

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

Escuela de Posgrado

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

**ANÁLISIS DE LA TERCERA FORMA FUNDAMENTAL
EN SUPERFICIES REGULARES**

TESIS

PRESENTADA POR:

JESUS MARINO MAMANI PAMPA

Para optar el Grado Académico de:

**MAESTRO EN CIENCIAS (*MAGISTER SCIENTAE*) CON
MENCIÓN EN MATEMÁTICA**

TACNA - PERÚ

2026

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

Escuela de Posgrado

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

ANÁLISIS DE LA TERCERA FORMA FUNDAMENTAL
EN SUPERFICIES REGULARES

Tesis sustentada y aprobada el 06 de mayo del 2026; estando el jurado calificador
integrado por:

PRESIDENTE


.....
Dr. Raul Alfonso Nina Mollisaca

SECRETARIO


.....
Dr. Edgardo Román Berrospi Zambrano

MIEMBRO


.....
M.Sc. Derly Pari Mendoza

ASESOR


.....
M.Sc. Derly Pari Mendoza

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, M.Sc. Derly Pari Mendoza, en mi condición de asesor acreditado con Resolución de Escuela de Posgrado N° **16576-2025-ESPG/UNJBG del 28 de noviembre del 2025**, del trabajo de tesis titulado: "*Análisis de la tercera forma fundamental en superficies regulares*", presentado por el Sr. Jesus Marino Mamani Pampa, para optar el Grado Académico de Maestro en Ciencias (*Magíster Scientiae*) con mención en Matemática.

Habiendo cumplido con lo establecido en el reglamento de originalidad y de similitud de trabajo de investigación y producción intelectual, considerando que según la revisión, evaluación y análisis realizado a través del software de similitud textual TURNITIN, cuenta con el nivel de similitud permitido cuyo porcentaje es 5%.

Por lo que CERTIFICO LA SIMILARIDAD de la tesis y está de acuerdo al nivel PERMITIDO, para continuar con los trámites correspondientes y para su publicación en el repositorio institucional.

Se emite el presente certificado a solicitud del interesado con fines de continuar con los trámites respectivos para la obtención del Grado Académico de Maestro en Ciencias (*Magíster Scientiae*) con mención en matemática.

Tacna, 23 de abril del 2026

FIRMA ASESOR
Nombres y apellidos


.....
M.Sc. Derly Pari Mendoza
DNI N° 41756455



FIRMA TESISTA
Nombres y apellidos


.....
Sr. Jesus M Mamani Pampa
DNI N° 70337282



DEDICATORIA

Esta investigación la dedico a Elizabeth, por su apoyo constante y confianza durante todo este proceso.

A mis familiares, pues este trabajo es también un reflejo del esfuerzo compartido, del sacrificio silencioso y del apoyo que siempre me brindaron.

AGRADECIMIENTOS

A los jurados calificadores, Dr. Raúl y Dr. Edgardo, mi profundo agradecimiento por el rigor académico, seriedad y dedicación con que evaluaron el presente trabajo. Sus puntualizaciones acertadas, sus comentarios críticos y sus valiosas aportaciones, fueron decisivas para el fortalecimiento del contenido y para el crecimiento de mi formación académica.

Expreso mi más sincero agradecimiento a mi asesor, M.Sc. Derly Pari, por su valiosa orientación y constante apoyo durante el desarrollo de este trabajo. Sus observaciones, sugerencias y conocimientos, fueron fundamentales para enriquecer esta investigación.

ÍNDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA	
AGRADECIMIENTOS	
RESUMEN.	viii
ABSTRACT	ix
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I	
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	
1.1. Identificación del problema	4
1.2. Formulación del problema	4
1.2.1. Problema general	4
1.2.2. Problemas específicos	4
1.3. Justificación e importancia de la investigación	5
1.4. Objetivos	6
1.4.1. Objetivo general	6
1.4.2. Objetivos específicos	6
1.5. Hipótesis	6
1.5.1. Hipótesis general	6
1.5.2. Hipótesis específicas	6
1.6. Antecedentes de la investigación	7
CAPÍTULO II	
MARCO TEÓRICO	
2.1. Preliminares	13
2.2. Curvas parametrizadas	14
2.2.1. Curvas regulares y Longitud de arco	16
2.2.2. La teoría local de curvas parametrizadas por la longitud del arco	18
2.3. Superficies en $\mathbb{R}^3$	19
2.3.1. Superficie regular	19
2.3.2. Orientabilidad	21
2.3.3. Plano Tangente y Vector Normal	24
2.4. Primera forma fundamental	25

2.4.1. Superficies de revolución	29
2.5. La geometría de la aplicación de Gauss	32
2.5.1. Segunda Forma Fundamental	36
2.5.2. Coeficientes de la segunda forma fundamental	37
2.5.3. Relación entre Forma I y Forma II	44
2.6. Operador de Laplace-Beltrami y superficies de tipo finito	47
2.6.1. Derivada covariante y parámetros diferenciales de Beltrami	47
2.6.2. Operador de Laplace-Beltrami asociado a la primera forma fundamental	49
2.6.3. Funciones propias y superficies de tipo Chen finito	50

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1. Tipo y diseño de la investigación	53
3.2. Método	53
3.3. Diseño	54
3.4. Objeto de estudio	54
3.5. Procedimiento	55
3.6. Técnicas de análisis	56
3.7. Criterios de validez	56

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

4.1. Tercera Forma Fundamental	58
4.1.1. Teorema Principal Tercera Forma Fundamental	59
4.2. Consecuencias y Aplicaciones	67
4.2.1. Área de la superficie mediante la tercera forma fundamental	68
4.2.2. Sobre superficies de tipo Chen finito	73
4.2.2.1. Sobre superficies de tipo Chen <i>III</i> finito	75
CONCLUSIONES.	90
RECOMENDACIONES	90
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	91
ANEXOS.	95

RESUMEN

El presente trabajo desarrolla un estudio analítico de la Tercera Forma Fundamental de superficies regulares contenidas en $\mathbb{R}^3$, con el propósito de establecer su demostración formal, calcular sus coeficientes, determinar sus relaciones algebraicas con las dos primeras formas y clasificar superficies cuádricas de tipo Chen finito respecto al operador Δ^{III} . La metodología analiza superficies regulares parametrizadas, apoyándose en herramientas del álgebra lineal y la geometría diferencial de superficies. El fundamento inicial es la definición de la Tercera Forma Fundamental como el producto escalar de las diferenciales del vector normal unitario, expresada como $III = \langle dN(v), dN(w) \rangle$, donde N es el campo vectorial normal a la superficie. Las ecuaciones de Weingarten, que relacionan las derivadas del vector normal con el operador de forma, sirven como herramienta clave para conectar algebraicamente las tres formas fundamentales. Los resultados principales incluyen la obtención explícita de los coeficientes $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, demostrándose que se expresan como combinaciones cuadráticas de los coeficientes de las dos primeras formas; la relación $III = 2H II - K I$, donde K y H son las curvaturas gaussiana y media; y que los helicoides y las esferas son las únicas superficies cuádricas de tipo Chen finito en $\mathbb{R}^3$ respecto a Δ^{III} . Se concluye que la Tercera Forma Fundamental que caracteriza la geometría extrínseca de superficies regulares y puede expresarse algebraicamente en términos de las dos primeras formas mediante las ecuaciones de Weingarten; estos resultados, junto con la clasificación de superficies cuádricas de tipo Chen finito respecto a Δ^{III} , fortalecen el desarrollo teórico de la geometría diferencial clásica.

Palabras clave: Ecuaciones de Weingarten, superficies de Chen, Tercera Forma Fundamental y vectores normales diferenciales.

ABSTRACT

The present work develops an analytical study of the Third Fundamental Form of regular surfaces contained in $\mathbb{R}^3$, with the purpose of establishing its formal proof, computing its coefficients, determining its algebraic relationships with the first two fundamental forms, and classifying quadric surfaces of finite Chen type with respect to the operator Δ^{III} . The methodology analyzes parametrized regular surfaces, drawing on tools from linear algebra and the differential geometry of surfaces. The starting point is the definition of the Third Fundamental Form as the inner product of the differentials of the unit normal vector, expressed as $III = \langle dN(v), dN(w) \rangle$, where N is the normal vector field to the surface. The Weingarten equations, which relate the derivatives of the normal vector to the shape operator, serve as a key tool for algebraically connecting the three fundamental forms. The main results include the explicit computation of the coefficients $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$, showing that they can be expressed as quadratic combinations of the coefficients of the first two fundamental forms; the relation $III = 2H II - K I$, where K and H are the Gaussian and mean curvatures; and that helicoids and spheres are the only quadric surfaces of finite Chen type in $\mathbb{R}^3$ with respect to Δ^{III} . It is concluded that the Third Fundamental Form characterizes the extrinsic geometry of regular surfaces and can be expressed algebraically in terms of the first two fundamental forms through the Weingarten equations; these results, together with the classification of quadric surfaces of finite Chen type with respect to Δ^{III} , strengthen the theoretical development of classical differential geometry.

Keywords: Chen surfaces, Differential normal vector, Third Fundamental Form and Weingarten equations.

INTRODUCCIÓN

El estudio de superficies en $\mathbb{R}^3$ ocupa un lugar central dentro del análisis geométrico moderno. Fue Gauss [8] quien, en el siglo XIX, sentó las bases para explorar las propiedades locales y globales de superficies regulares, un campo que desde entonces ha crecido de manera significativa, tanto en su desarrollo teórico como en su proyección hacia distintas áreas del conocimiento. Dentro de este contexto, las formas fundamentales ejercen un papel esencial en la descripción geométrica de las superficies. La primera forma fundamental, introducida por Gauss, proporciona la estructura métrica intrínseca de la superficie, permitiendo medir longitudes, ángulos y áreas de curvas y regiones contenidas en ella [5, 24]. La segunda forma fundamental, por su parte, estudia cómo la superficie se curva en el espacio $\mathbb{R}^3$, dando lugar a conceptos esenciales como las curvaturas principales, Gauss y media [6, 13]. Estas dos primeras formas fundamentales han sido estudiadas a profundidad en textos clásicos como los de Do Carmo [5], Spivak [24], Struik [26], Kühnel [14], Tenenblat [29], Tapp [27] y Millman [18], estableciendo una base teórica sólida para la geometría diferencial de superficies. Sin embargo, existe una Tercera Forma Fundamental, definida mediante el producto escalar de los vectores normales diferenciales, que complementa la caracterización geométrica y cuya importancia teórica no ha sido estudiada a profundidad en la geometría diferencial.

A pesar de su relevancia teórica, la Tercera Forma Fundamental no ha sido estudiada como las dos primeras formas fundamentales. Definida mediante el producto escalar de los vectores normales diferenciales, esta forma fundamental proporciona información complementaria sobre la geometría extrínseca de la superficie y establece relaciones algebraicas profundas con las dos primeras formas fundamentales [7]. Autores como Do Carmo [5], Spivak [24], Struik [26] y Kühnel [14] han desarrollado ampliamente el estudio de las dos primeras formas fundamentales; sin embargo, el análisis de la tercera forma fundamental y su caracterización algebraica no han sido tratados con la misma profundidad en la geometría diferencial. Algunos trabajos más específicos, como los de Hartman y Wintner [10], Toponogov [30], Naveira [20] y estudios recientes [7], han comenzado a cubrir este vacío, mostrando que la Tercera Forma Fundamental no solo completa el análisis geométrico, sino que también permite establecer relaciones algebraicas y tensoriales que profundizan la comprensión de la teoría de superficies. Esta

situación evidencia la necesidad de realizar un estudio más claro y completo que aborde de forma ordenada las propiedades, los coeficientes y las relaciones algebraicas de la Tercera Forma Fundamental dentro de la geometría diferencial clásica.

El propósito central de este trabajo es construir un estudio teórico riguroso y ordenado de la Tercera Forma Fundamental de superficies regulares en $\mathbb{R}^3$ mediante el producto escalar de los vectores normales diferenciales. Las preguntas que nos guían a esta investigación son: ¿Cómo se demuestra teóricamente la Tercera Forma Fundamental de superficies regulares en $\mathbb{R}^3$ mediante el producto escalar de los vectores normales diferenciales? ¿Cuáles son los coeficientes de la tercera forma fundamental obtenidos a partir del producto escalar de las diferenciales del vector normal unitario? ¿Cómo se relacionan algebraicamente la primera, segunda y tercera forma fundamental a través de las ecuaciones de Weingarten en superficies regulares?, ¿Cuáles son las superficies cuádricas de tipo Chen finito en $\mathbb{R}^3$ cuando se adopta la tercera forma fundamental como métrica base mediante su operador de Laplace-Beltrami asociado Δ^{III} ? Para responder estas preguntas, se busca demostrar de manera formal las propiedades fundamentales de la tercera forma fundamental, calcular explícitamente sus coeficientes y establecer las relaciones algebraicas que la vinculan con las dos primeras formas fundamentales a través de las ecuaciones de Weingarten [5, 1]. De este modo, el presente trabajo no solo contribuye a llenar un vacío teórico en la geometría diferencial clásica, sino que también abre una perspectiva nueva para clasificar superficies cuádricas mediante el operador Δ^{III} , extendiendo así la teoría de tipo finito de B.-Y. Chen [3] a un contexto métrico inducido por la tercera forma fundamental.

El estudio está distribuido en cinco capítulos. El primero describe el problema de investigación, las preguntas que lo guían, la justificación del estudio, los objetivos y las hipótesis que orientan el desarrollo del trabajo y los antecedentes relacionados. Los fundamentos que sustentan este trabajo se exponen en el segundo capítulo, abarcando los pilares teóricos del álgebra lineal, curvas y superficies regulares con sus respectivas parametrizaciones. También se estudian las dos formas fundamentales, la aplicación de Gauss y las ecuaciones de Weingarten, que constituyen la base conceptual para el desarrollo de la Tercera Forma Fundamental [5, 18, 31, 29, 9]. El tercer capítulo presenta el marco metodológico. El cuarto capítulo constituye el centro del trabajo: se presenta la definición formal de la Tercera Forma Fundamental, se determinan sus coeficientes a

partir del producto escalar de las diferenciales del vector normal, se demuestra de manera detallada su relación con las dos primeras formas fundamentales mediante las ecuaciones de Weingarten [13, 30, 16, 10], y se determinan las superficies cuádricas de tipo Chen finito en $\mathbb{R}^3$ respecto al operador de Laplace-Beltrami Δ^{III} inducido por la tercera forma fundamental, estableciendo que los helicoides y las esferas son las únicas superficies con esta propiedad. El quinto capítulo presenta las conclusiones respondiendo a cada uno de los objetivos planteados, así como recomendaciones para futuras investigaciones y sus posibles aplicaciones.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Identificación del problema

En el estudio clásico de las superficies regulares inmersas en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$, la primera y la segunda forma fundamental han sido ampliamente analizadas teóricamente y en sus aplicaciones. En comparación, la Tercera Forma Fundamental, definida a partir del producto escalar de los diferenciales del campo normal unitario, no ha sido estudiada a profundidad como las dos primeras formas, a pesar de su importancia en la descripción local de la curvatura. Esta falta de desarrollo ha dificultado una comprensión más profunda de su estructura, de sus propiedades diferenciales y de su relación con los operadores fundamentales de la geometría de superficies. En especial, no se dispone de una exposición clara y unificada de sus vínculos con la aplicación de Gauss, la forma de Weingarten y las curvaturas principales. Por ello, resulta necesario llevar a cabo un estudio más detallado y completo de la Tercera Forma Fundamental dentro del marco de la geometría diferencial clásica.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿Cómo demostrar teóricamente la Tercera Forma Fundamental de superficies regulares en $\mathbb{R}^3$ mediante el producto escalar de los vectores normales diferenciales.

1.2.2. Problemas específicos

1. ¿Cuáles son los coeficientes de la tercera forma fundamental obtenidos a partir del producto escalar de las diferenciales del vector normal unitario?
2. ¿Cómo se relacionan algebraicamente la primera, segunda y tercera forma fundamental, a través de las ecuaciones de Weingarten en superficies regulares?
3. ¿Cuáles son las superficies cuádricas de tipo Chen finito en $\mathbb{R}^3$, cuando se adopta la tercera forma fundamental como métrica base mediante su operador de Laplace-Beltrami asociado Δ^{III} ?

