaminantes y la difusión en la atmósfera. La dispersión de contaminantes en la atmósfera depende de las características de contaminantes, la meteorología, la emisión y las condiciones del terreno. (Goyal & Kumar, 2011)

Las emisiones contaminantes de los vehículos de motor han sido uno de los principales problemas de contaminación del aire, especialmente en el borde de la calle de las megaciudades. Ellos son reconocidos como uno de los riesgos de la salud más graves en las zonas urbanas congestionadas donde el tráfico rodado es pesado. (Ning, Cheung, Lu, Liu, & Hung, 2005)

Las intersecciones de calles juegan un papel importante en la determinación de las concentraciones de contaminantes en el pabellón urbano. En primer lugar, los flujos de tráfico se rompen y los vehículos están obligados a acelerar y desacelerar, lo que aumenta las emisiones. En las intersecciones congestionadas o en las intersecciones controladas por semáforos y vehículos en marcha aumentarán las emisiones por encima del nivel de tráfico que fluye libremente. En segundo lugar, intersecciones de calles son regiones donde hay un intercambio importante de contaminantes entre las calles conectadas. (Soulhac, Garbero, Salizzoni, Mejean, & Perkins, 2009)

Arequipa, es una de las ciudades más contaminadas del Perú, esto debido a la configuración geográfica en forma de hoya, donde los vientos no pueden dispersar los contaminantes. Más aún si comparamos la cantidad de habitantes y el número de vehículos con tendencia creciente donde en el año 1996, con 625 658 habitantes, los niveles de concentración CO ascendía a un promedio de 25 ppm/h; mientras que en el año 2000, con 870 000 habitantes, ascendía a 28 ppm/h. Por tanto, la tendencia ascendente continúa porque el transporte urbano es un medio que genera empleo para muchas familias; sin embargo los efectos

negativos en el medio ambiente y la salud los padecen estas mismas familias y la población en general. (Chana, 2004)

De acuerdo al monitoreo de la calidad de Aire de Arequipa en la estación fija de Goyeneche el monóxido de carbono (CO) ha sobrepasado el Estándar Nacional de Calidad Ambiental del Aire (ECA) promedio móvil de 08 horas de $10\ 000\ \mu\text{g}/\text{m}^3$. En el caso del año 2000 (84% datos adquiridos) hasta en 80 oportunidades se ha sobrepasado el ECA, para el 2001 (59% datos adquiridos) se ha sobrepasado hasta 101 oportunidades y para el 2002 hasta 14 oportunidades (32% datos adquiridos). (Gaitán, Cancino, & Behrentz, 2007)

En concordancia con la información recopilada por el Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología (SENAMHI) en el monitoreo de los contaminantes gaseosos monóxido de carbono y ozono troposférico (acción realizada en la Estación de Calidad del Aire ubicada en su sede central del Distrito de Jesús María de la ciudad de Lima, correspondiente al mes de enero (del día 22 al 31) del 2004) encontraron que los mayores valores de contaminación por CO se presentan durante las horas de mayor carga vehicular; alrededor del Club "El Golf" siendo el máximo promedio horario de 3,2 ppm alcanzado el día 23 a las 08 h. La variación

media horaria muestra dos picos predominantes durante el día, el primero desde las 08 h a 10 h y el segundo desde las 19 h a las 21 h; predominando el pico de la noche (1,9 ppm) sobre el correspondiente a la mañana (1,8 ppm). (Ponce et al., 2005)

En un estudio realizado en Rio de Janeiro se determinó que la tasa de emisión de CO en el mes de mayo de 2005 varió de 0,1 ppm a 3,4 ppm, lo que no es considerado alarmante. Incluso con estos niveles de emisión de CO encontrados, se recomendó la aplicación del horario de cierre al tránsito en la calle Jaime Figueiredo para tener en cuenta los períodos de menor tasa de CO en el ambiente del lugar. Con ello damos a los clientes la opción de elegir un momento más apropiado. (Silva Azevedo, Imbiriba, & De Oliveira, 2008)

En San Miguel de Tucumán se registraron valores en el periodo Septiembre-Octubre-Noviembre 2003 oscilaron entre 10 ppm y 45 ppm promedio y el periodo Septiembre-Octubre 2006 entre 81 ppm y 427 ppm promedio, con temperaturas entre 22 °C y 37 °C. Los valores registrados superan ampliamente el valor máximo permitido de CO, 0,01 a 0,8 ppm en el aire atmosférico, debido al crecimiento del parque automotor, cambio en altura de las estructuras de los edificios de la ciudad. Se propone un

monitoreo de vigilancia de la calidad del aire para evaluar riesgos ambientales y en particular la salud humana. (Uuii & Ee, 2011)

Las muestras de aire para la determinación de la concentración de CO fueron tomadas directamente en cada una de las siguientes intersecciones de la ciudad de Santo Domingo: Avenida Duarte con París, Avenida México con Duarte. El muestreo fue realizado en los primeros cuatro meses de 1991, tanto en días laborables como no laborables y en el horario de las 06 h a las 22 h. con intervalos de 2 horas entre cada toma de muestra. El 37,5% de los puntos analizados registró su máxima concentración de CO a las 12 h y otro 37,5% lo tuvo a las 16 h; mientras que el restante 25,0% presenta un máximo a las 18 h. (Mendoza, Espinal, & Contreras, 1993)

Se puede apreciar además que las emisiones de los vehículos con convertidores catalíticos disminuyen más que las de los vehículos que no tienen convertidor catalítico (en el caso del CO la reducción es de 8,9 y 8,1, respectivamente). Esto se debe a que en la zona oriente existe una mayor proporción de vehículos con convertidor y en consecuencia estos se ven más afectados por la tarifación de cordón en la zona. Se podría esperar, por lo tanto, que de aplicarse una tarifación de cordón en una

zona en que existe más vehículos sin convertidor catalítico las emisiones deberían reducirse aún más. (Bosch, O'ryan, & Matamala, 2002)

En la ciudad de Córdoba, se realizaron estudios para determinar los promedios anuales de PM_{10} y el CO en los días normales de trabajo (lunes a viernes) de los sábados y los domingos. A partir de los resultados se manifiesta que estos contaminantes presentan en los días normales de trabajo dos picos muy marcados: uno entre las 09 h y 10 h y el otro entre las 20 h y 21 h. Las concentraciones de PM_{10} y CO, en los días sábados, presentan también dos picos: uno entre las 09 h y 10 h y el otro entre las 21 h y 23 h. En los domingos, se observa, por lo general, un pico nocturno alrededor de las 24 h. Los sábados y domingos durante el día se registran valores menores a los de los días normales de la semana pero en la noche este comportamiento se invierte.

Teniendo en cuenta la observación de las características de ubicación de los picos, en todos los meses del año, se ha detectado que entre el verano y el invierno puede presentarse una hora de diferencia. Los picos de la mañana ocurren más temprano en verano que en invierno, mientras que en los de la noche se observa lo contrario.

En cuanto a la intensidad de los picos, el monóxido de carbono presenta valores menores en los meses de diciembre a febrero que en los otros meses. En efecto, los valores máximos correspondientes a los días normales, en el verano, ocurren aproximadamente a las 09 h y son en promedio de 5 ppm, mientras que, en las otras estaciones van entre 6 y 7,5 ppm, correspondiendo al valor más alto a los meses de invierno. (Nasello et al., 2013)

En la ciudad de Bogotá las mediciones se realizaron en hora de alto tráfico vehicular “hora pico”. En esta hora se presentan mayores embotellamientos de vehículos. Los motores a gasolina en marcha mínima o ralentí generan la mayor cantidad de contaminantes HC, CO, entre otros. Se realizaron 28 medidas en reposo, tiempos por detención en semáforos para vehículos de servicio particular y de servicio público y además recogida de pasajeros para servicio público. Para dichas mediciones se tomaron las principales vías de la ciudad, vías alternas que presentan un alto flujo vehicular durante las 24 horas del día. (Díaz, 2013)

Informes recibidos de diversos países indican que las concentraciones de monóxido de carbono en las vías urbanas donde el tráfico es intenso varían considerablemente según las condiciones

locales. A veces se observan, durante breves periodos, concentraciones de 250 – 500 mg/m³ (200 – 400 ppm), pero los máximos normales suelen ser de 25 – 125 mg/m³ (20 – 100 ppm). Las concentraciones medias en la atmósfera urbana son mucho más bajas y van desde cantidades apenas apreciables hasta quizá 15 – 20 mg/m³ (12 – 16 ppm). (Organización Mundial de la Salud, 1969)

De acuerdo con la agencia de protección del medio ambiente, en los Estados Unidos las emisiones de monóxido de carbono al ambiente son producidas en un 95% por los vehículos automotores (Lippmann et al., 2003).

En Brasil, el monóxido de carbono es el pululante emitido en mayor cantidad a la atmósfera. En Sao Paulo 1,5 millones de toneladas son lanzadas al aire anualmente; de estos el 78% son producidos por los automotores a gasolina o diésel, 15% por automotores con combustible alcohol, 3% por motocicletas, 2% por taxis y 2% resultan de procesos industriales. (Téllez & Rodríguez, 2006)

En Colombia, el Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales estimó para 1996 las emisiones atmosféricas de gases con

efecto local en 8 612 kilotoneladas, de las cuales el monóxido de carbono representó el 58% (Téllez & Rodríguez, 2006).

En Bogotá, el Departamento Administrativo del Medio Ambiente estima que la concentración media de monóxido de carbono atmosférico en un día normal se encuentra entre 30 y 35 partes por millón. En el informe sobre monitoreo realizado en el “día sin carro” en 2005, se estimó que la concentración ambiental de monóxido de carbono disminuyó en un 76% respecto a un día normal. (Gaitán et al., 2007)

Según revela este registro actualizado hasta 2010, el 70% de las emisiones de gases contaminantes las produce el nutrido parque automotor cruceño, que ostenta cerca de 300 000 vehículos circulando por sus arterias. Son como pequeñas chimeneas móviles que dispersan monóxido de carbono (CO) e hidrocarburos libres (HC). El restante 30% de las emisiones contaminantes es cuota de la industria. (Villegas, 2012)

En Bolivia, los resultados del monitoreo meteorológico para los meses de junio a agosto han mostrado velocidades del viento muy bajas, para ese periodo en especial. En estos tres meses, más de la mitad del tiempo, la velocidad del viento se mantuvo por debajo de 1,2 m/s, lo cual

es considerado por los meteorólogos como ausencia de viento (Nevers, 1997). Del mismo modo, más del 80% del tiempo, la velocidad del viento se mantuvo por debajo de los 2 m/s. (Bascopé, 2011)

En París las concentraciones son más altas durante los viajes realizados estrictamente dentro de este país y disminuyen a medida que uno se mueve desde el centro de la ciudad hacia la periferia. En términos generales, las concentraciones registradas durante el invierno son más altas que los registrados durante el verano. Esta diferencia muy pronunciada dentro de la zona centro de París no se observa durante un viaje a los suburbios de París. (Dor, Moullec, & Festy, 1995)

En Hong Kong las emisiones de los vehículos de motor son la principal causa de la contaminación del aire en las zonas urbanas. De acuerdo con el Departamento de Protección Ambiental de Hong Kong (HKEPD), CO, NOx y partículas provienen principalmente de las emisiones vehiculares. Por lo tanto, la reducción de las emisiones de los vehículos de motor contribuirá de manera significativa a la mejora de la calidad del aire en Hong Kong. Para lograr este objetivo, es necesario entender las emisiones de vehículos reales e identificar los factores

operacionales importantes que afectan a las emisiones de vehículos y consumo de combustible. (Tong, Hung, & Cheung, 2000)

Las dinámicas de crecimiento demográfico que enfrentan las ciudades representan una seria amenaza para el medio ambiente, así como para la salud y la calidad de vida de sus habitantes. Dicho crecimiento genera nuevos procesos económicos y está generalmente acompañado de un incremento en las actividades industriales, mayores tasas de motorización, superiores consumo de combustible y por ende la generación de mayores emisiones de contaminantes del aire. (Franco, 2013)

Los procesos que regulan el transporte y la difusión de los contaminantes presentan gran variabilidad y formas distintas, el fenómeno es de tal complejidad que sería imposible de describir sin el uso de modelos matemáticos. Por tanto, estos modelos constituyen un instrumento técnico indispensable de la gestión de la calidad del aire. (Buske, Vilhena, Tirabassi, & Bodmann, 2012; Tirabassi, Vilhena, Buske, & Degrazia, 2013)

La ecuación en derivadas parciales llamada convección-difusión es un modelo matemático apropiado que simula las concentraciones de los contaminantes emitidos a la atmósfera.

En los últimos años, se ha prestado especial atención a la cuestión de la búsqueda de soluciones analíticas para la ecuación de convección-difusión con el fin de simular la dispersión de contaminantes en la capa límite planetaria (PBL) (Moreira, Vilhena, Buske, & Tirabassi, 2009). De la misma manera muchos investigadores vienen trabajando con el objetivo de estimar la concentración de contaminantes en la atmósfera, en la tentativa de validar el impacto ambiental causado y posteriormente procurar formas de mejorar la calidad de vida de las personas. (Cassol & Wortmann, 2006)

Debido a los problemas causados por la contaminación del aire, es necesario estudiar y comprender el proceso de dispersión de contaminantes para predecir las posibles consecuencias del impacto ambiental en los diversos ecosistemas. Por lo tanto, la dispersión de los contaminantes de simulación se convierte en una buena opción porque las observaciones de campo sufren muchas dificultades (de

funcionamiento y problemas de alto costo). (Mello, de Vilhena, & Moreira, 2005)

Como consecuencia de las investigaciones antes descritas se realizó la presente investigación, para determinar si existe o no contaminación del aire por monóxido de carbono como consecuencia de las emisiones de los vehículos que transitan por la intersección de las avenidas Francisco Bolognesi y Gustavo Pinto, Tacna-Perú. Para lo cual se usó un equipo medidor de monóxido de carbono y un modelo matemático deducido. A su vez se determinó cuáles son las variables meteorológicas que influyen más en la concentración de monóxido de carbono y el grado de similitud existente entre las mediciones hechas por el equipo medidor de monóxido de carbono y los resultados obtenidos por el modelo matemático en los cuerpos receptores.

Los resultados de la investigación ejecutada se presentan en capítulos. En el capítulo I se plantea el problema, los objetivos y las hipótesis de la investigación. En el capítulo II se describen las teorías que permitirán deducir el modelo matemático mediante el cual se determinó la concentración de monóxido de carbono. En el capítulo III se propone una solución analítica del modelo matemático no estacionario obtenido en tres

dimensiones; es decir, dependerá de las variables longitudinales x , y , z y de la variable temporal t , para ello se utilizó dos técnicas importantes la Técnica de Transformada Integral General (GITT) y la Técnica de Transformada de Laplace Integral Generalizada (GILTT) las cuales permiten resolver ecuaciones en derivadas parciales. En el capítulo IV se describe la metodología aplicada en esta investigación para la realización de la toma de los datos. En el capítulo V se dan a conocer los resultados obtenidos en la toma de nuestros datos. En el capítulo VI se analizan y discuten los resultados alcanzados por la metodología empleada. Además, se plantean conclusiones y recomendaciones para futuros trabajos de investigación.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Problema general

¿Serán los parámetros temperatura, humedad, tiempo, número de vehículos, velocidad y dirección del viento los que influyen en la concentración de monóxido de carbono en los cuerpos receptores emitidos por los vehículos que transitan por la intersección de las avenidas Francisco Bolognesi y Gustavo Pinto de la ciudad de Tacna en el año 2014?

1.2 Problemas específicos

¿Serán los parámetros tiempo, número de vehículos, velocidad y dirección del viento los que han influido más en la concentración de monóxido de carbono en relación a la humedad y la temperatura emitidos por los vehículos que transitan por la

intersección de las avenidas Francisco Bolognesi y Gustavo Pinto en el cercado de la ciudad de Tacna?

¿Habrá similitud en la concentración de monóxido de carbono en los cuerpos receptores obtenidos con el modelo matemático y con el equipo detector de gases?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General:

Determinar si los parámetros temperatura, humedad, tiempo, número de vehículos, velocidad y dirección del viento son los que influyen en la concentración de monóxido de carbono en los cuerpos receptores emitidos por los vehículos que transitan por la intersección de las avenidas Francisco Bolognesi y Gustavo Pinto de la ciudad de Tacna en el año 2014.

1.3.2 Objetivos Específicos:

- Determinar si los parámetros tiempo, número de vehículos, velocidad y dirección del viento son los que influyen más en la concentración de monóxido de carbono en relación a la humedad y la temperatura emitido por los vehículos que transitan por la intersección de las avenidas Francisco Bolognesi y Gustavo Pinto.

- Comparar si son similares la concentración de monóxido de carbono en los cuerpos receptores obtenidos por el modelo matemático y por el equipo detector de gases.

1.4 Hipótesis:

1.4.1 Hipótesis general:

Si los parámetros temperatura, humedad, tiempo, número de vehículos, velocidad y dirección del viento son los

que influyen en la concentración del monóxido de carbono, entonces se determinará cuáles de estos parámetros son los que más han influido en la concentración de monóxido de carbono en la intersección de las avenidas Francisco Bolognesi y Gustavo Pinto en el cercado de la ciudad de Tacna en el año 2014.

1.4.2 Hipótesis específicas:

- Si los parámetros tiempo, número de vehículos, velocidad y dirección del viento son los que influyen más en relación a la humedad y la temperatura, entonces la concentración de monóxido de carbono emitido por los vehículos que transitan por la intersección de las avenidas Francisco Bolognesi y Gustavo Pinto se incrementará.

- Si la concentración de monóxido de carbono en los cuerpos receptores obtenido con el modelo matemático y con el equipo detector de gases son

similares, entonces el modelo matemático será el adecuado.

Una de las limitaciones en la ejecución de la investigación fue tener un solo equipo medidor de monóxido de carbono que pudo haber generado la pérdida de algunos instantes, en sitios de alta concentración del contaminante. Por otro lado, la forma como se midieron las condiciones climáticas como la temperatura y la humedad relativa puede que no refleje adecuadamente los datos como consecuencia del uso de un solo anemómetro.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

En este capítulo describiremos la teoría necesaria que nos conducirá a deducir el modelo matemático con el cual se determinó la concentración del contaminante monóxido de carbono (CO) en el aire.

Teniendo en cuenta la composición de la materia se clasifica en elementos y compuestos. Un elemento es una sustancia más simple de la materia con propiedades definidas, formada por una sola clase de átomos que no pueden descomponerse por métodos convencionales en algo más simple. Por otro lado, un compuesto es una sustancia formada por varias clases de átomos unidos químicamente en proporción constante; compuestas de tal manera que ya no es posible identificarlos por sus propiedades originales o individuales y que pueden separarse por medio de una reacción química. (Aguilar, 2011)

Un fluido es parte de un estado de la materia el cual no tiene un volumen definido, sino que adopta la forma del recipiente que lo contiene

a diferencia de los sólidos, los cuales tienen forma y volumen definido. Los fluidos tienen la capacidad de fluir, es decir, puede ser trasvasada de un recipiente a otro. Dentro de la clasificación de fluidos, los líquidos y gases presentan propiedades diferentes. Ambos tipos de fluidos, tienen la propiedad de no tener forma propia y que estos fluyen al aplicarles fuerzas externas (Rivera, 2001). A su vez deberemos tener en cuenta que un fluido es una sustancia que se deforma continuamente cuando se le aplica un esfuerzo cortante, aunque esta sea muy pequeña. (Pasinato, 2008; Rivera, 2001; Sámano, Sen, & Indiana, 2009)

Dentro de los fluidos, la principal diferencia entre líquidos y gases estriba en las distintas compresibilidades de los mismos. Por un lado, los gases presentan una gran compresibilidad que influye sobre las características del flujo, ya que tanto el volumen como la densidad varían con facilidad. En el caso de los gases, el movimiento térmico vence a las fuerzas atractivas y, por tanto tienden a ocupar todo el volumen del recipiente que los contiene. Mientras que en los líquidos, por el contrario, la compresibilidad es muy débil. Esto es debido a que las fuerzas atractivas entre las moléculas del líquido vencen al movimiento térmico de las mismas, colapsando las moléculas y formando el líquido. Al contrario de los gases, que tendrían a ocupar todo el volumen que los contiene, los

líquidos tienden a formar una superficie libre. La noción de compresibilidad descrita es la correspondiente a la estática de fluidos. En dinámica de fluidos hay casos en los que la densidad no varía a lo largo del flujo, incluso en un fluido compresible, por lo que a ese flujo le podemos aplicar las leyes de los fluidos incompresibles. Tiene en este caso más sentido hablar de flujo compresible o incompresible (Martín, 2011). A su vez, en determinados tipos de movimiento, donde las variaciones de presión y temperatura son pequeñas, la variación de densidad que experimenta un gas es relativamente baja, en esos casos el análisis del comportamiento del gas se asemeja al de un líquido. (Izquierdo, 2012)

Los fluidos son agregaciones de moléculas muy separadas en los gases y próximas en los líquidos. La distancia entre las moléculas es mucho mayor que el diámetro molecular, no estando fijas en una red, sino que se mueven libremente (Díez, 1986).

Como en toda la materia, los fluidos están compuestos por un gran número de moléculas en permanente movimiento. Esto se debe a que en la mayor parte de las aplicaciones de ingeniería lo que interesa son los efectos promedio o macroscópicos de un gran número de moléculas.

Estos efectos macroscópicos son los que corrientemente percibimos y medimos. Es por ello que en la definición de fluido no se hace referencia a la estructura molecular de la materia. Si no más bien se trata a un fluido como una sustancia infinitamente indivisible, dicho de otro modo un medio continuo, sin importar el comportamiento individual de las moléculas. (Rivera, 2001)

Teniendo en cuenta el enfoque del medio continuo de la materia nos permitirá describir a un fluido en cada punto del espacio; el cual vendrá dado por las propiedades promedio de la materia real en el entorno de ese punto. Por ello, la densidad, temperatura, velocidad, etc., se consideran como funciones continuas de la posición y el tiempo. (Rivera, 2001)

Para comprender las propiedades de los fluidos, es necesario saber diferenciar el peso de la masa. Al respecto, Mott (2006) da las siguientes definiciones.

La masa es la propiedad que tiene un cuerpo de fluido, es la medida de la inercia o resistencia al cambiar el movimiento de este.

También es la medida de la cantidad de fluido. A la masa lo denotaremos por el símbolo m .

El peso es la cantidad que pesa un cuerpo fluido, es decir, la fuerza con la que el fluido es atraído hacia la tierra por acción de la gravedad. Al peso lo denotaremos por el símbolo w .

A continuación describiremos algunas propiedades de los fluidos. Los valores de estas pueden depender de otras variables como: temperatura, presión, etc.

La densidad, ρ , de un fluido es la cantidad de masa por unidad de volumen de una sustancia. Sus unidades en el sistema internacional son kg/m^3 . Para un fluido homogéneo, la densidad no varía de un punto a otro y puede definirse simplemente mediante

$$\rho = \frac{m}{V} \quad [2.1]$$

donde V es el volumen de la sustancia.

Por el contrario, para un fluido no homogéneo, la densidad ρ varía de un punto a otro. Por tanto, tenemos que definir la densidad en un punto

como la masa por unidad de volumen en un elemento diferencial de volumen en torno a ese punto:

$$\rho = \rho(x; y; z; t) = \frac{dm}{dV} \quad [2.2]$$

Esto es posible gracias a la continuidad. En los líquidos, al tener baja compresibilidad, la densidad depende de la temperatura; pero apenas depende de la presión, $\rho = \rho(T)$. Para los fluidos compresibles, la densidad depende, en general, tanto de la presión como de la temperatura, $\rho = \rho(p; T)$.

La viscosidad dinámica o absoluta, μ , ofrece resistencia al movimiento del fluido relativo de sus moléculas. Este movimiento relativo de las moléculas provoca un esfuerzo de cizallamiento en el fluido; por tanto la viscosidad tiene un papel análogo al del rozamiento en el movimiento de los sólidos. La viscosidad está siempre presente en mayor o menor medida tanto en fluidos compresibles como incompresibles, sin embargo no siempre es necesario tenerla en cuenta. En el caso de los fluidos perfectos o no viscosos su efecto es muy pequeño y no se tiene en cuenta, mientras que en el caso de los fluidos reales o viscosos su efecto es importante y no es posible despreciarlo. Para entender la viscosidad supongamos dos capas o láminas de fluido separadas por la distancia y y se desplaza una de ellas a una velocidad constante v , en régimen

permanente, con relación a la otra que esta fija, será necesario ejercer sobre ella una fuerza tangencial F , proporcional a la velocidad y al área A de la superficie e inversamente proporcional a la distancia que los separa (Castro, 2005). Como se puede apreciar en la figura 1,

$$F = \mu \cdot \frac{v \cdot A}{y} \quad [2.3]$$

donde μ es la constante de proporcionalidad.

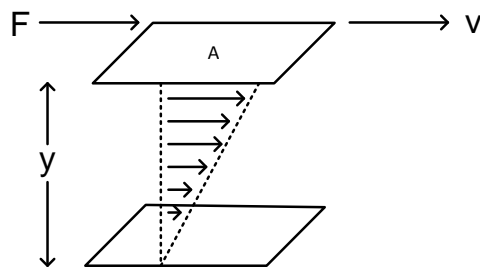


Figura 1. La viscosidad

Fuente: Elaboración propia

Sus unidades en el sistema internacional son ($\text{Pa} \cdot \text{s} = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$). En términos simples, la viscosidad es un coeficiente que mide la resistencia a la deformación en los fluidos.

La viscosidad cinemática, ν , es la que relaciona la viscosidad dinámica con la densidad del fluido utilizado,

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad [2.4]$$

Sus unidades en el sistema internacional son (m^2/s).

El esfuerzo de corte o tensión de cizalla, τ , es una fuerza tangencial que se ejerce sobre una unidad de área necesaria para mover una superficie plana superior:

$$\tau = \frac{F}{A} \quad [2.5]$$

donde A , es la unidad de área de la superficie superior en la cual se aplica la fuerza F . A su vez la ley experimental descubierta por Newton que rige este fenómeno afirma que la fuerza F es proporcional a la superficie plana superior A en movimiento, al gradiente de velocidad y a un coeficiente μ que se denomina viscosidad absoluta o viscosidad dinámica:

$$F = A \cdot \mu \cdot \frac{dv}{dy} \quad [2.6]$$

donde v es la velocidad de la superficie plana superior. Sus unidades en el sistema internacional son (Pascuales (Pa) o N/m^2).

De la ecuación [2.6] y haciendo uso de la ecuación [2.5] obtenemos:

$$F = A \cdot \mu \cdot \frac{dv}{dy} \Rightarrow \frac{F}{A} = \mu \cdot \frac{dv}{dy} \Rightarrow \tau = \mu \cdot \frac{dv}{dy}$$

resultando:

$$\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dy} \quad [2.7]$$

la ecuación [2.7] se cumple en todos los fluidos newtonianos. En algunos fluidos como la indicada por la figura 1, $\frac{dv}{dy}$ es constante a lo largo de y o

equivalentemente se da una distribución lineal de velocidades (los extremos de los vectores velocidad se encuentran en una misma línea recta) (Mataix, 1986).

Si en la ecuación [2.6] tomamos un caso particular en que $\frac{dv}{dy} =$

$\frac{v_0}{y_0}$, tenemos:

$$F = A \cdot \mu \cdot \frac{v_0}{y_0} \quad \text{D} \quad F \cdot y_0 = A \cdot \mu \cdot v_0 \quad \text{D} \quad \mu = \frac{F \cdot y_0}{A \cdot v_0}$$

resultando:

$$\mu = \frac{F \cdot y_0}{A \cdot v_0} \quad [2.8]$$

De las ecuaciones [2.7] y [2.8] se advierte:

- a) Si en un mismo fluido tenemos que aumenta la fuerza y aumenta también la velocidad con que se mueve la superficie plana superior, entonces μ es constante.
- b) Una fuerza por pequeña que sea produce siempre un gradiente de velocidad, determinado por la ecuación [2.6], a lo que es lo mismo: Un fluido no ofrece resistencia a la deformación por esfuerzo cortante. Esta es la característica que distingue esencialmente un fluido de un sólido.
 - Si un fluido es ideal, entonces $\mu = 0$.

- Si un fluido es real la viscosidad dinámica tiene un valor finito distinto de cero.
- En los fluidos en reposo $v = 0$, $\frac{dv}{dy} = 0$ y $\tau = 0$. El esfuerzo cortante es nulo y el único esfuerzo existente es la normal o presión. Esto simplifica enormemente el estudio de la hidrostática. El fluido real en reposo se comporta exactamente como un fluido ideal ($\mu = 0$). Las únicas fuerzas que actúan sobre el fluido en reposo son la gravedad en dirección vertical y la presión en dirección normal a la superficie considerada.

La viscosidad, como cualquiera otra propiedad del fluido, depende del estado del fluido caracterizado por la presión y la temperatura.

La ecuación [2.7] es conocida como la ley de Newton y se aplica actualmente para los fluidos newtonianos. Donde un fluido newtoniano es un fluido cuya viscosidad dinámica μ depende de la presión y de la temperatura, pero no del gradiente de la velocidad $\frac{dv}{dy}$. Los fluidos newtonianos son el agua, el aire, la mayor parte de los gases y en general los fluidos de pequeña viscosidad. (Ramírez, 2006; Dalmati & Péres, 2007; Méndez-Sánchez; Mataix, 1986; Pérez-Trejo, & Mercado, 2010; Méndez-Sánchez, Pérez-Trejo, & Mercado, 2010)

La presión, p , en un punto es el valor absoluto de la fuerza por unidad de superficie a través de una pequeña superficie que pasa por ese punto. Sus unidades en el sistema internacional es el Pascal ($1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{\text{m}^2} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}$). El caso de los sólidos en reposo, las fuerzas sobre una superficie pueden tener cualquier dirección, en el caso de los fluidos en reposo la fuerza ejercida sobre una superficie debe ser siempre perpendicular a la superficie, ya que si hubiera un componente tangencial, el fluido fluiría. En el caso de un fluido en movimiento, si éste es no viscoso tampoco aparecen componentes tangenciales de la fuerza, pero si se trata de un fluido viscoso sí que aparecen fuerzas tangenciales de rozamiento.

De este modo, un fluido en reposo a una presión p , ejerce una fuerza $-p \cdot d\vec{S}$ sobre cualquier superficie plana arbitraria en contacto con el fluido en el punto, definida por un vector unitario $d\vec{S}$, perpendicular a la superficie. En general, la presión en un fluido depende del punto, $p = p(x; y; z)$. Así, podemos decir que la presión es la fuerza ejercida (perpendicularmente) sobre una superficie, por unidad de área (o superficie). Es decir:

$$p = \frac{F}{A} \Rightarrow F = p \cdot A \quad [2.9]$$

donde A , es la unidad de superficie.

La compresibilidad κ es el efecto de cambio de volumen con la variación de presión p . Sus unidades en el sistema internacional son (m^2/N) . Está dado por:

$$\kappa = -V \cdot \frac{dp}{dV} \quad [2.10]$$

donde para el caso de los sólidos κ es muy grande, para líquidos κ es grande y para gases κ es pequeño. El signo negativo, es debido a que los sentidos de las variaciones de presión y de volumen son contrarios, es decir ante un aumento de presión el volumen disminuye.

Los gases constituyen la forma más simple de la materia, y muestran un comportamiento típico que los caracteriza. Por ejemplo, tienden a llenar completamente el recipiente que los contiene, lo que demuestra que las partículas en los gases se mueven libremente en el espacio. Son fácilmente compresibles, lo que indica que existe mucho espacio libre entre las partículas. Pero la característica más relevante es que ejercen presión, lo que sugiere que se mueven aleatoriamente, chocando entre sí y contra las paredes del recipiente que los contiene. De acuerdo con estas características, los gases pueden ser descritos como una colección de partículas moviéndose en forma libre y aleatoria,

chocando permanentemente entre ellas y contra las paredes del recipiente que las contiene. (Méndez, 2011)

Una mezcla está formada por dos o más sustancias (elementos o compuestos) en proporciones variables o no definidas, y sus propiedades, van a depender de su composición. En una mezcla, los componentes no pierden su identidad ni sus características y pueden ser separados por medios físicos o mecánicos. (Pérez, 2009)

En una mezcla homogénea: la composición y propiedades son uniformes en cualquier parte de una muestra determinada. No tienen fases observables, pues sus componentes se mezclan como átomos individuales, iones o moléculas, lo que hace que sus componentes no se visualicen. (Pérez, 2009)

En las mezclas no homogéneas: sus componentes se separan en zonas diferenciadas. En consecuencia, la composición, el aspecto y las propiedades físicas varían de una zona a otra de la mezcla (Pérez, 2009).