1.3. Justificación e importancia de la investigación

La justificación del presente estudio se basa en el escaso desarrollo de la Tercera Forma Fundamental en la línea de geometría diferencial. Autores como Do Carmo, Spivak, Struik, Kühnel, entre otros, han profundizado el estudio de las dos primeras formas fundamentales, desarrollando extensamente sus propiedades, aplicaciones y relaciones geométricas; sin embargo, la tercera forma fundamental tiene un desarrollo limitado y fragmentado. Por ejemplo, Toponogov [30] la define con una breve demostración en su texto sin explorar sus propiedades en profundidad, Kreyszig [13] solamente la menciona en sus apartados de manera tangencial, y Lipschutz [16] la incluye como ejercicio a resolver sin un desarrollo teórico, pero con sugerencias a desarrollar; de acuerdo a lo mencionado, se hace notar que existe un vacío teórico para la comprensión completa de la geometría de superficies regulares. En ese sentido, este trabajo contribuye al desarrollo teórico de la geometría diferencial mediante el estudio riguroso de las propiedades, coeficientes y relaciones algebraicas de la tercera forma fundamental con las dos primeras formas, utilizando principalmente las ecuaciones de Weingarten. Se establecen de manera explícita las relaciones entre las tres formas fundamentales para proporcionar conceptos que complementan y enriquecen el estudio de superficies. Asimismo, la relación $III = 2H II - K I$ demuestra que la tercera forma fundamental posee estructura suficiente para actuar como métrica independiente sobre la superficie, lo que permite asociarle un operador de Laplace-Beltrami Δ^{III} . Este operador hace posible clasificar superficies en $\mathbb{R}^3$ según la teoría de tipo finito de B.-Y. Chen [3], la cual no ha sido explorada desde la perspectiva de la tercera forma fundamental. En este trabajo se establece que las únicas superficies cuádricas de tipo Chen finito respecto a Δ^{III} son los helicoides y las esferas, contribuyendo así al desarrollo de esta línea dentro de la geometría diferencial clásica. Por lo cual, este trabajo genera material de referencia ordenado, riguroso y accesible para futuras investigaciones en geometría diferencial y para la formación de estudiantes en esta área del conocimiento matemático.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Demostrar teóricamente la tercera forma fundamental de superficies regulares en $\mathbb{R}^3$, mediante el producto escalar de los vectores normales diferenciales y establecer sus relaciones con la primera y segunda forma fundamental.

1.4.2. Objetivos específicos

1. Calcular los coeficientes de la tercera forma fundamental, a partir del producto escalar de las diferenciales del vector normal unitario en superficies regulares en $\mathbb{R}^3$.
2. Establecer la relación algebraica entre la primera, segunda y tercera forma fundamental, mediante las ecuaciones de Weingarten.
3. Determinar las superficies cuádricas de tipo Chen finito en $\mathbb{R}^3$ respecto a la tercera forma fundamental, mediante el operador de Laplace-Beltrami Δ^{III} .

1.5. Hipótesis

1.5.1. Hipótesis general

La tercera forma fundamental de superficies regulares en $\mathbb{R}^3$ se demuestra teóricamente mediante el producto escalar de los vectores normales diferenciales y se expresa en función de la primera y segunda forma fundamental.

1.5.2. Hipótesis específicas

1. Los coeficientes de la Tercera Forma Fundamental se expresan como combinaciones de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental mediante las ecuaciones de Weingarten.
2. Existe una relación matricial explícita entre la primera, segunda y tercera forma fundamental, que permite representar la tercera forma en términos de las dos primeras.
3. Las únicas superficies cuádricas de tipo Chen finito en $\mathbb{R}^3$ respecto al operador de Laplace-Beltrami Δ^{III} , inducido por la tercera forma fundamental, son los

helicoides y las esferas.

1.6. Antecedentes de la investigación

La geometría diferencial que se ha desarrollado como una herramienta indispensable para comprender curvas y superficies en espacios tridimensionales, fue en el siglo XIX, cuando matemáticos como Carl Friedrich Gauss comenzaron a sentar las bases de esta área, siendo su obra *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas* [8] un resultado fundamental en su desarrollo. En ella, Gauss introdujo la curvatura gaussiana y demostró, a través del célebre *Theorema Egregium*, que la curvatura es una propiedad intrínseca de la superficie, transformando profundamente la manera en que se concibe y estudia la geometría de las superficies.

Más adelante Eisenhart [6], profundizó en las primeras dos formas fundamentales, las ecuaciones de Frenet-Serret, y otros conceptos fundamentales para el estudio de superficies. Su obra sigue siendo referencia obligatoria en la formación de geómetras.

En su obra sobre geometría diferencial, [2] introdujo formalmente la tercera forma fundamental, como un instrumento para estudiar de qué manera las normales de una superficie experimentan deformaciones. Su enfoque permitió profundizar en la comprensión de la geometría extrínseca de las superficies, abriendo una perspectiva más detallada y precisa, particularmente, en aquellos contextos donde la curvatura presenta variaciones considerables.

En [15], si bien el enfoque principal recae sobre variedades suaves, se destaca el papel central que juegan las formas fundamentales en la caracterización métrica de superficies embebidas, haciendo referencia a la tercera forma fundamental dentro de contextos de mayor complejidad teórica.

Desde la perspectiva física, [28] establece un vínculo entre las formas fundamentales y áreas como la teoría de cuerdas y la relatividad general, evidenciando que estas herramientas matemáticas trascienden la geometría clásica y encuentran aplicación en contextos abstractos de gran relevancia científica.

Finalmente, [19], en *Generalized Curvatures*, introduce una visión ampliada sobre curvaturas, argumentando que la tercera forma fundamental permite comprender

propiedades geométricas complejas, siendo útil incluso en contextos de optimización geométrica.

Un aporte reciente relevante se encuentra en [14], dentro de su obra *Differential Geometry*, donde las tres formas fundamentales son retomadas en el marco del estudio de variedades diferenciables. Kühnel plantea que la tercera forma fundamental puede interpretarse como el producto interno de derivadas covariantes de vectores normales, y resalta su utilidad en situaciones donde las dos primeras formas resultan insuficientes para describir con precisión deformaciones de carácter fino.

Por otro lado, [24], aunque más centrado en las primeras dos formas, menciona que la tercera forma fundamental puede derivarse formalmente como $III = \langle dN, dN \rangle$ donde N es el campo normal unitario. Aunque su uso no es frecuente, Spivak deja abierta la puerta a futuras aplicaciones geométricas más sofisticadas, especialmente en superficies con torsión o en estructuras rígidas

En el artículo “On the Geometry of Third Fundamental Form” de [20], se hace un análisis riguroso de cómo la tercera forma fundamental se relaciona con la estabilidad geométrica de superficies, argumentando que puede servir para caracterizar tensiones internas en materiales curvados. Este enfoque ha sido explorado también en mecánica del continuo.

En el artículo de [12], en el contexto de la visión por computadora y análisis de formas tridimensionales, sugieren que la tercera forma fundamental puede capturar características de “curvatura de nivel fino” (fine curvature), relevantes para algoritmos de reconocimiento de formas y reconstrucción 3D.

En aplicaciones a estructuras físicas, [21], menciona que en el estudio de superficies mínimas, la tercera forma fundamental aparece naturalmente cuando se analizan variaciones normales de superficie, permitiendo evaluar la rigidez local en estructuras delgadas.

En el libro de Kreyszig [13], el desarrollo se concentra principalmente en la primera y segunda forma fundamental, abordando sus fundamentos desde una perspectiva vectorial y tensorial. Si bien no dedica un apartado exclusivo a la tercera forma

fundamental, establece los elementos conceptuales necesarios para su comprensión. Desde una mirada geométrica, la tercera forma fundamental puede interpretarse como el producto escalar de las derivadas del campo normal de la superficie, conclusión que se desprende del análisis del operador de forma y sus implicaciones en la teoría de curvatura. Kreyszig introduce nociones como la curvatura normal, la forma de Weingarten y el operador de forma, conceptos directamente vinculados a la formulación de la tercera forma fundamental como $III = \langle dN, dN \rangle$, donde N es el campo normal unitario. Este enfoque conecta la tercera forma con las deformaciones del campo normal, lo que resulta de particular utilidad en el análisis extrínseco de la superficie.

En el texto de Lipschutz [16], se aborda de manera extensa la primera y segunda forma fundamental, así como la geometría intrínseca y extrínseca de superficies. Si bien la tercera forma fundamental no ocupa un lugar central en la obra, aparece mencionada en la sección de ejercicios, presentándola como $III = dN \cdot dN$, donde N es el vector normal unitario a la superficie. Partiendo de las ecuaciones de Rodrigues y considerando las direcciones principales, el autor demuestra la relación fundamental entre las tres formas fundamentales de una superficie regular, expresada como $III - 2H II + K I = 0$, donde H y K representan la curvatura media y gaussiana, respectivamente. Este resultado pone de manifiesto que la Tercera Forma Fundamental admite una expresión algebraica en términos de las dos primeras, evidenciando la profunda conexión que existe entre ellas en el estudio de las superficies regulares.

El artículo [7] está íntegramente dedicado a la tercera forma fundamental. Sus autores proponen un método novedoso para calcularla mediante un enfoque matemático computacional que incorpora herramientas como MATLAB. El procedimiento consiste en determinar previamente las dos primeras formas fundamentales y las curvaturas principales, para a partir de ellas obtener la tercera forma como:

$$III = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

reformulada en términos de derivadas de la normal y matrices de cambio. En este contexto, la Tercera Forma Fundamental se interpreta como una métrica auxiliar que cuantifica la variación del campo normal sobre la superficie, brindando información detallada acerca

de la rigidez, estabilidad y comportamiento deformacional de las superficies.

Este enfoque resulta valioso, tanto desde el plano teórico como en aplicaciones computacionales, destacándose especialmente en áreas como la geometría aplicada, el modelado de superficies y la visualización computacional de geometrías curvas complejas.

En el artículo de [10], introducen y analizan en profundidad la tercera forma fundamental de una superficie, denotada como III . Esta forma se define como el producto escalar de las derivadas del campo normal unitario de la superficie, es decir:

$$III = \langle dN(u), dN(v) \rangle$$

donde u, v son vectores tangentes en un punto de la superficie.

La tercera forma fundamental proporciona información sobre cómo cambia la dirección normal de la superficie, ofreciendo una medida de la variación del campo normal. Los autores exploran las propiedades de esta forma y su relación con las otras dos formas fundamentales (I y II), una de las identidades destacadas en el artículo es:

$$III - 2H II + K I = 0$$

donde, H, K son la curvatura media y gaussiana, I y II son la primera y segunda formas fundamentales, respectivamente.

Esta identidad revela la estrecha vinculación que existe entre la tercera forma fundamental y las propiedades de curvatura de la superficie. El artículo también explora sus aplicaciones en la teoría de superficies, destacando su rol en la determinación de propiedades geométricas y su utilidad en problemas de caracterización superficial.

En [30, Cap 2], se desarrolla la Tercera Forma Fundamental en el marco del estudio de las propiedades extrínsecas de superficies en $\mathbb{R}^3$. El autor la define como el producto escalar $III(u, v) = S(u) \cdot S(v)$, donde S es el operador de forma o de Weingarten, señalando que esta forma bilineal simétrica es independiente de la elección del vector normal unitario. Toponogov demuestra la relación algebraica fundamental $III =$

$2H II - K I$, donde K y H representan la curvatura gaussiana y media, respectivamente, e I, II son las formas fundamentales, poniendo de manifiesto que la tercera forma puede expresarse completamente en términos de las dos primeras. Este desarrollo se presenta como parte de la caracterización integral de superficies regulares, situando a la tercera forma fundamental como un elemento esencial dentro del sistema de formas que describen tanto la geometría intrínseca como extrínseca de las superficies, facilitando el análisis de propiedades curvaturas y el establecimiento de identidades geométricas fundamentales.

El libro de [22, Cap 5] explora las ecuaciones fundamentales (Gauss y Codazzi), que relacionan implícitamente la tercera forma fundamental, definida como $III(v, w) = \langle dN(v), dN(w) \rangle$, donde N es el campo normal unitario. El libro proporciona el marco teórico para comprender la tercera forma fundamental a través de las ecuaciones estructurales y la aplicación de Gauss. El apéndice sugiere ejercicios computacionales que inspiran algoritmos en Python, usando bibliotecas como NumPy para cálculos matriciales, SymPy para derivaciones simbólicas y Matplotlib para visualizar superficies y simular flujos geométricos basados en III .

En [17, pp.110-119], la geometría diferencial se aplica al ámbito de la física, abordando las formas fundamentales con énfasis en su interpretación física, como la curvatura en el contexto de la relatividad. La tercera forma fundamental se vincula con el mapa de Gauss y las propiedades extrínsecas de las superficies, encontrando aplicación en el estudio de superficies dinámicas. Entre los usos físicos sugeridos destaca el modelado de membranas. Desde una perspectiva computacional, herramientas como SciPy en Python permiten resolver ecuaciones diferenciales asociadas a flujos geométricos, mientras que VTK o Mayavi posibilitan la visualización tridimensional de superficies cuyas propiedades están definidas por III .

Stoker [25, pp.98-101] trabaja el tema desde una mirada analítica, pasando por curvas y superficies hasta llegar a las tres formas fundamentales, todo enmarcado en las ecuaciones de Gauss y Codazzi. Lo interesante de su enfoque es que no se limita a la teoría, sino que recurre a superficies clásicas para ilustrar cada idea, lo que hace que los conceptos cobren sentido de forma más concreta y progresiva.

En libro de [23, p.83], la tercera forma fundamental de una superficie se introduce

como una herramienta métrica menos común que la primera y la segunda forma fundamental, pero igualmente significativa en ciertos contextos geométricos. Esta forma se define como el producto escalar de los diferenciales del vector normal unitario $\vec{n}$ de la superficie:

$$III = d\vec{n} \cdot d\vec{n}$$

Geoméricamente, la tercera forma fundamental mide cómo varía la dirección normal de la superficie y, por tanto, está íntimamente relacionada con su curvatura. A diferencia de la primera forma fundamental (que describe la métrica inducida en la superficie) y la segunda (que relaciona las derivadas de la normal con la curvatura), la tercera se puede interpretar como una medida de la “curvatura de la curvatura”. Sochi explica que III se puede expresar en términos de la segunda forma fundamental II y la forma inversa de la primera I , a través de la relación:

$$III = II \cdot I^{-1} \cdot II$$

lo cual refleja que III depende completamente de las otras dos formas fundamentales.

Este artículo, publicado en el Bulletin of the Belgian Mathematical Society [32], investiga las superficies cuádricas en el espacio euclidiano tridimensional que son de tipo finito en el sentido de B.-Y. Chen, pero referido específicamente a la tercera forma fundamental (III), en lugar de la primera o segunda. La tercera forma fundamental de una superficie se define mediante el tensor $III = e_{ij} du^i du^j$, y a partir de ella se construye el operador de Beltrami Δ^{III} , cuya acción sobre el vector de posición satisface $\Delta^{III} X = \text{grad}^{III} R - R N$, donde $R = 2H/K$ es la suma de los radios principales de curvatura y N es la aplicación de Gauss. Una superficie se dice de tipo finito $III - k$ si su vector de posición puede expresarse como suma finita de autovectores de Δ^{III} . El resultado principal del artículo (Teorema 4.3) demuestra que los helicoides y las esferas son las únicas superficies cuádricas de tipo finito III en $\mathbb{R}^3$: las cuádricas del primer tipo son de tipo finito III , si y solo si constituyen una esfera ($a = b = -1$), mientras que las cuádricas del segundo tipo son siempre de tipo infinito, resultado que se establece mediante lemas inductivos sobre las potencias iteradas del operador Δ^{III} .

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Preliminares

Consideremos $\mathbb{R}^n$ como un conjunto de n -tuplas cuyos elementos se llaman vectores, sobre este conjunto actúan dos operaciones fundamentales. La primera toma dos vectores cualesquiera u y v de $\mathbb{R}^n$ y produce la adición $u + v$, que también pertenece a $\mathbb{R}^n$. La segunda operación involucra un escalar α real y un vector v , generando el producto αv .

Ahora bien, estas operaciones no son arbitrarias, responden a ciertas reglas internas que les dan estructura. Para vectores arbitrarios u, v, w en $\mathbb{R}^n$ y escalares como α, β en $\mathbb{R}$, observamos lo siguiente: La suma de vectores es conmutativa: el orden en que se suman u y v es irrelevante porque $u + v = v + u$. Cuando se suman tres vectores, no importa cómo se agrupen porque $(u + v) + w = u + (v + w)$. Se requiere la misma propiedad asociativa para el producto escalar: $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$. Existe un vector nulo $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ que sirve como elemento neutro para la suma: sumarlo a cualquier vector v no lo cambia, es decir, $v + 0 = 0 + v = v$. Todo vector v admite un opuesto aditivo $-v$ tal que su suma produce el vector nulo: $v + (-v) = -v + v$. La distributiva conecta ambas operaciones; un escalar actúa linealmente sobre sumas de vectores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$. Por el contrario, una suma de escalares se distribuye sobre un vector: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$. Por último, cualquier vector se conserva mediante el escalar unitario 1: $1 \cdot v = v$.