Los fenómenos de transporte tienen lugar en aquellos procesos, conocidos como procesos de transferencia, en los que se establece el

movimiento de una propiedad (masa, momento o energía) en una o varias direcciones bajo la acción de una fuerza impulsora. Al movimiento de una propiedad se le denomina flujo. (Marciarelli, Stancich, & Stappani, 2012)

En el caso de la transferencia de masa como fenómeno tiene lugar en mezcla de compuestos, las cuales pueden ser binarias (dos compuestos), ternarias (tres compuestos) o multicompuestos (para más de tres compuestos). Para poder establecer una base común para los estudios de transferencia de masa es importante estudiar primero las definiciones y relaciones que se utilizan a menudo para cuantificar las cantidades de los compuestos en las mezclas. (Vargas & Almera, 2008)

Deberemos tener en cuenta que la transferencia de masa es un resultado de la diferencia de concentraciones, o gradiente, en donde la sustancia que se difunde abandona un lugar en que está muy concentrada y pasa a un lugar de baja concentración. (Treybal, 1995)

El mecanismo de transferencia de masa depende de la dinámica del sistema en que se lleva a cabo. A través del tiempo una mezcla no homogénea varía la distribución de su concentración punto a punto en el espacio. Esta variación es causada por los dos fenómenos de

transferencia de masa que existen: Convectiva y Difusión ordinaria o Molecular.

El fenómeno es convectivo si la masa puede transferirse debido al movimiento global (macroscópico) del fluido. Puede ocurrir que el movimiento se efectúe en régimen laminar o turbulento.

El fenómeno es difusivo (o transporte molecular) si la transferencia (o desplazamiento) de moléculas individuales a través de un fluido por medio de los desplazamientos individuales y desordenados de las moléculas, debido a una diferencia de concentraciones; puesto que las sustancias se moverán de un punto de concentración elevada a otro de baja concentración. La rapidez con la cual un soluto se mueve en cualquier punto y en cualquier dirección dependerá, por tanto, del gradiente de concentración en ese punto y esa dirección. Para describir cuantitativamente este proceso, se necesita una medida apropiada de la rapidez de transferencia que puede describirse adecuadamente en función del flujo molar. La difusión puede ocurrir en sistemas de fluidos estancados o en fluidos que se están moviendo. (Treybal, 1995; Marciarelli, Stancich, & Stappani, 2012). Usualmente, ambos fenómenos (convección y difusión) actúan simultáneamente. Sin embargo, uno puede

ser cuantitativamente dominante. Por lo tanto, para el análisis de un problema en particular es necesario considerar solo a dicho mecanismo dominante. (Marciarelli, Stancich, & Stappani, 2012)

Un sistema es una porción del universo objeto de estudio. Es una región restringida, no necesariamente de volumen constante, ni fija en el espacio, en donde se puede estudiar la transferencia y transmisión de masa y energía. Todo sistema queda limitado por un contorno, paredes, fronteras o límites del sistema que pueden ser reales o imaginarios. La frontera separa el sistema del resto del universo; esta frontera puede ser material o no. A través de la frontera suceden los intercambios de trabajo, calor o materia entre el sistema y su entorno. El medio rodeante o entorno es la parte del universo próxima al sistema y que se ve afectada en alguna medida por los procesos que ocurren en el sistema. (Gómez, 2005)

Un sistema es abierto cuando es posible la transferencia de masa y de energía a través de sus límites; la masa contenida en él no es necesariamente constante. Se denomina superficie de control a la superficie limitante que por lo menos en parte debe ser permeable o imaginaria. (Gómez, 2005)

Los sistemas eulerianos, llamados también volúmenes de control, son sistemas abiertos los cuales se utilizan fundamentalmente en la termodinámica y en el estudio de fenómenos de transferencia de momento, calor y masa. Estos sistemas también nos sirven para analizar procesos dinámicos en los cuales hay velocidades y flujos, ambas cantidades están asociadas al tiempo. De tal manera, en vez de utilizar cantidades totales de masa, será más cómodo referirnos a caudales (Müller, 2002). Por tanto, un sistema abierto o volumen de control hace referencia a un volumen ficticio el cual permite intercambiar masa con el medio ambiente. (Pasinato, 2008)

Un proceso isotérmico es aquel en la que la temperatura es constante. Si existe intercambio de calor entre el sistema y el entorno, ocurre “muy lentamente”, tal que se mantenga el equilibrio térmico entre sistema y entorno. Mientras que en un proceso isobárico es un proceso termodinámico que ocurre a presión constante. (Falconi, 2011)

Antes de definir las leyes y ecuaciones que regulan la transferencia de masa es necesario definir las diferentes formas de contabilizar la cantidad de una especie (i) en una mezcla de n componentes. Para el caso de un sistema binario (dos componentes: líquido o gaseoso) se

especifican las especies con los subíndices A y B. (Betancourt, 1996; Vargas & Almera, 2008)

Las concentraciones nos dicen cuánto hay de un componente respecto a la mezcla. En la medida que las cantidades del componente y la mezcla son escritas en diferentes unidades (masa, volumen o moles), nacen las diferentes definiciones de concentraciones que conocemos y algunas otras menos comunes pero con aplicaciones muy importantes en procesos bien particulares. A continuación, presentamos las formas más comunes de expresar las concentraciones de un componente en una mezcla.

La concentración másica volumétrica, ρ_i , es la cantidad de la masa del componente i, que está contenida en la unidad de volumen de la mezcla. Para una mezcla de A y B componentes tenemos:

$$\rho_A = \frac{m_A}{V_{A+B}} \quad [2.11] \quad \rho_B = \frac{m_B}{V_{A+B}} \quad [2.12]$$

donde $V_{A+B} = V_A + V_B = V$, volumen total de la mezcla, $m_{A+B} = m_A + m_B = m$, masa total de la mezcla, m_A y V_A , es la masa y el volumen del componente A y m_B y V_B , son la masa y el volumen del componente B, respectivamente; a partir de las cuales se obtiene:

$$\rho_A + \rho_B = \frac{m_A}{V_{A+B}} + \frac{m_B}{V_{A+B}} = \frac{m_A + m_B}{V_{A+B}} = \frac{m}{V} = \rho$$

resultando:

$$\rho_A + \rho_B = \rho \quad [2.13]$$

Sus unidades en el sistema internacional son (kg/m^3).

La concentración molar volumétrica \bar{C}_i , está dada por la cantidad de moles de la componente i , por la unidad de volumen de la mezcla total.

Para una mezcla de A y B componentes tenemos:

$$\bar{C}_A = \frac{\rho_A}{M_A} \quad [2.14] \quad \bar{C}_B = \frac{\rho_B}{M_B} \quad [2.15]$$

donde M_A y M_B , son las masas molares de las componentes A y B, respectivamente, $\bar{C}_A + \bar{C}_B = C$, es la concentración molar total de la mezcla. Además, las masas molares de los componentes se calculan de la siguiente manera:

$$\text{Masa molar de la componente} = \frac{\text{Masa de la componente}}{\text{Número de moles de la componente}} \quad [2.16]$$

Obteniéndose $M_A = \frac{m_A}{\eta_A}$, $M_B = \frac{m_B}{\eta_B}$; donde η_A y η_B , son el número de moles correspondientes a las componentes A y B, respectivamente.

Teniendo en cuenta [2.14], [2.15], [2.11] y [2.12] tenemos:

$$\bar{C}_A = \frac{\frac{\rho_A}{\frac{m_A}{\eta_A}}}{\eta_A} = \frac{\eta_A \cdot \rho_A}{m_A} = \frac{\eta_A}{m_A} \cdot \frac{m_A}{V_{A+B}} = \frac{\eta_A}{V_{A+B}} = \frac{\eta_A}{V} \quad [2.17]$$

$$\bar{C}_B = \frac{\frac{\rho_B}{\frac{m_B}{\eta_B}}}{\eta_B} = \frac{\eta_B \cdot \rho_B}{m_B} = \frac{\eta_B}{m_B} \cdot \frac{m_B}{V_{A+B}} = \frac{\eta_B}{V_{A+B}} = \frac{\eta_B}{V} \quad [2.18]$$

Sus unidades en el sistema internacional son (kmol/m^3).

La fracción másica, C_i , de un componente de la mezcla es el cociente entre la masa del componente y la masa total de la mezcla. Para una mezcla de A y B, componentes tenemos:

$$C_A = \frac{m_A}{m_{A+B}} \quad [2.19] \quad C_B = \frac{m_B}{m_{A+B}} \quad [2.20]$$

De donde, teniendo en cuenta [2.11] y [2.12] tenemos:

$$C_A = \frac{m_A}{m_{A+B}} = \frac{\rho_A \cdot V_{A+B}}{m_{A+B}} = \frac{\rho_A}{\frac{m_{A+B}}{V_{A+B}}} = \frac{\rho_A}{\frac{m}{V}} = \frac{\rho_A}{\rho} \quad [2.21]$$

$$C_B = \frac{m_B}{m_{A+B}} = \frac{\rho_B \cdot V_{A+B}}{m_{A+B}} = \frac{\rho_B}{\frac{m_{A+B}}{V_{A+B}}} = \frac{\rho_B}{\frac{m}{V}} = \frac{\rho_B}{\rho} \quad [2.22]$$

La fracción másica es una magnitud adimensional. Además, debe tomar valores positivos y la suma de las fracciones de masa, debe ser uno, es decir,

$$C_A + C_B = 1 \quad [2.23]$$

La fracción molar, X_i , es el cociente entre la concentración molar de la componente de la mezcla y la concentración molar total de la mezcla. Para una mezcla de A y B, componentes tenemos:

$$X_A = \frac{\bar{C}_A}{C} \quad [2.24] \quad X_B = \frac{\bar{C}_B}{C} \quad [2.25]$$

La fracción molar es una magnitud adimensional. La suma de las fracciones molares, debe ser uno, es decir:

$$X_A + X_B = 1 \quad [2.26]$$

Por otro lado, tenemos los siguientes resultados:

$$X_A M_A + X_B M_B = \frac{\bar{C}_A}{C} \cdot \frac{\rho_A}{\bar{C}_A} + \frac{\bar{C}_B}{C} \cdot \frac{\rho_B}{\bar{C}_B} = \frac{\rho_A}{C} + \frac{\rho_B}{C} = \frac{\rho_A + \rho_B}{C} = \frac{\rho}{C} \quad [2.27]$$

$$\frac{C_A}{M_A} + \frac{C_B}{M_B} = \frac{\rho_A}{\rho \cdot M_A} + \frac{\rho_B}{\rho \cdot M_B} = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{C}_A + \frac{1}{\rho} \cdot \bar{C}_B = \frac{\bar{C}_A + \bar{C}_B}{\rho} = \frac{C}{\rho} \quad [2.28]$$

(Betancourt, 1996; James, Charles, & Robert, 1994; Vargas & Almera, 2008)

En un sistema de componentes múltiples las diferentes especies se moverán con frecuencia a diferentes velocidades. Por lo tanto, para evaluar la velocidad de una mezcla se necesitan promediar la velocidad de cada una de las especies presentes; para lo que primero determinaremos la velocidad de una especie de la mezcla. (Vargas & Almera, 2008). Por otro lado, la transferencia de masa en un sistema de componentes múltiples cada componente individual de la mezcla se mueve con una velocidad diferente (Venkanna, 2010).

La velocidad promedio o media de la masa, \bar{v} , correspondiente a una mezcla de componentes múltiples se define en función de las densidades y velocidades de la masa, de todas las componentes, es decir:

$$\bar{v} = \frac{\sum_i m_i \cdot \bar{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \cdot \bar{v}_i}{m} \quad [2.29]$$

donde \vec{v}_i es la velocidad absoluta de la especie i con relación a un sistema de coordenadas de referencia fijos (James, Charles, & Robert, 1994). Para el caso de un sistema binario de las componentes A y B , tenemos:

$$\vec{U} = \frac{m_A \cdot \vec{v}_A + m_B \cdot \vec{v}_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A \cdot \vec{v}_A}{m_A + m_B} + \frac{m_B \cdot \vec{v}_B}{m_A + m_B} = C_A \cdot \vec{v}_A + C_B \cdot \vec{v}_B \quad [2.30]$$

De una manera similar la velocidad molar media o promedio, \vec{V} , de una mezcla de componentes múltiples, se define en función de las concentraciones y velocidades molares de todas las componentes, es decir:

$$\vec{V} = \frac{\sum_i \bar{C}_i \cdot \vec{v}_i}{\sum_i \bar{C}_i} = \frac{\sum_i \bar{C}_i \cdot \vec{v}_i}{C} \quad [2.31]$$

Para el caso de un sistema binario de las componentes A y B , tenemos:

$$\vec{V} = \frac{\bar{C}_A \cdot \vec{v}_A + \bar{C}_B \cdot \vec{v}_B}{\bar{C}_A + \bar{C}_B} = \frac{\bar{C}_A \cdot \vec{v}_A}{C} + \frac{\bar{C}_B \cdot \vec{v}_B}{C} = X_A \cdot \vec{v}_A + X_B \cdot \vec{v}_B \quad [2.32]$$

(James, Charles, & Robert, 1994; Vargas & Almera, 2008)

A la velocidad de una especie, en particular con relación a la velocidad promedio masa o velocidad promedio molar, se le denomina velocidad de difusión. Estas dos velocidades diferentes de difusión están expresadas por:

$\vec{v}_i - \vec{v}$ = Velocidad de difusión de la componente i , con relación a la velocidad \vec{v} .

$\vec{v}_i - \vec{V}$ = Velocidad de difusión de la componente i, con relación a la velocidad \vec{V} (James, Charles, & Robert, 1994; Vargas & Almera, 2008).

La densidad de flujo puede ser másica o molar de una especie dada, la cual es una magnitud vectorial definida por la masa o moles que atraviesan la unidad de área dA_c (sección transversal) por unidad de tiempo. El movimiento puede estar referido a las coordenadas que permanecen fijas en el espacio o las coordenadas que están moviéndose a velocidad \vec{u} o \vec{V} . De esta manera, las distintas formas de expresar la densidad de flujo de un componente i que forma parte de una mezcla de n componentes. (Ibarz & Barbosa, 2005; James, Charles, & Robert, 1994; Vargas & Almera, 2008) será:

a) Respecto a las coordenadas que permanecen fijas:

- Densidad de flujo másico \vec{n}_i

$$\vec{n}_i = \rho_i \cdot \vec{v}_i \left[\frac{\text{Masa}}{\text{Área x tiempo}} \right] \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right] \quad [2.33]$$

- Densidad de flujo molar \vec{N}_i

$$\vec{N}_i = \bar{C}_i \cdot \vec{v}_i \left[\frac{\text{Moles}}{\text{Área x tiempo}} \right] \left[\frac{\text{kmol}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right] \quad [2.34]$$

b) Respecto a las coordenadas que están moviéndose:

- Densidad de flujo másico de difusión relativa a la velocidad \vec{u}

$$\vec{j}_i = \rho_i \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}) \quad [2.35]$$

- Densidad de flujo másico de difusión relativa a la velocidad \vec{V}

$$\vec{j}_i^* = \rho_i \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}) \quad [2.36]$$

- Densidad de flujo molar de difusión relativa a la velocidad \vec{v}

$$\vec{J}_i = \bar{C}_i \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}) \quad [2.37]$$

- Densidad de flujo molar de difusión relativa a la velocidad \vec{V}

$$\vec{J}_i^* = \bar{C}_i \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}) \quad [2.38]$$

De todas estas formas de densidad existe algunas de ellas que apenas se aplican, tales como \vec{j}_i^* y \vec{J}_i . De todas ellas la más utilizada en ingeniería es la densidad de flujo molar referidas a las coordenadas que permanecen fijas \vec{N}_i .

Desarrollando la ecuación [2.35] y teniendo en cuenta [2.33] tenemos:

$$\vec{j}_i = \rho_i \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}) \Rightarrow \vec{j}_i = \rho_i \cdot \vec{v}_i - \rho_i \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{j}_i = \vec{n}_i - \rho_i \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{n}_i = \vec{j}_i + \rho_i \cdot \vec{v}$$

de donde resulta que:

$$\vec{n}_i = \vec{j}_i + \rho_i \cdot \vec{v} \quad [2.39]$$

Desarrollando la ecuación [2.38] y teniendo en cuenta [2.34], [2.31], [2.24] y [2.25] tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{J}_i^* &= \bar{c}_i \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}) \Rightarrow \vec{J}_i^* = \bar{c}_i \cdot \vec{v}_i - \bar{c}_i \cdot \vec{V} \Rightarrow \vec{J}_i^* = \vec{N}_i - \\ &\bar{c}_i \left[\frac{\sum_i \bar{c}_i \cdot \vec{v}_i}{C} \right] \\ \vec{J}_i^* &= \vec{N}_i - \frac{\bar{c}_i}{C} \sum_i \bar{c}_i \cdot \vec{v}_i \Rightarrow \vec{J}_i^* = \vec{N}_i - \frac{\bar{c}_i}{C} \cdot \vec{N}_i \Rightarrow \vec{J}_i^* = \vec{N}_i - X_i \cdot \vec{N}_i \Rightarrow \vec{N}_i = \\ &\vec{J}_i^* + X_i \cdot \vec{N}_i \end{aligned}$$

de donde resulta que:

$$\vec{N}_i = \vec{J}_i^* + X_i \cdot \vec{N}_i \quad [2.40]$$

Cuando existen diferencias de concentraciones en una mezcla, se produce una migración selectiva de los componentes de la mezcla cuya distribución de concentraciones no sea uniforme. Este movimiento se da específicamente desde las zonas de alta concentración hasta las zonas de baja concentración; esto es lo que en fenómenos de transporte se conoce como transferencia de masa. Las leyes de transferencia de masa ponen de manifiesto la relación entre el flujo de las sustancias que se están difundiendo y el gradiente de concentración responsable de esta transferencia de masa. (Vargas & Almera, 2008)

La difusión molecular en gases es un fenómeno por el cual las moléculas individuales de un gas A se desplazan y se distribuyen a través de otro gas B, por medio de desplazamientos individuales y desordenados de las moléculas. Por tal razón la difusión molecular también es llamada proceso con trayectoria aleatoria. (Berrocal, 2011)

Aunque las velocidades de traslación de las moléculas son muy altas (cientos de metros por segundo), el movimiento molecular de una especie es muy lento. En los gases se propaga la difusión (en condiciones normales) a una velocidad de alrededor de 5 cm/min. La muy baja tasa de difusión es causada por las colisiones moleculares que se producen a un ritmo de millones por segundo por cm³. Esto produce, en extremo fuerte obstaculización del movimiento de las moléculas. Por lo tanto, la distancia recorrida por una molécula en la fase gaseosa entre dos colisiones posteriores, llamado trayectoria libre medio o la distancia libre media, es muy baja $\sim 10^{-1}$ cm. (Burghardt, 2005)

El flujo neto de moléculas se relaciona directamente con la diferencia de concentración, respecto a la posición (gradiente de concentración) mediante una relación causa – efecto; es decir, la diferencia de concentración producirá el flujo de masa difusivo. La relación

básica correspondiente a la difusión molecular define el flujo molar relativo a la velocidad molar media \vec{J}_i^* . (Vargas & Almera, 2008). Adolf Fick fue quien primero postuló una relación empírica para este flujo molar, la cual lleva su nombre conocida como la primera Ley de Fick. En una mezcla de dos componentes, A y B, la velocidad de transferencia de masa del componente A depende de la velocidad de difusión de A y del comportamiento de B. (Ebner, s.f.)

La ecuación de Fick de la rapidez de un flujo molar para una mezcla binaria en un sistema isotérmica e isobárica, establece lo siguiente: El flujo molar es directamente proporcional al gradiente de concentración. Se expresa matemáticamente:

$$\text{Flujo molar: } \vec{J}_{Az}^* = - C \cdot D_{AB} \cdot \frac{\partial X_A}{\partial z} \quad [2.41]$$

$$\text{Flujo másico: } \vec{J}_{Az} = - \rho \cdot D_{AB} \cdot \frac{\partial C_A}{\partial z} \quad [2.42]$$

Donde:

D_{AB} : es el coeficiente de difusión o difusividad másica del componente A, a través del componente B. La difusividad nos indica la facilidad con que el componente A, se transfiere en la mezcla. Si la difusividad tiene un valor elevado, entonces hay mucha facilidad para el transporte de masa. El coeficiente de difusión depende de la presión, de la temperatura y de la

composición del sistema. Como es de esperar, de acuerdo con la movilidad de las moléculas, los coeficientes de difusión presentan diferencias significativas, dependiendo de la fase en que tenga lugar este mecanismo de transporte. Así, tenemos que las difusividades de los gases oscilan entre $0,5 \cdot 10^{-6}$ y $1,0 \cdot 10^{-5}$. Sus unidades en el sistema internacional son (m^2/s).

X_A : fracción molar del componente A .

C_A : fracción másica del componente A .

$\frac{\partial X_A}{\partial z}$: es el gradiente de concentración molar en la dirección z.

$\frac{\partial C_A}{\partial z}$: es el gradiente de concentración másica en la dirección z.

\vec{J}_{Az}^* : es el flujo molar en la dirección de z, relativa a la velocidad molar promedio; sus unidades en el sistema internacional son ($\text{kmol}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$).

\vec{j}_{Az} : es el flujo másico en la dirección de z, relativa a la velocidad másica promedio; sus unidades en el sistema internacional son ($\text{kg}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$).

El signo negativo indica la dirección del flujo de la concentración decreciente, es decir, de mayor a menor concentración. (Anantharaman & Begum, 2005; Marciarelli, Stancich, & Stappani, 2012; Vargas & Almera, 2008)

Las expresiones para estimar el coeficiente de difusión D_{AB} cuando no se cuenta con datos experimentales están basadas en la teoría cinética de los gases. Se recomienda utilizar el método de Hirschfelder-Bird-Spotz para mezclas de gases binarias no polares o de un gas polar con un no polar a baja presión. (Torres, 2007; Treybal, 1995)

$$D_{AB} = \frac{10^{-4} \left[1,048 - 0,249 \sqrt{\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}} \right] \cdot T^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}}}{p_t \cdot (r_{AB})^2 \cdot f(kT/\varepsilon_{AB})} \quad [2.43]$$

Donde:

T: es la temperatura absoluta (K)

M_A , M_B : peso molecular de A y B, respectivamente, (g/mol)

p_t : presión absoluta (N/m^2)

$r_{AB} = \frac{r_A + r_B}{2}$: separación molecular durante el choque (nm)

r_A , r_B : diámetros de colisión de las componentes A y B, respectivamente, (nm)

ε_{AB} : energía de la atracción molecular (kJ); con $\frac{\varepsilon_{AB}}{k} = \left[\left(\frac{\varepsilon_A}{k} \right) \left(\frac{\varepsilon_B}{k} \right) \right]^{1/2}$

k: es la constante de Boltzmann, con $k = (1,38)(10^{-23})$, (kJ/K)

$f(kT/\varepsilon_{AB})$: es la función de colisión

A partir de la ecuación [2.41] y considerando de que la concentración global C es constante, o bien si no existe reacción

química, o cuando existiendo reacción química no hay variación en el número de moles, obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{Az}^* &= -C \cdot D_{AB} \cdot \frac{\partial X_A}{\partial z} \Rightarrow \vec{J}_{Az}^* = -D_{AB} \cdot \left[C \cdot \frac{\partial X_A}{\partial z} \right] \Rightarrow \vec{J}_{Az}^* = \\ &- D_{AB} \cdot \frac{\partial}{\partial z} [C \cdot X_A] \Rightarrow \vec{J}_{Az}^* = -D_{AB} \cdot \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial z} \end{aligned}$$

resultando

$$\vec{J}_{Az}^* = -D_{AB} \cdot \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial z} \quad [2.44]$$

Por lo tanto, para el caso de los gases, si la presión y la temperatura son constantes a lo largo de la trayectoria de difusión, las ecuaciones [2.41] y [2.44] son equivalentes. (Ibarz & Barbosa, 2005; Torres, 2007; Treybal, Rodríguez, & Lozano, 1995)

Para el caso de transferencia de masa en todas las direcciones tenemos:

$$\text{Flujo molar:} \quad \vec{J}_A^* = -C \cdot D_{AB} \cdot \nabla X_A \quad [2.45]$$

$$\text{Flujo másico:} \quad \vec{J}_A = -\rho \cdot D_{AB} \cdot \nabla C_A \quad [2.46]$$

Donde:

∇ : es el símbolo que representa al operador nabla.

$\nabla X_A = \left(\frac{\partial X_A}{\partial x}; \frac{\partial X_A}{\partial y}; \frac{\partial X_A}{\partial z} \right)$: es el gradiente de fracción molar del componente A.

$\nabla C_A = \left(\frac{\partial C_A}{\partial x}; \frac{\partial C_A}{\partial y}; \frac{\partial C_A}{\partial z} \right)$: es el gradiente de concentración másica del componente A.

De las ecuaciones [2.39], [2.46] y [2.21] obtenemos:

$$\vec{n}_A = \vec{j}_A + \rho_A \vec{v} \Rightarrow \vec{n}_A = -\rho D_{AB} \nabla C_A + \rho_A \vec{v} \Rightarrow \vec{n}_A = -\rho D_{AB} \nabla C_A + \rho C_A \vec{v}$$

resultando

$$\vec{n}_A = -\rho D_{AB} \nabla C_A + \rho C_A \vec{v} \quad [2.47]$$

Se sabe, por otro lado, que la masa no se crea ni se destruye, sino que se conserva. Este es uno de los principios básicos en el estudio del movimiento de los fluidos. Para su entendimiento consideraremos un volumen de control (VC) en el flujo (Sámano & Sen, 2009). Sea un VC diferencial $\Delta x \Delta y \Delta z$, fijo en el espacio e inmerso en un medio continuo en movimiento que lo ocupa en cada punto y en todo instante, como se muestra en la figura 2; a través del cual fluye por convección forzada una mezcla binaria de A y B. Es evidente que el balance entre la masa entrante y saliente a través de la superficie del mismo y en un instante dado, más la variación de la masa en su interior y con la variable tiempo tendiendo a cero, da inexorablemente una masa resultante nula, puesto que esta no puede crearse ni desaparecer. (Pérez, 2002)

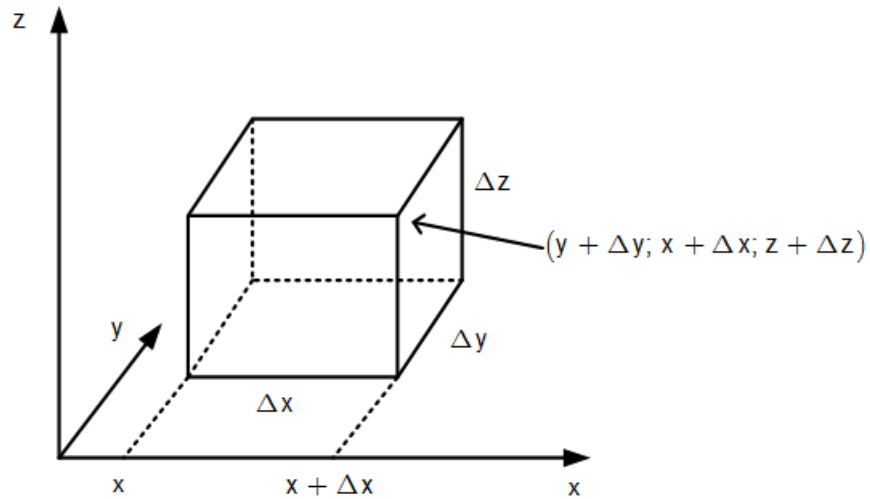


Figura 2. Volumen de control

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta que en un VC, la masa puede cruzar las fronteras y, por consiguiente, se debe considerar la razón de la masa que entra y que sale del VC (Cengel & Cimbala, 2007). De esta manera en un VC se puede enunciar la ley de la conservación de la masa de la siguiente forma: “La transferencia neta de masa hacia o desde el VC durante un intervalo de tiempo Δt es igual al cambio neto (incremento o disminución) en la masa total dentro del VC durante Δt ”. Es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Variación neta de la masa} \\ \text{dentro del VC durante } \Delta t \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Masa total de la especie A} \\ \text{que entra al VC durante el } \Delta t \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Masa total de la especie A} \\ \text{que sale del VC durante el } \Delta t \end{array} \right\}$$

En forma simbólica tenemos:

$$\Delta m = m_E - m_S \quad [2.48]$$

Donde:

Δm : es la variación de la masa dentro del VC

m_E : es la masa que entra al VC

m_S : es la masa que sale del VC

(Falconi, 2011; Cengel & Cimbala, 2007).

Teniendo en cuenta la velocidad del fluido que entra y sale del VC, se puede enunciar la ley de la conservación de la masa para la componente A, de la siguiente manera: La velocidad de acumulación de masa de la componente A dentro del VC será igual a la diferencia de la velocidad de masa de A que entra en el VC, y la velocidad de masa de A que sale del volumen de control.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de acumulación} \\ \text{de masa de A en el} \\ \text{VC durante el } \Delta t \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de masa} \\ \text{de A que entra en} \\ \text{el VC durante el } \Delta t \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de masa} \\ \text{de A que sale del} \\ \text{VC durante el } \Delta t \end{array} \right\}$$

Para la conservación de una componente química A determinada, esta relación debe incluir un término que corresponda a la generación o desaparición de A por medio de una reacción química o biológica que ocurra dentro del volumen de control (Marciarelli, Stancich, & Stappani, 2012).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{acumulación de} \\ \text{masa de A en el} \\ \text{VC durante el } \Delta t \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{masa de A que} \\ \text{entra en el VC} \\ \text{durante el } \Delta t \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{masa de A que} \\ \text{sale del VC} \\ \text{durante el } \Delta t \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de generación} \\ \text{o desaparición de la} \\ \text{masa de A en el} \\ \text{VC durante el } \Delta t \end{array} \right\} \quad [2.49]$$

Por otro lado, un fluido discurre hacia dentro o hacia fuera de un VC por tubos o ductos. El gasto diferencial de masa de fluido $d\vec{n}_i$ que fluye a través de un pequeño elemento de área, dA_c (sección transversal), en una sección transversal de tubo es proporcional al propio dA_c , a la densidad ρ_i del fluido y a la componente de la velocidad del flujo normal a dA_c , la cual lo hemos denotado como \vec{v}_i , y se expresa como:

$$d\vec{n}_i = \rho_i \cdot \vec{v}_i \cdot dA_c \quad [2.50]$$

(Cengel & Cimbala, 2007)

Consideremos las dos caras del VC perpendiculares al eje x . La velocidad de entrada de materia de la componente A en el VC a través de la cara en $x = x_0$ y en virtud de [2.50] será $(\rho_A \cdot \vec{v}_A)|_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, y la velocidad de salida de materia de la componente A , a través de la cara $x = x_0 + \Delta x$ es $(\rho_A \cdot \vec{v}_A)|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z$. Expresiones semejantes pueden escribirse para los otros dos pares de caras del VC, tal como se muestra en la figura 3. (Bird, Stewart, & Lightfoot, 2006)

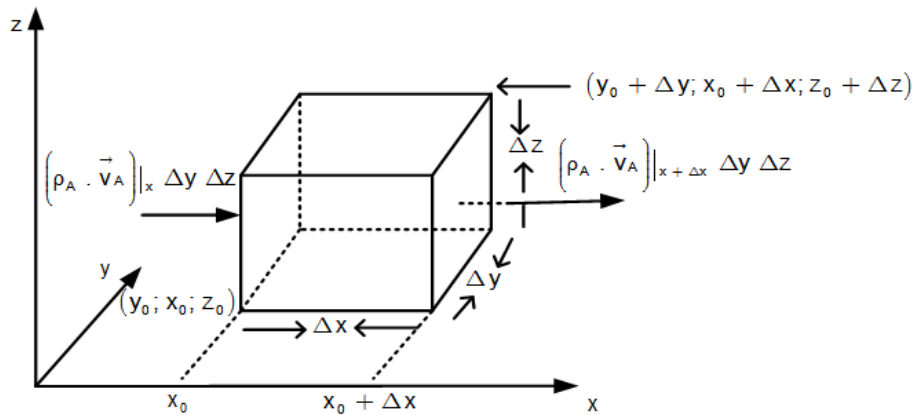


Figura 3. Volumen de control a través del cual circula un fluido.
Fuente: Elaboración propia

Resultando por tanto que la velocidad neta de flujo de masa de la especie A; será:

En la dirección del eje x: $\rho_A \cdot \vec{v}_A|_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z - \rho_A \cdot \vec{v}_A|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

En la dirección del eje y: $\rho_A \cdot \vec{v}_A|_y \cdot \Delta x \cdot \Delta z - \rho_A \cdot \vec{v}_A|_{y+\Delta y} \cdot \Delta x \cdot \Delta z$

En la dirección del eje z: $\rho_A \cdot \vec{v}_A|_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y - \rho_A \cdot \vec{v}_A|_{z+\Delta z} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$

La velocidad de acumulación de materia de la especie A en el VC es

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (\text{Mendizabal \& Oronel, 2005}).$$

Puesto que la velocidad de acumulación de una componente A dentro de un VC se produce mediante una reacción química, se debe tener en cuenta que la velocidad de reacción f_A indica la variación de la concentración con el tiempo. Es decir:

$$f_A = \frac{\Delta \rho_A}{\Delta t} \quad [2.51]$$

sus unidades en el sistema internacional son ($\text{kg}/\text{m}^3 \cdot \text{s}$).

Si la componente A se genera dentro del VC por medio de una reacción química, el término de generación queda: $f_A \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.

Ahora, teniendo en cuenta la ecuación [2.49] tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = & \rho_A \cdot \vec{v}_A|_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z - \rho_A \cdot \vec{v}_A|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \\ & \rho_A \cdot \vec{v}_A|_y \cdot \Delta x \cdot \Delta z - \rho_A \cdot \vec{v}_A|_{y+\Delta y} \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \rho_A \cdot \vec{v}_A|_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ & - \rho_A \cdot \vec{v}_A|_{z+\Delta z} \cdot \Delta x \cdot \Delta y + f_A \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \end{aligned} \quad [2.52]$$

Por otro lado, si se divide a ambos miembros de la ecuación [2.52] por $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_A}{\partial t} = & \frac{\rho_A \cdot \vec{v}_A|_x - \rho_A \cdot \vec{v}_A|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\rho_A \cdot \vec{v}_A|_y - \rho_A \cdot \vec{v}_A|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\rho_A \cdot \vec{v}_A|_z - \rho_A \cdot \vec{v}_A|_{z+\Delta z}}{\Delta z} + \\ & f_A \end{aligned} \quad [2.53]$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_A}{\partial t} = & - \frac{\rho_A \cdot \vec{v}_A|_{x+\Delta x} - \rho_A \cdot \vec{v}_A|_x}{\Delta x} - \frac{\rho_A \cdot \vec{v}_A|_{y+\Delta y} - \rho_A \cdot \vec{v}_A|_y}{\Delta y} - \frac{\rho_A \cdot \vec{v}_A|_{z+\Delta z} - \rho_A \cdot \vec{v}_A|_z}{\Delta z} + \\ & f_A \end{aligned} \quad [2.54]$$

o equivalentemente teniendo en cuenta [2.33] se tiene:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = - \frac{\bar{n}_A|_{x+\Delta x} - \bar{n}_A|_x}{\Delta x} - \frac{\bar{n}_A|_{y+\Delta y} - \bar{n}_A|_y}{\Delta y} - \frac{\bar{n}_A|_{z+\Delta z} - \bar{n}_A|_z}{\Delta z} + f_A \quad [2.55]$$

Seguidamente aplicamos a ambos miembros de la ecuación [2.55] el límite cuando $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \longrightarrow 0$ para obtener:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \vec{n}_A}{\partial x} + \frac{\partial \vec{n}_A}{\partial y} + \frac{\partial \vec{n}_A}{\partial z} \right) + f_A \quad [2.56]$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{n}_A}{\partial x} + \frac{\partial \vec{n}_A}{\partial y} + \frac{\partial \vec{n}_A}{\partial z} \right) = f_A \quad [2.57]$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{n}_A - f_A = 0 \quad [2.58]$$

Donde:

$\nabla \cdot \vec{n}_A$: es el gradiente de concentración de flujo másico de la componente A.

La ecuación [2.58] es lo que se conoce como la ecuación de continuidad para la componente A de una mezcla binaria que describe la concentración de A con respecto al tiempo para un punto fijo en el espacio. La variación resulta del movimiento de A y de las reacciones químicas en las que se ve involucrado. (Marciarelli, Stancich, & Stappani, 2012; Vargas & Almera, 2008)

A partir de la ecuación [2.58] y considerando [2.21] y [2.47] se obtiene:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{n}_A - f_A = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\rho C_A)}{\partial t} + \nabla \cdot [-\rho D_{AB} \nabla C_A + \rho C_A \vec{v}] - f_A = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho C_A)}{\partial t} - \rho D_{AB} \nabla^2 C_A + \rho \nabla C_A \vec{u} + \rho C_A \nabla \vec{u} - f_A = 0 &\Rightarrow \frac{\partial(\rho C_A)}{\partial t} \\ + \rho \nabla C_A \vec{u} + \rho C_A \nabla \vec{u} - \rho D_{AB} \nabla^2 C_A = f_A, &\text{ o equivalentemente} \\ \frac{\partial C_A}{\partial t} + \nabla C_A \vec{u} + C_A \nabla \vec{u} - D_{AB} \nabla^2 C_A = \frac{f_A}{\rho} & \quad [2.59] \end{aligned}$$

Cuando la velocidad no depende de la posición, con lo que en un determinado instante, la velocidad (y en general cualquier propiedad) es la misma en todos los puntos del VC. Es decir, la velocidad solo depende del tiempo, y su gradiente es nulo ($\nabla \vec{u} = 0$) (Martínez de la Calle, 2004). Este hecho conduce a que la ecuación [2.59] se reduzca en la siguiente:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla C_A - D_{AB} \cdot \nabla^2 C_A = \frac{f_A}{\rho} \quad [2.60]$$

Por otro lado, dentro del VC no se producirá reacción química alguna, puesto que la componente A que representa al contaminante monóxido de carbono (CO) en el proceso de dispersión de un penacho de escape vehicular, su transformación química es relativamente lento en la atmósfera (Wang, Chan, Cheung, Leung, & Hung, 2006). Por tanto, el término de generación será $f_A = 0$. En consecuencia, ahora la ecuación [2.60] quedará de la siguiente manera:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla C_A - D_{AB} \cdot \nabla^2 C_A = 0 \quad [2.61]$$

Donde:

C_A : es la concentración de la componente A

t: es el tiempo

$\vec{v} = \langle v_x; v_y; v_z \rangle$: es el vector velocidad del viento cuyas componentes están dadas en las direcciones de los ejes de coordenadas x, y, z, respectivamente.

D_{AB} : es el coeficiente de difusión o difusividad másica del componente A, a través del componente B.

$\nabla C_A = \langle \frac{\partial C_A}{\partial x}; \frac{\partial C_A}{\partial y}; \frac{\partial C_A}{\partial z} \rangle$: es el gradiente de la función escalar C_A

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$: es el Laplaciano de un escalar

$\nabla^2 C_A = \nabla \cdot \nabla C_A = \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}$: es la divergencia del gradiente de la función escalar C_A .

(Boluda, 2000; Pasinato, 2008)

Por otro lado, reemplazando el vector velocidad, el gradiente y la divergencia de la función escalar C_A en la ecuación [2.61] se obtiene:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + v_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial C_A}{\partial y} + v_z \frac{\partial C_A}{\partial z} - D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) = 0$$

[2.62]

(Boluda, 2000; Reynolds, Roth, & Seinfeld, 1973)

La ecuación [2.62] es la formulación clásica del problema de transporte por convección-difusión. Asumimos el medio fluido incompresible y no consideramos términos fuente ni reacciones químicas (Giraldo & Neta, 1999; Gómez, Colominas, Navarrina, & Casteleiro, 2007; Winter, 1989; Zoppou & Knight, 1999). La ecuación [2.62] es el modelo matemático deducido que nos permitirá obtener la concentración de CO emitido por los vehículos al aire.

CAPÍTULO III

SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL MODELO MATEMÁTICO

En este capítulo se plantea una solución analítica particular del modelo matemático deducido en el capítulo II. Dicha solución particular resultará de la aplicación del modelo matemático deducido en la intersección en estudio para determinar la concentración del contaminante CO en el aire.

La ecuación de convección-difusión [2.62] generalmente se resuelve numéricamente. Sin embargo, los modelos numéricos representan una aproximación a las ecuaciones que describen el proceso de transporte. Por lo tanto, el uso de soluciones analíticas es una evaluación fiable de la exactitud de un esquema numérico (Zoppou & Knight, 1999). A su vez las soluciones analíticas permiten valiosos conocimientos que se pueden obtener sobre el comportamiento de un sistema. (Lin & Hildemann, 1996)

Las soluciones analíticas de las ecuaciones de convección-difusión son de fundamental importancia en la descripción y comprensión de los fenómenos de dispersión, ya que todos los parámetros se expresan en una forma matemáticamente cerrada y por tanto, la influencia de los parámetros individuales en la concentración de contaminantes se puede expresar fácilmente (Park & Baik, 2008). Por otro lado, la dispersión de los contaminantes procedentes del tráfico es a una distancia relativamente corta (Pospisil, Katolicky, & Jicha, 2004).

La ecuación [2.62] constituye la base de la mayoría de los modelos de contaminación del aire. El primer término del lado izquierdo dependiente del tiempo representa condiciones transitorias (no estacionarias), mientras que los términos segundo, tercero y cuarto representan el transporte debido al viento. Los tres términos siguientes representan la difusión turbulenta en las direcciones x , y y z , respectivamente. (Sharan, Yadav, Singh, Agarwal, & Nigam, 1996)

Para resolver analíticamente la ecuación [2.62] haremos los siguientes supuestos con el fin de simplificarla:

- 1) Los coeficientes de difusión D_{AB} en todas las direcciones son consideradas constantes e iguales y de la misma manera para las

componentes de la velocidad son consideradas constantes en todas las direcciones.

- 2) El eje x positivo está orientado en la dirección del viento promedio; donde la velocidad longitudinal promedio del viento u_x es mucho mayor que la velocidad promedio u_y en la dirección del eje y por tanto $u_y \frac{\partial C_A}{\partial y} = 0$ (Ismaeil, 2013).
- 3) Como la velocidad promedio del viento vertical u_z es mucho menor que la velocidad promedio del viento longitudinal u_x en la dirección del eje z positivo se descuidará; es decir $u_z \frac{\partial C_A}{\partial z} = 0$ (Ismaeil, 2013; Sharan et al., 1996).

Por lo tanto, la ecuación [2.62] se reduce a:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + u_x \frac{\partial C_A}{\partial x} - D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) = 0 \quad [3.1]$$

Puesto que los procesos de transporte tienen lugar en un dominio (sistema) finito y se inician en un tiempo determinado, para derivar las características espacio-temporal de los campos de masa, necesitamos las condiciones iniciales y de frontera (Singh, 2013). Por lo tanto, para resolver la ecuación [3.1] consideraremos como dominio espacial al conjunto Ω el cual será un paralelepípedo; contenido en el espacio

euclidiano \mathbb{R}^3 y delimitado por la frontera $\partial\Omega$; considerando la concentración del contaminante $C_A(x; y; z; t) \in \Omega \times [0; T]$. Es decir:

$$\Omega = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / 8\,008\,546 \leq x \leq 8\,008\,746 \wedge 368\,812 \leq y \leq 369\,012 \wedge 600 \leq z \leq 1\,000\} \quad [3.2]$$

y la frontera de este dominio finito está determinado por

$$\partial\Omega = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x = 8\,008\,546 \wedge x = 8\,008\,746 \wedge y = 368\,812 \wedge y = 369\,012 \wedge z = 600 \wedge z = 1\,000\} \quad [3.3]$$

Con el fin de facilitar los cálculos, en adelante haremos una transformación del sistema de coordenadas $(x; y; z)$ y lo pasaremos al sistema de coordenadas $(X; Y; Z)$ de la siguiente manera:

$$x = 8\,008\,546 + 200 X; \quad y = 368\,812 + 200 Y; \quad z = 600 + 400 Z$$

Resultando ahora que nuestro dominio nuevo será:

$$\Omega = \{(X; Y; Z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq X \leq 1 \wedge 0 \leq Y \leq 1 \wedge 0 \leq Z \leq 1\} \quad [3.4]$$

y la frontera de este nuevo dominio será:

$$\partial\Omega = \{(X; Y; Z) \in \mathbb{R}^3 / X = 0 \wedge X = 1 \wedge Y = 0 \wedge Y = 1 \wedge Z = 0 \wedge Z = 1\} \quad [3.5]$$

donde supondremos que los seis planos que conforman la frontera del dominio son impermeables (Batu, 1996). Tal dominio se muestra en la

figura 4. Por otro lado, las unidades de las coordenadas espaciales estarán consideradas en metros y la coordenada temporal en segundos.

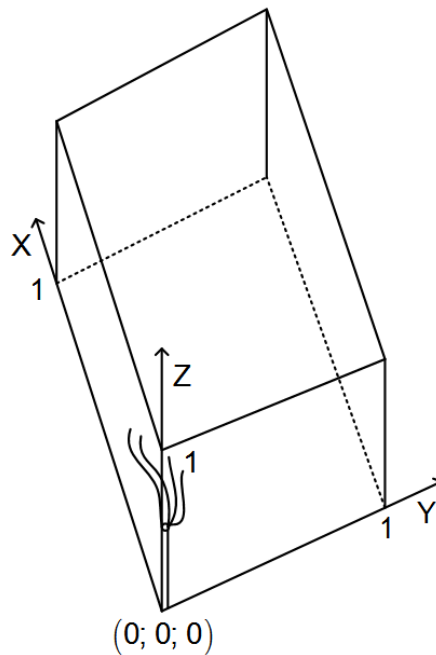


Figura 4. Dominio espacial considerado para este estudio

Fuente: Elaboración propia

A continuación, trataremos de determinar las condiciones de frontera e iniciales.

Condición inicial: Asumiremos que al comienzo de la liberación del contaminante CO en el dominio (o sistema) de dispersión no está contaminado; es decir:

$$C_A(X; Y; Z; t) = 0 \text{ en } t = 0 \quad [3.6]$$

(DM Moreira, Vilhena, Buske, & Tirabassi, 2006; D. M. Moreira, Neto, & da Costa Carvalho, 2005)

Condiciones de frontera: Las condiciones de frontera tipo Dirichlet, indican que los contaminantes se eliminan inmediatamente después del contacto con los límites del dominio (Lin & Hildemann, 1996). Por lo tanto, se asume:

$$C_A(1; Y; Z; t) = 0; \quad C_A(X; 0; Z; t) = 0; \quad C_A(X; 1; Z; t) = 0;$$

$$C_A(X; Y; 0; t) = 0; \quad C_A(X; Y; 1; t) = 0 \quad [3.7]$$

(Zahor, Charles, & Mirau, 2014).

Una función de uso común para la concentración del afluente es la función delta de Dirac. Esta fracción es una aplicación instantánea de una cantidad de soluto (CO) Q en la entrada, en $X = 0$, en un instante arbitrario, t_0 , a través de un volumen está dado por:

$$C_A(0; Y; Z; t) = \frac{Q}{v_x} \delta(Y - Y_0) \delta(Z - H_s) \delta(t - t_0) \quad [3.8]$$

Donde:

Q : es la cantidad concentración de monóxido de carbono que ingresa a nuestro dominio (ppm).

$\delta(\cdot)$: es la función delta de Dirac

v_x : la velocidad promedio del viento (m/s)

H_s : es la altura de la fuente de emisión (m)

Y_0 : es un valor constante sobre el eje Y (m)

(Buske, Vilhena, Tirabassi, & Bodmann, 2012; Kumar & Sharan, 2010; Tirabassi, Vilhena, Buske, & Degrazia, 2013; Vilhena, Buske, Degrazia, & Quadros, 2012)

Las condiciones de frontera homogéneas tipo Neumann establecen que la superficie terrestre y la capa de inversión son a la vez impermeables. Cuando una pluma de dispersión hace contacto con los límites, se refleja de nuevo en la atmósfera (reflexión total). En otras palabras, no tiene lugar la absorción en los límites y por lo tanto todos los contaminantes deben existir en algún lugar entre $Z = 0$ y $Z = 1$ (Lin & Hildemann, 1996; M. Singh & Yadav, 1996). Teniendo en cuenta esto el contaminante no es capaz de penetrar a través de la parte superior de la capa límite atmosférica (PBL) situada a una altura H; es decir:

$$D_{AB} \frac{\partial C_A(X; Y; Z; t)}{\partial Z} = 0 \text{ en } Z = H = 1 \quad [3.9]$$

(Buske, Vilhena, & Moreira, 2009; Kumar & Sharan, 2010; DM Moreira, Vilhena, Tirabassi, Buske, & Cotta, 2005; D. M. Moreira et al., 2005; M. Singh & Yadav, 1996; Wortmann, Vilhena, Moreira, & Buske, 2005)

La superficie terrestre la supondremos perfectamente reflectante y en consecuencia el flujo difusivo se desvanece cerca de la superficie; es decir:

$$D_{AB} \frac{\partial C_A(X; Y; Z; t)}{\partial Z} = 0 \text{ en } Z = 0 \quad [3.10]$$

(De Almeida, Pimentel, & Cotta, 2008; Kumar & Sharan, 2010; D. M. Moreira et al., 2005).

Para asegurar que la concentración de CO se mantenga acotada, las condiciones de entrada y de salida se pueden escribir de la forma:

$$D_{AB} \frac{\partial C_A(X; Y; Z; t)}{\partial X} = 0 \text{ en } X = 0 \text{ y } X = 1 \quad [3.11]$$

Estas condiciones se basan en la continuidad de la concentración a través del límite de entrada (Van Genuchten et al., 2013).

El uso de la condición $X = 1$ para un sistema finito implica que un medio semi-infinito con propiedades idénticas se coloca más allá del sistema de interés. No existe supuestos que tengan que ser realizados en relación con los procesos físicos en la salida $X = 1$, aparte de que la ecuación de convección-difusión es aplicable en cualquier otro con $X > 0$ (Van Genuchten et al., 2013).

Por otro lado, asumimos que en las fronteras $Y = 0$ y $Y = 1$ se cumple:

$$D_{AB} \frac{\partial C_A(X; Y; Z; t)}{\partial Y} = 0 \text{ en } Y = 0 \text{ y } Y = 1 \quad [3.12]$$

(Buske et al., 2009; D. M. Moreira et al., 2005; M. Singh & Yadav, 1996)

Tanto las condiciones tipo Dirichlet (absorción total) como las condiciones tipo Neumann (reflexión total) son apropiados para el cálculo de la concentración real a nivel del suelo de los contaminantes atmosféricos (Goyal & Kumar, 2011).

La fuente de emisión de la concentración de CO lo supondremos ubicado en el punto de coordenadas $(0; 0; H_s)$ que vendrá a ser el tubo de escape de los vehículos (Ning, Cheung, Lu, Liu, & Hung, 2005; Sharan et al., 1996).

Para resolver la ecuación [3.1] sujeto a las ecuaciones [3.6] – [3.12] haremos uso de un método analítico, para obtener una solución exacta, puesto que con una solución analítica es de una importancia fundamental para la comprensión de los fenómenos físicos (Davidson Moreira & Vilhena, 2009). Por otro lado, las soluciones analíticas no solo son herramientas indispensables para predecir la concentración de los

contaminantes del aire con gran precisión matemática, si no también son la forma más fácil de describir el comportamiento temporal y espacial no estructurado de los contaminantes en la atmósfera (Davidson Moreira & Vilhena, 2009).

El uso de las técnicas analíticas representan un bajo costo computacional, buena precisión en los resultados y en el caso de la Técnica de Transformada Integral General (GITT) y la Técnica de Transformada de Laplace Integral Generalizada (GILTT) controlan el error de los resultados. (Cassol, Wortmann, & de Vilhena, s.f.)

La técnica GITT, se puede decir que es una técnica para resolver ecuaciones en derivadas parciales (EDP). La técnica GILTT, es una técnica derivada de la técnica GITT. Tiene como principal diferencia de su antecesora el uso de la transformada de Laplace y la diagonalización de matrices en la solución del problema transformado que, en el caso de problemas lineales, es obtenida de forma totalmente analítica. (Cassol et al., s.f.)

Una de las limitaciones del uso de la técnica GITT está en las condiciones de frontera del problema original a resolver. La técnica solo

es aplicable en problemas con condiciones de frontera homogéneas. En el caso de que las condiciones de frontera no sean homogéneas se hace uso de filtros para su homogenización. (Cassol et al., s.f.)

En el uso de la técnica GITT la función desconocida $C_A(X; Y; Z; t)$ se expande en una base determinada a partir de un problema de Sturm-Liouville escogido por asociación del problema original. Mediante el uso de la técnica GITT se deben seguir los siguientes pasos principales para obtener la solución de una EDP.

- a) Se determina el problema auxiliar de autovalor de Sturm-Liouville.
- b) Se resuelve el problema auxiliar, desarrollando adecuadamente el par Transformada-Inversa.
- c) Transformar la ecuación en derivadas parciales original en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias transformado o ecuaciones algebraicas.
- d) Se trunca el sistema de ecuaciones en un número suficientemente grande de términos y se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias transformado para obtener los potenciales transformados.

e) Se utiliza la fórmula inversa ya establecida en el paso (b) para obtener la función desconocida del problema original.

(Cassol, 2006; Guerrero, Pimentel, Skaggs, & van Genuchten, 2009; Pelegrini, 2005)

Considerando que las condiciones de frontera de nuestro problema principal a resolver no son todas homogéneas, se tratará de homogenizar la condición de frontera [3.8] para lo cual el problema principal será filtrado (Cassol, Wortmann, & Rizza, 2009; Almeida et al., 2008; Guerrero et al., 2009).

Para determinar una solución de filtro, se define una función $F(X; Y; Z)$ que debe obedecer a una versión estacionaria con coeficientes constantes del operador de la ecuación en derivadas parciales original [3.1] sujeta a las mismas condiciones de frontera. De esta forma, la función $F(X; Y; Z)$ obedece al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\bar{u}_X \frac{\partial F(X; Y; Z)}{\partial X} - \bar{D}_{AB} \frac{\partial^2 F(X; Y; Z)}{\partial X^2} - \bar{D}_{AB} \frac{\partial^2 F(X; Y; Z)}{\partial Y^2} - \bar{D}_{AB} \frac{\partial^2 F(X; Y; Z)}{\partial Z^2} = 0 \quad [3.13]$$

$$F(1; Y; Z) = 0; F(X; 0; Z) = 0; F(X; 1; Z) = 0; F(X; Y; 0) = 0; F(X; Y; 1) = 0 \quad [3.14]$$

$$F(X; Y; Z) = \frac{Q}{\bar{u}_X} \delta(Y - Y_0) \delta(Z - H_s) \text{ en } X = 0 \quad [3.15]$$

$$\bar{D}_{AB} \frac{\partial F(X;Y;Z)}{\partial X} = 0 \text{ en } X = 0 \text{ y } X = 1 \quad [3.16]$$

$$\bar{D}_{AB} \frac{\partial F(X;Y;Z)}{\partial Y} = 0 \text{ en } Y = 0 \text{ y } Y = 1 \quad [3.17]$$

$$\bar{D}_{AB} \frac{\partial F(X;Y;Z)}{\partial Z} = 0 \text{ en } Z = 0 \text{ y } Z = 1 \quad [3.18]$$

donde \bar{u}_X y \bar{D}_{AB} , son coeficientes constantes y corresponden al valor promedio de u_X y D_{AB} , respectivamente.

Para garantizar las condiciones de frontera de la ecuación auxiliar, que aquí se hace llamar filtrada, hacemos:

$$C^f(X; Y; Z; t) = C_A(X; Y; Z; t) - F(X; Y; Z) \quad [3.19]$$

(Cassol, 2006; Cassol et al.,s.f.).

Aplicando las condiciones de frontera de [3.7] al [3.12] en $C^f(X; Y; Z; t)$ y considerando las condiciones de frontera de $F(X; Y; Z)$, iguales a las condiciones de frontera de $C_A(X; Y; Z; t)$ se obtienen condiciones de frontera homogéneas para $C^f(X; Y; Z; t)$:

$$C^f(X; Y; Z; t) = 0 \text{ en } X = 0 \quad [3.20]$$

$$\bar{D}_{AB} \frac{\partial C^f(X; Y; Z; t)}{\partial X} = 0 \text{ en } X = 1 \quad [3.21]$$

$$\bar{D}_{AB} \frac{\partial C^f(X; Y; Z; t)}{\partial Z} = 0 \text{ en } Z = 0 \text{ y } Z = 1 \quad [3.22]$$

De una manera similar se obtienen el resto de condiciones de frontera.

Para resolver la ecuación [3.13] no es posible aplicar la Técnica de la Transformada Integral Clásica (CITT) la cual no viene a ser más que una generalización del Método de Separación de Variables; puesto que dicha ecuación posee un término convectivo (Pelegriani, 2005). Es por ello que aplicaremos la técnica GITT.

Ahora ya estamos en condiciones de resolver la ecuación [3.13] sujeto a sus condiciones de frontera, aplicando la técnica GITT. Para la aplicación de esta técnica GITT seguiremos el mismo procedimiento que para el problema bidimensional que se presenta en (Moreira et al., 2009).

Primero determinamos el problema auxiliar de Sturm-Liouville, para lo cual tomaremos $\frac{\partial^2 F(X;Y;Z)}{\partial Z^2}$ como el operador de Sturm-Liouville y siendo

$$L\{\eta\} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[p(Z) \frac{\partial \eta}{\partial Z} \right] + q(Z) \eta(Z), \text{ donde } p(Z) = 1 \text{ y } q(Z) = 0 \text{ en } 0 < Z < 1,$$

resultando de este modo $L\{\eta\} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2}$ y tomando en cuenta las condiciones de frontera $\eta'(Z) = 0$ en $Z = 0$; $Z = 1$. Para determinar las funciones propias de cualquier operador de Sturm-Liouville usamos:

$$\eta''(Z) + \gamma^2 \eta(Z) = 0; \text{ siendo } 0 < Z < 1 \text{ y } \eta'(0) = 0; \eta'(1) = 0 \quad [3.23]$$

donde ' y '' indican las derivadas primera y de segundo orden de la función $\eta(Z)$, respectivamente.

Para resolver el problema de Sturm-Liouville planteado, tomaremos su ecuación auxiliar de la ecuación diferencial ordinaria (EDO) dada por [3.23].

$m^2 + \gamma^2 = 0 \Rightarrow m^2 = -\gamma^2 \Rightarrow m = \pm \gamma i$; por consiguiente la solución general de [3.23] será:

$$\eta(Z) = C_1 \cos \gamma Z + C_2 \sin \gamma Z \quad [3.24]$$

donde C_1 y C_2 son constantes las cuales se van a determinar.

Si $\eta(Z) = C_1 \cos \gamma Z + C_2 \sin \gamma Z \Rightarrow \eta'(Z) = -C_1 \gamma \sin \gamma Z + C_2 \gamma \cos \gamma Z$, puesto que por [3.23] $\eta'(0) = 0 \Rightarrow C_2 \gamma = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \vee \gamma = 0$; pero como $\gamma \neq 0$ entonces $C_2 = 0$, resultando $\eta'(Z) = -C_1 \gamma \sin \gamma Z$; por otro lado $\eta'(1) = 0 \Rightarrow -C_1 \gamma \sin \gamma = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \vee \gamma = 0 \vee \sin \gamma = 0$; pero como $C_1 \neq 0$ y $\gamma \neq 0$ entonces se tiene que $\sin \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \pi k$, $k = 1; 2; \dots$.

Resultando, por tanto, que la solución del problema de Sturm-Liouville queda expresado por:

$$\eta_k(Z) = \cos(\gamma_k Z) \quad \text{con } \gamma_k = \pi k \quad (k = 1; 2; \dots) \quad [3.25]$$

Obteniéndose de este modo que $\eta_k(Z) = \cos(\gamma_k Z)$ es el conjunto de funciones propias ortogonales en el intervalo $0 \leq Z \leq 1$ y $\gamma_k = \pi k$ ($k = 1; 2; \dots$) su conjunto de valores propios.

El siguiente paso de la técnica GITT es expandir la función $F(X; Y; Z)$ a una base de funciones propias ortogonales, aplicando la técnica en la variable Z ; puesto que en este eje las condiciones de frontera son homogéneas, lo que nos permite su uso. Para ello, entonces definamos el siguiente par Transformada – Inversa.

$$\bar{F}_k(X; Y) = \int_0^1 \frac{F(X; Y; Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} dZ \quad (\text{Transformada}) \quad [3.26]$$

$$F(X; Y; Z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{F}_k(X; Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} \quad (\text{Inversa}) \quad [3.27]$$

donde la norma N_k está dada por

$$N_k = \int_0^1 \eta_k^2(Z) dZ \quad [3.28]$$

Por otro lado, las funciones propias ortogonales y valores propios del problema de Sturm-Liouville, satisfacen la propiedad de ortonormalidad:

$$\frac{1}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \int_0^1 \eta_j(Z) \eta_k(Z) dZ = \begin{cases} 0; & \text{si } j \neq k \\ 1; & \text{si } j = k \end{cases} \quad [3.29]$$

(Buske et al., 2009; Cassol et al.; Cassol et al., 2009; Costa, Vilhena, Moreira, & Tirabassi, 2006; Almeida et al., s.f.; 2008; Wortmann et al., 2005)

Para determinar los coeficientes desconocidos $\bar{F}_k(X; Y)$ (variable dependiente transformada) reemplazamos la ecuación [3.27] en la ecuación [3.13] para obtener:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\bar{U}_X \frac{\partial}{\partial X} \frac{\bar{F}_k(X; Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} - \bar{D}_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{\bar{F}_k(X; Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} \right. \\ \left. - \bar{D}_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \frac{\bar{F}_k(X; Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} - \bar{D}_{AB} \frac{\bar{F}_k(X; Y) \eta_k''(Z)}{\sqrt{N_k}} \right] = 0 \end{aligned} \quad [3.30]$$

Ahora teniendo en cuenta [3.23] tenemos $\eta_k''(Z) = -\gamma_k^2 \eta_k(Z)$,
reemplazando este resultado en [3.30] tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\bar{U}_X \frac{\partial}{\partial X} \frac{\bar{F}_k(X; Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} - \bar{D}_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{\bar{F}_k(X; Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} \right. \\ \left. - \bar{D}_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \frac{\bar{F}_k(X; Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} + \bar{D}_{AB} \gamma_k^2 \frac{\bar{F}_k(X; Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} \right] = 0 \end{aligned} \quad [3.31]$$

Seguidamente multiplicaremos a ambos miembros de la ecuación [3.31]

por el operador $\int_0^1 \frac{\eta_j(Z)}{\sqrt{N_j}} dZ$ para obtener:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\bar{U}_X \frac{\partial}{\partial X} \bar{F}_k(X; Y) \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ - \bar{D}_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \bar{F}_k(X; Y) \right. \\ \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ - \bar{D}_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \bar{F}_k(X; Y) \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ \\ \left. + \bar{D}_{AB} \gamma_k^2 \bar{F}_k(X; Y) \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ \right] = 0 \end{aligned} \quad [3.32]$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial X} \bar{F}_k(X; Y) B_{jk}(X; Y) - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \bar{F}_k(X; Y) C_{jk}(X; Y) \right. \\ \left. - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \bar{F}_k(X; Y) D_{jk}(X; Y) + \bar{F}_k(X; Y) E_{jk}(X; Y) \right] = 0 \end{aligned} \quad [3.33]$$

Donde:

$$B_{jk}(X; Y) = \bar{u}_X \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ \quad [3.34]$$

$$C_{jk}(X; Y) = \bar{D}_{AB} \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ \quad [3.35]$$

$$D_{jk}(X; Y) = \bar{D}_{AB} \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ \quad [3.36]$$

$$E_{jk}(X; Y) = \bar{D}_{AB} Y_k^2 \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ \quad [3.37]$$

Para encontrar la variable $\bar{F}_k(X; Y)$, aplicaremos la técnica GITT de una manera análoga respecto a la variable Y .

Por lo tanto, tomaremos $\frac{\partial^2 \bar{F}(X; Y)}{\partial Y^2}$ como el operador de Sturm-Liouville

y siendo $L\{\varphi\} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[p(Y) \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right] + q(Y) \varphi(Y)$, donde $p(Y) = 1$ y $q(Y) = 0$ en

$0 < Y < 1$, resultando de este modo $L\{\varphi\} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2}$ y tomando en cuenta

las condiciones de frontera $\varphi'(Y) = 0$ en $Y = 0; Y = 1$. Para determinar

las funciones propias de cualquier operador de Sturm-Liouville usamos

$$\varphi''(Y) + \beta^2 \varphi(Y) = 0; \text{ siendo } 0 < Y < 1 \text{ y } \varphi'(0) = 0; \varphi'(1) = 0 \quad [3.38]$$

Para resolver el problema de Sturm-Liouville planteado, tomaremos su ecuación auxiliar de la EDO dada por [3.38].

$m^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow m^2 = -\beta^2 \Rightarrow m = \pm \beta i$; por consiguiente la solución general de [3.38] será:

$$\varphi(Y) = C_3 \cos \beta Y + C_4 \sen \beta Y \quad [3.39]$$

donde C_3 y C_4 son constantes las cuales se van a determinar.

Si $\varphi(Y) = C_3 \cos\beta Y + C_4 \operatorname{sen}\beta Y \Rightarrow \varphi'(Y) = -C_3 \beta \operatorname{sen}\beta Y + C_4 \beta \cos\beta Y$,
 puesto que por [3.38] $\varphi'(0) = 0 \Rightarrow C_4 \beta = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \vee \beta = 0$; pero
 como $\beta \neq 0$ entonces $C_4 = 0$, resultando $\eta'(Z) = -C_3 \beta \operatorname{sen}\beta Y$; por otro
 lado $\varphi'(1) = 0 \Rightarrow -C_3 \beta \operatorname{sen}\beta = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \vee \beta = 0 \vee \operatorname{sen}\beta = 0$; pero
 como $C_3 \neq 0$ y $\beta \neq 0$ entonces se tiene que $\operatorname{sen}\beta = 0 \Rightarrow \beta = \pi j$,
 $j = 1; 2; \dots$.