Estas propiedades caracterizan completamente un espacio vectorial definido sobre $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.1. Una transformación lineal sobre un espacio vectorial, es una aplicación $T : V \rightarrow V$ tal que se cumplen: $T(\lambda v + \mu u) = \lambda T(v) + \mu T(u)$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v, u \in V$.

Donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de $T : V \rightarrow V$ si admite un vector v distinto de cero (llamado autovector) tal que $T(v) = \lambda v$.

Definición 2.2. Sean los vectores $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $u = (u_1, u_2, u_3)$ en $\mathbb{R}^3$, entonces su

producto escalar $\langle v, u \rangle$ y el producto vectorial $v \times u$ son:

$$\langle v, u \rangle = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3, \quad v \times u = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$$

Para la topología en $\mathbb{R}^n$, consideramos las bolas abiertas. Una bola en $\mathbb{R}^n$ con centro en el punto $P(x_1^0, \dots, x_n^0)$,

$$B(P, \epsilon) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 < \epsilon^2\}$$

Con esta noción de bola, podemos caracterizar los conjuntos abiertos: decimos que un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si para cada punto $P \in U$ existe una bola $B(P, \epsilon)$ contenida completamente en U .

Definición 2.3. Si una función $\varphi : M \rightarrow N$ es continua y biyectiva, y si su función inversa $\psi = \varphi^{-1} : N \rightarrow M$ también es continua, entonces φ es un homeomorfismo y se dice que M y N son homeomorfos. La matriz de Jacobi de una función diferenciable $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Una función diferenciable $\varphi : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo si existe una función diferenciable $\psi : N \rightarrow M$ tal que $\varphi \circ \psi = I$ (donde I es la función identidad) y $\psi \circ \varphi = I$.

2.2. Curvas parametrizadas

Exploraremos ahora las curvas en el espacio euclidiano denotado por $\mathbb{R}^3$ el conjunto de ternas (x, y, z) de números reales; es decir, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Definición 2.4. Una curva paramétrica diferenciable es una aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ es abierto.

La curva α se describe mediante una función vectorial que depende de un

parámetro real $t \in I$,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3,$$

cuyas componentes $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones coordenadas diferenciables.

Observación 2.1. La imagen de α , denotada por $\alpha(I)$, es la familia de puntos en $\mathbb{R}^3$ se llama traza de α que describe una curva geométrica. El parámetro t puede interpretarse como el tiempo en muchas aplicaciones físicas.

Una forma de definir estos subconjuntos es mediante funciones diferenciables. Aquí entendemos por diferenciable algo más fuerte que lo usual: queremos que la función admita derivadas continuas tantas veces como sea necesario, sin restricción alguna sobre el orden de derivación. En el espacio $\mathbb{R}^3$, las curvas diferenciables se definen de la siguiente manera:

Definición 2.5 (Función Diferenciable). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función vectorial, siendo el intervalo $I \in \mathbb{R}$ abierto de la recta real. En coordenadas cartesianas, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para $t \in I$, donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones diferenciables. El vector derivada se define como $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$, para todo $t \in I$, representa la dirección instantánea de variación en $\alpha(t)$, interpretándose geométricamente como el vector que indica hacia dónde apunta la curva en ese instante.

Definición 2.6 (Producto interno). Sea un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Un producto interno es una regla que toma cualquier par de vectores $u, v \in V$ y les asigna un número real, denotado $\langle u, v \rangle$, de manera que para todo $u, v, w \in V$ y todo escalar α , se comporta bien en el siguiente sentido:

1. Linealidad $\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,
2. Simetría $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,
3. Positividad $\langle v, v \rangle \geq 0$,
4. Definida positiva $\langle v, v \rangle = 0$ si y solo si $v = 0$.

Sean u y v vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$. El producto escalar $\langle u, v \rangle$ se anula precisamente cuando los vectores son ortogonales.

El producto interno canónico se expresa de la siguiente forma:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

donde $\langle u(t), v(t) \rangle$, $t \in I$, son curvas parametrizadas diferenciables esto es:

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), v(t) \rangle = \langle u'(t), v(t) \rangle + \langle u(t), v'(t) \rangle \quad (2.1)$$

2.2.1. Curvas regulares y Longitud de arco

Definición 2.7. Una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es regular cuando su vector derivada es diferente de cero en el intervalo I , es decir, cuando $\alpha'(t) \neq 0$ para cada valor del parámetro $t \in I$. Esta condición garantiza que la curva posee una dirección tangente bien definida en cada uno de sus puntos.

Consideremos la hélice circular dada por la parametrización:

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R}$$

donde a y b son constantes no nulas, representando respectivamente el radio de la circunferencia base y la velocidad de ascenso vertical. Para determinar si esta curva es regular, calculamos su vector tangente:

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

cuya norma de $\alpha'(t)$ resulta ser:

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$$

Dado que $a > 0$ y $b \neq 0$, tenemos $\|\alpha'(t)\| > 0$ para todo valor de t . Así, el vector derivada nunca se anula, lo que establece la regularidad de α .

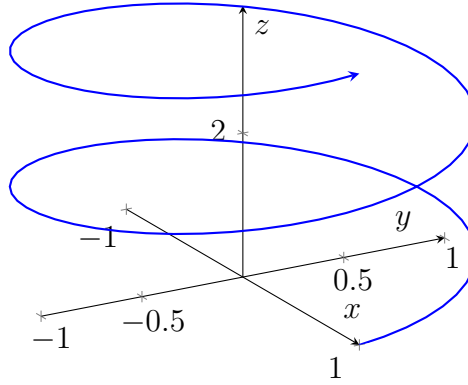


Figura 1. Parametrización de la helicoides

Definición 2.8 (Longitud de Arco). Sea un punto t_0 en un intervalo I , definimos la longitud de arco de una curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ a partir de t_0 mediante la integral:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt \quad (2.2)$$

donde

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

representa la norma del vector tangente $\alpha'(t)$ Véase [5].

La regularidad de α asegura que $\alpha'(t) \neq 0$ en todo punto, lo cual implica que s resulta ser una función diferenciable de t . Más aún, derivando respecto a t obtenemos directamente $ds/dt = \|\alpha'(t)\|$, expresando así que la variación de la longitud de arco coincide con la velocidad instantánea a lo largo de la curva.

Observación 2.2. Es importante mencionar que la existencia de la longitud de arco no está garantizada para todo camino diferenciable. Existen caminos diferenciables cuya derivada no es continua (es decir, que no son de clase C^1), para los cuales la integral que define $s(t)$ puede no converger, haciendo que la longitud no quede bien definida. La hipótesis de regularidad impuesta sobre α en la Definición 2.8 asegura que $\alpha'(t)$ es continua y no se anula en ningún punto de I , lo cual garantiza que dicha integral converge y que $s(t)$ está bien definida para todo $t \in I$.

Definición 2.9 (Parametrización por Longitud de Arco). Una curva suave $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$

se dice parametrizada por longitud de arco cuando el parámetro t mide precisamente la distancia recorrida a lo largo de la curva desde cierto punto inicial. Más exactamente, esto significa que existe algún $t_0 \in I$ tal que:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0 \quad (2.3)$$

Esta condición admite una caracterización más simple: La curva α admite una parametrización dada por la longitud de arco, si y solamente si el vector tangente tiene norma unitaria en cada punto, es decir, si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$. En tal caso, la velocidad de recorrido es constante e igual a la unidad Véase [29].

Proposición 2.1. Una curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada por la longitud de arco si, y solo si, $\alpha'(t) = 1$, para todo $t \in I$.

2.2.2. La teoría local de curvas parametrizadas por la longitud del arco

Definición 2.10 (Vector Tangente). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular que admite una parametrización dada por la longitud de arco s . El vector tangente a α en el punto asociado al parámetro s se define simplemente como:

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (2.4)$$

Dado que la parametrización es por longitud de arco, este vector tangente posee norma unitario Véase [5].

Definición 2.11 (Curvatura). La curvatura de α en s mide la rapidez con que el vector tangente altera su sentido al recorrer la curva. Analíticamente, se define como:

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\| \quad (2.5)$$

Observación 2.3. Observemos que la curvatura es siempre no negativa y determina cuán alejada está la curva de ser una línea recta en las proximidades del punto considerado.

Definición 2.12 (Vector Normal Principal). Si la curvatura $\kappa(s)$ es no nula, el vector

normal principal es:

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} \quad (2.6)$$

Se tiene $\|N(s)\| = 1$ y $N(s) \perp T(s)$.

Definición 2.13 (Vector Binormal). El vector binormal de α en s está dado por:

$$B(s) = T(s) \times N(s) \quad (2.7)$$

donde $\times$ denota el producto vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Proposición 2.2. El conjunto $\{T(s), N(s), B(s)\}$ forma una base ortonormal positiva en cada punto de la curva:

1. $\|T\| = \|N\| = \|B\| = 1$
2. $T \perp N, N \perp B, B \perp T$
3. $B = T \times N, T = N \times B, N = B \times T$.

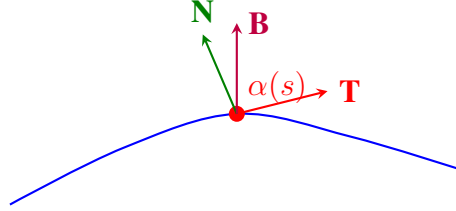


Figura 2. *Triedro de Frenet en $\alpha(s)$*

2.3. Superficies en $\mathbb{R}^3$

En esta sección haremos una introducción a la teoría de superficies. Comenzaremos introduciendo la noción de superficie simple. A lo largo de la sección daremos una caracterización de las funciones diferenciables que definen las superficies.

2.3.1. Superficie regular

Definición 2.14 (Superficie Regular). Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se dice superficie regular cuando cada uno de sus puntos p admite una representación local mediante coordenadas. Precisamente, existe un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y la aplicación $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, denominada parametrización local o carta, satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. La aplicación X admite derivadas parciales de todos los órdenes, es decir, las funciones componentes $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ que definen $X(u, v)$ admiten derivación parcial indefinida con continuidad;
2. X es un homeomorfismo sobre $X(U) = V \cap S$, donde V es un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a p , X es continua y tiene una inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ tal que X^{-1} es continua;
3. En cada punto $q \in U$, la diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene rango máximo, o equivalentemente, es inyectiva. Esta condición garantiza que dichos vectores tangentes X_u y X_v son linealmente independientes, impidiendo así degeneraciones o singularidades en la parametrización.

Observación 2.4 (Notación Estándar). Usualmente escribimos $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ donde (u, v) son las coordenadas locales que pertenecen a U .

Los vectores tangentes coordenados son:

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u}, \quad X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$$

Proposición 2.3 (Condición de Regularidad Equivalente). La condición (3) es equivalente a que los vectores X_u y X_v sean linealmente independientes, es decir:

$$X_u(u, v) \times X_v(u, v) \neq 0 \quad \forall (u, v) \in U$$

Demostración. La diferencial $dX_{(u,v)}$ está representada por la matriz jacobiana:

$$J_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

dX es inyectiva $\Leftrightarrow \text{rango}(J_X) = 2 \Leftrightarrow$ las columnas X_u y X_v son linealmente independientes $\Leftrightarrow X_u \times X_v \neq \mathbf{0}$. □

Definición 2.15. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^m$ subconjuntos. Una función $f : A \rightarrow B$ se

llama homeomorfismo si:

1. f es biyectiva
2. f es continua
3. f^{-1} es continua

Teorema 2.1. Sea $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. Si en algún punto $p \in U$ la diferencial $d\varphi_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ resulta invertible, entonces podemos garantizar la existencia de entornos abiertos V de p contenido en U y W de $\varphi(p)$ tales que la restricción $\varphi : V \rightarrow W$ admite una inversa diferenciable $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$.

Llamaremos difeomorfismo entre abiertos V y W a toda aplicación diferenciable $\varphi : V \rightarrow W$ que posea inversa igualmente diferenciable.

Lo que el teorema de la función inversa garantiza que si en un punto $p \in U$ la diferencial $d\varphi_p$ es un isomorfismo, entonces φ es un difeomorfismo en una vecindad de p . En otras palabras, una afirmación sobre la diferencial de φ en un punto implica una afirmación similar sobre el comportamiento de φ en un entorno de dicho punto.

A continuación se enuncia la siguiente definición sobre una atlas coherente, véase DoCarmo [5].

2.3.2. Orientabilidad

El concepto de superficie orientable describe la noción de poder definir un interior y un exterior de la superficie, en cualquier punto p de una superficie suave S , existen dos posibles vectores normales unitarios a la superficie, opuestos entre sí. Sin embargo, queremos que la dirección considerada “hacia afuera” varíe continuamente sobre la superficie regular. Esto nos lleva a la primera definición de orientabilidad.

Definición 2.16. Una superficie regular $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se denomina orientable cuando es posible elegir de manera continua un campo de vectores normales unitarios sobre toda ella. Más precisamente, debe existir una aplicación continua $N : S \rightarrow S^2$ que asigne a cada punto $p \in S$ un vector unitario $N(p)$ ortogonal al plano tangente $T_p S$ en ese punto.

La existencia de dicha aplicación N significa que podemos diferenciar consistentemente entre las dos caras de la superficie sin encontrar contradicciones al

recorrerla. Cuando tal elección es posible, llamamos a N una orientación de la superficie S .

Definición 2.17. Sea S es una superficie suave orientada, un par de vectores (v, w) del plano tangente $T_p S$ se denomina base orientada positivamente, si los vectores forman una base de $T_p S$ y

$$(v \times w) \cdot N(p) > 0.$$

La parametrización $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un conjunto abierto de S también se denomina orientada positivamente si el par ordenado (X_u, X_v) forma una base orientada positivamente del plano tangente de S en $X(u, v)$ para todo $(u, v) \in U$.

En la siguiente proposición se mostrará que toda superficie suave, conexa y orientable cuenta exactamente con dos orientaciones posibles.

Proposición 2.4. Sea S una superficie suave conexa y sean $N_1, N_2 : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos campos normales unitarios diferenciables sobre S . Entonces, ambos campos coinciden en todos los puntos de S o difieren únicamente por el signo, es decir, $N_1 = -N_2$.

Demostración. Sea $p \in S$, debido a que $N_1(p)$ y $N_2(p)$ son vectores unitarios ortogonales al plano tangente de la superficie en p , se deduce que deben coincidir o diferir únicamente por el signo; es decir, $N_1(p) = N_2(p)$ o $N_1(p) = -N_2(p)$.

Consideremos los conjuntos

$$A = \{p \in S | N_1(p) = N_2(p)\}, \quad B = \{p \in S | N_1(p) = -N_2(p)\}$$

Claramente $S = A \cup B$. Como los campos normales N_1 y N_2 son continuos, los conjuntos A y B resultan ser cerrados en S . Como la superficie S es conexa, no puede dividirse en dos subconjuntos disjuntos no vacíos. Por lo tanto, uno de ellos debe coincidir con S , lo cual implica que $N_1(p) = N_2(p)$ o $N_1(p) = -N_2(p)$ en toda la superficie. $\square$

Definición 2.18 (Atlas Coherente). Sea S una superficie regular y sean las parametrizaciones $X : U \rightarrow S$ y $Y : V \rightarrow S$ se dicen compatibles si el cambio de

coordenadas:

$$Y^{-1} \circ X : X^{-1}(W) \rightarrow Y^{-1}(W) \quad (2.8)$$

es un difeomorfismo, donde $W = X(U) \cap Y(V)$. Un atlas coherente de S es una familia de parametrizaciones compatibles dos a dos:

$$\mathcal{A} = \{X_\alpha : U_\alpha \rightarrow S\}_{\alpha \in \Lambda}$$

tal que $S = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha(U_\alpha)$.

Definición 2.19 (Atlas Coherente). Se denomina atlas de una superficie regular S a una familia $\mathcal{A}$ de parametrizaciones cuyas imágenes cubren completamente S . Dicho atlas se llama coherente si satisface la siguiente condición: para cualesquiera parametrizaciones $X, Y \in \mathcal{A}$ y para todo punto $p \in S$ perteneciente a ambas imágenes, el cambio de coordenadas $Y^{-1} \circ X$ tiene determinante jacobiano positivo en $X^{-1}(p)$.