Resultando, por tanto, que la solución del problema de Sturm-Liouville queda expresado por:

$$\varphi_j(Y) = \cos(\beta_j Y) \quad \text{con } \beta_j = \pi j \quad (j = 1; 2; \dots) \quad [3.40]$$

Obteniéndose de este modo que $\varphi_j(Y) = \cos(\beta_j Y)$ es el conjunto de funciones propias ortogonales en el intervalo $0 \leq Y \leq 1$ y $\beta_j = \pi j$ ($j = 1; 2; \dots$) su conjunto de valores propios.

El siguiente paso de la técnica GITT es expandir la función $\bar{F}_k(X; Y)$ a una base de funciones propias ortogonales, aplicando la técnica en la variable Y ; puesto que en este eje las condiciones de frontera son homogéneas, lo que nos permite su uso. Para ello, entonces, definamos el siguiente par Transformada – Inversa.

$$\bar{F}_{jk}(X) = \int_0^1 \frac{\bar{F}_k(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} dY \quad (\text{Transformada}) \quad [3.41]$$

$$\bar{F}_k(X; Y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{F}_{jk}(X) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} \quad (\text{Inversa}) \quad [3.42]$$

Donde la norma N_j está dada por:

$$N_j = \int_0^1 \varphi_j^2(Y) dY \quad [3.43]$$

Por otro lado, las funciones propias ortogonales y valores propios del problema de Sturm-Liouville, satisfacen la propiedad de ortonormalidad:

$$\frac{1}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \int_0^1 \varphi_j(Y) \varphi_k(Y) dY = \begin{cases} 0; & \text{si } j \neq k \\ 1; & \text{si } j = k \end{cases} \quad [3.44]$$

Para determinar los coeficientes desconocidos $\bar{F}_{jk}(X)$ (variable dependiente transformada) reemplazamos la ecuación [3.42] en la ecuación [3.33] para obtener:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\bar{F}'_{jk}(X) \frac{B_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} - \bar{F}''_{jk}(X) \frac{C_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} - \bar{F}_{jk}(X) \frac{D_{jk}(X; Y) \varphi''_{jk}(Y)}{\sqrt{N_j}} + \bar{F}_{jk}(X) \frac{E_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} \right] = 0 \quad [3.45]$$

Ahora, teniendo en cuenta [3.38] tenemos $\varphi''_{jk}(Y) = -\beta_j^2 \varphi_j(Y)$, reemplazando este resultado en [3.45] tenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\bar{F}'_{jk}(X) \frac{B_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} - \bar{F}''_{jk}(X) \frac{C_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} + \beta_j^2 \bar{F}_{jk}(X) \frac{D_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} + \bar{F}_{jk}(X) \frac{E_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} \right] = 0 \quad [3.46]$$

Seguidamente multiplicaremos a ambos miembros de la ecuación [3.46]

por el operador $\int_0^1 \frac{\varphi_k(Y)}{\sqrt{N_k}} dY$ para obtener:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\bar{F}'_{jk}(X) \int_0^1 \frac{B_{jk}(X;Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY \right. \\
& - \bar{F}''_{jk}(X) \int_0^1 \frac{C_{jk}(X;Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY + \beta_j^2 \bar{F}_{jk}(X) \int_0^1 \frac{D_{jk}(X;Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY \\
& \left. + \bar{F}_{jk}(X) \int_0^1 \frac{E_{jk}(X;Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY \right] = 0 \tag{3.47}
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\bar{F}'_{jk}(X) L_{jk}(X) - \bar{F}''_{jk}(X) M_{jk}(X) + \bar{F}_{jk}(X) N_{jk}(X) \right. \\
& \left. + \bar{F}_{jk}(X) O_{jk}(X) \right] = 0 \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Donde:

$$L_{jk}(X) = \int_0^1 \frac{B_{jk}(X;Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY \tag{3.49}$$

$$M_{jk}(X) = \int_0^1 \frac{C_{jk}(X;Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY \tag{3.50}$$

$$N_{jk}(X) = \beta_j^2 \int_0^1 \frac{D_{jk}(X;Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY \tag{3.51}$$

$$O_{jk}(X) = \int_0^1 \frac{E_{jk}(X;Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY \tag{3.52}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta los resultados de [3.34] al [3.37] y del

[3.49] al [3.52] la ecuación [3.48] se transforma en:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\bar{F}'_{jk}(X) \bar{u}_X \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ dY \right. \\
& \left. - \bar{D}_{AB} \bar{F}''_{jk}(X) \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ dY \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \beta_j^2 \bar{D}_{AB} \bar{F}_{jk}(X) \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ dY \\
& + \gamma_k^2 \bar{D}_{AB} \bar{F}_{jk}(X) \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ dY] = 0 \quad [3.53]
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la propiedad de ortonormalidad dados por [3.29] y [3.44] la ecuación [3.53] se transforma en:

$$\bar{u}_X F'_{jk}(X) - \bar{D}_{AB} \bar{F}''_{jk}(X) + \beta_j^2 \bar{D}_{AB} \bar{F}_{jk}(X) + \gamma_k^2 \bar{D}_{AB} \bar{F}_{jk}(X) = 0 \quad (j = k = 1; 2; \dots) \quad [3.54]$$

o equivalentemente

$$\bar{D}_{AB} \bar{F}''_{jk}(X) - \bar{u}_X F'_{jk}(X) - \bar{D}_{AB} (\beta_j^2 + \gamma_k^2) \bar{F}_{jk}(X) = 0 \quad (j = k = 1; 2; \dots) \quad [3.55]$$

La ecuación [3.55] representa un sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias homogéneas con coeficientes constantes, para ello tenemos la variación de los índices j y k ; para lo cual consideraremos que sea hasta un valor N lo suficientemente grande: es decir, $j = k = 1; 2; \dots; N$. Por otro lado, encontraremos sus condiciones de frontera; para lo cual partiremos de la ecuación [3.15]; aplicando la técnica GITT en relación a las variables Y y Z .

$$F(0; Y; Z) = \frac{Q}{\bar{v}_X} \delta(Y - Y_0) \delta(Z - H_s) \quad \text{y por otro lado teniendo en cuenta}$$

[3.27] tenemos:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\bar{F}_k(0; Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} = \frac{Q}{\bar{v}_X} \delta(Y - Y_0) \delta(Z - H_s) \quad [3.56]$$

Seguidamente multiplicaremos a ambos miembros de la ecuación [3.56]

por el operador $\int_0^1 \frac{\eta_j(Z)}{\sqrt{N_j}} dZ$ para obtener:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k(0; Y) \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ = \frac{Q}{\bar{u}_x} \delta(Y - Y_0) \int_0^1 \frac{\delta(Z - H_s) \eta_j(Z)}{\sqrt{N_j}} dZ \quad [3.57]$$

Por otro lado, tendremos en cuenta la propiedad importante de la función delta de Dirac que cumple $\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_j(Z) \delta(Z) dZ = \eta_j(0)$ lo cual también es válido si la variación de Z es finito; como es nuestro caso en que $0 < Z < 1$. Teniendo en cuenta este resultado la ecuación [3.57] se transforma en:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k(0; Y) \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ = \frac{Q \delta(Y - Y_0) \eta_j(H_s)}{\bar{u}_x \sqrt{N_j}} \quad [3.58]$$

A partir de [3.42] la ecuación [3.58] se transforma en:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{F}_{jk}(0) \frac{\varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ = \frac{Q \delta(Y - Y_0) \eta_j(H_s)}{\bar{u}_x \sqrt{N_j}} \quad [3.59]$$

Seguidamente multiplicamos a ambos miembros de la ecuación [3.59] por

el operador $\int_0^1 \frac{\varphi_k(Y)}{\sqrt{N_k}} dY$ para obtener:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{F}_{jk}(0) \frac{\int_0^1 \int_0^1 \eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ dY \\ & = \frac{Q \eta_j(H_s)}{\bar{u}_x} \int_0^1 \frac{\delta(Y - Y_0) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY \end{aligned} \quad [3.60]$$

o equivalentemente

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{F}_{jk}(0) \frac{\int_0^1 \int_0^1 \eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ dY = \frac{Q \eta_j(H_s) \varphi_k(Y_0)}{\bar{u}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \quad [3.61]$$

Ahora, teniendo en cuenta la propiedad de ortonormalidad la ecuación [3.61] se transforma en:

$$\bar{F}_{jk}(0) = \frac{Q \eta_j(H_s) \varphi_k(Y_0)}{\bar{u}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \quad (j = k = 1; 2; \dots; N) \quad [3.62]$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las ecuaciones [3.16]; [3.27] y aplicando la técnica GITT en relación de la variable Z y Y, obtenemos:

$$\frac{\partial F(1;Y;Z)}{\partial X} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial X} \frac{\bar{F}_k(1;Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} \Rightarrow \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial X} \frac{\bar{F}_k(1;Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} = 0 \quad [3.63]$$

Seguidamente multiplicamos a ambos miembros de la ecuación [3.63] por el operador $\int_0^1 \frac{\eta_j(Z)}{\sqrt{N_j}} dZ$ para obtener:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial X} \bar{F}_k(1;Y) \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ = 0 \quad [3.64]$$

Ahora teniendo en cuenta la ecuación [3.42] la ecuación [3.64] se transforma en:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial X} \bar{F}_{jk}(1) \frac{\varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ = 0 \quad [3.65]$$

Seguidamente multiplicaremos a ambos miembros de la ecuación [3.65]

por el operador $\int_0^1 \frac{\varphi_k(Y)}{\sqrt{N_k}} dY$ para obtener:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial X} \bar{F}_{jk}(1) \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ dY = 0 \quad [3.66]$$

Ahora, teniendo en cuenta la propiedad de ortonormalidad la ecuación [3.66] se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial X} \bar{F}_{jk}(1) = 0 \quad (j = k = 1; 2; \dots; N) \quad \text{o equivalentemente}$$

$$\bar{F}'_{jk}(1) = 0 \quad (j = k = 1; 2; \dots; N) \quad [3.67]$$

(Cassol & Wortmann, 2006; Cassol et al., 2009)

Puesto que ya tenemos las condiciones de frontera de la ecuación [3.55] dadas por [3.62] y [3.67], ahora pasaremos a resolverla. Para tal efecto, tomaremos su ecuación auxiliar de la ecuación diferencial ordinaria [3.55].

$$\bar{D}_{AB} m^2 - \bar{v}_X m - \bar{D}_{AB} (\beta_j^2 + \gamma_k^2) = 0 \Rightarrow m = \frac{\bar{v}_X \pm \sqrt{\bar{v}_X^2 + 4 \bar{D}_{AB}^2 (\beta_j^2 + \gamma_k^2)}}{2 \bar{D}_{AB}}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación [3.55] será:

$$\bar{F}_{jk}(X) = A e^{\frac{\bar{v}_X - \sqrt{\bar{v}_X^2 + 4 \bar{D}_{AB}^2 (\beta_j^2 + \gamma_k^2)}}{2 \bar{D}_{AB}} X} + B e^{\frac{\bar{v}_X + \sqrt{\bar{v}_X^2 + 4 \bar{D}_{AB}^2 (\beta_j^2 + \gamma_k^2)}}{2 \bar{D}_{AB}} X}$$

$$(j = k = 1; 2; \dots; N) \quad [3.68]$$

Donde A y B son constantes las cuales se van a determinar.

La ecuación [3.68] equivalentemente lo podemos escribir como:

$$\bar{F}_{jk}(X) = A e^{aX} + B e^{bX} \quad [3.69]$$

Donde:

$$a = \frac{\bar{v}_X - \sqrt{\bar{v}_X^2 + 4 \bar{D}_{AB}^2 (\beta_j^2 + \gamma_k^2)}}{2 \bar{D}_{AB}} \quad \text{y} \quad b = \frac{\bar{v}_X + \sqrt{\bar{v}_X^2 + 4 \bar{D}_{AB}^2 (\beta_j^2 + \gamma_k^2)}}{2 \bar{D}_{AB}} \quad [3.70]$$

Haciendo uso de la ecuación [3.62] tenemos que $\bar{F}_{jk}(0) = \frac{Q \eta_j(H_s) \varphi_k(Y_0)}{\bar{v}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}}$

de donde resulta que:

$$\bar{F}_{jk}(0) = A + B \Rightarrow A + B = \frac{Q \eta_j(H_s) \varphi_k(Y_0)}{\bar{v}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \quad [3.71]$$

Si $\bar{F}_{jk}(X) = A e^{aX} + B e^{bX} \Rightarrow \bar{F}'_{jk}(X) = A a e^{aX} + B b e^{bX}$ y teniendo en

cuenta [3.67] tenemos $\bar{F}'_{jk}(1) = 0 \Rightarrow A a e^a + B b e^b = 0 \Rightarrow B = - \frac{A a e^a}{b e^b}$

obteniéndose de este modo que:

$$B = - \frac{A a e^{(a-b)}}{b} \quad [3.72]$$

Remplazando [3.72] en [3.71] tenemos:

$$A - \frac{A a e^{(a-b)}}{b} = \frac{Q \eta_j(H_s) \varphi_k(Y_0)}{\bar{v}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \Rightarrow A \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)} \right] = \frac{Q \eta_j(H_s) \varphi_k(Y_0)}{\bar{v}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}}$$

$$A = \frac{Q \eta_j(H_s) \varphi_k(Y_0)}{\bar{v}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)} \right]}; \quad B = - \frac{a Q \eta_j(H_s) \varphi_k(Y_0) e^{(a-b)}}{\bar{v}_X b \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)} \right]}$$

Por lo tanto, la solución particular de la ecuación [3.55] está dada por:

$$\bar{F}_{jk}(X) = \frac{Q \eta_j(H_s) \varphi_k(Y_0)}{\bar{v}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)} \right]} e^{aX} - \frac{a Q \eta_j(H_s) \varphi_k(Y_0) e^{(a-b)}}{\bar{v}_X b \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)} \right]} e^{bX} \quad [3.73]$$

o equivalentemente

$$\bar{F}_{jk}(X) = \frac{Q \eta_j(H_s) \varphi_k(Y_0)}{\bar{v}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)} \right]} \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{bX} \right] \quad (j = k = 1; 2; \dots; N) \quad [3.74]$$

Seguidamente substituiremos $\bar{F}_{jk}(X)$ en la ecuación [3.42] para obtener

$$\bar{F}_k(X; Y) = \sum_{j=1}^N \frac{Q \cos(\beta_j Y_0) \cos(\gamma_k H_s)}{\bar{v}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)}\right]} \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{bX} \right] \frac{\varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}}$$

(j = k = 1; 2; \dots; N) [3.75]

A continuación, sustituimos $\bar{F}_k(X; Y)$ en la ecuación [3.27] para obtener:

$$F(X; Y; Z) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q \cos(\beta_j Y_0) \cos(\gamma_k H_s)}{\bar{v}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)}\right]} \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{bX} \right] \frac{\varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \quad (j = k = 1; 2; \dots) \quad [3.76]$$

Resultando de esta manera que la ecuación [3.76] constituye ser la solución del filtro $F(X; Y; Z)$.

Teniendo en cuenta ahora que la nueva variable $C^f(X; Y; Z; t)$ definida en la ecuación [3.19] lo utilizaremos para definir el problema auxiliar con condiciones de frontera homogéneas. Es decir $C_A(X; Y; Z; t) = C^f(X; Y; Z; t) + F(X; Y; Z)$ lo substituiremos en la ecuación [3.1] para obtener:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} C^f(X; Y; Z; t) + v_X \frac{\partial}{\partial X} C^f(X; Y; Z; t) + v_X \frac{\partial}{\partial X} F(X; Y; Z) \\ & - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} C^f(X; Y; Z; t) - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} F(X; Y; Z) - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} C^f(X; Y; Z; t) \\ & - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} F(X; Y; Z) - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} C^f(X; Y; Z; t) - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} F(X; Y; Z) = 0 \end{aligned}$$

[3.77]

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} C^f(X; Y; Z; t) + v_X \frac{\partial}{\partial X} C^f(X; Y; Z; t) - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} C^f(X; Y; Z; t) \\
 & - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} C^f(X; Y; Z; t) - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} C^f(X; Y; Z; t) = -v_X \frac{\partial}{\partial X} F(X; Y; Z) \\
 & + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} F(X; Y; Z)
 \end{aligned}
 \tag{3.78}$$

Seguidamente obtendremos las condiciones de frontera de la ecuación [3.78] en la que tendremos presente que las condiciones de frontera de la variable $C_A(X; Y; Z; t)$ serán las mismas condiciones que para la variable $F(X; Y; Z)$. Así tendremos:

$$\begin{aligned}
 C^f(X; Y; Z; 0) &= C_A(X; Y; Z; 0) - F(X; Y; Z) \text{ y } C^f(X; Y; Z; 0) \\
 &= 0 - F(X; Y; Z)
 \end{aligned}$$

resultando de este modo que:

$$C^f(X; Y; Z; t) = -F(X; Y; Z) \text{ en } t = 0 \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
 C^f(0; Y; Z; t) &= C_A(0; Y; Z; t) - F(0; Y; Z) \Rightarrow C^f(0; Y; Z; t) \\
 &= \frac{Q}{v_X} \delta(Y - Y_0) \delta(Z - H_s) - \frac{Q}{v_X} \delta(Y - Y_0) \delta(Z - H_s); \text{ resultando de este}
 \end{aligned}$$

modo que:

$$C^f(X; Y; Z; t) = 0 \text{ en } X = 0 \tag{3.80}$$

$$\frac{\partial}{\partial X} C^f(1; Y; Z; t) = \frac{\partial}{\partial X} C_A(1; Y; Z; t) - \frac{\partial}{\partial X} F(1; Y; Z) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial X} C^f(1; Y; Z; t) = 0 - 0; \text{ resultando de este modo que}$$

$$\frac{\partial}{\partial X} C^f(X; Y; Z; t) = 0 \text{ en } X = 1 \quad [3.81]$$

De una manera análoga obtenemos las condiciones de frontera restantes

$$\frac{\partial}{\partial Y} C^f(X; Y; Z; t) = 0 \text{ en } Y = 0; Y = 1 \quad [3.82]$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} C^f(X; Y; Z; t) = 0 \text{ en } Z = 0; Z = 1 \quad [3.83]$$

$$C^f(X; Y; Z; t) = 0 \text{ en } X = 1; Y = 0; Y = 1; Z = 0; Z = 1 \quad [3.84]$$

Ahora, estamos en condiciones de resolver la ecuación [3.78] sujeta a sus condiciones de frontera e inicial dadas por las expresiones del [3.79] al [3.84]. Para lo cual emplearemos nuevamente la técnica GITT primeramente con respecto a la variable z (Cassol & Wortmann, 2006; Cassol et al., 2009).

Es importante señalar que la aplicación de la técnica GITT en el problema [3.13] será equivalente a la aplicación de la técnica GITT en el problema [3.78]. Por consiguiente, ambos procedimientos tienen el mismo problema auxiliar de Sturm-Liouville respecto a la variable Z dado en [3.23], las mismas funciones propias ortogonales y valores propios dados en [3.25], la misma norma dado en [3.28], el mismo operador integral. Sin embargo, su par de fórmulas Transformada-Inversa cambian y quedan definidas como:

$$\bar{C}_k^f(X; Y; t) = \int_0^1 \frac{C^f(X; Y; Z; t) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} dZ \quad (\text{Transformada}) \quad [3.85]$$

$$C^f(X; Y; Z; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_k^f(X; Y; t) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} \quad (\text{Inversa}) \quad [3.86]$$

donde $\bar{C}_k^f(X; Y; t)$ es la variable dependiente transformada.

Para determinar los coeficientes $\bar{C}_k^f(X; Y; t)$ reemplazamos la variable

$C^f(X; Y; Z; t)$ dado en [3.86] en la ecuación [3.78] para obtener:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{C}_k^f(X; Y; t) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} + u_X \frac{\partial}{\partial X} \frac{\bar{C}_k^f(X; Y; t) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} \right. \\ & - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{\bar{C}_k^f(X; Y; t) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \frac{\bar{C}_k^f(X; Y; t) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} \\ & \left. - D_{AB} \frac{\bar{C}_k^f(X; Y; t) \eta_k''(Z)}{\sqrt{N_k}} \right] = - u_X \frac{\partial}{\partial X} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} F(X; Y; Z) \\ & + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} F(X; Y; Z) \end{aligned} \quad [3.87]$$

Teniendo en cuenta [3.23] tenemos que: $\eta_k''(Z) = -\gamma_k^2 \eta_k(Z)$

reemplazando este resultado en la ecuación [3.87] obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{C}_k^f(X; Y; t) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} + u_X \frac{\partial}{\partial X} \frac{\bar{C}_k^f(X; Y; t) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{\bar{C}_k^f(X; Y; t) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} \right. \\ & \left. - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \frac{\bar{C}_k^f(X; Y; t) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} + D_{AB} \frac{\bar{C}_k^f(X; Y; t) \gamma_k^2 \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} \right] = \phi(X; Y; Z) \end{aligned} \quad [3.88]$$

Donde:

$$\phi(X; Y; Z) = - u_X \frac{\partial}{\partial X} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} F(X; Y; Z)$$

$$+ D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} F(X; Y; Z) \quad [3.89]$$

Seguidamente multiplicamos a ambos miembros de la ecuación [3.88] por

el operador $\int_0^1 \frac{\eta_j(Z)}{\sqrt{N_j}} dZ$ para obtener:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} \bar{C}_k^f(X; Y; t) \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ + v_X \frac{\partial}{\partial X} \bar{C}_k^f(X; Y; t) \right. \\ & \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \bar{C}_k^f(X; Y; t) \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ \\ & \left. - D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \bar{C}_k^f(X; Y; t) \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ + D_{AB} \gamma_k^2 \bar{C}_k^f(X; Y; t) \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ \right] \\ & = \int_0^1 \phi(X; Y; Z) \frac{\eta_j(Z)}{\sqrt{N_j}} dZ \quad [3.90] \end{aligned}$$

o equivalentemente teniendo en cuenta las expresiones dadas de la [3.34]

al [3.37] tenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} \bar{C}_k^f(X; Y; t) A_{jk}(X; Y) + \frac{\partial}{\partial X} \bar{C}_k^f(X; Y; t) B_{jk}(X; Y) \right. \\ & - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \bar{C}_k^f(X; Y; t) C_{jk}(X; Y) - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \bar{C}_k^f(X; Y; t) D_{jk}(X; Y) \\ & \left. + \bar{C}_k^f(X; Y; t) E_{jk}(X; Y) \right] = F_j(X; Y) \quad [3.91] \end{aligned}$$

Donde:

$$A_{jk}(X; Y) = \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ \quad [3.92]$$

$$F_j(X; Y) = \int_0^1 \phi(X; Y; Z) \frac{\eta_j(Z)}{\sqrt{N_j}} dZ \quad [3.93]$$

Para determinar la variable dependiente $\bar{C}_k^f(X; Y; t)$; aplicaremos la técnica GITT de una manera análoga respecto a la variable Y . Para lo cual el problema de Sturm-Liouville con respecto a la variable Y es el mismo que lo dado en [3.38]. Sus funciones propias y valores propios son los mismos que los dados en [3.40]. Su misma norma como lo dado en [3.43], el mismo operador integral. Sin embargo, su par de fórmulas Transformada-Inversa quedan definidas por:

$$\bar{C}_{jk}^f(X; t) = \int_0^1 \frac{\bar{C}_k^f(X; Y; t) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} dY \quad (\text{Transformada}) \quad [3.94]$$

$$\bar{C}_k^f(X; Y; t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_{jk}^f(X; t) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} \quad (\text{Inversa}) \quad [3.95]$$

donde $\bar{C}_{jk}^f(X; t)$ es la variable dependiente transformada.

Para determinar los coeficientes $\bar{C}_{jk}^f(X; t)$ remplazaremos la ecuación [3.95] en la ecuación [3.91] para obtener:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{C}_{jk}^f(X; t) A_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} + \frac{\partial}{\partial X} \frac{\bar{C}_{jk}^f(X; t) B_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} \right. \\ \left. - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{\bar{C}_{jk}^f(X; t) C_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} - \frac{\bar{C}_{jk}^f(X; t) D_{jk}(X; Y) \varphi_j''(Y)}{\sqrt{N_j}} \right. \\ \left. + \frac{\bar{C}_{jk}^f(X; t) E_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} \right] = F_j(X; Y) \quad [3.96] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta [3.38] tenemos $\varphi_j''(Y) = -\beta_j^2 \varphi_j(Y)$ reemplazando este resultado en [3.96] obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{C}_{jk}^f(X; t) A_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} + \frac{\partial}{\partial X} \frac{\bar{C}_{jk}^f(X; t) B_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} \right. \\ & - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{\bar{C}_{jk}^f(X; t) C_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} + \beta_j^2 \frac{\bar{C}_{jk}^f(X; t) D_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} \\ & \left. + \frac{\bar{C}_{jk}^f(X; t) E_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} \right] = F_j(X; Y) \end{aligned} \quad [3.97]$$

Seguidamente multiplicaremos a ambos miembros de la ecuación [3.97]

por el operador $\int_0^1 \frac{\varphi_k(Y)}{\sqrt{N_k}} dY$ para obtener:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} \bar{C}_{jk}^f(X; t) \int_0^1 \frac{A_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY + \frac{\partial}{\partial X} \bar{C}_{jk}^f(X; t) \right. \\ & \int_0^1 \frac{B_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \bar{C}_{jk}^f(X; t) \int_0^1 \frac{C_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY \\ & \left. \beta_j^2 \bar{C}_{jk}^f(X; t) \int_0^1 \frac{D_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY + \bar{C}_{jk}^f(X; t) \int_0^1 \frac{E_{jk}(X; Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY \right] \\ & = \int_0^1 F_j(X; Y) \frac{\varphi_k(Y)}{\sqrt{N_k}} dY \end{aligned} \quad [3.98]$$

o equivalentemente teniendo en cuenta las expresiones de la [3.49] a la [3.52] tenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} \bar{C}_{jk}^f(X; t) J_{jk}(X) + \frac{\partial}{\partial X} \bar{C}_{jk}^f(X; t) L_{jk}(X) - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \bar{C}_{jk}^f(X; t) M_{jk}(X) \right. \\ & \left. + \bar{C}_{jk}^f(X; t) N_{jk}(X) + \bar{C}_{jk}^f(X; t) O_{jk}(X) \right] = P_j(X) \end{aligned} \quad [3.99]$$

Donde:

$$J_{jk}(X) = \int_0^1 \frac{A_{jk}(X;Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dY \quad [3.100]$$

$$P_j(X) = \int_0^1 F_j(X; Y) \frac{\varphi_k(Y)}{\sqrt{N_k}} dY \quad [3.101]$$

Para encontrar la variable dependiente $\bar{C}_{jk}^f(X; t)$, aplicaremos la técnica GITT en la variable X. Para ello tomaremos $\frac{\partial^2}{\partial X^2} \bar{C}_{jk}^f(X; t)$ como el operador de Sturm-Liouville y siendo $L\{\psi\} = \frac{\partial}{\partial X} \left[p(X) \frac{\partial \psi}{\partial X} \right] + q(X) \psi(X)$, donde $p(X) = 1$ y $q(X) = 0$ en $0 < X < 1$ resultando de este modo $L\{\psi\} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2}$ y tomando en cuenta las condiciones de frontera $\psi(X) = 0$ en $X = 0$ y $\psi'(X) = 0$ en $X = 1$.

Para determinar las funciones propias de cualquier operador de Sturm-Liouville usamos:

$$\psi''(X) + \lambda^2 \psi(X) = 0; \text{ siendo } 0 < X < 1 \text{ y } \psi(0) = 0; \psi'(1) = 0 \quad [3.102]$$

Para resolver el problema de Sturm-Liouville planteado, tomaremos su ecuación auxiliar de la EDO dada por [3.102].

$m^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda^2 \Rightarrow m = \pm \lambda i$, por consiguiente la solución general de la ecuación [3.102] será:

$$\psi(X) = C_5 \cos \lambda X + C_6 \sen \lambda X \quad [3.103]$$

donde C_5 y C_6 son constantes las cuales se van a determinar.

Puesto que $\psi(0) = 0 \Rightarrow C_5 = 0$, resultando $\psi(X) = C_6 \text{ sen } \lambda X \Rightarrow$
 $\psi'(X) = C_6 \lambda \cos \lambda X$ puesto que $\psi'(1) = 0$; entonces tenemos:
 $C_6 \lambda \cos \lambda = 0 \Rightarrow C_6 = 0 \vee \lambda = 0 \vee \cos \lambda = 0$; pero $C_6 \neq 0$ y $\lambda \neq 0$
entonces $\cos \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\pi}{2} (2i - 1) (i = 1; 2; \dots)$.

Por lo tanto, la solución del problema de Sturm-Liouville será:

$$\psi_i(X) = \text{sen } \lambda_i X \quad \text{con } \lambda_i = \frac{\pi}{2} (2i - 1) (i = 1; 2; \dots) \quad [3.104]$$

A su vez su par de fórmulas Transformada-Inversa están definidas por

$$\bar{\bar{C}}_{ijk}(t) = \int_0^1 \frac{\bar{C}_{jk}^f(X;t) \psi_i(X)}{\sqrt{N_i}} dX \quad (\text{Transformada}) \quad [3.105]$$

$$\bar{C}_{jk}^f(X;t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \psi_i(X)}{\sqrt{N_i}} \quad (\text{Inversa}) \quad [3.106]$$

donde $\bar{\bar{C}}_{ijk}(t)$ es la variable dependiente transformada; la norma N_i está dada por:

$$N_i = \int_0^1 \psi_i^2(X) dX \quad [3.107]$$

Por otro lado, las funciones propias ortogonales y los valores propios del problema de Sturm-Liouville satisfacen la propiedad de ortonormalidad:

$$\frac{1}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} \int_0^1 \psi_i(X) \psi_j(X) dX = \begin{cases} 0; & \text{si } i \neq j \\ 1; & \text{si } i = j \end{cases} \quad [3.108]$$

Para encontrar los coeficientes $\bar{\bar{C}}_{ijk}(t)$ reemplazamos $\bar{C}_{jk}^f(X;t)$ dado por [3.106] en la ecuación [3.99] para obtener:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) J_{jk}(X) \frac{\psi_i(X)}{\sqrt{N_i}} + \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) L_{jk}(X) \frac{\psi_i'(X)}{\sqrt{N_i}} \right. \\
& \left. - \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) M_{jk}(X) \frac{\psi_i''(X)}{\sqrt{N_i}} + \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) N_{jk}(X) \frac{\psi_i(X)}{\sqrt{N_i}} + \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) O_{jk}(X) \frac{\psi_i(X)}{\sqrt{N_i}} \right] = P_j(X)
\end{aligned} \tag{3.109}$$

Teniendo en cuenta [3.102] tenemos $\psi_i''(X) = -\lambda_i^2 \psi_i(X)$ reemplazando este resultado en [3.109] obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left[\bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \right]' J_{jk}(X) \frac{\psi_i(X)}{\sqrt{N_i}} + \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) L_{jk}(X) \frac{\psi_i'(X)}{\sqrt{N_i}} \right. \\
& \left. + \lambda_i^2 \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) M_{jk}(X) \frac{\psi_i(X)}{\sqrt{N_i}} + \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) N_{jk}(X) \frac{\psi_i(X)}{\sqrt{N_i}} + \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) O_{jk}(X) \frac{\psi_i(X)}{\sqrt{N_i}} \right] = P_j(X)
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Seguidamente multiplicamos a ambos miembros de la ecuación [3.110]

por el operador $\int_0^1 \frac{\psi_j(X)}{\sqrt{N_j}} dX$ para obtener:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left[\bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \right]' \int_0^1 \frac{J_{jk}(X) \psi_i(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dX \right. \\
& + \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \int_0^1 \frac{L_{jk}(X) \psi_i'(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dX + \lambda_i^2 \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \int_0^1 \frac{M_{jk}(X) \psi_i(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dX \\
& + \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \int_0^1 \frac{N_{jk}(X) \psi_i(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dX + \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \int_0^1 \frac{O_{jk}(X) \psi_i(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dX \\
& \left. = \int_0^1 \frac{P_j(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j}} dX \right] \tag{3.111}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los resultados del [3.34] al [3.37]; [3.92]; [3.93] y los resultados del [3.49] al [3.52]; [3.100]; [3.101] y [3.89], la ecuación [3.111] se transforma en:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \right]' \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y) \psi_i(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dZ dY dX \\
& + u_X \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y) \psi_i'(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dZ dY dX \\
& + D_{AB} \lambda_i^2 \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y) \psi_i(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dZ dY dX \\
& + D_{AB} \beta_j^2 \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y) \psi_i(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dZ dY dX \\
& + D_{AB} \gamma_k^2 \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y) \psi_i(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dZ dY dX \\
& = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left[- u_X \frac{\partial}{\partial X} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} F(X; Y; Z) \right. \\
& \left. + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} F(X; Y; Z) \right] \frac{\eta_j(Z) \varphi_k(Y) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j}} dZ dY dX
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Teniendo en cuenta la propiedad de ortonormalidad dadas por [3.29]; [3.44] y [3.108] la ecuación [3.112] se transforma en:

$$\begin{aligned}
& \left[\bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \right]' + u_X \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \int_0^1 \frac{\psi_i'(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dX + D_{AB} \lambda_i^2 \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \\
& + D_{AB} \beta_j^2 \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) + D_{AB} \gamma_k^2 \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left[- u_X \frac{\partial}{\partial X} F(X; Y; Z) \right. \\
& \left. + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} F(X; Y; Z) \right]
\end{aligned}$$

$$+ D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} F(X; Y; Z) \Big] \frac{\eta_j(Z) \varphi_k(Y) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j}} dZ dY dX$$

(i = j = k = 1; 2; ...)