Seguidamente se enuncia la siguiente proposición referente a atlas coherentes y orientación; la demostración correspondiente puede consultarse en Freire [4].

Proposición 2.5. Una superficie suave S es orientable si y sólo si existe sobre S un atlas coherente.

Esta proposición establece que la orientabilidad de una superficie puede caracterizarse mediante la existencia de un atlas coherente. En otras palabras, una superficie es orientable si es posible elegir parametrizaciones cuyas transformaciones de cambio de coordenadas preserven la orientación, lo cual equivale a la existencia de un campo normal unitario continuo sobre toda la superficie.

Definición 2.20 (Superficie Compacta Orientable). Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Se dice que S es compacta si todo cubrimiento abierto de S admite un subcubrimiento finito, o equivalentemente, si S es cerrada y acotada como subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Se dice que S es orientable si existe un campo vectorial normal unitario continuo $N : S \rightarrow S^2$ definido en toda la superficie (Definición 2.16). Una superficie se denomina compacta orientable cuando satisface simultáneamente ambas condiciones.

(Superficie Compacta Orientable). Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Se dice

que S es compacta si todo cubrimiento abierto de S admite un subcubrimiento finito, o equivalentemente, si S es cerrada y acotada como subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Se dice que S es orientable si existe un campo vectorial normal unitario continuo $N : S \rightarrow S^2$ definido en toda la superficie (Definición 2.16). Una superficie se denomina compacta orientable cuando satisface simultáneamente ambas condiciones.

2.3.3. Plano Tangente y Vector Normal

Sea $X(u, v)$, con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, una parametrización de una superficie suave. Si hacemos que las coordenadas u y v dependan diferenciablemente de un parámetro real t perteneciente a cierto intervalo, la composición $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ define una curva diferenciable que evoluciona enteramente sobre la superficie parametrizada por X . Tal curva recibe el nombre de curva trazada en la superficie

La idea de vector tangente a la superficie en un punto surge de manera natural, es cualquier vector que sea tangente a alguna curva contenida en la superficie y que pase por dicho punto. Esta definición captura la idea geométrica de direcciones a lo largo de las cuales podemos movernos sin abandonar la superficie.

Definición 2.21 (Espacio Tangente). Sea $X(u, v)$ una parametrización regular de una superficie, diremos que un vector w en $\mathbb{R}^3$ es tangente a X en el punto $q = (u_0, v_0)$ cuando existe una curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ trazada sobre la superficie, pasando por q en el instante t_0 esto es, $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ tal que $w = \alpha'(t_0)$.

Observemos que los vectores $X_u(u_0, v_0)$ y $X_v(u_0, v_0)$, obtenidos al derivar X respecto a cada coordenada, son automáticamente tangentes a X en (u_0, v_0) . En efecto, corresponden a las velocidades de las curvas coordenadas que se forman al variar una sola coordenada mientras la otra permanece fija.

Definición 2.22. La colección de todos los vectores tangentes a X en el punto $q = (u_0, v_0)$ forma un plano que atraviesa la superficie precisamente en ese punto. Este plano se denomina plano tangente a X en (u_0, v_0) y lo denotamos por $T_q X$ la cual, representa la mejor aproximación lineal a la superficie en las inmediaciones de q .

Observamos que los conceptos de vector tangente y plano tangente se definen en un punto q del dominio de X y no en el punto $p = X(q)$, ya que la superficie parametrizada

X puede tener autointersección. A continuación, veremos que el plano tangente T_qX es el plano de $\mathbb{R}^3$ generado por $X_u(q)$ y $X_v(q)$.

Proposición 2.6. Sea $X(u, v)$ una superficie parametrizada y consideremos un punto $q = (u_0, v_0)$. El plano tangente T_qX coincide exactamente con el subespacio vectorial generado por $X_u(u_0, v_0)$ y $X_v(u_0, v_0)$.

La condición de regularidad garantiza que estos vectores X_u y X_v son linealmente independientes, lo cual confirma que T_qX constituye efectivamente un plano en $\mathbb{R}^3$ con base dada por ambos vectores. Cabe señalar que, en la situación general, X_u y X_v ni forman ángulo recto entre s, ni tienen norma unitaria.

2.4. Primera forma fundamental

Definición 2.23. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular, $\forall p \in U$, una aplicación

$$I_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$$

es la forma cuadrática asociada con la restricción del producto interno canónico de $\mathbb{R}^3$ al plano tangente de S en p , T_pS , es decir:

$$w \mapsto I_p = \langle w, w \rangle = \|w\|^2, \quad w \in T_pS$$

El vector $w \in T_pS$ esta expresado de la siguiente forma $w = aX_u + bX_v$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ lo cual nos genera la siguiente igualdad:

$$I_p(w) = \langle aX_u + bX_v, aX_u + bX_v \rangle = a^2E + 2abF + b^2G \quad (2.9)$$

Nótese que las funciones E , F y G son diferenciables, son llamados coeficientes de la primera forma fundamental. Además, tenemos:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle_p = \|X_u\|_p^2 \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle_p = \langle X_v, X_u \rangle_p \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle_p = \|X_v\|_p^2 \end{aligned}$$

Estas cantidades verifican las propiedades siguientes:

- a) Los coeficientes E y G son estrictamente positivos en todo punto (u, v) , pues ninguno de los vectores X_u y X_v se anula.
- b) La combinación $EG - F^2$ resulta también positiva. Para ver esto, recordemos la identidad:

$$|X_u \times X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2.$$

De aquí se sigue que:

$$EG - F^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0 \quad (2.10)$$

La desigualdad es estricta porque X_u y X_v son linealmente independientes, lo que garantiza que su producto vectorial no desaparece.

Definición 2.24. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ una superficie regular con $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}S$ con $\alpha'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$ entonces:

$$I_p(\alpha'(t)) = (u'(t))^2 \langle X_u, X_u \rangle_p + 2(u'(t))(v'(t)) \langle X_u, X_v \rangle_p + (v'(t))^2 \langle X_v, X_v \rangle_p$$

Proposición 2.7 (Representación Matricial). La matriz de la primera forma fundamental en la base $\{X_u, X_v\}$ es:

$$[I] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Para cualquier vector tangente $v = aX_u + bX_v$ y $w = cX_u + dX_v$:

$$I(v, w) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = Eac + F(ad + bc) + Gbd$$

Proposición 2.8. Propiedades de I

1. I es simétrica: $I(v, w) = I(w, v)$
2. I es bilineal
3. I es definida positiva: $I(v, v) > 0$ para todo $v \neq \mathbf{0}$ en $T_p S$

4. $\det(I) = EG - F^2 > 0$ (por regularidad)

A continuación, veremos que los conceptos de la longitud de una curva es una superficie, ángulo entre vectores tangentes y área de una región de superficie están relacionados con la primera forma cuadrática.

Definición 2.25. Sea $X(u, v)$ una parametrización regular. Si trazamos una curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ sobre la superficie, con t variando en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, podemos calcular la distancia recorrida desde un instante inicial t_0 hasta otro instante t mediante:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| = \int_{t_0}^t \sqrt{(u')^2 E + 2u'v'F + (v')^2 G} dt$$

Esta fórmula expresa la longitud arco.

Definición 2.26. Sean los vectores v y w no nulos a X en el punto $q = (u, v)$, el ángulo θ comprendido entre ellos, donde $0 \leq \theta \leq \pi$, se determina mediante la relación $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \theta$.

Para expresar $\cos \theta$ en términos de la primera forma cuadrática, observamos que

$$v = aX_u + bX_v = X_u + 0X_v$$

$$w = cX_u + dX_v = 0X_u + X_v$$

por lo que el ángulo se expresa de la siguiente forma:

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \frac{Eac + F(ad + bc) + Gbd}{\sqrt{I_q(v) \cdot I_q(w)}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Ahora definimos el concepto de área de regiones de una superficie, utilizando la primera forma cuadrática.

Definición 2.1. Sea S una superficie suave parametrizada por $X(u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si g_{ij} denotan los coeficientes de la primera forma fundamental, es decir,

$$g_{11} = \langle X_u, X_u \rangle, \quad g_{12} = \langle X_u, X_v \rangle, \quad g_{22} = \langle X_v, X_v \rangle,$$

entonces el elemento diferencial de área sobre la superficie está dado por:

$$dA_g = \sqrt{\det(g_{ij})} du dv.$$

Esta expresión permite medir el área sobre la superficie tomando en cuenta la geometría inducida por la parametrización. En particular,

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \|X_u \times X_v\|.$$

por lo que el elemento de área también puede escribirse como

$$dA = \|X_u \times X_v\| du dv$$

Si $R \subset U$, el área de la región correspondiente en la superficie es

$$A(S) = \iint_R \sqrt{\det(g_{ij})} du dv$$

Teorema 2.2 (Área de Regiones). Sea $R \subseteq U$ una región en el dominio de la parametrización $X : U \rightarrow S$. El área de $X(R) \subseteq S$ es:

$$A(X(R)) = \iint_R \|X_u \times X_v\| du dv = \iint_R \sqrt{EG - F^2} du dv$$

La demostración de teorema es inmediato pues solo basta utilizar las relaciones de la ecuación (2.10).

Definición 2.27. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular y tomemos un dominio $D \subset U$ sobre el cual X no presenta autointersecciones en su interior. Para medir el área de la porción de superficie $X(D)$, integramos sobre D la cantidad:

$$A(X(D)) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$$

.

La raíz cuadrada $\sqrt{EG - F^2}$ corresponde al elemento infinitesimal de área,

reflejando cómo se deforma localmente el área al transportar regiones del plano de parámetros hacia la superficie espacial.

2.4.1. Superficies de revolución

Una superficie de revolución nace al hacer girar de una curva plana llamada generatriz, en torno a un eje fijo de $\mathbb{R}^3$ situado en su mismo plano. Este proceso engendra dos familias de curvas características llamadas los meridianos, que corresponden a cada posición de la generatriz, y los paralelos, que son las circunferencias descritas por cada uno de sus puntos.

Proposición 2.9. Sea $\alpha(v) = (f(v), 0, g(v))$, $v \in I \subset \mathbb{R}$, una curva regular tal que $f(v) > 0$. Entonces, la aplicación

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v)), \quad (u, v) \in U$$

donde $v \in I$ y $u \in \mathbb{R}$ es una superficie parametrizada regular.

Demostración. Dado que α es una aplicación diferenciable, entonces las funciones de coordenadas de X son diferenciables, es decir:

$$\begin{aligned} X_u &= (-f(v) \operatorname{sen} u, f(v) \cos u, 0) \\ X_v &= (f'(v) \cos u, f'(v) \operatorname{sen} u, g'(v)) \end{aligned}$$

Son linealmente independientes, porque $|X_u \times X_v|^2 = f^2(v)[(g')^2 + (f')^2] \neq 0$. Dado que α es una curva suave y f es diferente de cero, concluimos que X es una superficie parametrizada suave. $\square$

Definición 2.28. Se denomina superficie de revolución de la curva α al rededor del eje $0z$, a la aplicación:

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v)), \quad (u, v) \in U$$

La curva α está contenida en el plano $x0z$, y el eje de rotación $0z$ no la interseca,

puesto que $f(v) \neq 0$. Las curvas de coordenadas $X(u_0, v)$ y $X(u, v_0)$ son los paralelos y meridianos de la superficie de rotación.

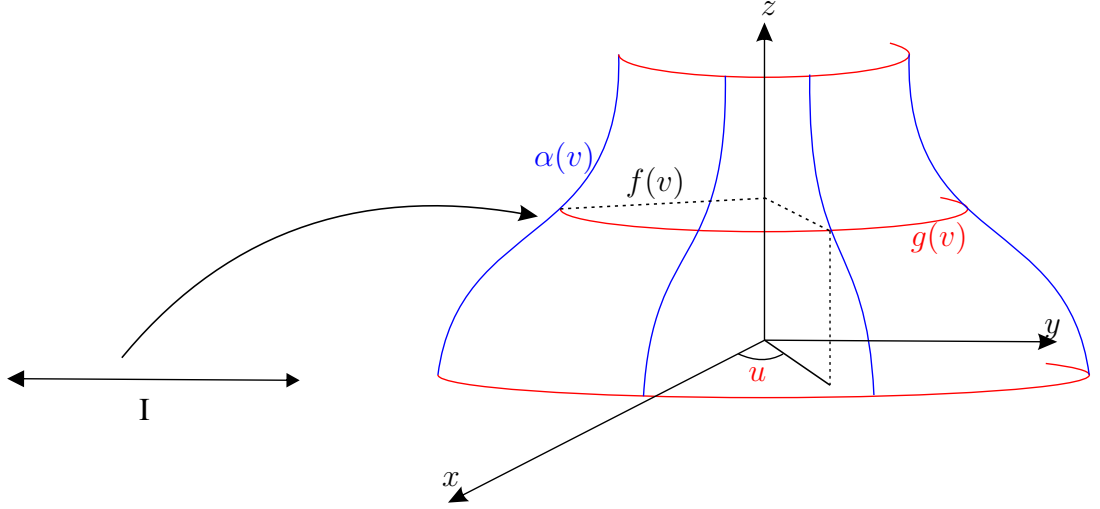


Figura 3. Superficie de revolución generada por $\alpha(v)$

Definición 2.29. Sea $X : U = (-\pi, \pi) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización de una superficie de revolución generada por la curva α , el área de la superficie de revolución sobre una región U está dada por:

$$A(R) = \iint_R \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = 2\pi \int_a^b f(v) \, dv \quad (2.11)$$

Para justificar la definición (2.29) partimos encontrando las derivadas X_u y X_v en $X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$ y calculamos los coeficientes de la primera forma, esto es $E = (f(v))^2$, $F = 0$ y $G = [f(v)^2 + g(v)^2] = \|\alpha'(v)\|^2 = 1$, esta última resulta de que α está parametrizada por longitud de arco.

Dado $a < b \in I$, sea $R = X(\Omega) \subset S$, en que $\Omega = \langle -\pi, \pi \rangle \times [a, b] \subset U$. Bajo

estas condiciones R es medible, reemplazando en la ecuación (2.11) obtenemos:

$$\begin{aligned} A(R) &= \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_{\Omega} \sqrt{(f(v))^2(1) - (0)^2} du dv \\ A(R) &= \int_{-\pi}^{\pi} du \int_a^b f(v) dv \\ A(R) &= 2\pi \int_a^b f(v) dv \end{aligned}$$

este resultado es conocido como el teorema de "Pappus"

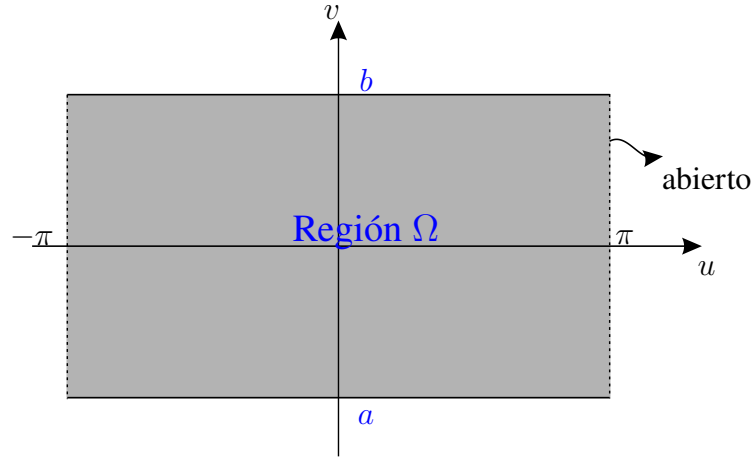


Figura 4. Área de la superficie de revolución

Para ciertas curvas que no están parametrizadas por la longitud de arco, el área de dicha superficie es:

$$A(R) = 2\pi \int_a^b f(v) \|\alpha'(v)\| dv \quad (2.12)$$

Considerando la parametrización del toro $X(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v)$ con $0 < u, v < 2\pi$, y $f(v) = R + r \cos v$ y $\|\alpha'(v)\| = r$, el área es:

$$A(Toro) = 2\pi \int_0^{2\pi} (R + r \cos v) r dv = 2\pi r [Rv + r \sin v]_0^{2\pi} = 4\pi^2 R r \quad (2.13)$$

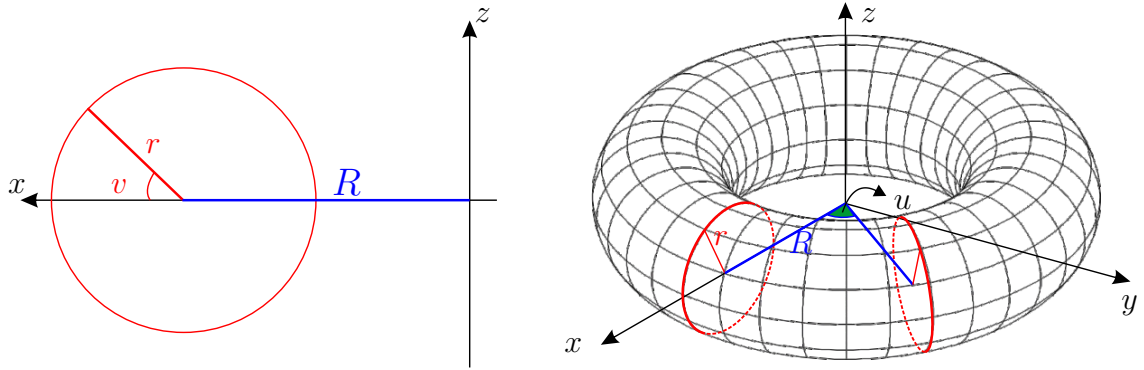


Figura 5. Área de la superficie de revolución del toro

2.5. La geometría de la aplicación de Gauss

Definición 2.30. Un vector en $\mathbb{R}^3$ se dice normal a la superficie X en el punto $q = (u_0, v_0)$ cuando es perpendicular a todo vector tangente en ese punto, es decir, cuando es ortogonal al plano tangente $T_q X$.