[3.113]

o equivalentemente

$$\begin{aligned} & \left[\bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \right]' + \left[u_X \int_0^1 \frac{\psi_i'(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dX + D_{AB} \lambda_i^2 + D_{AB} \beta_j^2 + D_{AB} \gamma_k^2 \right] \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left[- u_X \frac{\partial}{\partial X} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} F(X; Y; Z) \right. \\ & \quad \left. + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} F(X; Y; Z) \right] \frac{\eta_j(Z) \varphi_k(Y) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j}} dZ dY dX \end{aligned}$$

(i = j = k = 1; 2; ...)

[3.114]

o equivalentemente

$$T'(t) + P T(t) = V \tag{3.115}$$

Donde:

$$T(t) = \left\{ \bar{\bar{C}}_{ijk}(t) \right\} \quad (i = j = k = 1; 2; \dots) \tag{3.116}$$

$$P = u_X \int_0^1 \frac{\psi_i'(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dX + D_{AB} (\lambda_i^2 + \beta_j^2 + \gamma_k^2) \quad (i = j = k = 1; 2; \dots)$$

[3.117]

$$\begin{aligned} V & = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left[- u_X \frac{\partial}{\partial X} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} F(X; Y; Z) \right. \\ & \quad \left. + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} F(X; Y; Z) \right] \frac{\eta_j(Z) \varphi_k(Y) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j}} dZ dY dX \end{aligned}$$

(i = j = k = 1; 2; ...)

[3.118]

La ecuación [3.115] representa una ecuación diferencial matricial de primer orden con coeficientes constantes o equivalentemente representa un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden con coeficientes constantes; dicho sistema generalmente ha sido resuelto numéricamente para encontrar la variable dependiente $T(t)$. En este trabajo lo obtendremos analíticamente, y, para alcanzar dicho propósito emplearemos la técnica GILTT; la cual consiste en aplicar la transformada de Laplace y la diagonalización de matrices. Además, consideraremos que el recorrido de los subíndices i, j, k son suficientemente grande para un cierto N ; es decir $i = j = k = 1; 2; \dots; N$ (Buske, 2004).

Daremos inicio a la solución de la ecuación [3.115]; aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de ella para obtener:

$$L\{T'(t) + P T(t)\} = L\{V\} \Rightarrow L\{T'(t)\} + P L\{T(t)\} = L\{V\}$$

$$s L\{T(t)\} - T(0) + P L\{T(t)\} = L\{V\} \Rightarrow s \bar{T}(s) - T(0) +$$

$$P \bar{T}(s) = \frac{V}{s}$$

$$[s I + P] \bar{T}(s) = \frac{V}{s} + T(0) \quad [3.119]$$

donde $\bar{T}(s)$ significa el T transformado y I la matriz identidad.

Suponiendo que la matriz P (la cual tiene forma de bloque) es no degenerada, es decir, que se puede descomponer en sus valores propios

y sus funciones propias. Para lograr ello la matriz P puede ser reescrita como $P = X D X^{-1}$ con la finalidad de facilitar la obtención de la matriz inversa de la matriz $[s I + P]$, donde X constituye ser la matriz de funciones propias de P , y D es una matriz diagonal de los valores propios de la matriz P , y teniendo en cuenta que la matriz identidad se puede escribir como $X X^{-1} = I$.

Por consiguiente, la ecuación [3.119] se transforma en

$$[s X X^{-1} + X D X^{-1}] \bar{T}(s) = \frac{V}{s} + T(0) \Rightarrow [s X + X D] X^{-1} \bar{T}(s) = \frac{V}{s} + T(0)$$

$$X [s I + D] X^{-1} \bar{T}(s) = \frac{V}{s} + T(0) \quad [3.120]$$

Ahora multiplicamos a ambos miembros de la ecuación [3.120] por la inversa de la matriz X para obtener:

$$X^{-1} X [s I + D] X^{-1} \bar{T}(s) = X^{-1} \left[\frac{V}{s} + T(0) \right] \Rightarrow [s I + D] X^{-1} \bar{T}(s) = X^{-1} \left[\frac{V}{s} + T(0) \right]$$

$$[s I + D] X^{-1} \bar{T}(s) = X^{-1} \left[\frac{V}{s} + T(0) \right] \quad [3.121]$$

Ahora veamos qué forma tienen los elementos de la matriz $[s I + D]$; la cual constituye ser una matriz diagonal. Entonces sus elementos tendrán la forma $[s + \lambda_i]$ en efecto:

$$[sI + D] = s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s + \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s + \lambda_N \end{bmatrix} \quad [3.122]$$

donde los λ_i ($i = 1; 2; \dots; N$) son los valores propios de la matriz P o dicho de otra forma son los elementos de la diagonal principal de la matriz D . Por otro lado teniendo en cuenta el álgebra matricial; la inversa de una matriz diagonal son los recíprocos multiplicativos de sus elementos; es decir, los elementos de la inversa de la matriz $[sI + D]$ tienen la forma $\left\{ \frac{1}{s + \lambda_i} \right\}$. Es decir:

$$[sI + D]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s + \lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s + \lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s + \lambda_N} \end{bmatrix} \quad [3.123]$$

Seguidamente multiplicaremos a ambos miembros de la ecuación [3.121] por la matriz $[sI + D]^{-1}$ para obtener:

$$[sI + D]^{-1} [sI + D] X^{-1} \bar{T}(s) = [sI + D]^{-1} X^{-1} \left[\frac{V}{s} + T(0) \right] P$$

$$X^{-1} \bar{T}(s) = [sI + D]^{-1} X^{-1} \left[\frac{V}{s} + T(0) \right] \quad [3.124]$$

Finalmente, multiplicamos a ambos miembros de la ecuación [3.124] por \mathbb{X} para obtener:

$$\mathbb{X} \mathbb{X}^{-1} \bar{T}(s) = \mathbb{X} [sI + D]^{-1} \mathbb{X}^{-1} \left[\frac{V}{s} + T(0) \right], \text{ o equivalentemente}$$

$$\bar{T}(s) = \mathbb{X} [sI + D]^{-1} \mathbb{X}^{-1} \left[\frac{V}{s} + T(0) \right] \quad [3.125]$$

A continuación, aplicaremos la transformada inversa de Laplace L^{-1} a ambos miembros de la ecuación [3.125] para obtener:

$$L^{-1} \{ \bar{T}(s) \} = L^{-1} \left\{ \mathbb{X} [sI + D]^{-1} \mathbb{X}^{-1} \left[\frac{V}{s} + T(0) \right] \right\}$$

$$L^{-1} \{ \bar{T}(s) \} = L^{-1} \left\{ \mathbb{X} [sI + D]^{-1} \mathbb{X}^{-1} \frac{V}{s} \right\} + L^{-1} \{ \mathbb{X} [sI + D]^{-1} \mathbb{X}^{-1} T(0) \}$$

$$L^{-1} \{ \bar{T}(s) \} = L^{-1} \left\{ \mathbb{X} \frac{1}{s} [sI + D]^{-1} \mathbb{X}^{-1} V \right\} + L^{-1} \{ \mathbb{X} [sI + D]^{-1} \mathbb{X}^{-1} T(0) \}$$

$$T(t) = \mathbb{X} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} [sI + D]^{-1} \right\} \mathbb{X}^{-1} V + \mathbb{X} L^{-1} \{ [sI + D]^{-1} \} \mathbb{X}^{-1} T(0) \quad [3.126]$$

Donde:

$$R(t) = L^{-1} \left\{ [sI + D]^{-1} \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{s + \lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & \frac{1}{s + \lambda_2} & 0 & \dots & 0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s + \lambda_N} & & & \end{array} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \lambda_1} \right\} & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & L^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \lambda_2} \right\} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & L^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \lambda_N} \right\} \end{bmatrix}$$

$$R(t) = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & e^{-\lambda_N t} \end{bmatrix} \quad [3.127]$$

Es decir, la transformada inversa de Laplace de la matriz $[sI + D]^{-1}$ tiene la forma:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \lambda_i} \right\} = e^{-\lambda_i t} \quad (i = 1; 2; \dots; N)$$

Seguidamente, encontraremos la transformada inversa de Laplace de $\frac{1}{s} [sI + D]^{-1}$.

$$\frac{1}{s} [sI + D]^{-1} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} \frac{1}{s + \lambda_1} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \frac{1}{s + \lambda_2} & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \dots \frac{1}{s + \lambda_N} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s + \lambda_1)} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \frac{1}{s(s + \lambda_2)} & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \dots \frac{1}{s(s + \lambda_N)} \end{bmatrix}$$

$$\text{Ra}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} [sI + D]^{-1} \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s + \lambda_1)} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \frac{1}{s(s + \lambda_2)} & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \dots \frac{1}{s(s + \lambda_N)} \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_1)} \right\} & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_2)} \right\} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_N)} \right\} \end{bmatrix}$$

Por otro lado, sabemos que:

$$\frac{1}{s(s + \lambda_i)} = \frac{K_1}{(s + \lambda_i)} + \frac{K_2}{s} \Rightarrow \frac{1}{s(s + \lambda_i)} = \frac{K_1 s + K_2(s + \lambda_i)}{s(s + \lambda_i)} \Rightarrow 1 = K_1 s +$$

$$K_2 s + K_2 \lambda_i$$

$$1 = (K_1 + K_2) s + K_2 \lambda_i \Rightarrow K_2 \lambda_i = 1; K_1 + K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = \frac{1}{\lambda_i}; K_1 =$$

$$-K_2 \text{ P } K_1 = -\frac{1}{\lambda_i}$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\frac{1}{s(s + \lambda_i)} = \frac{-1/\lambda_i}{(s + \lambda_i)} + \frac{1/\lambda_i}{s} \Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_i)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{-1/\lambda_i}{(s + \lambda_i)} + \frac{1/\lambda_i}{s} \right\}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_i)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{-1/\lambda_i}{(s + \lambda_i)} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{1/\lambda_i}{s} \right\} \Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_i)} \right\}$$

$$= -\frac{1}{\lambda_i} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_i)} \right\} + \frac{1}{\lambda_i} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_i)} \right\} = -\frac{1}{\lambda_i} e^{-\lambda_i t} + \frac{1}{\lambda_i} \Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_i)} \right\} = -\frac{1}{\lambda_i} [e^{-\lambda_i t} - 1]$$

Resultando de esta forma que:

$$Ra(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - 1) & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda_2} (e^{-\lambda_2 t} - 1) & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & -\frac{1}{\lambda_N} (e^{-\lambda_N t} - 1) \end{bmatrix} \quad [3.128]$$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en [3.127] y [3.128] la ecuación [3.126] se transforma en:

$$T(t) = \mathbb{X} Ra(t) \mathbb{X}^{-1} V + \mathbb{X} R(t) \mathbb{X}^{-1} T(0) \quad [3.129]$$

donde las matrices $Ra(t)$ y $R(t)$ son matrices diagonales.

Para calcular el valor de $T(0)$ haremos uso de la condición inicial dada en [3.79]; $C^f(X; Y; Z; t) = -F(X; Y; Z)$ en $t = 0$; ahora haciendo uso de [3.86] tenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_k^f(X; Y; 0) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} = -F(X; Y; Z) \quad [3.130]$$

Seguidamente multiplicaremos a ambos miembros de la ecuación [3.130]

por el operador $\int_0^1 \frac{\eta_j(Z)}{\sqrt{N_j}} dZ$ para obtener:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k^f(X; Y; 0) \int_0^1 \frac{\eta_j(Z)}{\sqrt{N_j}} \frac{\eta_k(Z)}{\sqrt{N_k}} dZ = - \int_0^1 F(X; Y; Z) \frac{\eta_j(Z)}{\sqrt{N_j}} dZ \quad [3.131]$$

Ahora, teniendo en cuenta [3.95] la ecuación [3.131] se transforma en:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{C}_{j k}^f(X; 0) \frac{\varphi_j(Y)}{\sqrt{N_j}} \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ = - \int_0^1 F(X; Y; Z) \frac{\eta_j(Z)}{\sqrt{N_j}} dZ \quad [3.132]$$

Seguidamente multiplicaremos a ambos miembros de la ecuación [3.132]

por el operador $\int_0^1 \frac{\varphi_k(Y)}{\sqrt{N_k}} dY$ para obtener:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{C}_{j k}^f(X; 0) \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ dY \\ & = - \int_0^1 \int_0^1 F(X; Y; Z) \frac{\eta_j(Z) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ dY \end{aligned} \quad [3.133]$$

Ahora, teniendo en cuenta [3.106] la ecuación [3.133] se transforma en:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{C}_{i j k}(0) \frac{\psi_i(X)}{\sqrt{N_i}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ dY \\ & = - \int_0^1 \int_0^1 F(X; Y; Z) \frac{\eta_j(Z) \varphi_k(Y)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} dZ dY \end{aligned} \quad [3.134]$$

A continuación, multiplicaremos a ambos miembros de la ecuación [3.134]

por el operador $\int_0^1 \frac{\psi_j(X)}{\sqrt{N_j}} dX$ para obtener:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{C}_{i j k}(0) \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y) \psi_i(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dZ dY dX \\ & = - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 F(X; Y; Z) \frac{\eta_j(Z) \varphi_k(Y) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j}} dZ dY dX \end{aligned} \quad [3.135]$$

Ahora, teniendo en cuenta la propiedad de ortonormalidad la ecuación [3.135] se transforma en:

$$\bar{\bar{C}}_{ijk}(0) = - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 F(X; Y; Z) \frac{\eta_j(Z) \varphi_k(Y) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j}} dZ dY dX \quad (i = j = k = 1; 2; \dots) \quad [3.136]$$

o equivalentemente

$$T(0) = - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 F(X; Y; Z) \frac{\eta_j(Z) \varphi_k(Y) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j}} dZ dY dX \quad (i = j = k = 1; 2; \dots) \quad [3.137]$$

(Cassol, 2006; Cassol & Wortmann, 2006; Cassol et al., 2009).

De [3.116] y [3.129] resulta que:

$$\bar{\bar{C}}_{ijk}(t) = \mathbb{X} \text{ Ra}(t) \mathbb{X}^{-1} V + \mathbb{X} \text{ R}(t) \mathbb{X}^{-1} T(0) \quad [3.138]$$

Ahora, reemplazando [3.138] en [3.106] obtenemos:

$$\bar{C}_{jk}^f(X; t) = \sum_{i=1}^N [\mathbb{X} \text{ Ra}(t) \mathbb{X}^{-1} V + \mathbb{X} \text{ R}(t) \mathbb{X}^{-1} T(0)] \frac{\psi_i(X)}{\sqrt{N_i}} \quad [3.139]$$

Seguidamente reemplazamos [3.139] en [3.95] para obtener:

$$\bar{C}_k^f(X; Y; t) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N [\mathbb{X} \text{ Ra}(t) \mathbb{X}^{-1} V + \mathbb{X} \text{ R}(t) \mathbb{X}^{-1} T(0)] \frac{\psi_i(X) \varphi_j(Y)}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} \quad [3.140]$$

Por último, reemplazamos [3.140] en [3.86] para obtener:

$$C^f(X; Y; Z; t) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N [X \text{ Ra}(t) X^{-1} V + X \text{ R}(t) X^{-1} T(0)]$$

$$\frac{\psi_i(X) \varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \quad (i = j = k = 1; 2; \dots; N) \quad [3.141]$$

Teniendo en cuenta [3.19] tenemos:

$$C_A(X; Y; Z; t) = C^f(X; Y; Z; t) + F(X; Y; Z) \quad [3.142]$$

Seguidamente remplazaremos los resultados obtenidos en [3.76] y [3.141] en la ecuación [3.142] para obtener:

$$C_A(X; Y; Z; t) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N [X \text{ Ra}(t) X^{-1} V + X \text{ R}(t) X^{-1} T(0)]$$

$$\frac{\psi_i(X) \varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q \cos(\beta_j Y_0) \cos(\gamma_k H_s)}{\bar{u}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)}\right]}$$

$$\left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{bX} \right] \frac{\varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \quad (i = j = k = 1; 2; \dots; N) \quad [3.143]$$

Ahora, la ecuación [3.143] lo adecuamos de tal manera que podamos ingresarlo al Software MatLab y nos pueda determinar el valor de la concentración de CO deseado a partir de sus parámetros conocidos; por tanto esta ecuación se transforma en:

$$C_A(x; y; z; t) = \sum_{i=1}^N \frac{Q \cos(368.812 \pi) \cos(600.8 \pi) \cos\left[\left(\frac{y-368.812}{200}\right)\pi\right] \cos\left[\left(\frac{z-600}{400}\right)\pi\right]}{\bar{u}_X (0,25) \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)}\right]}$$

$$\left\{ \left[-\frac{2}{\pi(2i-1)} \left(e^{-\frac{\pi}{2}(2i-1)t} - 1 \right) \right] \left\{ -u_X a \left[e^{a\left(\frac{x-8.008.546}{200}\right)} - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - e^{(a-b)} e^{b\left(\frac{x-8.008.546}{200}\right)} \right] + D_{AB} a \left[a e^{a\left(\frac{x-8.008.546}{200}\right)} - b e^{(a-b)} e^{b\left(\frac{x-8.008.546}{200}\right)} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - D_{AB} (\pi i)^2 \left[e^{a \left(\frac{x-8008546}{200} \right)} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{b \left(\frac{x-8008546}{200} \right)} \right] \\
& - D_{AB} (\pi i)^2 \left[e^{a \left(\frac{x-8008546}{200} \right)} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{b \left(\frac{x-8008546}{200} \right)} \right] \Big\} \\
& + \left[1 - e^{-\frac{\pi}{2}(2i-1)t} \right] \left[e^{a \left(\frac{x-8008546}{200} \right)} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{b \left(\frac{x-8008546}{200} \right)} \right] \Big\} \quad [3.144]
\end{aligned}$$

Donde:

$$a = \frac{\bar{v}_x - \sqrt{\bar{v}_x^2 + 8 \bar{D}_{AB}^2 (\pi i)^2}}{2 \bar{D}_{AB}} \quad y \quad b = \frac{\bar{v}_x + \sqrt{\bar{v}_x^2 + 8 \bar{D}_{AB}^2 (\pi i)^2}}{2 \bar{D}_{AB}}$$

Los detalles de la expresión [3.144] se indican en el anexo 2 y el código en el software MatLab se da en el anexo 3.

Resultando de esta manera que la expresión dada por [3.144] es la solución de nuestra ecuación de convección-difusión [3.1].

A continuación, calcularemos los valores de los coeficientes de la ecuación [3.1], empezando primeramente por encontrar el coeficiente de difusión dada por la ecuación [2.43]:

$$D_{AB} = \frac{10^{-4} \left[1,048 - 0,249 \sqrt{\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}} \right] \cdot T^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}}}{p_t \cdot (r_{AB})^2 \cdot f(kT/\epsilon_{AB})}$$

Puesto que la temperatura T sus unidades se deben dar en Kelvin (K), entonces emplearemos la siguiente fórmula para pasar de grados Celsius a Kelvin:

$$K = ^\circ C + 273,15 \quad [3.145]$$

donde $^{\circ}\text{C}$ denota la temperatura en grados Celsius medidos en el campo donde se realiza este estudio (Himmelblau, 1997).

El peso molecular del aire considerado como M_B tiene como valor 20,79 g/mol (Hinojosa, 1992; Solano & Rodriguez, 2010).

El peso molecular del monóxido de carbono considerado como M_A tiene como valor 28,01 g/mol (Caamaño, s.f.).

El diámetro de colisión del aire considerado como r_B tiene como valor 0,371 1 nm.

El diámetro de colisión del monóxido de carbono considerado como r_A tiene como valor 0,369 0 nm.

(Treybal, Rodríguez, & Lozano, 1980).

La energía de la atracción molecular del aire considerado como $\frac{\varepsilon_B}{k}$ tiene como valor 78,6 kJ.

La energía de la atracción molecular del monóxido de carbono considerado como $\frac{\varepsilon_A}{k}$ tiene como valor 91,7 kJ.

(Treybal et al., 1980).

Para determinar la presión absoluta p_t tendremos en cuenta la altura donde está ubicada la intersección en estudio conformada por las avenidas Francisco Bolognesi y Gustavo Pinto; y considerando que conforme aumenta la altura sobre el nivel del mar la presión atmosférica disminuye (Zavalaga Rivera, 2010).

Puesto que nuestra intersección se encuentra ubicada a 600 m.s.n.m., entonces determinaremos la presión atmosférica de la siguiente manera: Sabiendo que para una altura de 500 m la presión atmosférica es 700 mm y para una altura de 1 500 m la presión atmosférica es 650 mm, ahora haremos uso de la interpolación para calcular la presión atmosférica a 600 m de altura. Para una diferencia de 1 000 m hay una diferencia de presión atmosférica de 50 mm; por tanto:

$$1\ 000\ \text{m} \longrightarrow 50\ \text{mm} \implies x = \frac{100(50)}{1\ 000} = 5\ \text{mm}$$

$$100\ \text{m} \longrightarrow x$$

Como el valor de la presión atmosférica a 600 m tiene que estar entre 650 mm y 700 mm, entonces de 700 mm le restaremos 5 mm y obtendremos la presión atmosférica deseada, es decir 695 mm.

Ahora, convertiremos 695 mm a pascales de la siguiente manera:

$$760\ \text{mm} \longrightarrow 1\ 013\ \text{Pa} \implies x = \frac{695(1\ 013)}{760} = \frac{704\ 035}{760} = 926,36\ \text{Pa}$$

$$695\ \text{mm} \longrightarrow x$$

Por tanto la presión atmosférica requerida será

$$p_t = 926,36\ \text{N/m}^2$$

Seguidamente, calcularemos la separación molecular durante el choque

$$r_{AB} = \frac{r_A + r_B}{2} = \frac{0,3690 + 0,3711}{2} = \frac{0,7401}{2} = 0,37005 \text{ nm}$$

$$(r_{AB})^2 = 0,136937002 \text{ nm}^2$$

Ahora, calcularemos le energía de atracción molecular

$$\frac{\epsilon_{AB}}{k} = \sqrt{\frac{\epsilon_A}{k} \frac{\epsilon_B}{k}} = \sqrt{91,7 (78,6)} = \sqrt{7207,62} = 84,89770315 \text{ kJ } \frac{kT}{\epsilon_{AB}} =$$

$$\frac{T}{84,89770315}$$

donde T es la temperatura obtenida en [3.145].

$$f\left(\frac{kT}{\epsilon_{AB}}\right) = \text{ubicaremos en la gráfica}$$

(Treybal et al., 1980).

Por otro lado, obtendremos el valor de la expresión:

$$\sqrt{\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}} = \sqrt{\frac{1}{28,01} + \frac{1}{28,97}} = \sqrt{0,035701535 + 0,034518467} =$$

$$\sqrt{0,070220002} = 0,264990569$$

$$\sqrt{\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}} = 0,264990569$$

Haciendo uso de los valores encontrados obtenemos el valor de D_{AB} .

Ahora, obtendremos el coeficiente de la velocidad del viento u_x , dicho parámetro varía según la altura. Para encontrar este parámetro tendremos en cuenta la Ley Exponencial de Hellmann la cual relaciona las lecturas de velocidad del viento a dos alturas diferentes y está expresada por:

$$\frac{u_x}{u_{ref}} = \left(\frac{H_s}{H_{ref}} \right)^\alpha \quad [3.146]$$

Donde:

u_x : es la velocidad promedio del viento, la cual se determina a una altura H_s sobre el nivel del suelo de la fuente de emisión (m/s).

u_{ref} : es la velocidad promedio del viento de referencia medida a la altura H_{ref} sobre el nivel del suelo (m/s).

α : es el coeficiente o exponente de Hellmann (adimensional).

(Bañuelos-Ruedas, Angeles-Camacho, & Rios-Marcuello, 2010; Díaz, 2013; Galvis Florez & Medina Rueda, 2013; Hosseini, 2013; Kahforoshan et al., 2008; Ruedas; Semarnat, 2002).

Para esta investigación el exponente de Hellmann se usara el valor de $\alpha = 0,3$; valor propuesto por la Agencia de Protección del Medio Ambiente de los Estados Unidos (EPA) para el caso de una zona urbana con categoría de estabilidad F (estable) (Kahforoshan et al., 2008; Romero & Patiño Aroca, 2005; Ruedas).

El valor de H_s es $H_s = 0,8$ m; y el valor H_{ref} es $H_{ref} = 20$ m con estos valores determinaremos la velocidad u_x , para cada una de las velocidades de referencia u_{ref} .

CAPÍTULO IV

MARCO METODOLÓGICO

4.1 Caracterización o tipo del diseño de la investigación

La presente investigación tuvo como objetivo medir los niveles de las concentraciones de CO, con el fin de determinar la distribución de este contaminante dentro de la intersección en estudio y establecer si el lugar representa algún riesgo para la salud de las personas expuestas. Estos elementos nos permiten afirmar que se trata de un estudio cuasi-experimental o de campo. Los diseños cuasi-experimentales, principales instrumentos de trabajo dentro del ámbito aplicativo, son esquemas de investigación no aleatorios (Bono, 2012). Por otro lado se puede afirmar que en los diseños cuasi-experimentales se acepta la carencia de un control total de las variables; es decir, no se tiene un control experimental completo (Murillo, 2006).

4.2 Identificación del área más vulnerable a la exposición por monóxido de carbono

Con base a los estudios realizados por investigadores en otros países se consideró que una de las áreas más vulnerables de ser afectadas por las emisiones de monóxido de carbono son las intersecciones de las calles (Dabberdt, Hoydysh, Schorling, Yang, & Holynskyj, 1995; Pandian, Gokhale, & Ghoshal, 2009; Soulhac, Garbero, Salizzoni, Mejean, & Perkins, 2009). En la intersección de las avenidas Francisco Bolognesi y Gustavo Pinto en el cercado de la ciudad de Tacna, el flujo vehicular en las horas punta es muy alto. Se consideró tres horarios como horas punta desde las 07:30 h hasta las 08:30 h; desde las 12:30 h hasta las 13:30 h y desde las 18 h hasta las 19 h (Figueroa & Martínez, 2009); puesto que en dichas horas las personas se trasladan a su centro de trabajo, a sus centros de estudios, a los centros de esparcimiento y luego retornan a sus domicilios.

4.3 Acciones y actividades para la ejecución de la toma de datos

El monitoreo de la toma de datos se realizó en la región de Tacna, que se encuentra ubicada en el extremo sur occidental del Perú, enmarcado en las coordenadas geográficas 16° 18' y 18° 2' latitud sur

(LS) y $69^{\circ} 28'$ y $71^{\circ} 02'$ de longitud oeste (LW), y se encuentra a una altitud de 558 msnm (Instituto Nacional de Defensa Civil, 2007).

La avenida Francisco Bolognesi, la cual forma parte de la intersección en estudio, se caracteriza por tener dos vías con dos carriles y tres carriles respectivamente. Además, consta de tres aceras, dos de las cuales están a los costados de la avenida y la otra en el centro de esta, por donde transitan muchos peatones. Por otro lado, la avenida Gustavo Pinto se caracteriza por tener una sola vía formado por dos carriles por donde transitan los vehículos. Además consta de dos aceras a ambos lados de la avenida.

4.4 Estrategia de evaluación

- a) Como el número de vehículos que transitan por la intersección en estudio varían durante el día, se podía prever que los niveles de las concentraciones de CO también variarían. Con el fin de obtener resultados confiables se tomaron las mediciones de CO y de los parámetros meteorológicos durante tres horarios al día, durante una hora en cada horario.

b) Con el fin de obtener datos más representativos de la situación real, cada una de las mediciones de CO se realizó por períodos de 10 min en las fuentes de emisión; las cuales fueron cuatro, y el mismo periodo de tiempo fue para los cuerpos receptores que fueron dos. Seguidamente se promediaron los valores promediados obtenidos en cada fuente de emisión y en cada cuerpo receptor (Palacio, Marín, Yepes, & Orozco, 2012). Obteniéndose de este modo un valor para la fuente de emisión y un valor para el punto receptor. Por otro lado, la toma de los datos se realizaron durante seis días de la semana; cinco días considerados como días laborables de lunes a viernes y el sexto día sábado considerado como día no laborable, para cada estación del año. Así tenemos que para la estación de invierno consideramos los días del 11 al 16 de agosto del 2014; para la estación de primavera consideramos los días del 17 al 22 de noviembre del 2014; para la estación de verano consideramos los días del 26 al 31 de enero del 2015 y para la estación de otoño consideramos los días del 04 al 09 de mayo del 2015; haciendo un total de 24 días.

4.5 Evaluación de las concentraciones de CO

4.5.1 Método de medición

Teniendo en cuenta las características del equipo portátil utilizado, se aplicó un método de lectura directa, que permitió definir libremente los períodos de medición anteriormente indicados.

4.5.2 Equipo utilizado

Un medidor de CO marca SHOW RANGE, modelo HST881, alcance de indicación 1 000 ppm.

4.6 Datos

4.6.1 Los datos tomados durante el estudio

Los datos tomados en cuenta en este estudio fueron los siguientes:

- Puntos de ubicación de las fuentes de emisión y cuerpos receptores, día, fecha, hora de medición.
- Concentración de CO (ppm)
- Temperatura (ambiente) (°C)

- Humedad relativa (%)
- Velocidad del viento (m/s)
- Dirección del viento (grados)

El equipo utilizado para medir los parámetros velocidad del viento, la temperatura y la humedad relativa fue TERMO ANEMÓMETRO DIGITAL, marca TENMARS, modelo TM-413. Por otro lado, el equipo utilizado para medir la dirección del viento fue una veleta; para la medición de los puntos de ubicación se utilizó un equipo GPS, marca GARMIN, modelo GPSMAP 62s. También hicimos uso de una brújula, marca KONUS y una cámara fotográfica marca SONY.

Cabe mencionar que para la realización de la toma de datos no se ha contado con el apoyo de ninguna institución en el ámbito local para el uso de los equipos antes mencionados. El investigador ha tenido que adquirir los equipos más indispensables. Por otro lado, al empezar nuestro estudio no se ha contado con ninguna base de datos consistente de los vehículos que circulan por la ciudad de Tacna y en consecuencia menos en nuestra intersección en estudio para poder realizar asociaciones de las emisiones detectadas por los sensores. A su vez, es necesario dar a conocer que la ciudad de Tacna no cuenta con un

inventario de emisiones de contaminantes atmosféricos, lo cual es muy importante para este tipo de estudios.

4.7 Descripción del uso de los equipos en la toma de los datos

Mediante el medidor de CO se realizaron mediciones de la concentración de monóxido de carbono en las fuentes de emisión las cuales fueron tomadas al borde de la vereda; cuando los vehículos estaban en ralentí como consecuencia del estado del semáforo con la señalización en rojo y en movimiento cuando el semáforo con la señalización en verde durante 10 min y a una altura de 0,8 m sobre el nivel del suelo; y en los cuerpos receptores a una altura de 1,5 m sobre el nivel del suelo y a una distancia de 20 m de la fuente central de emisión del contaminante, dichas mediciones se realizaron durante una hora y estuvo a cargo del investigador.

Mediante el equipo Global Positioning System (GPS) realizamos dos mediciones a una altura a nivel del suelo. Una de estas mediciones nos indica la ubicación de la fuente de emisión de CO y la otra medición nos indica la ubicación del cuerpo receptor.

La velocidad y dirección del viento fueron medidas a una altura de 18 m sobre el nivel del suelo simultáneamente con las mediciones del CO. Para medir la velocidad del viento se utilizó un anemómetro, mediante el mismo también se midieron las condiciones climáticas del ambiente locales como la temperatura y la humedad; bajo sombra, en el interior de una cabina construida de triplay; para tomar dichas mediciones el equipo estaba ubicada a una altura de 1,5 m, sobre el nivel del suelo. Para obtener la medición de la dirección del viento hicimos uso de una veleta, para realizar dichas mediciones con los equipos mencionados contamos con el apoyo de dos personas. La velocidad del viento y su dirección fueron medidas a intervalos de 5 min durante una hora; mientras que la humedad relativa y la temperatura se midieron al principio y al final de cada horario considerado durante 5 min, por el inconveniente de poseer un solo equipo.

También, simultáneamente a las mediciones realizadas con los equipos se contabilizó el número de vehículos que transitan según sus correspondientes sentidos de convergencia a la intersección en estudio para lo cual contamos con el apoyo de cuatro personas. También se hizo uso de una cámara fotográfica para registrar los acontecimientos en la intersección en estudio, lo cual se muestra en el anexo 4.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

En este capítulo daremos a conocer los datos obtenidos en el campo de la concentración del contaminante CO y de los parámetros meteorológicos de la intersección en estudio.

El conjunto de parámetros meteorológicos locales, específicamente en la intersección en estudio de la ciudad de Tacna se midieron en los períodos del 11 al 16 de agosto del 2014 para la estación de invierno. Por otro lado, del 17 al 22 de noviembre del 2014 para la estación de primavera, a su vez del 26 al 31 de enero del 2015 para la estación de verano, y finalmente del 04 al 09 de mayo del 2015 para la estación de otoño. Es decir, dichas mediciones se obtuvieron durante las cuatro estaciones del año. En los mismos períodos antes descritos también se midieron las concentraciones de CO y se contabilizaron el número de vehículos que transitaban por dicha intersección.

Los datos tomados durante el monitoreo en la intersección en estudio son descritos en cada uno de estos períodos antes mencionados. Así tenemos que los datos obtenidos en el monitoreo durante la estación de invierno y en los días indicados; los cuales se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1
Concentración de CO promedio y datos meteorológicos (invierno: del 11 al 16 de agosto).

Días	Velocidad del viento (m/s)	Temperatura (°C)	Humedad relativa (%)	CO (ppm)
11	0,5	18,6	61,5	0,2
12	0,7	17,6	66,0	0,8
13	0,6	18,4	60,9	0,2
14	1,1	18,9	64,6	1,4
15	0,5	19,9	57,1	0,6
16	0,6	18,1	65,2	0,2

Fuente: Elaboración propia
Horarios en que tomaron los datos: 7:30 h a 8:30 h; 12:30 h a 13:30 h y de 18:00 h a 19:00 h

En la Tabla 1 podemos apreciar que donde hubo una mayor concentración del contaminante CO fue el día jueves 14 agosto del 2014, alcanzando 1,4 ppm y el valor más bajo se alcanzó los días lunes, miércoles y sábado que fue de 0,2 ppm.

Los datos obtenidos con más detalle de esta estación son mostrados en la Tabla 11, ver anexo 4.

Por otro lado, los datos obtenidos en el monitoreo durante la estación de primavera y en los días indicados; los cuales se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2
Concentración de CO promedio y datos meteorológicos (primavera: del 17 al 22 de noviembre).

Días	Velocidad del viento (m/s)	Temperatura (°C)	Humedad relativa (%)	CO (ppm)
17	1,4	15,5	59,3	0,1
18	0,6	14,9	61,5	0,4
19	0,9	14,5	59,0	0,6
20	0,9	13,7	59,4	0,2
21	1,1	15,4	58,2	0,5
22	1,0	16,8	56,5	0,0

Fuente: Elaboración propia

Horarios en que tomaron los datos: 7:30 h a 8:30 h; 12:30 h a 13:30 h y de 18:00 h a 19:00 h

En la Tabla 2 podemos apreciar que donde hubo una mayor concentración del contaminante CO fue el día miércoles 19 de noviembre del 2014, alcanzando 0,6 ppm y el valor más bajo se alcanzó el día sábado, que fue de 0,0 ppm.

Los datos obtenidos con más detalle de esta estación son mostrados en la Tabla 12, ver anexo 4.

Seguidamente indicamos los datos obtenidos en el monitoreo durante la estación de verano y en los días indicados; los cuales se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3
Concentración de CO promedio y datos meteorológicos (verano: del 26 al 31 de enero).

Días	Velocidad del viento (m/s)	Temperatura (°C)	Humedad relativa (%)	CO (ppm)
26	1,0	21,1	57,0	0,0
27	1,3	20,8	55,9	0,1
28	0,8	22,0	53,2	0,4
29	0,9	21,0	55,5	0,2
30	1,1	21,3	57,8	0,7
31	0,9	21,5	60,8	0,4

Fuente: Elaboración propia
Horarios en que tomaron los datos: 7:30 h a 8:30 h; 12:30 h a 13:30 h y de 18:00 h a 19:00 h

En la Tabla 3 podemos apreciar que donde hubo una mayor concentración del contaminante CO fue el día viernes 30 de enero del 2015, alcanzando 0,7 ppm y el valor más bajo se alcanzó el día lunes, que fue de 0,0 ppm.

Los datos obtenidos con más detalle de esta estación son mostrados en la Tabla 13, ver anexo 4.

Por último indicamos los datos obtenidos en el monitoreo durante la estación de otoño y en los días indicados; los cuales se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4
Concentración de CO promedio y datos meteorológicos (otoño: del 04 al 09 de mayo).

Días	Velocidad del viento (m/s)	Temperatura (°C)	Humedad relativa (%)	CO (ppm)
45	0,6	19,2	64,9	3,9
05	0,6	20,2	66,0	2,3
06	0,7	18,6	62,0	2,2
07	0,9	20,0	63,3	2,8
08	0,7	18,5	67,8	4,4
09	0,6	18,2	67,3	0,0

Fuente: Elaboración propia
Horarios en que tomaron los datos: 7:30 h a 8:30 h; 12:30 h a 13:30 h y de 18:00 h a 19:00 h

En la Tabla 4 podemos apreciar que donde hubo una mayor concentración del contaminante CO fue el día viernes 07 de mayo del 2015, alcanzando 4,4 ppm y el valor más bajo se alcanzó el día sábado, que fue de 0,0 ppm.

Los datos obtenidos con más detalle de esta estación son mostrados en la Tabla 14, ver anexo 4.

Para todas las mediciones hechas en las cuatro estaciones del año solamente hemos considerado una dirección del viento que sopla del sud sudoeste (SSO) en el barlovento al nor noreste (NNE) en el sotavento, la particularidad de tomar esta dirección; es debido a que en el modelo matemático deducido se ha realizado considerando al eje x en la dirección del viento, puesto que por otro lado es la dirección que con más frecuencia se ha repetido en las diferentes estaciones del año.

A continuación, vamos a indicar los datos de la concentración de CO obtenidos en los cuerpos receptores con el equipo portátil los cuales serán considerados como valores observados (CO_o) y los datos obtenidos por el modelo matemático, los cuales serán considerados como valores predichos (CO_p) en las diferentes estaciones del año.

Para la obtención de los valores de la concentración de CO mediante el modelo matemático primeramente hemos obtenido los valores de sus coeficientes de la ecuación en derivadas parciales del modelo matemático deducido; los cuales son el coeficiente de difusión y la velocidad del viento, mediante las ecuaciones descritas por [2.43] y [3.146] respectivamente.

En primer lugar indicamos los valores obtenidos en el monitoreo de la estación de invierno; los cuales se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5
Concentración promedio de CO observada (CO_o) y predicha (CO_p) (invierno: del 11 al 16 de agosto).

Días	CO_o (ppm)	CO_p (ppm)
11	0,2	0,3
12	0,8	0,8
13	0,2	0,3
14	1,4	1,5
15	0,6	1,1
16	0,2	0,4

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 5 podemos apreciar que son similares los valores obtenidos de las concentraciones de CO tanto por equipo portátil como por el modelo matemático.

Los datos obtenidos con más detalle de esta estación son mostrados en la Tabla 15, ver anexo 4.

Seguidamente indicamos los valores obtenidos en el monitoreo de la estación de primavera; los cuales se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6
Concentración promedio de CO observada (CO_o) y predicha (CO_p) (primavera: del 17 al 22 de noviembre).

Días	CO_o (ppm)	CO_p (ppm)
17	0,1	0,2
18	0,4	0,5
19	0,6	0,7
20	0,2	0,3
21	0,5	0,8
22	0,0	0,2

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 6 podemos apreciar que son similares los valores obtenidos de las concentraciones de CO tanto por equipo portátil como por el modelo matemático.

Los datos obtenidos con más detalle de esta estación son mostrados en la Tabla 16, ver anexo 4.

A continuación indicamos los valores obtenidos en el monitoreo de la estación de verano; los cuales se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7
Concentración promedio de CO observada (CO_o) y predicha (CO_p) (verano: del 26 al 31 de enero).

Días	CO_o (ppm)	CO_p (ppm)
26	0,0	0,5
27	0,1	0,2
28	0,4	0,5
29	0,2	0,4
30	0,7	0,6
31	0,4	0,4

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 7 podemos apreciar que son similares los valores obtenidos de las concentraciones de CO tanto por equipo portátil como por el modelo matemático.

Los datos obtenidos con más detalle de esta estación son mostrados en la Tabla 17, ver anexo 4.

Finalmente, indicamos los valores obtenidos en el monitoreo de la estación de otoño; los cuales se muestran en la Tabla 8.

Tabla 8
Concentración promedio de CO observada (CO_o) y predicha (CO_p) (otoño: del 04 al 09 de mayo).

Días	CO_o (ppm)	CO_p (ppm)
04	3,9	3,8
05	2,3	2,6
06	2,2	2,4
07	2,8	2,7
08	4,4	5,1
09	0,0	0,1

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 8 podemos apreciar que son similares los valores obtenidos de las concentraciones de CO tanto por equipo portátil como por el modelo matemático.

Los datos obtenidos con más detalle de esta estación son mostrados en la Tabla 18, ver anexo 4.

A continuación presentamos en forma conjunta los datos obtenidos de la concentración de CO promedio en las diferentes estaciones del año; estos datos se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9
Comparación de concentración promedio de CO observada (CO_o) y predicha (CO_p).

Estación	CO_o (ppm)	CO_p (ppm)
Invierno	0,6	0,7
Primavera	0,3	0,4
Verano	0,3	0,4
Otoño	2,6	2,8

Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar en la Tabla 9 en la estación de otoño es donde existe una mayor concentración del contaminante CO, y en las estaciones de primavera y verano existe menos concentración de CO.

Haciendo uso del software estadístico InfoStat haremos el análisis con la estadística de regresión entre las variables meteorológicas y la concentración de CO en la estación de **invierno**. Así tenemos que el P-valor es 0,02 el cual es menor que 0,05, esto quiere decir que si existe una relación significativa entre las variables CO y velocidad del viento, con

un nivel del 95,0% de confianza. Por otro lado el P-valor es 0,30 el cual es mayor que 0,05, esto quiere decir que no existe una relación significativa entre las variables CO y número de vehículos, con un nivel del 95,0% de confianza.

Ahora tenemos que el P-valor es 0,75 el cual es mayor que 0,05, esto quiere decir que no existe una relación significativa entre las variables CO y la temperatura, con un nivel del 95,0% de confianza. Por otro lado el P-valor es 0,58 el cual es mayor que 0,05, esto quiere decir que no existe una relación significativa entre las variables CO y la humedad relativa, con un nivel del 95,0% de confianza.

El análisis entre las variables meteorológicas y la concentración de CO en la estación de **primavera**. Así tenemos que el P-valor es 0,45 el cual es mayor que 0,05, esto quiere decir que no existe una relación significativa entre las variables CO y la velocidad del viento, con un nivel del 95,0% de confianza. Por otro lado el P-valor es 0,23 el cual es mayor que 0,05, esto quiere decir que no existe una relación significativa entre las variables CO y número de vehículos, con un nivel del 95,0% de confianza.

Ahora tenemos que el P-valor es 0,34 el cual es mayor que 0,05, esto quiere decir que no existe una relación significativa entre las

variables CO y la temperatura, con un nivel del 95,0% de confianza. Por otro lado el P-valor es 0,45 el cual es mayor que 0,05, esto quiere decir que no existe una relación significativa entre las variables CO y la humedad relativa, con un nivel del 95,0% de confianza.

El análisis entre las variables meteorológicas y la concentración de CO en la estación de **verano**. Así tenemos que el P-valor es 0,73 el cual es mayor que 0,05, esto quiere decir que no existe una relación significativa entre las variables CO y la velocidad del viento, con un nivel del 95,0% de confianza. Por otro lado el P-valor es 0,53 el cual es mayor que 0,05, esto quiere decir que no existe una relación significativa entre las variables CO y número de vehículos, con un nivel del 95,0% de confianza.

Ahora tenemos que el P-valor es 0,29 el cual es mayor que 0,05, esto quiere decir que no existe una relación significativa entre las variables CO y la temperatura, con un nivel del 95,0% de confianza. Por otro lado el P-valor es 0,68 el cual es mayor que 0,05, esto quiere decir que no existe una relación significativa entre las variables CO y la humedad relativa, con un nivel del 95,0% de confianza.

El análisis entre las variables meteorológicas y la concentración de CO en la estación de **otoño**. Así tenemos que el P-valor es 0,67 el cual es mayor que 0,05, esto quiere decir que no existe una relación significativa entre las variables CO y la velocidad del viento, con un nivel del 95,0% de confianza. Por otro lado, el P-valor es 0,03 el cual es menor que 0,05, esto quiere decir que existe una relación significativa entre las variables CO y número de vehículos, con un nivel del 95,0% de confianza.

Ahora tenemos que el P-valor es 0,67 el cual es mayor que 0,05, esto quiere decir que no existe una relación significativa entre las variables CO y la temperatura, con un nivel del 95,0% de confianza. Por otro lado el P-valor es 0,95 el cual es mayor que 0,05, esto quiere decir que no existe una relación significativa entre las variables CO y la humedad relativa, con un nivel del 95,0% de confianza.

Haciendo uso del software estadístico InfoStat se hizo el análisis mediante la estadística de correlación entre las variables del CO observada (CO_o) y predicha (CO_p) para las diferentes estaciones del año y en sus correspondientes semanas antes mencionadas. El análisis entre las variables CO_o y CO_p durante la estación de **invierno**, se encontró

que su coeficiente de correlación es $r = 0,94$, lo cual nos indica que existe un fuerte grado de asociación entre estas variables.

Del análisis entre las variables CO_o y CO_p durante la estación de **primavera**, tenemos que el coeficiente de correlación es $r = 0,95$, lo cual nos indica que existe un fuerte grado de asociación entre estas variables.

Considerando el análisis entre las variables CO_o y CO_p durante la estación de **verano**, tenemos que el coeficiente de correlación es $r = 0,58$, lo cual nos indica que existe un grado de asociación moderada entre estas variables.

A partir del análisis entre las variables CO_o y CO_p durante la estación de **otoño**, se desprende que el coeficiente de correlación es $r = 0,99$, lo cual nos indica que existe un fuerte grado de asociación entre estas variables.

A continuación, presentaremos los resultados en forma gráfica de los datos obtenidos en el monitoreo en todas las estaciones del año y sus correspondientes semanas.

En la figura 5 presentamos un contraste en conjunto sobre las concentraciones de CO en las semanas de monitoreo en este estudio de las diferentes estaciones del año.

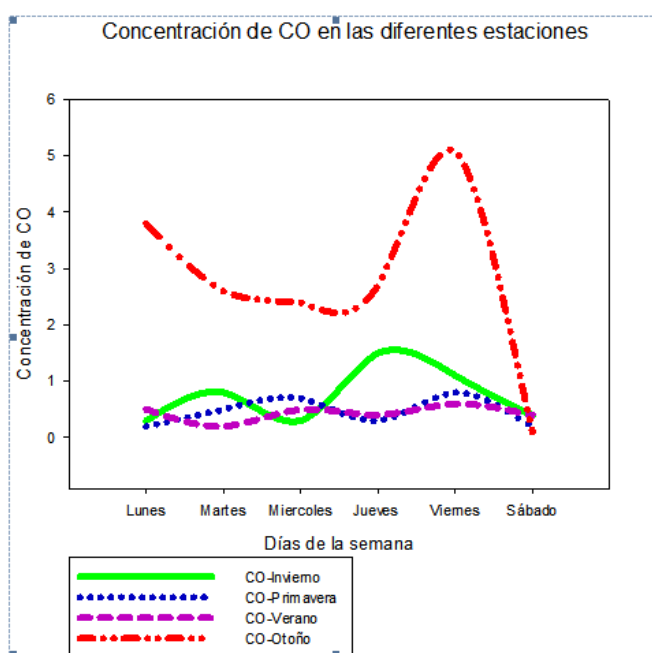


Figura 5. Concentración de CO de las diferentes estaciones del año en sus respectivas semanas de monitoreo.

Fuente: Elaboración propia

Se puede apreciar que en la estación de otoño es donde más incide la concentración de CO en relación a las demás estaciones, seguida de la estación de invierno y, a continuación de la estación de primavera. Donde existe menor contaminación por CO es en la estación de verano.

A continuación presentamos en la figura 6 un contraste entre las concentraciones de CO_o y CO_p durante la estación de invierno.

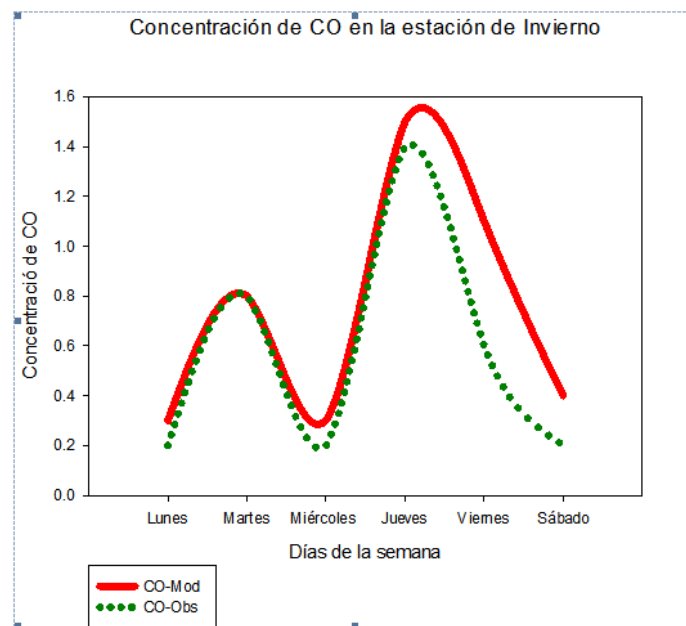


Figura 6. Concentraciones de CO_o y CO_p durante la estación de invierno.
Fuente: Elaboración propia

Como podemos apreciar el día lunes hubo una menor concentración del contaminante en relación a los demás días y en el día jueves es donde se produjo una mayor concentración del contaminante en relación a los demás días.

A continuación, presentamos en la figura 7 un contraste entre las concentraciones de CO_o y CO_p durante la estación de primavera.

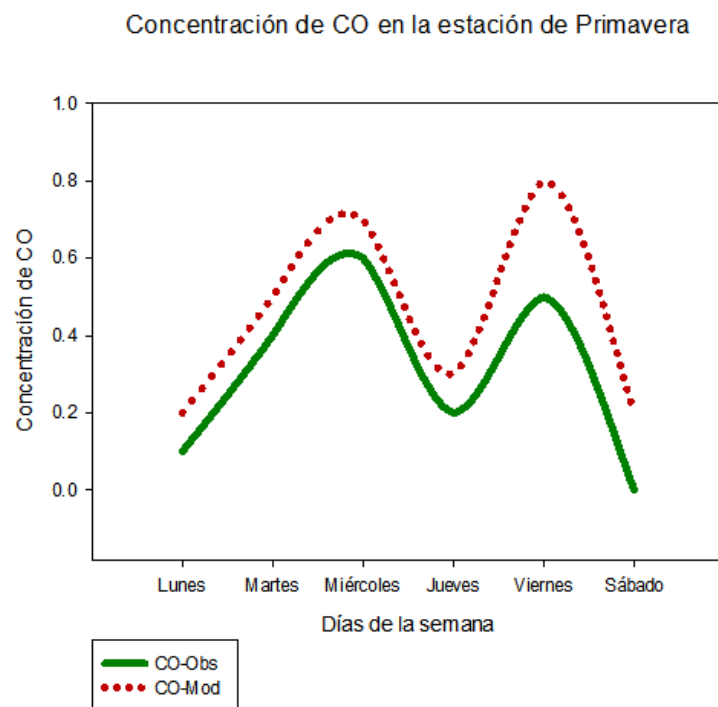


Figura 7. Concentraciones de CO_o y CO_p durante la estación de primavera.

Fuente: Elaboración propia

Podemos apreciar que el día sábado hubo una menor concentración del contaminante en relación a los demás días y en el día viernes es donde se produjo una mayor concentración del contaminante en relación a los demás días.

A continuación, presentamos en la figura 8 un contraste entre las concentraciones de CO_o y CO_p durante la estación de verano.

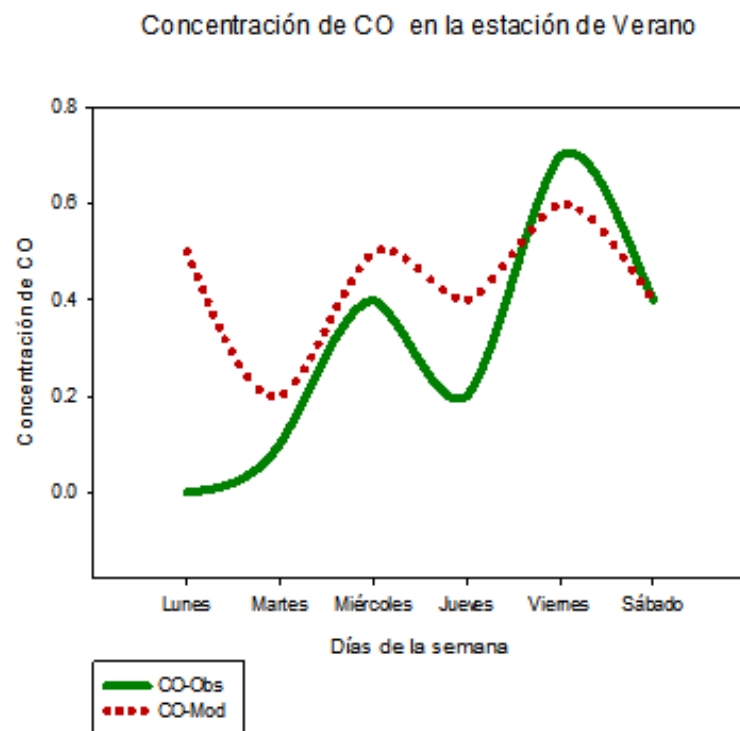


Figura 8. Concentraciones de CO_o y CO_p durante la estación de verano.

Fuente: Elaboración propia

Se puede apreciar un fenómeno atípico entre las concentraciones determinadas por CO_o y CO_p el día lunes y en día viernes es donde se produjo una mayor concentración del contaminante en relación a los demás días.

A continuación, presentamos en la figura 9 un contraste entre las concentraciones de CO_o y CO_p durante la estación de otoño.

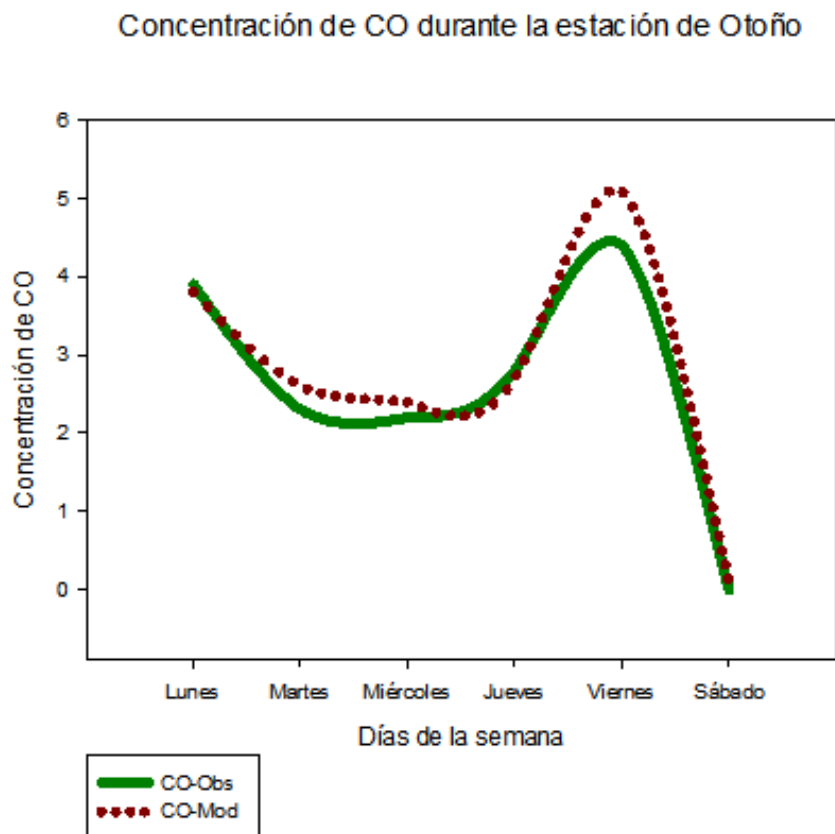


Figura 9. Concentraciones de CO_o y CO_p durante la estación de otoño.

Fuente: Elaboración propia

El día sábado hubo una menor concentración del contaminante en relación a los demás días y en el día viernes es donde se produjo una mayor concentración del contaminante en relación a los demás días.

Por otro lado, deberemos tener en cuenta que nuestro modelo matemático deducido estará incluido dentro de los modelos de contaminación atmosférica; los cuales son instrumentos sofisticados que en última instancia, reflejan el estado actual de los conocimientos sobre el transporte turbulento en la atmósfera. Los resultados que proporcionan están sujetos a un considerable margen de error. Esto es debido a varios factores, en particular la incertidumbre de la variabilidad intrínseca de la atmósfera (Silva, Tirabassi, Vilhena, & Buske, 2013). A su vez, los modelos de calidad del aire son herramientas poderosas para predecir el destino de gases o aerosoles contaminantes después de su liberación a la atmósfera (Chang & Hanna, 2004).

CAPÍTULO VI

DISCUSIÓN

La concentración de los contaminantes atmosféricos suele expresarse en cuatro tipos de unidades como se muestra en la Tabla 10.

Tabla 10

Tipos de unidades de los contaminantes atmosféricos

Contaminantes gaseosos	ppm (partes por millón en volumen)
	ppb (partes por billón en volumen)
Contaminantes gaseosos y material particulado	mg/m ³ (miligramos por metro cúbico)
	µg/m ³ (microgramos por metro cúbico)

Fuente: <http://www2.medioambiente.gov.ar/documentos/prodia/contaminacion/manual01.pdf>

Para el cambio de sistemas de unidades de µg/m³ a ppm y viceversa están dadas por las fórmulas indicadas en el anexo 1.

Estándar de Calidad Ambiental – ECA, regulada mediante Ley General del Ambiente N° 28611, artículo 31°, el ECA es la medida que

establece el nivel de concentración de sustancias o parámetros físicos, químicos y biológicos, presentes en el aire, agua o suelo, en su condición de cuerpo receptor, que no representa riesgo significativo para la salud de las personas ni el ambiente; según el parámetro en particular a que se refiera. (Rivera, 2012)

Artículo 32º, el Límite Máximo Permisible (LMP) como medida de la concentración de elementos, parámetros físicos, químicos y biológicos, que caracterizan a un efluente, que al ser excedida puede causar daños a la salud, al bienestar humano y el ambiente; según el parámetro en particular a que se refiera, la concentración podrá ser expresada en máximos, mínimos o rangos. El LMP guarda coherencia entre el nivel de protección ambiental establecido para una fuente determinada y los niveles generales que se establecen en los ECAs. (Rivera, 2012)

Los estándares nacionales de calidad ambiental del aire para el monóxido de carbono dado por el D.S. N° 074-2001-PCM son: para un periodo de 8 h es de 10 000 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ (9 ppm)y para un periodo de 1 h es de 30 000 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ (26 ppm) (Hugo, 2001).

Normas sugeridas por la Organización Mundial de la Salud (OMS) para la calidad del aire establece que para un periodo de 8 h es de 10 mg/m³ (9 ppm) y para un periodo de 1 h es de 30 mg/m³ (25 ppm) (Pulíafito & Quero, 2003).

Las normas para el CO en el aire ambiente o en lugares de trabajo establecidos por la Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos (USEPA) son para un periodo de 8 h de 9 ppm (10 mg/m³) y para un periodo de 1 h de 35 ppm (40 mg/m³) (Aneja et al., 2001; Han & Naeher, 2006).

Teniendo en cuenta el D.S N° 047-2001-MTC que en su artículo primero describe: Establézcase en el ámbito nacional, los valores de los Límites Máximos Permisibles (LMP) de Emisiones Contaminantes para vehículos automotores en circulación, vehículos automotores nuevos a ser importados o ensamblados en el país, y vehículos automotores usados a ser importados, los cuales están indicados en el Anexo 1. (Brackl, 2009)

En la intersección de las avenidas Francisco Bolognesi y Gustavo Pinto, los resultados del monitoreo meteorológico para el mes de agosto han mostrado velocidades del viento muy bajas, para los días de la

semana del 11 al 16 en especial. En dicha semana; en todo el tiempo empleado, la velocidad del viento se mantuvo por debajo de 1,2 m/s, lo cual es considerado por los meteorólogos como ausencia de viento concordando con lo obtenido por el monitoreo meteorológico en Bolivia (Nevers, 1997). Del mismo modo; en todo el tiempo, la velocidad del viento se mantuvo por debajo de los 2 m/s en acuerdo con Bascope (2011).

Por otro lado, la intensidad de los picos en la intersección en estudio, el monóxido de carbono presenta valores menores en los días del 26 al 31 de enero de la semana de monitoreo de la estación de verano que en las semanas de monitoreo de las otras estaciones. En efecto, los valores máximos de concentración de CO correspondientes a los días normales de dicha semana de monitoreo, en el verano, ocurren aproximadamente en el horario de las 12:30 h hasta las 13:30 h y son en promedio de 1,4 ppm, mientras que, en las otras estaciones van entre 1,6 y 6,7 ppm, correspondiendo al valor más alto a los meses de otoño en acuerdo con lo obtenido en la ciudad de Córdoba en que en las otras estaciones van entre 6 y 7,5 ppm, correspondiendo al valor más alto a los meses de invierno. (Nasello et al., 2013)

Como podemos ver las concentraciones registradas durante el invierno son generalmente más altas que los registrados durante el verano coincidiendo con un estudio realizado entre octubre de 1991 septiembre de 1992 en el área metropolitana de París (Dor, Moullec, & Festy, 1995).

Durante la estación de verano el monitoreo se realizó del 26 al 31 de enero del 2015, encontrándose que los mayores valores de concentraciones por CO fue el día 26 en el horario de 7:30 h a 8:30 h llegando a 1,4 ppm y el día 30 en el horario de 12:30 h a 13:30 h llegando a 1,5 ppm en discordancia con el monitoreo realizado en el 2004 en la Estación de Calidad del Aire ubicada en su sede central de Jesús María se encontró valores de CO de 3,2 ppm a las 8:00 h (Ponce et al., 2005).

Durante la estación de otoño el monitoreo se realizó en el mes de mayo del 2015, determinándose que la emisión de CO varió de 0,0 a 6,6 ppm lo que no es considerado como alarmante concordando con un estudio que se realizó en Río de Janeiro en el mes de mayo del 2005 encontrándose emisiones de CO que varió de 0,1 a 3,4 ppm (Da Silva Azevedo, Imbiriba, & De Oliveira, 2008).

Durante la estación de primavera del 2014 se registraron valores que oscilaron entre 0,0 y 1,8 ppm, con temperaturas entre 12,9 °C y 19,5 °C en desacuerdo con lo encontrado en San Miguel de Tucumán en el 2006 que oscilaron entre 10 y 45 ppm; con temperaturas entre 22 °C y 37 °C (Uuii & Ee, 2011).

En esta investigación se muestra que en la intersección en estudio de la ciudad de Tacna, soporta niveles de contaminación máxima de CO para 1 hora en los cuerpos receptores generados por los vehículos que transitan por dicha intersección de aproximadamente 5,1 ppm el cual es menor que 25 ppm recomendados por la OMS, menor que 35 ppm recomendados por la USEPA y menor que 26 ppm recomendados por la norma peruana de los Estandares de la Calidad del Aire.

La diferencia en los niveles de concentración de CO en la intersección en estudio en las diferentes estaciones del año podría ser en parte debido a la diferencia en la densidad vehicular, las condiciones meteorológicas y la técnica de medición del CO.

CONCLUSIONES

En relación a la estación de invierno llegamos a las siguientes conclusiones:

Primera

El número de vehículos si influye más en relación a la temperatura y la humedad relativa en la concentración de monóxido de carbono.

Segunda

La velocidad del viento si influye más en relación al de la temperatura y la humedad relativa en la concentración de monóxido de carbono.

Tercera

La dirección del viento y el tiempo si influyen más en relación al de la temperatura y la humedad relativa en la concentración de monóxido de carbono.

En relación a la estación de primavera llegamos a las siguientes conclusiones:

Cuarta

El número de vehículos si influye más en relación a la temperatura y la humedad relativa en la concentración de monóxido de carbono.

Quinta

La velocidad del viento si influye más en relación a la humedad relativa pero más no en relación a la temperatura en la concentración de monóxido de carbono.

Sexta

La dirección del viento si influyen más en relación a la temperatura y la humedad relativa más no el tiempo en la concentración de monóxido de carbono.