Para cada punto q de la superficie, el plano tangente $T_q X$ admite una única dirección perpendicular, determinando así dos vectores unitarios normales que difieren únicamente en signo. Adoptamos como elección canónica el vector:

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q)$$

Cuando X actúa sobre un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, hacer recorrer las coordenadas (u, v) por todo U genera un campo vectorial diferenciable $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, al cual Gauss denominó aplicación normal. Su fórmula explícita viene dada por:

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v)$$

Como cada valor $N(u, v)$ tiene módulo unitario, esta aplicación envía puntos de U hacia la esfera de radio uno situada en el origen. Geométricamente, N registra cómo varía la orientación de los planos tangentes al desplazarnos sobre la superficie.

Así, tenemos una función diferenciable $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asocia a cada $q \in X(U)$ un vector normal unitario $N(q)$.

Definición 2.31 (Aplicación de Gauss). Sea S una superficie suave orientable en $\mathbb{R}^3$. La aplicación de Gauss asigna a cada punto p de S el vector unitario $N(p)$ perpendicular a la superficie en ese punto. Esta asignación define una función diferenciable:

$$N : S \rightarrow S^2$$

Dado que cada vector normal tiene longitud uno, todos los valores de N caen necesariamente sobre la esfera unitaria $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

En otras palabras, al recorrer la superficie S , los vectores normales van barriendo puntos sobre la esfera. Esta correspondencia entre puntos de la superficie y puntos de la esfera captura información fundamental sobre cómo se curva S en el espacio.

Observación 2.5 (Construcción Explícita). Si $\varphi : U \rightarrow S$ es una parametrización local con $\varphi(u, v) = p$, entonces:

$$N(p) = N(u, v) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

Más explícitamente:

$$N(u, v) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Propiedades 2.1 (Propiedades Fundamentales de N). Para todo $p \in S$:

1. $\|N(p)\| = 1$ (es unitario)
2. $N(p) \perp T_p S$ (es perpendicular al plano tangente)
3. $\langle N(p), v \rangle = 0$ para todo $v \in T_p S$
4. $N(p)$ apunta hacia un lado consistente de S (determinado por la orientación)

Definición 2.32. Sea p un punto de la superficie S y consideremos la aplicación de Gauss $N : S \rightarrow S^2$. La diferencial de N en p es una transformación lineal:

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2.$$

Ahora bien, el plano tangente a la esfera en $N(p)$ resulta ser paralelo al plano tangente de S en p , ya que ambos son perpendiculares al mismo vector $N(p)$. Esto nos

permite identificar ambos espacios tangentes y escribir:

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$$

Para calcular $dN_p(v)$ sobre un vector tangente v cualquiera, tomamos una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ que pase por p en el instante $t = 0$ con velocidad $\alpha'(0) = v$, y definimos:

$$dN_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(\alpha(t))$$

En esencia, dN_p mide cómo cambia la dirección del vector normal cuando nos desplazamos por la superficie en la dirección v .

Proposición 2.10. La diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ de la aplicación de Gauss es un operador lineal autoadjunto, es decir, para todo $v, w \in T_p S$ se cumple:

$$\langle dN_p(v), w \rangle = \langle v, dN_p(w) \rangle.$$

Demostración. Sea $X(u, v)$ una parametrización de S en torno a p , compatible con la orientación dada por N . Como el vector normal N es perpendicular a la superficie en todo punto, se tiene:

$$\langle N, X_u \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle N, X_v \rangle = 0.$$

Derivando la primera igualdad respecto a v y la segunda respecto a u , obtenemos respectivamente:

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0,$$

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0.$$

Como X es de clase C^2 , el teorema de Schwarz garantiza que $X_{uv} = X_{vu}$, de modo que $\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle$. Restando ambas expresiones se obtiene:

$$\langle N_v, X_u \rangle = \langle N_u, X_v \rangle.$$

Dado que cualquier vector tangente $v \in T_p S$ se escribe como combinación lineal de X_u y

X_v , y que dN_p es lineal, la igualdad anterior se extiende a todo par de vectores tangentes:

$$\langle dN_p(v), w \rangle = \langle v, dN_p(w) \rangle, \quad \forall v, w \in T_p S.$$

Esto completa la demostración. $\square$

Proposición 2.11 (Identificación de Espacios Tangentes). Como $N(p) \in S^2$ es el vector normal en p , tenemos:

$$T_{N(p)} S^2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle w, N(p) \rangle = 0\} = T_p S$$

Por tanto, podemos ver dN_p como un operador lineal en $T_p S$:

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$$

Demostración. Sea $w \in T_{N(p)} S^2$. Como $N(p) \in S^2$, el espacio tangente a S^2 en $N(p)$ es el plano perpendicular a $N(p)$:

$$T_{N(p)} S^2 = \{w : \langle w, N(p) \rangle = 0\}$$

Pero por definición, $N(p) \perp T_p S$, luego:

$$T_p S = \{v : \langle v, N(p) \rangle = 0\}$$

Por tanto, $T_{N(p)} S^2 = T_p S$ como subespacios de $\mathbb{R}^3$. $\square$

Como $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ es una transformación lineal autoadjunta, podemos construir a partir de ella una forma cuadrática Q sobre $T_p(S)$, definida por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$ para cada $v \in T_p(S)$.

Para entender qué significa geoméricamente esta forma cuadrática, conviene introducir primero algunos conceptos previos. Anticipándonos a lo que viene, trabajaremos en realidad con $-Q$ en lugar de Q , por razones que resultarán naturales más

adelante.

2.5.1. Segunda Forma Fundamental

El desarrollo de las propiedades geométricas locales de una superficie regular depende de dos formas cuadráticas, la primera de las cuales fue definida en la sección anterior. La segunda se presentará en esta sección y veremos que está relacionada con el estudio de las curvaturas de las curvas en la superficie.

Observación 2.6. La primera forma mide propiedades intrínsecas de la superficie (longitudes, ángulos, áreas). La segunda forma mide cómo la superficie se curva en el espacio ambiente $\mathbb{R}^3$, es decir, mide la desviación de la superficie respecto a su plano tangente.

Definición 2.33 (Operador de forma). Sea S una superficie suave orientada y sea $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ la diferencial de la aplicación de Gauss en p . Se define el operador de forma (también llamado operador de Weingarten) como la transformación lineal:

$$\mathcal{S} : T_p S \longrightarrow T_p S, \quad \mathcal{S}(v) = -dN_p(v).$$

El operador de forma $\mathcal{S}$ hereda la autoadjunción de dN_p (Proposición 2.10), por lo que satisface:

$$\langle \mathcal{S}(v), w \rangle = \langle v, \mathcal{S}(w) \rangle, \quad \forall v, w \in T_p S.$$

Definición 2.34 (Segunda Forma Fundamental). Sea S una superficie suave orientable con campo normal unitario N . La segunda forma cuadrática de S en un punto p , respecto a la orientación dada por N , es la forma cuadrática sobre $T_p S$ definida mediante:

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle \quad v \in T_p S.$$

Para comprender el significado geométrico de esta expresión, consideremos un vector tangente $w \in T_p S$ y tomemos una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V \subset S$ parametrizada por longitud de arco que pase por p con velocidad w , es decir, $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$.

Como el vector normal N es siempre perpendicular a las direcciones tangentes, tenemos $\langle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0$ para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Al derivar esta identidad respecto a s y evaluar en $s = 0$, obtenemos:

$$\langle -dN_p w, w \rangle = \langle N(p), \alpha''(0) \rangle$$

Esta igualdad revela que la segunda forma fundamental relaciona la componente normal de la aceleración de curvas trazadas sobre la superficie.

2.5.2. Coeficientes de la segunda forma fundamental

Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización de la superficie S que es compatible con la orientación N de S , es decir,

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

y sea $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ una curva parametrizada en S , con $\alpha(0) = p$, de donde

$$\alpha'(t) = X_u u' + X_v v' \quad (2.14)$$

y la diferencial de la aplicación de Gauss

$$dN_{(p)}(\alpha') = N_u u' + N_v v' \quad (2.15)$$

como $N_u, N_v \in T_p S$, entonces esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.35 (Ecuaciones de Weingarten). Las ecuaciones de Weingarten expresan las derivadas del vector normal unitario N en términos de los vectores tangenciales de una superficie regular. En una base $\{X_u, X_v\}$ del plano tangente, se escriben como:

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v \\ N_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v \end{aligned} \quad (2.16)$$

Reemplazando (2.16) en (2.15) tenemos,

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha') &= (a_{11}X_u + a_{21}X_v)u' + (a_{12}X_u + a_{22}X_v)v', \\ dN_p(\alpha') &= a_{11}X_uu' + a_{21}X_vu' + a_{12}X_uv' + a_{22}X_vv', \\ dN_p(\alpha') &= (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v. \end{aligned}$$

Escribiendo matricialmente, se tiene,

$$dN_p \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}u' + a_{12}v' \\ a_{21}u' + a_{22}v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$$

donde, $[dN_p]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es la matriz de dN_p en la base $B = \{X_u, X_v\}$ de $T_p(S)$. Por simplicidad escribimos así,

$$dN_p \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Por otra parte, la representación de la segunda forma fundamental en la base $\{X_u, X_v\}$ es,

$$\begin{aligned} II_p(v) &= -\langle dN_p(v), v \rangle, \text{ para todo } v \in T_p(S) \\ II_p(\alpha') &= -\langle dN_p(\alpha'), \alpha' \rangle \end{aligned}$$

De (2.14) y (2.15) tenemos,

$$II_p(\alpha') = -\langle N_uu' + N_vv', X_uu' + X_vv' \rangle,$$

como el producto interno es bilineal, tenemos,

$$II_p(\alpha') = -\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 - \langle N_u, X_v \rangle u'v' - \langle N_v, X_u \rangle v'u' - \langle N_v, X_v \rangle (v')^2$$

Además, sabemos que,

$$\langle N, X_u \rangle = 0 \text{ y } \langle N, X_v \rangle = 0 \quad (2.17)$$

derivando ambas igualdades de (2.17) respecto a u y v obtenemos,

$$\begin{aligned}\langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle &= 0 \Rightarrow \langle N, X_{uu} \rangle = -\langle N_u, X_u \rangle, \\ \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle &= 0 \Rightarrow \langle N, X_{uv} \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle, \\ \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle &= 0 \Rightarrow \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle, \\ \langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle &= 0 \Rightarrow \langle N, X_{vv} \rangle = -\langle N_v, X_v \rangle.\end{aligned}$$

Sabemos que X es de clase C^2 y por el teorema de Schwarz, tenemos que,

$$X_{uv} = X_{vu}$$

Luego, reemplazando se tiene,

$$\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle \text{ entonces } \langle N_v, X_u \rangle = \langle N_u, X_v \rangle, \langle N_v, X_u \rangle = \langle N_u, X_v \rangle$$

$$II_p(\alpha') = -\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 - 2\langle N_u, X_v \rangle u'v' - \langle N_v, X_v \rangle (v')^2$$

a continuación, denotamos

$$\begin{aligned}e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle, \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle,\end{aligned}$$

tenemos,

$$II_p(\alpha') = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2$$

por lo tanto, la segunda forma fundamental en coordenadas locales es,

$$II_p(\alpha') = ea^2 + 2fab + gb^2$$

donde, las funciones $e, f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son llamados los coeficientes de la segunda forma fundamental para X en la base $\{X_u, X_v\}$ del plano tangente $T_p(S)$.

Curvatura Gaussiana en términos de los coeficientes de la primera y segunda forma

fundamental se relacionan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 -e &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\
 -f &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11}F + a_{12}G, \\
 -f &= \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\
 -g &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G,
 \end{aligned}$$

Si escribimos el sistema de encima en su forma matricial obtenemos,

$$- \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

Como, $EG - F^2 > 0$ significa que existe la matriz inversa de la matriz de coeficientes de la primera forma fundamental, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \\
 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} &= - \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} &= - \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & -eF + fE \\ fG - gF & -fF + gE \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ \frac{gF - fG}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

igualando componente a componente, obtenemos las componentes de la matriz de la dN_p , así,

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2} \tag{2.19}$$

Como la curvatura Gaussiana es:

$$K(p) = \det(dN_p) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$K(p) = \frac{(fF - eG)(fF - gE) - (gF - fG)(eF - fE)}{(EG - F^2)^2}$$

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(q)$$

Definición 2.36. Sea $X(u, v)$ una parametrización regular y fijemos un punto p . Para cada dirección tangente no nula w en p , podemos medir cuánto se dobla la superficie en esa dirección mediante el número:

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}$$

Este valor, llamado curvatura normal de w , compara la segunda forma fundamental (que captura cómo varía el plano tangente) con la primera (que mide longitudes). En esencia, $k_n(w)$ nos dice qué tan rápido se aleja la superficie de su plano tangente cuando nos desplazamos en la dirección w .

Proposición 2.12. Sea S una superficie suave orientada con vector normal unitario N , y sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva regular de clase C^2 parametrizada por longitud de arco, con $\alpha(0) = p$. Entonces la curvatura normal de α en p satisface:

$$\kappa_n = II_p(\alpha'(0), \alpha'(0)),$$

donde $\alpha'(0) \in T_p S$ es el vector tangente unitario a α en p .

Demostración. Como α está parametrizada por longitud de arco, se tiene $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo s , lo que implica:

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1.$$

Derivando esta igualdad respecto a s obtenemos:

$$2\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0,$$

es decir, el vector de curvatura $\alpha''(s)$ es perpendicular al vector tangente $\alpha'(s)$ en todo punto.

Por otro lado, como $\alpha(s)$ es una curva trazada sobre S , el vector normal a la superficie N es perpendicular a todo vector tangente. En particular:

$$\langle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0 \quad \forall s.$$

Derivando esta igualdad respecto a s y evaluando en $s = 0$:

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \langle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0,$$

lo que por la regla del producto da:

$$\left\langle \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} N(\alpha(s)), \alpha'(0) \right\rangle + \langle N(p), \alpha''(0) \rangle = 0.$$

El primer término es precisamente $\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle$, de modo que:

$$\langle N(p), \alpha''(0) \rangle = -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = II_p(\alpha'(0), \alpha'(0)),$$

donde en el último paso se usó la definición de la segunda forma fundamental $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$.

Ahora bien, por la Definición (2.34), la curvatura normal de α en p es la componente del vector curvatura $\alpha''(0)$ en la dirección del vector normal $N(p)$:

$$\kappa_n = \langle \alpha''(0), N(p) \rangle.$$

Combinando ambas expresiones se concluye:

$$\kappa_n = \langle N(p), \alpha''(0) \rangle = II_p(\alpha'(0), \alpha'(0)).$$

Esto completa la demostración. □

Corolario 2.1 (Independencia de la curva). La curvatura normal κ_n en un punto $p \in S$

y en una dirección tangente $v \in T_p S$ con $\|v\| = 1$ no depende de la curva elegida, sino únicamente de la dirección v . En efecto:

$$\kappa_n(v) = \Pi_p(v, v).$$

Todas las curvas regulares que pasan por p con la misma dirección tangente v tienen la misma curvatura normal en ese punto.

Definición 2.37. Consideremos una curva suave C incluida en la superficie S y que pasa por un punto $p \in S$. Sea κ la curvatura de C en p , n su vector normal principal, y N el vector normal a S en ese mismo punto. El ángulo θ formado entre estos dos vectores normales satisface $\cos \theta = \langle n, N \rangle$. Llamamos curvatura normal de C en p al producto:

$$\kappa_n = \kappa \cos \theta$$

Este número mide la parte de la curvatura de C que se debe a la curvatura de la superficie S , proyectando el vector curvatura de la curva sobre la dirección normal a la superficie.

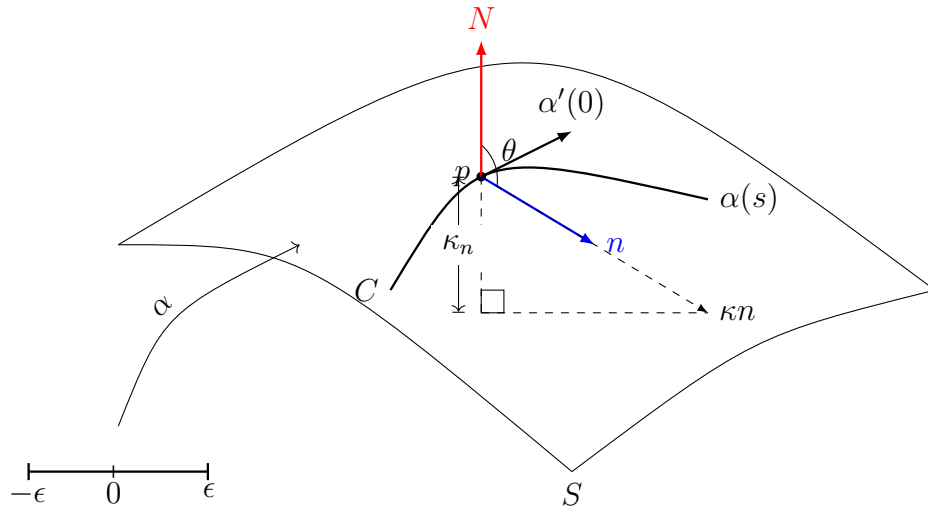


Figura 6. κ_n es curvatura normal de C en p

La curvatura normal κ_n representa la componente del vector curvatura κn en la dirección del vector normal N a la superficie S en el punto p .

Por otra parte, la diferencial de la aplicación de Gauss dN_p posee una estructura

notable. En cada punto $p \in S$, podemos encontrar una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ del plano tangente $T_p S$ formada por direcciones principales, de modo que:

$$dN_p(e_1) = -\kappa_1 e_1 \text{ y } dN_p(e_2) = -\kappa_2 e_2$$

donde $\kappa_1 \geq \kappa_2$ son las curvaturas principales. Estas direcciones especiales e_1 y e_2 son aquellas en las que la curvatura normal alcanza sus valores extremos.

Las direcciones tangentes en las que se alcanzan estos extremos dadas precisamente por los vectores propios e_1 y e_2 de la aplicación dN_p se llaman direcciones principales en p . Así, las direcciones principales marcan los caminos a lo largo de los cuales la superficie se curva con mayor y menor intensidad.

Definición 2.38. Sea p un punto de la superficie regular S y consideremos la diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ de la aplicación de Gauss. El determinante de este operador lineal se denomina curvatura gaussiana (o curvatura de Gauss) de S en p , y se denota por K . La curvatura media de S en p , denotada por H , se define como el negativo de la mitad de la traza de dN_p .

Observemos que si $\{e_1, e_2\}$ es una base de direcciones principales con curvaturas principales κ_1 y κ_2 , entonces:

$$K = \kappa_1 \kappa_2, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

Así, la curvatura gaussiana mide el producto de las curvaturas extremas, mientras que la curvatura media captura su promedio.

En un cambio de orientación de la superficie, el determinante no cambia y la traza cambia de signo, es decir, en un cambio de orientación la curvatura gaussiana no cambia y la curvatura media cambia de signo.

2.5.3. Relación entre Forma I y Forma II

Teorema 2.3 (Curvaturas Principales). El operador de forma $S : T_p S \rightarrow T_p S$ es autoadjunto y por tanto diagonalizable. Sus valores propios κ_1, κ_2 se llaman curvaturas principales, y los vectores propios correspondientes se llaman direcciones principales.

Definición 2.39. La curvatura de Gauss es en términos de las formas fundamentales es:

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\det(II)}{\det(I)}$$

Definición 2.40. La curvatura media es:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

Consideremos la superficie paramétrica del toro dada por $X(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v)$, procedemos a calcular las curvaturas de gauss y media, para esto empezamos derivando $X(u, v)$, esto es:

$$X_u = (-(R + r \cos v) \sin u, (R + r \cos v) \cos u, 0)$$

$$X_v = (-r \sin v \cos u, r \sin v \sin u, r \cos v)$$

seguidamente tenemos los coeficientes de la primera forma, esto es:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = (R + r \cos v)^2, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = 0 \quad \text{y} \quad G = \langle X_v, X_v \rangle = r^2$$

Determinamos explícitamente $X_u \times X_v$ para encontrar N , esto es:

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -(R + r \cos v) \sin u & (R + r \cos v) \cos u & 0 \\ -r \sin v \cos u & -r \sin v \sin u & r \cos v \end{vmatrix}$$

$$X_u \times X_v = r(R + r \cos v)(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$$

$$\|X_u \times X_v\| = r(R + r \cos v) \quad \text{y} \quad N = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$$

Para encontrar los coeficientes de la segunda forma, obtenemos las segundas

derivadas, esto es:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (-(R + r \cos v) \cos u, -(R + r \cos v) \sin u, 0) \\ X_{uv} &= (r \sin v \cos u, -r \sin v \sin u, 0) \\ X_{vv} &= (-r \cos v \cos u, -r \cos v \sin u, -r \sin v) \end{aligned}$$

y los coeficientes de la Segunda Forma Fundamental del toro son:

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = -(R + r \cos v) \cos v \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = -r \end{aligned}$$

por lo tanto, la curvatura de gauss es:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(-(R + r \cos v) \cos v)(-r)}{(R + r \cos v)^2 \cdot r^2} = \frac{\cos v}{r(R + r \cos v)} \quad (2.20)$$

y la curvatura Media es:

$$\begin{aligned} H &= \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{-(R + r \cos v) \cos v \cdot r^2 + (-r)(R + r \cos v)^2}{2r^2(R + r \cos v)^2} \\ &= \frac{-(R + r \cos v) [r^2 \cos v + r(R + r \cos v)]}{2r^2(R + r \cos v)^2} \\ &= \frac{-[r \cos v + (R + r \cos v)]}{2r(R + r \cos v)} \\ H &= \frac{-(R + 2r \cos v)}{2r(R + r \cos v)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Proposición 2.13 (Invariancia). K y H son independientes de la parametrización elegida (son invariantes geométricas).

Teorema 2.4 (Ecuación Característica). Las curvaturas principales son las raíces de:

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0$$

$$\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

Definición 2.41. Un punto de una superficie es llamado

1. Elíptico si $\det(dN_p) > 0$ (κ_1, κ_2 tienen el mismo signo)
2. Hiperbólico si $\det(dN_p) < 0$ (κ_1, κ_2 tienen signos opuestos)
3. Parabólico si $\det(dN_p) = 0$, con $dN_p \neq 0$ (al menos una curvatura principal es cero)
4. Plano si $dN_p = 0$

2.6. Operador de Laplace-Beltrami y superficies de tipo finito

En esta sección se presentan los fundamentos teóricos necesarios para el estudio del operador de Laplace-Beltrami asociado a una forma fundamental y la clasificación de superficies de tipo finito según la teoría introducida por B.-Y. Chen. Estos conceptos constituyen la base conceptual para las aplicaciones desarrollaran más adelante.

2.6.1. Derivada covariante y parámetros diferenciales de Beltrami

Definición 2.42. Sea S una superficie regular de clase C^k ($k \geq 3$) en $\mathbb{R}^3$, referida a coordenadas locales (u^1, u^2) , y sea J una forma fundamental de S con coeficientes (g_{ij}) . Se denomina tensor inverso de (g_{ij}) a la matriz (g^{ij}) que satisface:

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$$

donde δ_j^i es la delta de Kronecker. La existencia de (g^{ij}) está garantizada por la condición de regularidad de S , que asegura $\det(g_{ij}) > 0$ en todo punto. Véase B-Y Chen [3].

Definición 2.43. Sea S una superficie regular con forma fundamental $J = (g_{ij})$ y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. El gradiente de f respecto a la métrica J se define como el campo vectorial tangente $\text{grad}^J f$ que satisface:

$$\langle \text{grad}^J f, v \rangle_J = df(v), \quad \forall v \in T_p S$$

En coordenadas locales (u^1, u^2) : $\text{grad}^J f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \partial_j$ donde (g^{ij}) es el tensor inverso de (g_{ij}) . Véase Do Carmo [5] y Chen [3].

Definición 2.44. Sea S una superficie regular orientable con forma fundamental $J = (g)$ y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable. El operador de Laplace-Beltrami (o laplaciano) de f respecto a J se define por:

$$\Delta^J f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^j} \right)$$

donde $g = \det(g_{ij})$. Este operador generaliza el laplaciano clásico $\partial^2 \partial x^2 + \partial^2 \partial y^2$ al contexto de superficies con métrica no euclidiana. Véase Huck [11].

Definición 2.45. Sea S una superficie regular con forma fundamental $J = (g_{ij})$ y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. La derivada covariante de f en la dirección u^i se define como:

$$f_i := \frac{\partial f}{\partial u^i}$$

Para un campo vectorial tangente V sobre S , la derivada covariante $\nabla_i^J V$ incorpora la corrección debida a la curvatura de la superficie mediante los símbolos de Christoffel asociados a la métrica g_{ij} . Véase Huck [11].

Definición 2.46. Sean $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones suficientemente diferenciables sobre S . El primer parámetro diferencial de Beltrami con respecto a la forma fundamental J de S se define por:

$$\nabla^J(f, g) := g^{ij} f_i g_j$$

donde (g^{ij}) denota el tensor inverso de los coeficientes de J . Esta expresión generaliza el gradiente euclidiano al contexto de una superficie con métrica inducida por J . Véase Huck [11].

Observación 2.1. Cuando $J = I$ es la primera forma fundamental, el primer parámetro diferencial de Beltrami coincide con el producto interno del gradiente intrínseco de f con el de g sobre la superficie S .

Definición 2.47. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable. El segundo parámetro diferencial de Beltrami, también llamado operador de Laplace-Beltrami con

respecto a la forma fundamental J , se define por:

$$\Delta^J f := -g^{ij} \nabla_i^J f_j$$

donde ∇_i^J denota la derivada covariante en la dirección u^i correspondiente a la forma fundamental J . Este operador actúa sobre funciones escalares definidas sobre S y generaliza el laplaciano euclidiano al contexto de superficies con métrica g_{ij} .

2.6.2. Operador de Laplace-Beltrami asociado a la primera forma fundamental

Definición 2.48. Sea S una superficie regular orientable en $\mathbb{R}^3$ con primera forma fundamental $I = g_{ij} du^i dw^j$. El operador de Laplace-Beltrami asociado a I , denotado Δ^I , es el operador diferencial de segundo orden definido para funciones $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\Delta^I f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial w^j} \right)$$

donde $g = \det(g_{ij}) = EG - F^2$.

Observación 2.2. En coordenadas locales (u, v) con $g_{11} = E$, $g_{12} = F$, $g_{22} = G$, el operador Δ^I generaliza el laplaciano clásico $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ al caso de superficies con métrica no euclidiana.

El siguiente resultado fundamental vincula el operador Δ^I con la geometría extrínseca de la superficie y constituye el punto de partida de la teoría de tipo finito de Chen.

Proposición 2.14. Sea S una superficie regular orientable en $\mathbb{R}^3$ con vector de posición $X = X(u, v)$ y curvatura media H . Entonces:

$$\Delta^I X = -2H N$$

donde N es el campo normal unitario a S .

Demostración. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización local de S . Calculamos Δ^I

aplicado a cada componente del vector de posición X . En coordenadas locales:

$$\Delta^I X = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial X}{\partial u^j} \right)$$

Desarrollando la derivada y usando las ecuaciones de Gauss para las segundas derivadas de X , cada componente de $\Delta^I X$ se expresa en términos de los símbolos de Christoffel y los coeficientes de la segunda forma fundamental. Agrupando los términos normales a la superficie y usando la fórmula de la curvatura media:

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

se obtiene que la componente tangencial de $\Delta^I X$ se anula por las ecuaciones de Gauss, y la componente normal satisface:

$$\Delta^I X = -2H N$$

completando la demostración. □

Corolario 2.2. De la proposición anterior se deducen inmediatamente los dos hechos siguientes:

1. S es una superficie mínima si y solo si $\Delta^I X = 0$, es decir, si y solo si $H = 0$ en todo punto de S .
2. S está contenida en una esfera si y solo si H es constante no nula, lo que equivale a que todas las funciones coordenadas de X sean funciones propias de Δ^I con un valor propio fijo no nulo.

2.6.3. Funciones propias y superficies de tipo Chen finito

Definición 2.49. Sea Δ^J el operador de Laplace-Beltrami asociado a una forma fundamental J de S . Una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina función propia de Δ^J con valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ si satisface:

$$\Delta^J f = \lambda f$$

El conjunto de todos los valores propios de Δ^J forma el espectro del operador.

Observación 2.3. Para superficies compactas orientables, el operador Δ^I es autoadjunto respecto al producto interno $L^2(S)$, lo que garantiza que sus valores propios son reales y que las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales. Esta propiedad se extiende naturalmente al operador Δ^{III} cuando la tercera forma fundamental es definida positiva.

Definición 2.50. Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ con vector de posición $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se dice que S es una inmersión de tipo finito si sus funciones coordenadas x^1, x^2, x^3 pueden expresarse como suma finita de funciones propias del operador de Laplace-Beltrami Δ^I , es decir, si existen funciones $f_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ y valores propios $\lambda_i \in \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, k$, tales que:

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^k f_i$$

donde X_0 es un vector constante y $\Delta^I f_i = \lambda_i f_i$ para cada $i = 1, \dots, k$. En tal caso se dice que S es de tipo k .

Observación 2.4. En términos del operador Δ^I , una superficie S es de tipo finito k si y solo si existen constantes reales $c_1, \dots, c_k$ tales que el vector de posición X satisface la ecuación polinomial:

$$(\Delta^I)^{k+1} X + c_1 (\Delta^I)^k X + \dots + c_k \Delta^I X = 0$$

Esta caracterización es la que se emplea en las demostraciones del Capítulo IV.

Proposición 2.15. Del Corolario anterior y la Definición de tipo finito se obtienen las siguientes caracterizaciones:

1. S es mínima si y solo si S es de tipo nulo 1, es decir, $\Delta^I X = 0$.
2. S está contenida en una esfera si y solo si S es de tipo 1, es decir, $\Delta^I X = \lambda X$ para algún $\lambda \neq 0$.

Observación 2.5. La noción de tipo finito introducida por Chen puede extenderse de manera natural a cualquier forma fundamental que sea definida positiva y actúe como métrica sobre S . En particular, dado que la tercera forma fundamental III es una forma bilineal simétrica definida positiva (como se demostrará en el Capítulo IV), es posible

definir el operador de Laplace-Beltrami Δ^{III} asociado a III y estudiar qué superficies son de tipo Chen finito respecto a esta nueva métrica. Esta extensión constituye el objeto de estudio de la sección 4.2.2, donde se demuestra que las únicas superficies cuádricas de tipo Chen finito respecto a Δ^{III} son los helicoides y las esferas.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1. Tipo y diseño de la investigación

El presente trabajo se clasifica como una investigación teórica, matemática formal y analítica-deductiva. De manera más precisa, se trata de una investigación teórica basada en demostraciones matemáticas dentro del campo de la geometría diferencial de superficies.

Esta clasificación responde al propósito central del trabajo, que no consiste en recoger datos ni realizar experimentos, sino en desarrollar y demostrar, de forma rigurosa, las propiedades geométricas y algebraicas de la Tercera Forma Fundamental. Para lograr esto se utilizan herramientas del análisis matemático y de la geometría diferencial de superficies.

El conocimiento que se construye parte de definiciones claras, proposiciones formales y razonamientos lógicos encadenados de manera coherente. El carácter deductivo del trabajo se expresa en el hecho de tomar resultados ya establecidos en la teoría clásica de superficies y, a partir de ellos, derivar nuevos resultados relacionados con la Tercera Forma Fundamental. La parte demostrativa del trabajo consiste en presentar pruebas matemáticas que respaldan cada uno de los resultados obtenidos, asegurando el rigor del trabajo dentro del campo de la geometría diferencial.