En relación a la estación de verano llegamos a las siguientes conclusiones:

Sétima

El número de vehículos si influye más en relación a la humedad relativa pero más no en relación a la temperatura en la concentración de monóxido de carbono.

Octava

La velocidad del viento no influye más en relación de a la temperatura y a la humedad relativa en la concentración de monóxido de carbono.

Novena

La dirección del viento si influyen más en relación a la temperatura y la humedad pero más no el tiempo en la concentración de monóxido de carbono.

En relación a la estación de otoño llegamos a las siguientes conclusiones:

Décima

El número de vehículos si influye más en relación a la temperatura y la humedad relativa en la concentración de monóxido de carbono.

Décimo primera

La velocidad del viento si influye más en relación a la temperatura y a la humedad relativa en la concentración de monóxido de carbono.

Décimo segunda

La dirección del viento y el tiempo si influyen más en relación a la temperatura y la humedad relativa en la concentración de monóxido de carbono.

Décimo tercera

Las concentraciones obtenidas por CO_o y CO_p tienen comportamiento similares en las diferentes estaciones del año; lo cual nos indica que el modelo matemático determinado será un instrumento técnico de la gestión de la calidad del aire en la intersección en estudio.

RECOMENDACIONES

Primera

Es necesario que la Municipalidad Provincial y Distritales de la ciudad de Tacna cuenten con un inventario de emisiones de contaminantes atmosféricos puesto que ello es un instrumento estratégico con el que podemos gestionar la calidad del aire.

Segunda

Es menester que la Municipalidad Provincial y Distritales de la ciudad de Tacna cuenten con equipos fijos instalados en diferentes lugares de la ciudad para monitorear la calidad del aire y también contar con equipos portátiles.

Tercera

La metodología empleada en esta investigación podría haber resultado más óptima si se hubiese contado con más equipos medidores de CO y más anemómetros.

Cuarta

Es necesario que la Municipalidad de Tacna regule y controle las emisiones de gases a la atmósfera, puesto que es su competencia y está normado por ley.

Quinta

Es necesario que el Ministerio del Ambiente cuente con profesionales competentes, y los incentive económicamente para realizar investigaciones relacionadas a la contaminación del aire.

Sexta

Es necesario sensibilizar a la población sobre lo que está sucediendo con la contaminación del aire que respiramos.

Séptima

La Municipalidad Provincial de Tacna debe exigir como estrategia de control que los vehículos utilicen convertidores catalíticos, puesto que con ello reducen las emisiones de CO.

Octava

El modelo deducido en esta investigación es sólo, un principio de empezar hacer simulación de la concentración del contaminante CO, en este caso en la intersección en estudio, más tiene que mejorarse en la toma de los datos; para lo cual se tiene que contar con más equipos y personal de apoyo, para un mejor ingreso de los parámetros al modelo deducido.

Novena

Es necesario que el Ministerio de Salud elabore estudios de diagnóstico sobre la línea base de la calidad del aire.

Décima

La Municipalidad Provincial de Tacna debe sacar una ordenanza donde prohíba la circulación de los vehículos mayores a 30 años.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguilar, C. P. (2011). *Guía para la unidad de aprendizaje de química I*. Recuperado de <http://www.fodonto.uncuyo.edu.ar/upload/quimica-i.pdf>
- Almeida, Gevaldo de, Pimentel, L., & Cotta, M. R. (2008). Integral transform solutions for atmospheric pollutant dispersion. *Environmental Modeling & Assessment*, 13(1), 53-65. doi: 10.1007/s10666-006-9072-4
- Anantharaman, N., & Begum, K. M. M. S. (2005). *Elements of mass transfer, part I*. New Delhi, India: Prentice-Hall.
- Aneja, V. P., Agarwal, A., Roelle, P. A., Phillips, S. B., Tong, Q., Watkins, N., & Yablonsky, R. (2001). Measurements and analysis of criteria pollutants in New Delhi, India. *Environment International*, 27(1), 35-42. doi:10.1016/S0160-4120(01)00051-4
- Bañuelos-Ruedas, F., Angeles-Camacho, C., & Rios-Marcuello, S. (2010). Analysis and validation of the methodology used in the extrapolation of wind speed data at different heights. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 14(8), 2383-2391. doi:10.1016/j.rser.2010.05.001
- Bascope Moscoso, D. (2011). La Red de monitoreo de la calidad del aire de Cochabamba (Red MOniCA). *Revista Acta Nova*, 2(3), 282-291. Recuperado de

<http://ucbconocimiento.ucbcba.edu.bo/index.php/ran/article/viewFile/43/40>

Batu, V. (1996). A generalized three-dimensional analytical solute transport model for multiple rectangular first-type sources. *Journal of Hydrology*, 174(1), 57-82. doi:10.1016/0022-1694(95)02752-1

Berrocal, I. J. (2011). *Principios de transferencia de masa en la ingeniería de alimentos* (R.R. N° 550-09-R). Recuperado del sitio de internet de la Universidad Nacional del Callao: <http://docplayer.es/9651906-Universidad-nacional-del-callao>

Betancourt, R. (1996). *Fenómenos de transferencia*. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/6542/1/9589532349_Parte1.pdf

Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. (2006). *Fenómenos de transporte*. Recuperado de <http://universoelegante10.files.wordpress.com/2012/12/fenc3b3mentos-de-transporte-bird-stewart-lightfoot-2a-ed-2006.pdf>

Blasco, B., Blasco, E., Fernández, J. M., Losada, J. C., & Viñas, C. (2008). *Fundamentos físicos de la edificación II*: Recuperado de http://books.google.com.pe/books?id=kfCx8se_0zgC&pg=PR4&lpg=PR4&dq=Fundamentos+F%C3%ADsicos+de+la+Edificaci%C3%B3n+II:+Publicaciones+Universitarias,+Primera+Edici%C3%B3n.+Las+Rozas.+Madrid.&source=bl&ots=Mq8FaIX5z9&sig=uSbb9RKnPJRI4vSJSqG9x2K9TXU&hl=es-419&sa=X&ved=0ahUKEwjD8L6H25DMAhVB5iYKHew9C70Q6AEI

GjAA#v=onepage&q=Fundamentos%20F%C3%ADsicos%20de%20la%20Edificaci%C3%B3n%20II%3A%20Publicaciones%20Universitarias%2C%20Primera%20Edici%C3%B3n.%20Las%20Rozas.%20Madrid.&f=false

Boluda, N. (2000). *Modelización de vertidos de aguas residuales en sistemas fluviales*. Recuperado de http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/19626/1/RUA_model_rio.pdf

Bono, R. (2012). *Diseños cuasi-experimentales y longitudinales*. Recuperado de <http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/30783/1/D.%20cuasi%20y%20longitudinales.pdf>

Bosch, M., O'ryan, R., & Matamala, E. (2002). Estimación del impacto de medidas de transporte en las emisiones de fuentes móviles. *Ingeniería de Sistemas*, 16 (01), 93-119. Recuperado de <http://www.dii.uchile.cl/~ris%20/articulos/Vol16/05.pdf>

Braclck, A. E. (2009). *Compendio de Normas Relacionadas a Calidad del Aire*. Lima, Perú: Ministerio del Ambiente.

Burghardt, A. (2005). Mass transfer by diffusion. Chemical Engineering and Chemical Process Technology. *Chemical Engineering and Chemical Process Technology* 1. Recuperado de <http://www.eolss.net/sample-chapters/c06/e6-34-01-07.pdf>

Buske, D. (2004). *Solução analítica da equação de difusão-advecção pelo método GILTT aplicada à dispersão de poluentes atmosféricos* (Tesis de mestre, Universidade Federal do Rio Grande do sul, Porto Alegre, Brasil). Recuperado de https://www.google.com.pe/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwilvZ3NhZbMAhUH8x4KHa1YDWgQFggaMAA&url=http%3A%2F%2Fbdt.ibict.br%2Fvufind%2FRecord%2FURGS_11575338fe460a570d8de609ed92ad8e&usg=AFQjCNHnb5c8a2IRyhp8ed5urmHdyMvY0w&bvm=bv.119745492,d.cWw

Buske, D., Vilhena, M. T., & Moreira, D. M. (Novemver, 2009). A 3D analytical solution of the advection-diffusion equation applied to pollutant dispersion in atmosphere. El symposium Llevado cable en el 20th International Congress of Mechanical Engineering, Gramado, Brasil.

Buske, D., Vilhena, M. T., Tirabassi, T., & Bodmann, B. (2012). Air pollution steady-state advection-diffusion equation: the general three-dimensional solution. *Journal of Environmental Protection*, 3(9), 1124-1134. doi: 10.4236/jep.2012.329131

Caamaño, J. A. (s. f.). Toxicidades por oxígeno, monóxido de carbono y dióxido de carbono. *Medicina subacuática*, 23-30. Recuperado de <http://jano.es/ficheros/sumarios/1/0/1707/23/00230030-LR.pdf>

Cassol, M. (2006). *Solução analítica do problema bidimensional transiente de dispersão de poluentes atmosféricos pelo método GITT dupla*.

(Tesis de mestre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil). Recuperado de https://scholar.google.com.pe/scholar?q=Cassol%2C+M.+%282006%29.+Solu%C3%A7ao+anal%C4%B1tica+do+problema+bidimensional+transiente+de+dispersao+de+poluentes+atmosf%C3%A9rico+s+pelo+m%C3%A9todo+GITTT+dupla&btnG=&hl=es&as_sdt=0%2C5

Cassol, M., & Wortmann, S. (2006). Simulação analítica transiente da dispersão de poluente na atmosfera pela técnica giltt dupla. *Environmental Modelling & Software*, 24(1), 144-151.

Cassol, M., Wortmann, S., & de Vilhena, M. T. M. B. (s.f.). Simulação analítica transiente da dispersão de poluente na atmosfera pela técnica giltt dupla. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Mariana_Cassol/publication/268323398_Simulao_Analtica_Transiente_da_Disperso_de_Poluente_Na_Atmosfera_pela_Tcnica_GILTT_Dupla/links/54f726650cf28d6dec9e0834.pdf

Cassol, M., Wortmann, S., & Rizza, U. (2009). Analytic modeling of two-dimensional transient atmospheric pollutant dispersion by double GITT and Laplace transform techniques. *Environmental Modelling & Software*, 24(1), 144-151. doi:10.1016/j.envsoft.2008.06.001

Castro, M. D. (2005). *Transporte de momentum y calor. teoría y aplicaciones a la ingeniería de proceso*. Recuperado de https://books.google.com.pe/books?hl=es&lr=&id=dVwEW2_4434C

&oi=fnd&pg=PA23&dq=Castro,+M.+D.+(2005).+Transporte+de+Momentum+Y+Calor.+Teor%C3%ADa+Y+Aplicaciones+a+la+Ingenier%C3%ADa+de+Proceso+(Vol.+6):+UADY.&ots=8-rgfXi9xw&sig=yJvuLYT0U22iVPEr7F0hgJEEAKs#v=onepage&q&f=false

Cengel, Y. A., & Cimbala J. M. (2007). *Mecánica de fluidos. Fundamentos y aplicaciones*. Recuperado de <http://es.slideshare.net/guadalupezaldivardeylonen/mecanica-de-fluidos-fundamentos-y-aplicaciones-yunus-cengel-y-john-cimbala-primer-edicion>

Costa, C., Vilhena, M., Moreira, D., & Tirabassi, T. (2006). Semi-analytical solution of the steady three-dimensional advection-diffusion equation in the planetary boundary layer. *Atmospheric Environment*, 40(29), 5659-5669.

Chana, J. L. (2004). Efectos de la contaminación atmosférica en el clima urbano y calidad ambiental de Arequipa. *Cuadernos de investigación urbanística* (37), 95-106.

Chang, J., & Hanna, S. (2004). Air quality model performance evaluation. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 87(1-3), 167-196. Recuperado de <http://link.springer.com/article/10.1007/s00703-003-0070-7>

Dalmati, D., & Péres, F. L. E. (2007). "*Propiedades Físicas de los Fluidos*". Recuperado de

http://www.fi.uba.ar/archivos/institutos_propiedades_fisicas_fluidos.pdf

Dabberdt, W., Hoydysh, W., Schorling, M., Yang, F., & Holynskyj, O. (1995). Dispersion modeling at urban intersections. *Science of the total Environment*, 169(1), 93-102. doi:10.1016/0048-9697(95)04637-G

Díaz, Gutiérrez. L. (2013). *Zaloamati*. Recuperado de <http://148.206.79.158/handle/11191/170?show=full>

Díaz, G. J. (2013). Cuantificación del perfil del viento hasta 100 m de altura desde la superficie y su incidencia en la climatología eólica. *Terra Nueva Etapa*, 29(46), 81-101. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=72130181006>

Díez, P. F. (1986). *Mecánica de fluidos*. Recuperado de <http://files.pfernandezdiez.es/MecanicaFluidos/PDFs/01MecFluidos.pdf>

Dor, F., Moullec, Y. L., & Festy, B. (1995). Exposure of city residents to carbon monoxide and monocyclic aromatic hydrocarbons during commuting trips in the Paris metropolitan area. *Journal of the Air & Waste Management Association*, 45(2), 103-110. doi:10.1080/10473289.1995.10467345

Ebner Gerschberg, N. (s.f.). *Departamento de ingeniería*. Recuperado de <http://documents.mx/documents/cap-vii-extraccion-2009.html>

Falconi, C. C. A. (2011). *Termodinámica-I*. Recuperado de http://biblioteca.uns.edu.pe/saladocentes/archivoz/curzoz/termodinamica___sesion_n%BA_1_docx.pdf

Figuroa, N., & Martínez, Z. (2009). *Propuesta Conceptual de la Estación Universidad, del Sistema Metro-Tren de la Conurbación Barcelona-Puerto la Cruz, Estado Anzoategui*. (Tesis de pregrado, Universidad de Oriente, Barcelona, España). Recuperado de <http://ri.bib.udo.edu.ve/bitstream/123456789/1620/1/22-TEISIS.IC009F35.pdf>

Franco, J. F. (2013). Contaminación atmosférica en centros urbanos. Desafío para lograr su sostenibilidad: caso de estudio Bogotá. *Revista EAN* (72), 193-204. Recuperado de http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S0120-81602012000100013&script=sci_arttext

Gaitán, M., Cancino, J., & Behrentz, E. (2007). Análisis del estado de la calidad del aire en Bogotá. *Revista de Ingeniería* (26), 81-92. Recuperado de <http://www.scielo.org.co/pdf/ring/n26/n26a11.pdf>

Galvis Florez, J. A., & Medina Rueda, J. D. (2013). Evaluación de la capacidad de generación de energía eólica en el municipio de los Santos, sector del mirador del Chicamocha.

Giraldo, F. X., & Neta, B. (1999). Stability analysis for Eulerian and semi-Lagrangian finite-element formulation of the advection-diffusion

equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 38(2), 97-112. doi:10.1016/S0898-1221(99)00185-6

Gómez Acebo, T. (2005). *Termodinámica*. Recuperado en <http://es.slideshare.net/network2010/texto-basedetermodinamica>

Gómez, H., Colominas, I., Navarrina, F., & Casteleiro, M. (2007). A discontinuous Galerkin method for a hyperbolic model for convection–diffusion problems in CFD. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71(11), 1342-1364. doi: 10.1002/nme.1996

Goyal, P., & Kumar, A. (2011). *Mathematical modeling of air pollutants: an application to indian urban city*. Recuperado de <http://cdn.intechweb.org/pdfs/16150.pdf>

Guerrero, J. P., Pimentel, L. C. G., Skaggs, T., & van Genuchten, M. T. (2009). Analytical solution of the advection–diffusion transport equation using a change-of-variable and integral transform technique. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(13), 3297-3304. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.02.002

Han, X., & Naeher, L. P. (2006). A review of traffic-related air pollution exposure assessment studies in the developing world. *Environment International*, 32(1), 106-120. doi:10.1016/j.envint.2005.05.020

Himmelblau, D. M. (1997). *Principios básicos y cálculos en ingeniería química*. Recuperado en

<http://es.slideshare.net/ingequim/principios-basicos-y-calculos-en-ingenieria-quimica-himmelblau>

Hinojosa, T. E. (1992). Composición química de la fase líquida a descarga total ya condiciones de reservorio de pozos geotérmicos de Los Humeros, Puebla, México. *Geofísica Internacional*, 31(4), 383-390. Recuperado de <http://www.revistas.unam.mx/index.php/geofisica/article/view/39500>

Hosseini, B. (2013). *Dispersion of pollutants in the atmosphere: A numerical study*. Recuperado de <https://scholar.google.com.pe/scholar?hl=es&q=Hosseini%2C+B.+%282013%29.+Dispersion+of+pollutants+in+the+atmosphere%3A+A+numerical+study&btnG=&lr=>

Hugo, R. G. A. (2001). *Instrumentos Básicos para la Fiscalización Ambiental*. Recuperado de <http://www.youblisher.com/p/1094643-Instrumentos-basicos-para-la-Fiscalizacion-Ambiental/>

Ibarz, A., & Barbosa, G. V. (2005). *Operaciones Unitarias en la Ingeniería de Alimentos*. Recuperado de [https://books.google.com.pe/books?hl=es&lr=&id=daoSAQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA25&dq=Ibarz,+A.,+%26+Barbosa,+G.+V.+\(2005\).+Operaciones+Unitarias+en+la+Ingenier%C3%ADa+de+Alimentos:+Ediciones+Mundi-Prensa.+Espa%C3%B1a&ots=AlpcfFb-a2&sig=qevRvfEOHy1Yb8qBmEGJEHIIJeE#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.pe/books?hl=es&lr=&id=daoSAQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA25&dq=Ibarz,+A.,+%26+Barbosa,+G.+V.+(2005).+Operaciones+Unitarias+en+la+Ingenier%C3%ADa+de+Alimentos:+Ediciones+Mundi-Prensa.+Espa%C3%B1a&ots=AlpcfFb-a2&sig=qevRvfEOHy1Yb8qBmEGJEHIIJeE#v=onepage&q&f=false)

Ismaeil, G. S. A. (2013). An analytic solution of two dimensional atmospheric diffusion equation in a finite boundary layer. *England*, 356-365. Recuperado de <http://www.revistas.unam.mx/index.php/geofisica/article/view/39500/35933>

Instituto Nacional de Defensa Civil, INDECI. (2007). *Programa de Prevención y Medidas de Mitigación Ante Desastres de la Ciudad de Tacna*. Recuperado de http://bvpad.indeci.gob.pe/doc/estudios_CS/Region_Tacna/tacna/tacna.pdf

Izquierdo A. (Febrero, 2012). *Ingeniería de fluidos y equipos térmicos*. España: UVA-Fundación CIDAUT. Recuperado de https://alojamientos.uva.es/guia_docente/uploads/2014/518/51453/1/Documento4.pdf

James, R. W., Charles, E. W., & Robert, E. W. (1994). *Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa*. Recuperado de https://scholar.google.com.pe/scholar?q=James%2C+R.+W.%2C+Charles%2C+E.+W.%2C+%26+Robert%2C+E.+W.+%281994%29.+Fundamentos+de+Transferencia+de+Momento%2C+Calor+y+Masa%3A+Editorial+Limusa%2C+S.+A.+De+C.+V.+Grupo+Noriega+Editores.+M%C3%A9xico.&btnG=&hl=es&as_sdt=0%2C5

Kahforoshan, D., Fatehifar, E., Babalou, A., Ebrahimin, A., Elkamel, A., & Ltanmohammadzade, J. (2008). Modelling and evaluation of air pollution from a gaseous flare in an oil and gas processing area.

Paper presented at the WSEAS Conferences, Santander, 180-186.

Recuperado de

<http://www.wseas.us/e->

[library/conferences/2008/spain/selected/selected22.pdf](http://www.wseas.us/e-library/conferences/2008/spain/selected/selected22.pdf)

Kastner-Klein, P., Fedorovich, E., Ketzel, M., Berkowicz, R., & Britter, R. (2003). The modelling of turbulence from traffic in urban dispersion models—Part II: evaluation against laboratory and full-scale concentration measurements in street canyons. *Environmental Fluid Mechanics*, 3(2), 145-172.

Kumar, P., & Sharan, M. (2010). An analytical model for dispersion of pollutants from a continuous source in the atmospheric boundary layer. Paper presented at the Proceedings of the Royal Society of London A: *Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 383-406. doi: 10.1098/rspa.2009.0394

Lin, J.-S., & Hildemann, L. M. (1996). Analytical solutions of the atmospheric diffusion equation with multiple sources and height-dependent wind speed and eddy diffusivities. *Atmospheric Environment*, 30(2), 239-254. doi:10.1016/1352-2310(95)00287-9

Lippmann, M., Frampton, M., Schwartz, J., Dockery, D., Schlesinger, R., Koutrakis, P., . . . Godleski, J. (2003). The US environmental protection agency particulate matter health effects research centers program: a midcourse report of status, progress, and plans. *Environmental Health Perspectives*, 111(8), 1074-1092.

- Marciarelli, R., Stancich, S., & Stappani, F. (2012). *Ingeniería de las reacciones*. Recuperado de http://www.frro.utn.edu.ar/repositorio/catedras/quimica/4_anio/ingenieria_reacciones/Transferencia_de_Materia.pdf
- Martín Domingo, A. (2011). *Apuntes de Mecánica de Fluidos*. Recuperado de <http://oa.upm.es/6531/1/amd-apuntes-fluidos.pdf>
- Martínez de la Calle, J. (2004). *Apuntes de mecánica de Fluidos: 2ª parte*. Recuperado de http://www.academia.edu/9153392/Apuntes_de_Mec%C3%A1nica_de_Fluidos_2a_parte
- Matzoros, A., & Van Vliet, D. (1992). A model of air pollution from road traffic, based on the characteristics of interrupted flow and junction control: Part I—Model description. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 26(4), 315-330.
- Mataix, C. (1986). *Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas: Segunda Edición*. Recuperado de http://www.academia.edu/14020968/MECANICA_DE_FLUIDOS_Y_MAQUINAS_HIDRAULICAS_SEGUNDA_EDICION
- Mello, Kelen de B., de Vilhena, M. T., & Moreira, D. M. (2005). *Simulação da dispersão de poluentes na atmosfera em condições de vento fraco pelo método GILTT*. Recuperado de http://www.sbmec.org.br/eventos/cnmac/cd_xxviii_cnmac/resumos%20estendidos/kelen_mello_ST10.pdf

- Méndez-Sánchez, A., Pérez-Trejo, L., & Mercado, A. P. (2010). Determinación de la viscosidad de fluidos newtonianos y no newtonianos (una revisión del viscosímetro de Couette). *Lat. Am. J. Phys. Educ.* 4(1), 237. Recuperado de file:///C:/Users/Jose%20Antonio/Downloads/Dialnet-DeterminacionDeLaViscosidadDeFluidosNewtonianosYNo-3695964.pdf
- Mendizabal, L. M., & Oronel, C. (2005). *Guía de ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento*. Recuperado de [http://gecousb.com.ve/guias/GECO/Fen%C3%B3menos%20de%20Transporte%201%20\(TF-1221\)/Material%20Te%C3%B3rico%20\(TF-1221\)/TF-1221%20Ecuaciones%20De%20Cantidad%20De%20Movimiento.pdf](http://gecousb.com.ve/guias/GECO/Fen%C3%B3menos%20de%20Transporte%201%20(TF-1221)/Material%20Te%C3%B3rico%20(TF-1221)/TF-1221%20Ecuaciones%20De%20Cantidad%20De%20Movimiento.pdf)
- Méndez, E. (2011). *Curso de fisicoquímica I*. Recuperado de <http://www.fbioyf.unr.edu.ar/evirtual/course/view.php?id=46>
- Mendoza, G. L., Espinal, G., Contreras, J. & Vásquez, J. (1993). *Contaminación por monóxido de carbono en la ciudad de Santo Domingo* 18(1), 40-48. Recuperado de <https://repositoriobiblioteca.intec.edu.do/bitstream/handle/123456789/823/CISO19931801-040-048.PDF>
- Moreira, D., & Vilhena, M. (2009). *Air pollution and turbulence: modeling and applications*. Recuperado de

[https://books.google.com.pe/books?hl=es&lr=&id=CXTRBQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=Moreira,+D.,+%26+Vilhena,+M.+\(2009\).+Air+pollution+and+turbulence:+modeling+and+applications:+CRC+Press.&ots=dpxZt_v161&sig=wDmyT-dULwpj9AG7aiBt6EIHci4#v=onepage&q=Moreira%2C%20D.%2C%20%26%20Vilhena%2C%20M.%20\(2009\).%20Air%20pollution%20and%20turbulence%3A%20modeling%20and%20applications%3A%20CRC%20Press.&f=false](https://books.google.com.pe/books?hl=es&lr=&id=CXTRBQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=Moreira,+D.,+%26+Vilhena,+M.+(2009).+Air+pollution+and+turbulence:+modeling+and+applications:+CRC+Press.&ots=dpxZt_v161&sig=wDmyT-dULwpj9AG7aiBt6EIHci4#v=onepage&q=Moreira%2C%20D.%2C%20%26%20Vilhena%2C%20M.%20(2009).%20Air%20pollution%20and%20turbulence%3A%20modeling%20and%20applications%3A%20CRC%20Press.&f=false)

Moreira, D., Vilhena, M., Buske, D., & Tirabassi, T. (2006). The GILTT solution of the advection–diffusion equation for an inhomogeneous and nonstationary PBL. *Atmospheric Environment*, 40(17), 3186-3194. doi:10.1016/j.atmosenv.2006.01.035

Moreira, D., Vilhena, M., Tirabassi, T., Buske, D., & Cotta, R. (2005). Near-source atmospheric pollutant dispersion using the new GILTT method. *Atmospheric Environment*, 39(34), 6289-6294. doi:10.1016/j.atmosenv.2005.07.008

Moreira, D. M., Neto, P. d. V. F., & da Costa Carvalho, J. (2005). Analytical solution of the Eulerian dispersion equation for nonstationary conditions: development and evaluation. *Environmental Modelling & Software*, 20(9), 1159-1165. doi:10.1016/j.envsoft.2004.08.002

Moreira, D., Vilhena, M., Buske, D., & Tirabassi, T. (2009). The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the

atmosphere. *Atmospheric Research*, 92(1), 1-17.
doi:10.1016/j.atmosres.2008.07.004

Mott, R. L. (2006). *Mecánica de fluidos: Pearson Educacion*. Recuperado de
[https://books.google.com.pe/books?hl=es&lr=&id=LbMTKJ4eK4QC&oi=fnd&pg=PA1&dq=Mott,+R.+L.+\(2006\).+Mec%C3%A1nica+de+fluidos:+Pearson+Educacion.&ots=pPKAXEPHyj&sig=yfCixoK8uK0m_6E-NcBoP_NB-Mw#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.pe/books?hl=es&lr=&id=LbMTKJ4eK4QC&oi=fnd&pg=PA1&dq=Mott,+R.+L.+(2006).+Mec%C3%A1nica+de+fluidos:+Pearson+Educacion.&ots=pPKAXEPHyj&sig=yfCixoK8uK0m_6E-NcBoP_NB-Mw#v=onepage&q&f=false)

Müller, E. A. (2002). *Termodinámica Básica*. Recuperado de
<http://es.slideshare.net/danielmorera2/termodinamica-basica-2da-edicion-erich-a-muller>

Murillo, J. (2006). *Métodos de Investigación de Enfoque Experimental*. Recuperado de
<http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:http://www.postgradoune.edu.pe/documentos/Experimental.pdf>

Nasello, O., Masuelli, S., Caputo, M., Del Gesso, L., Romero, C., Cuenca, F., . . . Alonso, E. (2013). Estudio de la contaminación del aire en la Ciudad de Córdoba en el período Dic95-Nov96. Parte I: Análisis comparativo del estado de contaminación registrado en distintos puntos de la ciudad. *Paper presented at the ANALES AFA 10(1)*, 389-393. Descargado de
<http://anales.fisica.org.ar/journal/index.php/analesafa/article/view/1114/1122>

Nevers, Noel de (1997). *Ingeniería de Control de la Contaminación del Aire*. Recuperado de

https://scholar.google.com.pe/scholar?q=De+Nevers%2C+N.+%281997%29.+Ingenier%C3%ADa+de+Control+de+la+Contaminaci%C3%B3n+del+Aire%3A+McGraw-Hill.&btnG=&hl=es&as_sdt=0%2C5

Ning, Z., Cheung, C., Lu, Y., Liu, M., & Hung, W. (2005). Experimental and numerical study of the dispersion of motor vehicle pollutants under idle condition. *Atmospheric Environment*, 39(40), 7880-7893. doi:10.1016/j.atmosenv.2005.09.020

Organización Mundial de la Salud, OMS (1969). *Contaminación del aire en el medio urbano: Particularmente por vehículos de motor* (Informe N° 410). Recuperado de http://apps.who.int/iris/bitstream/10665/38473/1/WHO_TRS_410_spa.pdf

Palacio, D. L. Y., Marín, M. G., Yepes, C. Z., & Orozco, S. L. E. (2012). Niveles de ruido y concentraciones de monóxido de carbono-CO-en el Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid de Medellín. *Revista Politecnica*, 1(7), 19-32. Recuperado de <http://72.29.67.34/~openjour/ojs/index.php/rp/article/viewFile/74/65>

Pandian, S., Gokhale, S., & Ghoshal, A. K. (2009). Evaluating effects of traffic and vehicle characteristics on vehicular emissions near traffic intersections. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 14(3), 180-196. doi:10.1016/j.trd.2008.12.001

Pasinato, H. D. (2008). *Fundamentos de mecánica de fluidos*. Recuperado de

http://www.profesaulosuna.com/data/files/TOPICOS%20SELECTOS%20DE%20FISICA/FLUIDO/mecanica_fluidos_2.pdf

Park, Y.-S., & Baik, J.-J. (2008). Analytical solution of the advection-diffusion equation for a ground-level finite area source. *Atmospheric Environment*, 42(40), 9063-9069.

doi:10.1016/j.atmosenv.2008.09.019

Pelegri, M. F. (2005). *Aplicação técnica da transformada integral para a solução de problemas difusivos transientes com propriedades termofísicas variáveis* (Tesis doctoral, Universidade Estadual Paulista, Brasil). Recuperado de

https://scholar.google.com.pe/scholar?q=Pelegri%2C+M.+F.+%282005%29.+Aplica%C3%A7%C3%A3o+T%C3%A9cnica+da+Transformada+Integral+para+a+Solu%C3%A7%C3%A3o+de+Problemas+Difusivos+Transientes+com+Propriedades+Termof%C3%ADsicas+Vari%C3%A1veis&btnG=&hl=es&as_sdt=0%2C5

Pérez, F. L. E. (2002). *Ecuaciones de continuidad*. Recuperado de http://www.fi.uba.ar/archivos/institutos_ecuaciones_continuidad.pdf

Pérez, B. L. (2009). *Prueba de definición de niveles química*. Recuperado de

http://pregrado.upc.edu.pe/sites/default/files/upc/pregrado/seccion_admision/sub_secciones/es/incorporaciones/sub_paginas/prueba_d

e_definicion_de_niveles_pdn/admision_pag_secundaria_descargas
/quimica.pdf

Ponce, T. R. A., Peña Jaimes, L. R., Yupamqui, R., Antonio, M., Villena Chávez, J., Roe Battistini, E., & Villena Chávez, J. (2005). Variación del nivel de carboxihemoglobina en corredores aficionados en ambientes con tránsito de vehículos motorizados en el distrito de San Isidro. *Revista Medica Herediana*, 16(4), 266-272. Recuperado de http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1018-130X2005000400007

Pospisil, J., Katolicky, J., & Jicha, M. (2004). A comparison of measurements and CFD model predictions for pollutant dispersion in cities. *Science of the total Environment*, 334, 185-195. doi:10.1016/j.scitotenv.2004.04.075

Puliafito, S. E., & Quero, J. L. (Octubre de 2003). Metodología de Medición de Contaminantes Aéreos. Universidad Nacional de San Juan, Argentina.