3.2. Método

El método utilizado es el método deductivo, que es el procedimiento natural de la matemática pura. Este método consiste en partir de definiciones y resultados ya conocidos para llegar, mediante razonamientos lógicos, a nuevas conclusiones y relaciones matemáticas.

En este trabajo el método se aplica de la siguiente manera: se parte de las definiciones y propiedades conocidas de las superficies regulares, la aplicación de Gauss y las dos primeras formas fundamentales. A partir de ahí, utilizando las ecuaciones de Weingarten, se deducen los coeficientes de la Tercera Forma Fundamental y se demuestra su relación con las otras dos formas. Cada resultado que se afirma va acompañado de su

demostración matemática correspondiente.

3.3. Diseño

El diseño de la investigación es de tipo documental y no experimental. No se realizan experimentos ni se recogen datos del mundo real. El trabajo se apoya en la revisión y el análisis de la teoría matemática existente sobre geometría diferencial, con el objetivo de construir una exposición ordenada, rigurosa y completa de la Tercera Forma Fundamental.

El trabajo sigue una secuencia ordenada que avanza de lo más básico a lo más complejo. Primero se establecen los fundamentos teóricos necesarios, luego se define y calcula la Tercera Forma Fundamental, después se demuestra su relación con las otras dos formas, y finalmente se verifican los resultados en superficies concretas como la esfera, el paraboloides elíptico y la silla de montar.

3.4. Objeto de estudio

El objeto de estudio es la Tercera Forma Fundamental de superficies regulares en el espacio $\mathbb{R}^3$. Esta forma se define a partir del producto escalar de las diferenciales del vector normal unitario de la superficie, y se expresa como:

$$III = \langle dN, dN \rangle$$

donde N es el campo vectorial normal unitario a la superficie y dN es su diferencial.

El estudio se centra en tres aspectos concretos. El primero es demostrar formalmente que la Tercera Forma Fundamental es una forma bilineal simétrica y definida positiva, capaz de describir la geometría exterior de las superficies regulares. El segundo es calcular de manera explícita sus coeficientes $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, mostrando que pueden expresarse en términos de los coeficientes de las dos primeras formas fundamentales utilizando las ecuaciones de Weingarten. El tercero es establecer la relación algebraica:

$$III = 2H II - K I$$

donde H es la curvatura media y K es la curvatura gaussiana de la superficie, y verificar

que esta relación se cumple para toda superficie regular en $\mathbb{R}^3$.

3.5. Procedimiento

El desarrollo de la investigación se llevó a cabo en las siguientes etapas:

Revisión bibliográfica

Se revisaron textos clásicos y actuales sobre geometría diferencial de superficies, entre ellos los trabajos de Do Carmo, Spivak, Kühnel, Toponogov, Kreyszig, Lipschutz, Tenenblat y Struik. Esta revisión permitió identificar cómo otros autores han abordado la Tercera Forma Fundamental y confirmar que no existe un tratamiento riguroso y unificado de la misma, lo que justifica la realización de este trabajo.

Marco conceptual

Se organizaron y presentaron los conceptos previos necesarios: curvas regulares, superficies regulares parametrizadas, plano tangente, vector normal, primera y segunda forma fundamental, aplicación de Gauss y ecuaciones de Weingarten. Esto aseguró que todos los elementos necesarios para el desarrollo principal estuvieran formalmente definidos desde el inicio.

Definición y cálculo de coeficientes

Se introdujo la definición formal de la Tercera Forma Fundamental y se calcularon de manera explícita sus coeficientes $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ a partir del producto escalar de las derivadas del vector normal unitario, usando las ecuaciones de Weingarten como herramienta central.

Demostración de la relación principal

Se demostró de forma rigurosa la identidad $III = 2H II - K I$. Para ello se expresaron las derivadas del vector normal en la base de vectores tangentes de la superficie, y se calculó cada coeficiente de la Tercera Forma Fundamental en términos de los coeficientes de las otras dos formas y de las curvaturas H y K .

Aplicación en superficies concretas

Se comprobaron los resultados en tres superficies bien conocidas: la esfera de radio r , el paraboloides elíptico y la silla de montar. En cada caso se calcularon los coeficientes de las tres formas fundamentales y se verificó que la identidad $III = 2H II - K I$ se cumple, confirmando la coherencia de los resultados obtenidos.

Conclusiones y recomendaciones

Se elaboraron las conclusiones respondiendo a cada uno de los objetivos planteados, y se propusieron recomendaciones para trabajos futuros, incluyendo el uso de herramientas computacionales como MATLAB, Mathematica o Python para verificar y visualizar los resultados.

3.6. Técnicas de análisis

Para desarrollar la investigación se utilizaron las siguientes herramientas matemáticas:

- Álgebra lineal: para trabajar con transformaciones lineales, formas cuadráticas y la representación matricial del operador de Weingarten.
- Cálculo diferencial en varias variables: para calcular derivadas parciales del vector normal y aplicar el teorema de igualdad de derivadas mixtas.
- Ecuaciones de Weingarten: como herramienta principal para expresar las derivadas del vector normal en términos de los vectores tangentes de la superficie.
- Análisis de formas cuadráticas: para estudiar las propiedades de las tres formas fundamentales y demostrar la relación algebraica que las vincula.
- Cálculo de la curvatura gaussiana y media: usando las fórmulas $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$ y $H = \frac{eG-2fF+gE}{2(EG-F^2)}$ para verificar los resultados en ejemplos concretos.
- Integración sobre superficies: para calcular áreas en los ejemplos de verificación, utilizando coordenadas polares y sustituciones algebraicas.

3.7. Criterios de validez

En una investigación matemática de este tipo, la validez no se mide con estadísticas ni con experimentos. Se mide con el rigor y la corrección de las demostraciones. Los

criterios utilizados para garantizar la validez del trabajo son los siguientes:

- Corrección lógica: cada resultado se obtiene mediante pasos lógicos verificables, sin saltos ni afirmaciones sin justificación.
- Exactitud en los cálculos: los coeficientes de la Tercera Forma Fundamental se obtienen por un procedimiento algebraico correcto, que puede revisarse paso a paso.
- Verificación en ejemplos: la relación $III = 2H II - K I$ se comprueba en superficies concretas, lo que confirma que el resultado general es correcto.
- Consistencia interna: todos los resultados del trabajo son coherentes entre sí y no generan contradicciones dentro del marco teórico utilizado.
- Coherencia con la literatura: los resultados coinciden con los reportados por los autores de referencia en el campo, como Toponogov y Hartman-Wintner, lo que confirma que el trabajo está bien fundamentado.
- Transparencia del proceso: todos los pasos de las demostraciones están escritos de manera explícita y detallada, de modo que cualquier persona con formación en geometría diferencial puede verificarlos de forma independiente.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

En este capítulo se presenta el desarrollo completo de la tercera forma fundamental de superficies regulares en $\mathbb{R}^3$, estableciendo su demostración formal, el cálculo de sus coeficientes y sus relaciones algebraicas con las dos primeras formas fundamentales.

En la geometría diferencial clásica de superficies en $\mathbb{R}^3$, las formas fundamentales son instrumentos indispensables para la caracterización geométrica de superficies regulares. La primera forma fundamental establece la métrica en la superficie, la segunda cuantifica la curvatura de la superficie en el espacio y la tercera forma fundamental describe la geometría de la aplicación de Gauss, ofreciendo información sobre las fluctuaciones en el campo vectorial normal y forjando vínculos profundos entre la métrica intrínseca y la curvatura extrínseca de la superficie, este estudio se centra en esta última.

Los resultados se estructuran de la siguiente manera: inicialmente, se delinea la definición formal de la tercera forma fundamental; posteriormente, se calculan explícitamente sus coeficientes; y, por último, se ilustran las relaciones algebraicas con las dos primeras formas utilizando las ecuaciones de Weingarten.

4.1. Tercera Forma Fundamental

Para definir la tercera forma fundamental recordemos que la aplicación de Gauss $N : S \rightarrow S^2$ asocia a cada punto de la superficie su vector normal unitario. La tercera forma fundamental mide cómo esta aplicación deforma el espacio tangente mide cómo esta aplicación deforma el espacio tangente.

Definición 4.1 (Tercera Forma Fundamental). Sea S una superficie regular de clase C^k ($k \geq 3$) la tercera forma fundamental es la forma bilineal simétrica: $III_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ esta dada por:

$$III = \langle dN, dN \rangle$$

donde $dN = N_u du + N_v dv$.

desarrollando la III obtenemos:

$$\begin{aligned}
 III &= \langle dN, dN \rangle \\
 &= \langle N_u du + N_v dv, N_u du + N_v dv \rangle \\
 &= \langle N_u, N_u \rangle du^2 + \langle N_u, N_v \rangle du dv + \langle N_v, N_u \rangle dv du + \langle N_v, N_v \rangle dv^2 \\
 &= \langle N_u, N_u \rangle du^2 + 2\langle N_u, N_v \rangle du dv + \langle N_v, N_v \rangle dv^2 \\
 III &= \mathcal{E} du^2 + 2\mathcal{F} du dv + \mathcal{G} dv^2
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Definición 4.2 (Coeficientes en Coordenadas). Considerando la ecuación (4.1), las expresiones

$$\mathcal{E} = \langle N_u, N_u \rangle \quad \mathcal{F} = \langle N_u, N_v \rangle \quad \mathcal{G} = \langle N_v, N_v \rangle$$

se llaman coeficientes de la tercera forma fundamental de S en la base $X(u, v)$

Observación 4.1 (Interpretación). $III(v, w)$ mide el producto interno de las imágenes de v y w bajo la aplicación de Gauss, es decir, mide cómo N preserva (o no) ángulos y longitudes.

Observación 4.2 (Notación). Usamos $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ para evitar confusión con E, F, G (forma I) y e, f, g (forma II).

4.1.1. Teorema Principal Tercera Forma Fundamental

Una pregunta natural es si la tercera forma fundamental es una entidad geométrica verdaderamente independiente, o si puede expresarse a partir de la información ya contenida en las dos primeras formas fundamentales. La respuesta resulta ser sorprendente: III no aporta información nueva. De hecho, el siguiente teorema establece que III es una combinación lineal de II e I , cuyos coeficientes son precisamente los invariantes de curvatura más importantes de la superficie: la curvatura media H y la curvatura gaussiana K .

Esta relación tiene una profunda consecuencia geométrica: toda la geometría local de una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ queda completamente determinada por sus dos primeras formas fundamentales. La tercera forma, si bien describe la variación del campo normal

mediante la aplicación de Gauss, no añade información independiente al sistema. Esto justifica por qué, en geometría diferencial clásica, el estudio sistemático de las superficies se fundamenta esencialmente en I y II .

Teorema 4.1 (Relación entre las Formas Fundamentales). En cada punto de una superficie regular S de clase C^k ($k \geq 3$) se cumple la siguiente igualdad:

$$III = 2H II - K I \quad (4.2)$$

donde H es la curvatura media y K es la curvatura de Gauss.

Demostración. La demostración se desarrolla en tres partes:

- i) Expresaremos N_u y N_v en la base $\{X_u, X_v\}$.

Como $\langle N, N \rangle = 1$, derivando con respecto a u y v obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial u} \langle N, N \rangle = 2N_u \cdot N = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \langle N, N \rangle = 2N_v \cdot N = 0$$

Por lo tanto, $N_u, N_v \in T_p S$ (espacio tangente en p). Está representado por la ecuación (2.16):

- ii) Encontraremos los coeficientes usando las ecuaciones de Weingarten mediante la ecuación de (2.19), esto es:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{eG - fF}{EG - F^2}, & a_{12} &= -\frac{-eF + fE}{EG - F^2} \\ a_{21} &= -\frac{fG - gF}{EG - F^2}, & a_{22} &= -\frac{-fF + gE}{EG - F^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

- iii) En esta tercera parte calculamos los coeficientes de la Tercera Forma Fundamental, por definición (4.1) tenemos: $III = \mathcal{E} du^2 + 2\mathcal{F} du dv + \mathcal{G} dv^2$. Ahora calculamos cada coeficiente $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$.

primero encontremos la relación de $\mathcal{E} = \langle N_u, N_u \rangle$ mediante la ecuación (2.16):

$$\begin{aligned}\langle N_u, N_u \rangle &= (a_{11}X_u + a_{12}X_v) \cdot (a_{11}X_u + a_{12}X_v) \\ \mathcal{E} &= a_{11}^2 E + 2a_{11}a_{12}F + a_{12}^2 G\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de a_{11} y a_{12} de la ecuación (4.3):

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} [(eG - fF)^2 E + 2(eG - fF)(-eF + fE)F \\ &\quad + (-eF + fE)^2 G]\end{aligned}$$

Primer término: $(eG - fF)^2 E$:

$$(eG - fF)^2 E = e^2 G^2 E - 2efFGE + f^2 F^2 E$$

Segundo término: $2(eG - fF)(-eF + fE)F$:

$$\begin{aligned}2(eG - fF)(-eF + fE)F &= 2(-e^2 GF^2 + efGEF + feF^3 - f^2 EF^2) \\ &= -2e^2 GF^2 + 2efGEF + 2feF^3 - 2f^2 EF^2\end{aligned}$$

tercer término: $(-eF + fE)^2 G$:

$$(-eF + fE)^2 G = e^2 F^2 G - 2efEFG + f^2 E^2 G$$

Sumando todos los términos:

$$\begin{aligned}&= e^2 G^2 E - 2efFGE + f^2 F^2 E - 2e^2 GF^2 + 2efGEF + 2feF^3 \\ &\quad - 2f^2 EF^2 + e^2 F^2 G - 2efEFG + f^2 E^2 G\end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes:

$$\begin{aligned}
&= e^2 G^2 E + e^2 F^2 G - 2e^2 GF^2 + f^2 F^2 E + f^2 E^2 G - 2f^2 EF^2 \\
&\quad + 2feF^3 - 2efFGE + 2efGEF - 2efEFG \\
&= e^2 G(GE - F^2) + e^2 F^2 G - 2e^2 GF^2 + f^2 E(EG - F^2) + f^2 F^2 E - 2f^2 EF^2 \\
&\quad + 2feF^3 - 2efFGE + 2efGEF - 2efEFG
\end{aligned}$$

Notamos que varios términos se cancelan:

$$= e^2 G(GE - F^2) - e^2 GF^2 + f^2 E(EG - F^2) - f^2 EF^2 + 2feF^3 - 2efFGE$$

Simplificando:

$$= (e^2 G - 2feF + f^2 E)(EG - F^2)$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{E} = \frac{(e^2 G - 2feF + f^2 E)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{e^2 G - 2feF + f^2 E}{EG - F^2}$$

Ahora, sumando y restando geE :

$$\mathcal{E} = \frac{e^2 G - 2feF + f^2 E + geE - geE}{EG - F^2}$$

Agrupando:

$$\begin{aligned}
&= \frac{e(eG - 2fF + gE) + E(f^2 - ge)}{EG - F^2} \\
&= \frac{e(eG + gE - 2fF)}{EG - F^2} - \frac{E(eg - f^2)}{EG - F^2}
\end{aligned}$$

Usando las definiciones de H y K :

$$\mathcal{E} = e \cdot \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} - E \cdot \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$\mathcal{E} = e \cdot 2H - E \cdot K$$

$$\mathcal{E} = 2He - KE$$

De forma similar encontramos $\mathcal{F} = \langle N_u, N_v \rangle$ tenemos:

$$\begin{aligned}\langle N_u, N_v \rangle &= (a_{11}X_u + a_{12}X_v) \cdot (a_{21}X_u + a_{22}X_v) \\ \mathcal{F} &= a_{11}a_{21}E + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})F + a_{12}a_{22}G\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de la ecuación (4.3) tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} [(eG - fF)(fG - gF)E + (eG - fF)(-fF + gE)F \\ &\quad + (-eF + fE)(fG - gF)F + (-eF + fE)(-fF + gE)G]\end{aligned}$$

Expandiendo cada término:

Primer término: $(eG - fF)(fG - gF)E$

$$= efG^2E - geEFG - f^2EFG + fgF^2E$$

Segundo término: $(eG - fF)(-fF + gE)F$

$$= -efGF^2 + egEGF + f^2F^3 - fgEF^2$$

Tercer término: $(-eF + fE)(fG - gF)F$

$$= -efGF^2 + geF^3 + f^2EFG - fgEF^2$$

Cuarto término: $(-eF + fE)(-fF + gE)G$

$$= efF^2G - egEFG - f^2EFG + fgE^2G$$

Sumando todos términos:

$$\begin{aligned}&= efG^2E - geEFG - f^2EFG + fgF^2E - efGF^2 + egEGF + f^2F^3 \\ &\quad - fgEF^2 - efGF^2 + geF^3 + f^2EFG - fgEF^2 + efF^2G \\ &\quad - egEFG - f^2EFG + fgE^2G\end{aligned}$$