Ramírez, N. J. S. (2006). *Fundamentos de Reología de Alimentos*. Recuperado de <http://tarwi.lamolina.edu.pe/~dsa/Fundamentos%20de%20Reologia.pdf>

Reynolds, S. D., Roth, P. M., & Seinfeld, J. H. (1973). Mathematical modeling of photochemical air pollution—I: Formulation of the

model. *Atmospheric Environment* (1967), 7(11), 1033-1061.
doi:10.1016/0004-6981(73)90214-X

Rivera Chávez, E. (2001). *I Intriducción a la Mecánica de Fluidos*.
Recuperado de <http://erivera-2001.com/files/Introduccion.pdf>

Rivera, C. E. (2001). *Forma diferencial de las ecuaciones de flujo fluido*.
Recuperado de <http://erivera-2001.com/ECUACIONES-DIFERENCIALES.html>

Rivera Poma, J. M. (2012). *Modelo de identificación de factores contaminantes atmosféricos críticos en Lima–Callao* (Tesis de magíster, Universidad Nacional de San Marcos, Lima, Perú).
Recuperado de
http://cybertesis.unmsm.edu.pe/bitstream/cybertesis/3109/1/Rivera_pj.pdf

Romero, M. F. O., & Patiño Aroca, M. R. (2005). *Aplicación de un Modelo Matemático para las Emisiones de Dióxido de Azufre y diósido de Nitrogenos Producidos por una Central Termica*. Recuperado de
<https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/2255/1/4482.pdf>

Ruedas, F. B. (2011). *Impacto de la generación eléctrica usando fuentes de energía eólica en la red eléctrica nacional* (Tesis de doctor, Universidad Nacional Autonoma de México, México). Recuperado de http://132.248.9.195/ptb2011/junio/0669985/0669985_A1.pdf

Sámano, T. D. A., & Sen, M. (2009). *Mecánica de fluidos*. Recuperado de <http://www3.nd.edu/~msen/MecFl.pdf>

Semarnat, I. (2002). Dirección General de Investigación sobre la Contaminación Urbana, Regional y Global. *Inventario Nacional de Gases de Efecto Invernadero, México, DF*. Recuperado de https://scholar.google.com.pe/scholar?q=Direcci%C3%B3n+General+de+Investigaci%C3%B3n+sobre+la+Contaminaci%C3%B3n+Urbana%2C+Regional+y+Global%3A+M%C3%A9xico&btnG=&hl=es&as_sdt=0%2C5

Sharan, M., Yadav, A. K., Singh, M., Agarwal, P., & Nigam, S. (1996). A mathematical model for the dispersion of air pollutants in low wind conditions. *Atmospheric Environment*, 30(8), 1209-1220. doi:10.1016/1352-2310(95)00442-4

Silva, E., Tirabassi, T., Vilhena, M., & Buske, D. (2013). A puff model using a three-dimensional analytical solution for the pollutant diffusion process. *Atmospheric Research*, 134, 131-136. doi:10.1016/j.atmosres.2013.07.009

Silva, Carolina da N., Imbiriba, L. A., & De Oliveira, F. P. (2008). Ejercicio físico y contaminación atmosférica: el caso del monóxido de carbono. *Fitness Performancé*, 7(3), 175-184. doi:10.3900/fpj.7.3.175.s

Singh, M., & Yadav, A. K. (1996). Mathematical model for atmospheric dispersion in low winds with eddy diffusivities as linear functions of

downwind distance. *Atmospheric Environment*, 30(7), 1137-1145.
doi:10.1016/1352-2310(95)00368-1

Singh, R. N. (2013). Advection diffusion equation models in near-surface geophysical and environmental sciences. *Reviews of Geophysics*, 17, 117-127. Recuperado de http://scholar.google.com.pe/scholar?q=Singh%2C+R.+N.+%282013%29.+Advection+diffusion+equation+models+in+near-surface+geophysical+and+environmental+sciences.+Reviews+of+Geophysics%2C+17%2C+117-127&btnG=&hl=es&as_sdt=0%2C5

Solano, V., ; Mauricio, Edgar, & Rodriguez, G. A. (2010). Montaje y puesta en marcha de un secador por lotes semiautomático de bandejas por aire caliente. *Ingeniería e Investigación*, 30(2), 43-51.

Soulhac, L., Garbero, V., Salizzoni, P., Mejean, P., & Perkins, R. (2009). Flow and dispersion in street intersections. *Atmospheric Environment*, 43(18), 2981-2996.
doi:10.1016/j.atmosenv.2009.02.061

Teixeira, L. (2012). *Flujo en Canales Abiertos*. Recuperado de [file:///C:/Users/Jose%20Antonio/Downloads/Flujo%20en%20canales%20abiertos%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/Jose%20Antonio/Downloads/Flujo%20en%20canales%20abiertos%20(1).pdf)

Téllez, J., & Rodríguez, A. (2006). Carbon monoxide contamination: an environmental health problem. *Revista de Salud Pública*, 8(1), 108-117. Recuperado de

http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S0124-00642006000100010&script=sci_arttext&lng=en

Tirabassi, T., Vilhena, M. T., Buske, D., & Degrazia, G. A. (2013). An Analytical Air Pollution Model with Time Dependent Eddy Diffusivity. *Journal of Environmental Protection*, 4(08), 16-23. doi.org/10.4236/jep.2013.48A1003

Tong, H., Hung, W., & Cheung, C. (2000). On-road motor vehicle emissions and fuel consumption in urban driving conditions. *Journal of the Air & Waste Management Association*, 50(4), 543-554. doi:10.1080/10473289.2000.10464041

Torres, H. (2007). *Diseño, Construcción y Puesta en Marcha de Equipos para la Determinación de Difusividades y Coeficientes Individuales de Transferencia de Masa* (Tesis de pregrado, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela). Recuperado de <https://es.scribd.com/doc/280978497/Tesis-MAYO2007-I-pdf>

Treybal, R. E. (1995). *Operaciones de Transferencia de Masa*. Recuperado de <https://fenomenosdetransporte.files.wordpress.com/2008/05/operaciones-de-transferencia-de-masa-robert-e-treybal.pdf>

Uuii, L., & Ee, G. (2011). Niveles de monóxido de carbono (CO) ambiente en San Miguel de Tucumán. *Bioquímica, química y farmacia*, 141.

Van Genuchten, M. T., Leij, F. J., Skaggs, T. H., Toride, N., Bradford, S. A., & Pontedeiro, E. M. (2013). Exact analytical solutions for contaminant transport in rivers. 1. The equilibrium advection-dispersion equation. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, 61(2), 146-160. doi: 10.2478/johh-2013-0020

Vargas, P., & Almera, J. (2008). *Fenómenos de Transporte, Fundamentos de Transporte*: Recuperado de <https://ftransp.files.wordpress.com/2014/05/transfencia-de-masa-art.pdf>

Venkanna, B. K. (2010). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Recuperado de [https://books.google.com.pe/books?hl=es&lr=&id=FGzkNldTVC4C&oi=fnd&pg=PR2&dq=Venkanna,+B.+K.+\(2014\).+Fundamentals+of+Heat+and+Mass+Transfer&ots=GLjt1g6VOr&sig=ABmeNvM0pxklVK9bNZVI_LWz7IU#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.pe/books?hl=es&lr=&id=FGzkNldTVC4C&oi=fnd&pg=PR2&dq=Venkanna,+B.+K.+(2014).+Fundamentals+of+Heat+and+Mass+Transfer&ots=GLjt1g6VOr&sig=ABmeNvM0pxklVK9bNZVI_LWz7IU#v=onepage&q&f=false)

Vilhena, M., Buske, D., Degrazia, G., & Quadros, R. (2012). An analytical model with temporal variable eddy diffusivity applied to contaminant dispersion in the atmospheric boundary layer. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391(8), 2576-2584. doi:10.1016/j.physa.2011.11.001

Villegas, M. W. (2012). Impuesto municipal a la contaminación vehicular IMCV-caso ciudad de Santa Cruz de la sierra. *Revista Perspectivas*, (30), 7-70. Recuperado de <http://www.scielo.org.bo/pdf/rp/n30/n30a02.pdf>

- Wang, J., Chan, T., Cheung, C., Leung, C., & Hung, W. (2006). Three-dimensional pollutant concentration dispersion of a vehicular exhaust plume in the real atmosphere. *Atmospheric Environment*, 40(3), 484-497. doi:10.1016/j.atmosenv.2005.09.046
- Winter, G. (1989). Aplicación de métodos de elementos finitos adaptativos a problemas de convección-difusión en 2-D. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 5(4), 535-560. Recuperado de <http://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099/7308/Article06.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Wortmann, S., Vilhena, M. T., Moreira, D., & Buske, D. (2005). A new analytical approach to simulate the pollutant dispersion in the PBL. *Atmospheric Environment*, 39(12), 2171-2178. doi:10.1016/j.atmosenv.2005.01.003
- Zahor, F. A., Charles, W. M., & Mirau, S. (2014). Analysis and simulation of 3-D advection diffusion reaction model for pollutant dispersion. *Journal of Scientific Research and Studies*, 1(2), 9-16. Recuperado de <http://www.modernrespub.org/jsrs/pdf/2014/July/Feda%20et%20al.pdf>
- Zavalaga Rivera, D. M. (2010). *Procedimiento para la calibración de una balanza de presión (balanza de peso muerto) empleando el método de flotación cruzada* (Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú). Recuperado de

file:///C:/Users/Jose%20Antonio/Downloads/zavalaga_rd%20(1).pdf

Zoppou, C., & Knight, J. (1999). Analytical solution of a spatially variable coefficient advection–diffusion equation in up to three dimensions. *Applied Mathematical Modelling*, 23(9), 667-685.
doi:10.1016/S0307-904X(99)00005-0

ANEXOS

ANEXO 1

VALORES DE LÍMITES MÁXIMOS PERMISIBLES

I. LÍMITES MÁXIMOS PERMISIBLES PARA VEHÍCULOS EN CIRCULACIÓN A NIVEL NACIONAL

VEHÍCULOS MAYORES A GASOLINA, GAS LICUADO DE PETRÓLEO, GAS NATURAL(LIVIANOS, MEDIANOS Y PESADOS)			
Año de fabricación	CO % de volumen	HC (ppm)	CO + CO ₂ % (mínimo)
Hasta 1995	4,5	600	10
1996 en adelante	3,5	400	10

A continuación se dan las fórmulas que nos permiten cambiar de sistemas de unidades:

$$\text{ppm} = \frac{\mu \text{g}/\text{m}^3}{\text{PM} \left(\frac{10^3}{24,5} \right)} \quad \text{y} \quad \mu \text{g}/\text{m}^3 = \text{ppm} \cdot \text{PM} \left(\frac{10^3}{24,5} \right)$$

donde

PM: es peso molecular del contaminante gaseoso en este caso CO.

ANEXO 2

SOLUCIÓN DETALLADA DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN

Trataremos de detallar más la solución dada en [3.143] para poder escribirla mediante el software MatLab y poder obtener la concentración de CO.

$$\begin{aligned}
 C_A(X; Y; Z; t) &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N [X \operatorname{Ra}(t) X^{-1} V + X \operatorname{R}(t) X^{-1} T(0)] \\
 &\frac{\psi_i(X) \varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q \cos(\beta_j Y_0) \cos(\gamma_k H_s)}{\bar{u}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)}\right]} \\
 &\left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{bX} \right] \frac{\varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \quad (i = j = k = 1; 2; \dots; N) \\
 C_A(X; Y; Z; t) &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N X \operatorname{Ra}(t) X^{-1} V \frac{\psi_i(X) \varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \\
 &+ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N X \operatorname{R}(t) X^{-1} T(0) \frac{\psi_i(X) \varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \\
 &+ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q \cos(\beta_j Y_0) \cos(\gamma_k H_s)}{\bar{u}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)}\right]} \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{bX} \right] \\
 &\frac{\varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \quad (i = j = k = 1; 2; \dots; N) \tag{3.145}
 \end{aligned}$$

Ahora reemplazando [3.118] y [3.137] en [3.145] obtenemos

$$\begin{aligned}
C_A(X; Y; Z; t) = & \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N X R_a(t) X^{-1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [-u_X \frac{\partial}{\partial X} F(X; Y; Z) \\
& dZ dY dX + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} F(X; Y; Z) + \\
& D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} F(X; Y; Z)] \frac{\eta_j(Z) \eta_k(Z) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y) \psi_i(X) \psi_j(X)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} \sqrt{N_i} \sqrt{N_j}} dZ dY dX + \\
& \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q \cos(\beta_j Y_0) \cos(\gamma_k H_s)}{\bar{u}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} [1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)}]} \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{bX} \right] \frac{\varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \quad [3.146]
\end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de ortonormalidad tenemos

$$\begin{aligned}
C_A(X; Y; Z; t) = & X R_a(t) X^{-1} [-u_X \frac{\partial}{\partial X} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial X^2} F(X; Y; Z) \\
& + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} F(X; Y; Z) + D_{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} F(X; Y; Z)] - X R(t) X^{-1} F(X; Y; Z) \\
& + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q \cos(\beta_j Y_0) \cos(\gamma_k H_s)}{\bar{u}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} [1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)}]} \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{bX} \right] \frac{\varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \quad [3.147]
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
C_A(X; Y; Z; t) = & X R_a(t) X^{-1} \left\{ -u_X \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q \cos(\beta_j Y_0) \cos(\gamma_k H_s)}{\bar{u}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} [1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)}]} \right. \\
& a \left[e^{aX} - e^{(a-b)} e^{bX} \right] \frac{\varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} + D_{AB} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q \cos(\beta_j Y_0) \cos(\gamma_k H_s)}{\bar{u}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} [1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)}]} \\
& a \left[a e^{aX} - b e^{(a-b)} e^{bX} \right] \frac{\varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} - D_{AB} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q \cos(\beta_j Y_0) \cos(\gamma_k H_s)}{\bar{u}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} [1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)}]} \\
& \left. \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{bX} \right] \frac{\beta_j^2 \varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} - D_{AB} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q \cos(\beta_j Y_0) \cos(\gamma_k H_s)}{\bar{u}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k} [1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)}]} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)X} e^{bX} \right] \frac{\gamma_k^2 \varphi_j(Y) \varphi_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \Big\} + [I-X R(t) X^{-1}] \\
& \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q \cos(\beta_j Y_0)}{\bar{u}_X \sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \frac{\cos(\gamma_k H_s)}{\left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)X}\right]} \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)X} e^{bX} \right] \\
& \frac{\varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_k}} \quad (i = j = k = 1; 2; \dots; N) \tag{3.148}
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
& C_A(X; Y; Z; t) \\
& = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q \cos(\beta_j Y_0) \cos(\gamma_k H_s) \varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\bar{u}_X N_j N_k \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)X}\right]} \{X R a(t) X^{-1} \{- u_X a [e^{aX} \\
& - e^{(a-b)X} e^{bX}] + D_{AB} a [a e^{aX} - b e^{(a-b)X} e^{bX}] - D_{AB} \beta_j^2 \\
& \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)X} e^{bX} \right] - D_{AB} \gamma_k^2 \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)X} e^{bX} \right] \} \\
& + [I-X R(t) X^{-1}] \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)X} e^{bX} \right] \} \tag{3.149}
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
& C_A(X; Y; Z; t) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Q \cos(\beta_j Y_0) \cos(\gamma_k H_s) \varphi_j(Y) \eta_k(Z)}{\bar{u}_X N_j N_k \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)X}\right]} \left\{ \left[- \frac{1}{\lambda_i} \left(e^{-\lambda_i t} \right) \right] \right. \\
& \left. \{- u_X a [e^{aX} - e^{(a-b)X} e^{bX}] + D_{AB} a [a e^{aX} - b e^{(a-b)X} e^{bX}] \right. \\
& \left. - D_{AB} \beta_j^2 \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)X} e^{bX} \right] - D_{AB} \gamma_k^2 \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)X} e^{bX} \right] \right\} \\
& + \left[1 - e^{-\lambda_i t} \right] \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)X} e^{bX} \right] \} \quad (i = j = k = 1; 2; \dots; N) \tag{3.150}
\end{aligned}$$

La ecuación [3.150] equivalentemente se transforma en

$$C_A(X; Y; Z; t) = \sum_{i=1}^N \frac{Q \cos(\pi Y_0 i) \cos(\pi H_s i) \cos(\pi Y) \cos(\pi Z)}{\bar{v}_X (0,25) \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)t}\right]}$$

$$\left\{ \left[-\frac{2}{\pi(2i-1)} \left(e^{-\frac{\pi}{2}(2i-1)t} - 1 \right) \right] \left\{ -v_X a \left[e^{aX} - e^{(a-b)} e^{bX} \right] \right. \right.$$

$$+ D_{AB} a \left[a e^{aX} - b e^{(a-b)} e^{bX} \right] - D_{AB} (\pi i)^2 \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{bX} \right] - D_{AB} (\pi i)^2 \left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{bX} \right] \left. \right\} + \left[1 - e^{-\frac{\pi}{2}(2i-1)t} \right]$$

$$\left[e^{aX} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{bX} \right] \quad [3.151]$$

Puesto que la ubicación de la fuente está ubicado en el punto (0; 0; H_s) en el sistema de coordenadas XYZ, con Y₀ y H_s = 0,8 m; este mismo punto en el sistema de coordenadas xyz será (8 008 546; 368 812; 600,8); teniendo en cuenta esto y las transformaciones x = 8 008 546 + 200 X; y = 368 812 + 200 Y; z = 600 + 400 Z la ecuación [3.151] transforma en el sistema xyz es

$$C_A(x; y; z; t) = \sum_{i=1}^N \frac{Q \cos(368\,812 \pi i) \cos(600,8 \pi i) \cos\left[\left(\frac{y-368\,812}{200}\right)\pi i\right] \cos\left[\left(\frac{z-600}{400}\right)\pi i\right]}{\bar{v}_X (0,25) \left[1 - \frac{a}{b} e^{(a-b)t}\right]}$$

$$\left\{ \left[-\frac{2}{\pi(2i-1)} \left(e^{-\frac{\pi}{2}(2i-1)t} - 1 \right) \right] \left\{ -v_X a \left[e^{a\left(\frac{x-8\,008\,546}{200}\right)} \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - e^{(a-b)} e^{b\left(\frac{x-8008546}{200}\right)} \Big] + D_{AB} a \left[a e^{a\left(\frac{x-8008546}{200}\right)} - b e^{(a-b)} e^{b\left(\frac{x-8008546}{200}\right)} \right] \\
& - D_{AB} (\pi i)^2 \left[e^{a\left(\frac{x-8008546}{200}\right)} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{b\left(\frac{x-8008546}{200}\right)} \right] - D_{AB} (\pi i)^2 \\
& \left[e^{a\left(\frac{x-8008546}{200}\right)} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{b\left(\frac{x-8008546}{200}\right)} \right] \Big\} + \\
& \left[1 - e^{-\frac{\pi}{2}(2i-1)t} \right] \left[e^{a\left(\frac{x-8008546}{200}\right)} - \frac{a}{b} e^{(a-b)} e^{b\left(\frac{x-8008546}{200}\right)} \right] \Big\}
\end{aligned}$$

Esta última expresión obtenida es justamente la solución dada anteriormente por la ecuación [3.144], la cual nos permitirá obtener la concentración del contaminante CO.

ANEXO 3

El código en MatLab esta dado por lo que expresa la ecuación [3.144] de la siguiente manera

```
syms x y z Q Ux t DAB
```

```
for i=1:10
```

```
    a=(Ux-sqrt(Ux^2+8*(DAB^2)*((pi*i)^2)))/(2*DAB);
```

```
    b=(Ux+sqrt(Ux^2+8*(DAB^2)*((pi*i)^2)))/(2*DAB);
```

```
    A1=Q*cos(368812*pi*i)*cos(600.8*pi*i);
```

```
    A2=cos(((y-368812)/(200))*pi*i)*cos(((z-600)/(400))*pi*i);
```

```
    A3=Ux*0.25*(1-(a/b)*exp(a-b));
```

```
    A4=(-2/(pi*(2*i-1)))*(exp((-pi/2)*(2*i-1)*t)-1);
```

```
    A5=Ux*a*(exp(a*((x-8008546)/200))-(a/b)*exp(a-b)*exp(b*((x-8008546)/200)));
```

```
    A6=DAB*a*(a*exp(a*((x-8008546)/200))-b*exp(a-b)*exp(b*((x-8008546)/200)));
```

```
    A7=DAB*((pi*i)^2)*(exp(a*((x-8008546)/200))-(a/b)*exp(a-b)*exp(b*((x-8008546)/200)));
```

```
    A8=DAB*((pi*i)^2)*(exp(a*((x-8008546)/200))-(a/b)*exp(a-b)*exp(b*((x-8008546)/200)));
```

```
A9=(1-exp((-pi/2)*(2*i-1)))*(exp(a*((x-8008546)/200))-(a/b)*exp(a-  
b)*exp(b*((x-8008546)/200)));
```

```
s=0;
```

```
    expresion=((A1*A2)/A3)*(A4*(-A5+A6-A7-A8)+A9);
```

```
s=s+subs(expresion,{x,y,z,Q,Ux,t,DAB},{8008553.5,368830.5,601.5,0.8,1.  
6,22,0.002});
```

```
    double(s)
```

```
end
```

ANEXO 4

DATOS OBTENIDOS EN FORMA DETALLADA

Tabla 11

Datos meteorológicos, concentración promedio de CO y número de vehículos durante la estación de invierno.

Fecha (a/m/d)	Número de vehículos	Velocidad promedio del viento (m/s)	Dirección del viento (grados) Estación	Temperatura (°C)	Humedad relativa (%)	CO (F - R) (ppm)
2014-08-11	2 713	0,3		16,0	65,7	0,4 – 0,3
2014-08-11	1 596	0,7		22,2	59,2	0,6 – 0,3
2014-08-11	1 524	0,5	SSO-NNE	17,7	59,7	0,3 – 0,1
2014-08-12	2 372	0,3	(22 ^o)	16,1	64,7	1,8 – 1,6
2014-08-12	2 046	0,8	(Invierno)	22,5	56,6	0,3 – 0,2
2014-08-12	1 914	0,9		14,4	76,7	1,1 – 0,7
2014-08-13	2 413	0,0		17,5	61,9	0,4 – 0,0
2014-08-13	1 700	1,0		21,5	44,6	0,5 – 0,3
2014-08-13	1 735	0,7		16,2	76,2	0,4 – 0,2
2014-08-14	2 297	1,0		16,4	62,3	4,1 – 3,9
2014-08-14	2 074	1,6		24,7	56,5	0,8 – 0,2
2014-08-14	1 935	0,6		15,7	75,1	0,4 – 0,1
2014-08-15	2 556	0,1		20,6	56,0	2,3 – 1,3
2014-08-15	2 380	0,8		23,3	44,0	0,7 – 0,0
2014-08-15	2 130	0,5		16,0	71,4	1,2 – 0,5
2014-08-16	1 505	0,2		15,1	66,7	0,3 – 0,1
2014-08-16	2 053	0,9		23,5	53,8	0,3 – 0,1
2014-08-16	1 866	0,8		15,8	74,8	0,8 – 0,5

Fuente: Elaboración propia

Tabla 12

Datos meteorológicos, concentración de CO y número de vehículos durante la estación de primavera.

Fecha (a/m/d)	Número de vehículos	Velocidad promedio del viento (m/s)	Dirección del viento (grados) Estación	Temperatura (°C)	Humedad relativa (%)	CO (F - R) (ppm)
2014-11-17	2 494	0,6		15,6	58,0	0,1 – 0,1
2014-11-17	2 164	2,3		16,4	52,2	0,0 – 0,0
2014-11-17	2 097	1,2	SSO-NNE	14,4	67,6	0,5 – 0,1
2014-11-18	3 281	0,8	(22 ^o)	15,0	66,9	1,2 – 0,8
2014-11-18	2 218	0,9	(Primavera)	16,7	55,1	0,2 – 0,0
2014-11-18	2 192	0,0		13,0	62,5	0,6 – 0,3
2014-11-19	3 081	0,0		13,8	61,5	2,3 – 1,6
2014-11-19	2 284	1,3		16,6	51,0	0,2 – 0,0
2014-11-19	1 935	1,2		13,0	64,5	0,2 – 0,1
2014-11-20	2 475	0,4		13,6	65,0	0,7 – 0,4
2014-11-20	1 873	1,5		15,0	52,0	0,1 – 0,0
2014-11-20	1 881	0,8		12,5	61,2	0,2 – 0,1
2014-11-21	2 469	0,5		13,8	56,6	0,8 – 0,5
2014-11-21	2 017	1,7		18,0	52,2	1,2 – 0,1
2014-11-21	1 909	1,0		14,4	65,7	1,0 – 0,8
2014-11-22	1 490	0,4		16,9	57,1	0,3 – 0,0
2014-11-22	2 636	1,5		19,4	49,2	0,1 – 0,0
2014-11-22	1 980	1,0		14,0	63,3	0,2 – 0,0

Fuente: Elaboración propia

Tabla 13

Datos meteorológicos, concentración de CO y número de vehículos durante la estación de verano.

Fecha (a/m/d)	Número de vehículos	Velocidad promedio del viento (m/s)	Dirección del viento (grados) Estación	Temperatura (°C)	Humedad relativa (%)	CO (F - R) (ppm)
2015-01-26	1 570	0,4		21,1	53,4	1,4 – 0,0
2015-01-26	1 643	1,6		23,3	59,1	0,1 – 0,0
2015-01-26	1 651	0,9	SSO-NNE	18,9	58,4	0,2 – 0,1
2015-01-27	1 534	0,7	(22 ^o)	22,5	61,8	0,0 – 0,0
2015-01-27	1 752	2,2	(Verano)	20,8	46,7	0,8 – 0,3
2015-01-27	1 651	1,0		19,1	59,3	0,1 – 0,1
2015-01-28	1 570	0,5		22,1	51,9	0,5 – 0,1
2015-01-28	1 708	1,3		24,1	52,2	1,1 – 1,0
2015-01-28	1 801	0,7		19,9	55,5	0,1 – 0,0
2015-01-29	1 589	0,6		21,9	55,4	0,1 – 0,0
2015-01-29	1 782	1,7		21,4	50,2	0,4 – 0,2
2015-01-29	1 600	0,5		19,9	60,8	0,9 – 0,5
2015-01-30	1 631	0,6		21,4	59,5	0,4 – 0,3
2015-01-30	1 831	1,7		22,2	48,9	1,5 – 1,4
2015-01-30	1 776	0,9		20,2	65,0	0,4 – 0,3
2015-01-31	1 313	0,2		22,2	62,0	0,3 – 0,3
2015-01-31	1 726	1,6		22,8	53,6	0,7 – 0,6
2015-01-31	1 433	0,8		19,4	66,7	0,6 – 0,3

Fuente: Elaboración propia

Tabla 14

Datos meteorológicos, concentración de CO y número de vehículos durante la estación de otoño.

Fecha (a/m/d)	Número de vehículos	Velocidad promedio del viento (m/s)	Dirección del viento (grados) Estación	Temperatura (°C)	Humedad relativa (%)	CO (F - R) (ppm)
2015-05-04	2 151	0,0		19,1	70,5	0,2 – 0,1
2015-05-04	2 144	0,9		20,8	56,8	7,4 – 6,7
2015-05-04	1 932	0,8	SSO-NNE	17,8	67,3	5,0 – 5,0
2015-05-05	2 262	0,0	(22 ^o)	19,3	65,7	0,8 – 0,5
2015-05-05	1 946	1,1	(Otoño)	21,4	59,7	5,6 – 4,0
2015-05-05	2 195	0,7		19,9	72,6	2,5 – 2,3
2015-05-06	2 230	0,5		17,7	66,3	0,3 – 0,3
2015-05-06	1 870	1,0		21,4	54,5	1,9 – 1,5
2015-05-06	1 955	0,5		16,6	65,3	5,8 – 4,7
2015-05-07	2 274	1,5		18,6	67,3	6,6 – 5,6
2015-05-07	2 043	1,1		21,9	56,6	2,1 – 2,0
2015-05-07	2 059	0,2		19,4	65,9	1,5 – 0,8
2015-05-08	2 326	0,4		17,5	70,8	5,2 – 4,2
2015-05-08	2 122	1,1		21,1	61,5	6,2 – 6,1
2015-05-08	1 968	0,6		16,9	71,1	6,5 – 3,0
2015-05-09	1 206	0,0		17,5	71,8	0,2 – 0,0
2015-05-09	2 166	0,9		29,5	55,5	0,2 – 0,0
2015-05-09	1 958	0,8		17,5	74,7	0,0 – 0,0

Fuente: Elaboración propia

Tabla 15

Valores de la concentración de CO observada (CO_o) y predicho (CO_p) durante la estación de invierno.

Fecha (a/m/d)	Velocidad promedio del viento u_X (m/s)	Coefficiente de difusión D_{AB} (m/s ²)	Tiempo t (s)	Concentración observado CO_o (ppm)	Concentración predicho CO_p (ppm)
2014-08-11	0,3	0,002	66,5	0,3	0,3
2014-08-11	0,7		28,6	0,3	0,5
2014-08-11	0,5		40,0	0,1	0,2
2014-08-12	0,3		66,6	1,6	1,4
2014-08-12	0,8		25,0	0,2	0,2
2014-08-12	0,9		22,0	0,7	0,9
2014-08-13	0,1		200,0	0,0	0,3
2014-08-13	1,0		20,0	0,3	0,4
2014-08-13	0,7		28,6	0,2	0,3
2014-08-14	1,0		20,0	3,9	3,6
2014-08-14	1,6		12,5	0,2	0,6
2014-08-14	0,6		33,0	0,1	0,3
2014-08-15	0,1		200,0	1,3	1,7
2014-08-15	0,8		25,0	0,0	0,6
2014-08-15	0,5		40,0	0,5	1,0
2014-08-16	0,2		100,0	0,1	0,2
2014-08-16	0,9		22,0	0,1	0,3
2014-08-16	0,8		25,0	0,5	0,7

Fuente: Elaboración propia

Tabla 16

Valores de la concentración de CO observada (CO_o) y predicho (CO_p) durante la estación de primavera.

Fecha (a/m/d)	Velocidad del viento u_x (m/s)	Coeficiente de difusión D_{AB} (m/s^2)	Tiempo t (s)	Concentración observado CO_o (ppm)	Concentración predicho CO_p (ppm)
2014-11-17	0,6	0,002	33,0	0,1	0,1
2014-11-17	2,3		8,7	0,0	0,0
2014-11-17	1,2		16,7	0,1	0,4
2014-11-18	0,8		25,0	0,8	1,0
2014-11-18	0,9		22,0	0,0	0,2
2014-11-18	0,1		200,0	0,3	0,4
2014-11-19	0,1		200,0	1,6	1,7
2014-11-19	1,3		15,4	0,0	0,2
2014-11-19	1,2		16,7	0,1	0,2
2014-11-20	0,4		50,0	0,4	0,6
2014-11-20	1,5		13,0	0,0	0,1
2014-11-20	0,8		25,0	0,1	0,2
2014-11-21	0,5		40,0	0,5	0,7
2014-11-21	1,7		11,8	0,1	0,9
2014-11-21	1,0		20,0	0,8	0,9
2014-11-22	0,4		50,0	0,0	0,2
2014-11-22	1,5		13,0	0,0	0,1
2014-11-22	1,0		20,0	0,0	0,2

Fuente: Elaboración propia

Tabla 17

Valores de la concentración de CO observada (CO_o) y predicho (CO_p) durante la estación de verano.

Fecha (a/m/d)	Velocidad del viento u_x (m/s)	Coeficiente de difusión D_{AB} (m/s ²)	Tiempo t (s)	Concentración observado CO_o (ppm)	Concentración predicho CO_p (ppm)
2015-01-26	0,4	0,002	50,0	0,0	1,2
2015-01-26	1,6		12,5	0,0	0,1
2015-01-26	0,9		22,0	0,1	0,2
2015-01-27	0,7		28,6	0,0	0,0
2015-01-27	2,2		9,0	0,3	0,5
2015-01-27	1,0		20,0	0,1	0,1
2015-01-28	0,5		40,0	0,1	0,4
2015-01-28	1,3		15,0	1,0	0,9
2015-01-28	0,7		28,6	0,0	0,1
2015-01-29	0,6		33,0	0,0	0,1
2015-01-29	1,7		11,8	0,2	0,3
2015-01-29	0,5		40,0	0,5	0,8
2015-01-30	0,6		33,0	0,3	0,4
2015-01-30	1,7		11,8	1,4	1,1
2015-01-30	0,9		22,0	0,3	0,4
2015-01-31	0,2		100,0	0,3	0,2
2015-01-31	1,6		12,5	0,6	0,5
2015-01-31	0,8		25,0	0,3	0,5

Fuente: Elaboración propia

Tabla 18

Valores de la concentración de CO observada (CO_o) y predicho (CO_p) durante la estación de otoño.

Fecha (a/m/d)	Velocidad promedio del viento u_x (m/s)	Coefficiente de difusión D_{AB} (m/s^2)	Tiempo t (s)	Concentración observado CO_o (ppm)	Concentración predicho CO_p (ppm)
2015-05-04	0,1	0,002	200,0	0,1	0,1
2015-05-04	0,9		22,0	6,7	6,6
2015-05-04	0,8		25,0	5,0	4,5
2015-05-05	0,1		200,0	0,5	0,6
2015-05-05	1,1		18,0	4,0	4,8
2015-05-05	0,7		28,6	2,3	2,3
2015-05-06	0,5		40,0	0,3	0,3
2015-05-06	1,0		20,0	1,5	1,7
2015-05-06	0,5		40,0	4,7	5,1
2015-05-07	1,5		13,0	5,6	5,1
2015-05-07	1,1		18,0	2,0	1,8
2015-05-07	0,2		100,0	0,8	1,1
2015-05-08	0,4		50,0	4,2	4,3
2015-05-08	1,1		18,0	6,1	5,3
2015-05-08	0,6		33,0	3,0	5,8
2015-05-09	0,1		200,0	0,0	0,2
2015-05-09	0,9		22,0	0,0	0,2
2015-05-09	0,8		25,0	0,0	0,0

Fuente: Elaboración propia

ANEXO 5

Fotos de la intersección de las avenidas Francisco Bolognesi y Gustavo Pinto.