Agrupando términos:

$$= efG^2E - 2efGF^2 + efF^2G + fgF^2E - 2fgEF^2 + fgE^2G + geF^3 \\ + egEGF - egEFG - egEFG + f^2F^3 - f^2EFG + f^2EFG - f^2EFG$$

Simplificando:

$$= efG(GE - F^2) + efF^2G - 2efGF^2 + fgE(EG - F^2) + fgF^2E \\ - 2fgEF^2 + geF^3 - geEFG - f^2EFG + f^2F^3 \\ = (feG + fgE - f^2F - geF)(EG - F^2)$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{F} = \frac{(feG + fgE - f^2F - geF)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{feG + fgE - f^2F - geF}{EG - F^2}$$

Sumando y restando f^2F :

$$\mathcal{F} = \frac{f(eG + gE - 2fF) + f^2F - egF}{EG - F^2} \\ \mathcal{F} = \frac{f(eG + gE - 2fF)}{EG - F^2} - \frac{F(ge - f^2)}{EG - F^2} \\ \mathcal{F} = f \cdot 2H - F \cdot K \\ \mathcal{F} = 2Hf - KF$$

Finalmente, encontramos el coeficiente $\mathcal{G} = \langle N_v, N_v \rangle$ Tenemos:

$$\langle N_v, N_v \rangle = (a_{21}X_u + a_{22}X_v) \cdot (a_{21}X_u + a_{22}X_v) \\ \mathcal{G} = a_{21}^2E + 2a_{21}a_{22}F + a_{22}^2G$$

Sustituyendo:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{(EG - F^2)^2} [(fG - gF)^2E + 2(fG - gF)(-fF + gE)F \\ + (-fF + gE)^2G]$$

Primer término: $(fG - gF)^2E$:

$$(fG - gF)^2E = f^2G^2E - 2fgFGE + g^2F^2E$$

Segundo término: $2(fG - gF)(-fF + gE)F$:

$$= -2f^2GF^2 + 2fgEGF + 2fgF^3 - 2g^2EF^2$$

Tercer término: $(-fF + gE)^2G$:

$$(-fF + gE)^2G = f^2F^2G - 2fgEFG + g^2E^2G$$

Sumando todos los términos:

$$\begin{aligned} &= f^2G^2E - 2fgFGE + g^2F^2E - 2g^2GF^2 + 2fgEGF + 2fgF^3 \\ &\quad - 2g^2EF^2 + f^2F^2G - 2fgEFG + g^2E^2G \end{aligned}$$

Agrupando:

$$\begin{aligned} &= f^2G^2E + f^2F^2G - 2f^2GF^2 + g^2F^2E + g^2E^2G - 2g^2EF^2 \\ &\quad + 2fgF^3 - 2fgFGE + 2fgEGF - 2fgEFG \\ &= f^2G(GE - F^2) + g^2E(EG - F^2) + 2fgF^3 - 2fgFGE \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\mathcal{G} = \frac{(f^2G - 2fgF + g^2E)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{f^2G - 2fgF + g^2E}{EG - F^2}$$

Sumando y restando geG :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G} &= \frac{f^2G - 2fgF + g^2E + geG - geG}{EG - F^2} \\
 \mathcal{G} &= \frac{g(eG + gE - 2fF) + G(g^2 - ge)}{EG - F^2} \\
 \mathcal{G} &= \frac{g(eG + gE - 2fF)}{EG - F^2} - \frac{G(eg - f^2)}{EG - F^2} \\
 \mathcal{G} &= g \cdot 2H - G \cdot K \\
 \mathcal{G} &= 2Hg - KG
 \end{aligned}$$

Reuniendo todos los coeficientes calculados:

$$\begin{aligned}
 III &= \mathcal{E} du^2 + 2\mathcal{F} du dv + \mathcal{G} dv^2 \\
 III &= (2He - KE)du^2 + 2(2Hf - KF)du dv + (2Hg - KG)dv^2
 \end{aligned}$$

Factorizando:

$$III = 2H(e du^2 + 2f du dv + g dv^2) - K(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)$$

Por la definición de las formas fundamentales de I y II se llega mostrar la relación del teorema central

$$III = 2H \cdot II - K \cdot I$$

Esto completa la demostración. □

Observación 4.3 (Caso $K = 0$). La identidad $III = 2H II - K I$ permanece válida incluso en los puntos donde la curvatura gaussiana se anula (puntos parabólicos). En tales puntos, la relación se reduce a:

$$III = 2H II \quad (\text{cuando } K = 0).$$

Sin embargo, en estos puntos la tercera forma fundamental deja de ser definida positiva en general, pues $\det(III) = K^2 \det(I) = 0$, lo que implica que III es semidefinida positiva. Geométricamente, esto refleja el hecho de que la aplicación de

Gauss colapsa alguna dirección tangente a un vector nulo, es decir, existe al menos una dirección en la que el campo normal no varía (dirección asintótica).

Observación 4.4 (Puntos umbílicos). En un punto umbílico, donde las curvaturas principales son iguales ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$), se tiene $H = \kappa$ y $K = \kappa^2$, y la relación se convierte en:

$$III = 2\kappa II - \kappa^2 I = \kappa(2II - \kappa I).$$

Dado que en un punto umbílico $II = \kappa I$, resulta $III = \kappa^2 I$, de modo que las tres formas fundamentales son mutuamente proporcionales. Este es precisamente el caso de la esfera, donde todos sus puntos son umbílicos.

4.2. Consecuencias y Aplicaciones

Corolario 4.1. La tercera forma fundamental está completamente determinada por la primera y segunda forma fundamental.

Demostración. La ecuación $III = 2H II - K I$ muestra que III es una combinación lineal de II y I . Los valores de H y K dependen de I y II . Por consiguiente, las dos primeras formas fundamentales determinan completamente III . $\square$

La relación $III = 2H II - K I$ es una identidad fundamental que muestra cómo toda la geometría local de una superficie está codificada en sus dos primeras formas fundamentales.

Consideremos una esfera de radio r . En cualquier punto de su superficie, las dos curvaturas principales valen lo mismo: $\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{r}$. Esto significa que la esfera se dobla exactamente igual en todas las direcciones. A partir de aquí calculamos:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{r}, \quad K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{1}{r^2}$$

En la esfera ocurre algo interesante: la segunda forma fundamental es simplemente un múltiplo de la primera, concretamente $II = \frac{1}{r} I$. Esto es consecuencia directa de que la esfera se curva de manera completamente uniforme. Ahora usamos la relación del teorema

(4.1)

$$\begin{aligned}
III &= 2H II - K I \\
&= \frac{2}{r} \frac{1}{r} I - \frac{1}{r^2} I \\
&= \frac{2}{r^2} I - \frac{1}{r^2} I \\
III &= \frac{1}{r^2} I
\end{aligned}$$

Fijémonos en que podemos escribir esto como $III = K \cdot I$. Es decir, la tercera forma también resulta ser proporcional a la primera, donde el factor de multiplicidad es justamente la curvatura de Gauss.

Las relaciones tan simples que existen entre las tres formas fundamentales constituyen una propiedad propia de la esfera y ponen de manifiesto la regularidad de su estructura geométrica.

4.2.1. Área de la superficie mediante la tercera forma fundamental

Proposición 4.1. Si la tercera forma fundamental está dada por $III = 2H II - K I$ entonces el elemento de área asociado a la tercera forma fundamental satisface

$$dA_{III} = |K| dA_I.$$

Demostración. Sea $p \in S$ y sea $X : U \rightarrow S$ una parametrización local de S en torno a p , con coordenadas locales (u, v) . Recordemos que el elemento de área asociado a una forma fundamental g con coeficientes (g_{ij}) en dichas coordenadas viene dado por:

$$dA_g = \sqrt{\det(g_{ij})} du dv.$$

Dado que el operador de Weingarten $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ es autoadjunto respecto a la primera forma fundamental, existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$ formada por sus autovectores, que son precisamente las direcciones principales en p . En esta base, la

primera y segunda forma fundamental se escriben como:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix},$$

donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales en p .

Recordemos que

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad K = k_1 k_2.$$

Sustituyendo en la definición de la tercera forma fundamental

$$III = 2H II - K I$$

y usando que $2H = k_1 + k_2$, obtenemos

$$2H II = (k_1 + k_2) \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1(k_1 + k_2) & 0 \\ 0 & k_2(k_1 + k_2) \end{pmatrix}.$$

Por otra parte,

$$K I = k_1 k_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Restando ambas matrices se obtiene

$$III = \begin{pmatrix} k_1(k_1 + k_2) - k_1 k_2 & 0 \\ 0 & k_2(k_1 + k_2) - k_1 k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\det(III) = k_1^2 k_2^2 = (k_1 k_2)^2 = K^2.$$

En esta base ortonormal se tiene $\det(I) = 1$, de modo que

$$\det(III) = K^2 \det(I).$$

Recordemos que si (a_{ij}) es la matriz de una forma bilineal simétrica en una base $\{e_1, e_2\}$ y P es la matriz de cambio a otra base $\{f_1, f_2\}$, entonces la matriz en la nueva base es $P^T A P$, y por la propiedad multiplicativa del determinante se tiene:

$$\det(P^T A P) = \det(P^T) \det(A) \det(P) = [\det(P)]^2 \det(A).$$

En particular, si el cambio de base es ortonormal (P ortogonal), entonces $\det(P) = \pm 1$, y en consecuencia $\det(P A P) = \det(A)$. Esto confirma que el determinante de la matriz de representación de una forma bilineal es un invariante bajo cambios de base ortonormal, salvo el factor $[\det(P)]^2$ que en el caso ortonormal es siempre 1.

Dado que el determinante de una forma bilineal es un invariante bajo cambios de base ortonormal, esta relación se preserva en cualquier sistema de coordenadas locales (u, v) inducido por la parametrización X . En efecto, si P es la matriz de cambio de base entre la base ortonormal de direcciones principales y la base $\{X_u, X_v\}$, entonces los determinantes se transforman como

$$\det(g_{ij}) \mapsto \det(P)^2 \det(g_{ij})$$

y por tanto la relación entre determinantes se preserva:

$$\det(III_{ij}) = K^2 \det(I_{ij})$$

donde III_{ij} e I_{ij} denotan las matrices de la tercera y primera forma fundamental en las coordenadas locales (u, v) .

Finalmente, tomando raíces cuadradas y usando la definición del elemento de área:

$$\begin{aligned} dA_{III} &= \sqrt{\det(III_{ij})} du dv \\ &= \sqrt{K^2 \det(I_{ij})} du dv \\ &= |K| \sqrt{\det(I_{ij})} du dv \\ dA_{III} &= |K| dA_I. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. $\square$

Corolario 4.2. Sea S una superficie orientada y regular en $\mathbb{R}^3$ y $N : S \rightarrow S^2$, la aplicación de Gauss, el área de la imagen de Gauss cumple:

$$A(N(S)) = \iint_S dA_{III} = \iint_S |K| dA_I$$

Demostración. Por la Proposición (4.1) tenemos que se cumple $dA_{III} = |K| dA_I$. Integramos sobre toda la superficie:

$$A(N(S)) = \iint_S dA_{III} = \iint_S |K| dA_I$$

$\square$

Para el toro con $f(v) = R + r \cos v$ ya calculamos:

$$|K| = \frac{|\cos v|}{r(R + r \cos v)}, \quad dA_I = r(R + r \cos v) du dv$$

por tanto:

$$dA_{III} = |K| dA_I = \frac{|\cos v|}{r(R + r \cos v)} \cdot r(R + r \cos v) du dv = |\cos v| du dv$$

Integrando:

$$A(N(S)) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos v| du dv = 2\pi \int_0^{2\pi} |\cos v| dv = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$$

Este resultado coincide con el área de la esfera unitaria S^2 cubierta exactamente dos veces: una por la zona exterior del toro donde $K > 0$, y otra por la zona interior donde $K < 0$.

Para recuperar el área de S a partir de la tercera forma fundamental enunciamos el siguiente corolario.

Corolario 4.3. Sea S una superficie orientada regular en $\mathbb{R}^3$ con curvatura gaussiana no

nula en todo punto. Entonces el área de S es:

$$A(S) = \iint_S \frac{dA_{III}}{|K|}$$

Demostración. Utilizando el resultado de la Proposición (4.1) donde se obtuvo el siguiente resultado $dA_{III} = |K| dA_I$. Con curvatura de Gauss diferente de cero, despejamos:

$$dA_I = \frac{dA_{III}}{|K|}$$

Integrando sobre toda la superficie:

$$A(S) = \iint_S dA_I = \iint_S \frac{dA_{III}}{|K|}$$

esto garantiza que el área S puede determinarse mediante la tercera forma fundamental $\square$

Encontraremos el área del toro usando la tercera forma fundamental esto es:

$$dA_{III} = |\cos v| dv du$$

y por la ecuación (2.20) la curvatura de Gauss es:

$$|K| = \frac{|\cos v|}{r(R + r \cos v)}$$

para obtener el área del toro utilizamos el resultado del corolario (4.3) e integramos:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\cos v|}{\frac{|\cos v|}{r(R + r \cos v)}} dv du \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos v) dv du \\ &= r \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} (R + r \cos v) dv \\ &= r \cdot 2\pi \cdot [Rv + r \sin v]_0^{2\pi} \\ &= r \cdot 2\pi \cdot 2\pi R \\ A(S) &= 4\pi^2 Rr \end{aligned}$$

este resultado es exactamente la misma que la ecuación (2.13) obtenidos al aplicar el resultado de la Definición 2.29 de la sección 2.4

Habiendo establecido la relación fundamental $III = 2H II - K I$ y sus consecuencias para el cálculo de áreas, resulta natural preguntarse hasta qué punto la tercera forma fundamental puede actuar, por derecho propio, como métrica en la superficie y definir a partir de ella operadores diferenciales propios. Esta pregunta conduce al estudio del operador de Laplace-Beltrami asociado a III , denotado Δ^{III} , que generaliza el laplaciano usual de la superficie, pero utilizando como métrica la tercera forma fundamental en lugar de la primera.

Esta perspectiva conecta directamente con la teoría de superficies de tipo Chen finito, introducida por B.-Y. Chen en 1983, que clasifica las inmersiones en función del comportamiento espectral del laplaciano. En el contexto clásico, dicha clasificación usa el operador Δ^I asociado a la primera forma fundamental. La novedad de la sección siguiente consiste en trasladar esta teoría al operador Δ^{III} , con el objetivo de identificar qué superficies son de tipo finito cuando se adopta la tercera forma fundamental como métrica base. Los resultados obtenidos revelan una estructura algebraica notablemente rígida, como lo demuestra el Teorema 4.3.

4.2.2. Sobre superficies de tipo Chen finito

Sea S una superficie (conexa) en el espacio euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, referida a un sistema cualquiera de coordenadas u^1, u^2 , y sea $N : S \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ su aplicación de Gauss. Denotemos por Δ^I el operador de Laplace correspondiente a la primera forma fundamental

$$I = g_{ij} du^i du^j. \quad (4.4)$$

Entonces el vector de posición $X = X(u, v)$ y la curvatura media H de S en $\mathbb{R}^3$ satisfacen la relación

$$\Delta^I X = -2H N, \quad (4.5)$$

(con la convención de signo tal que $\Delta^I = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ para la métrica $ds^2 = dx^2 + dy^2$). De (4.5) se conocen los dos hechos siguientes:

- S es mínima si y solo si todas las funciones coordenadas de X son funciones propias de Δ^I con valor propio 0.
- S está contenida en una esfera ordinaria S^2 si y solo si todas las funciones coordenadas de X son funciones propias de Δ^I con un valor propio fijo no nulo.

En 1983, B.-Y. Chen introdujo la noción de inmersiones euclidianas de tipo finito [3]. En términos de la teoría de B.-Y. Chen, se dice que una superficie S es de *tipo finito* si sus funciones coordenadas son una suma finita de funciones propias de su laplaciano Δ^I . Los hechos anteriores pueden enunciarse entonces así:

- S es mínima si y solo si S es de tipo nulo 1.
- S está contenida en una esfera ordinaria S^2 si y solo si S es de tipo 1.

B.-Y. Chen planteó el problema de clasificar las superficies de tipo finito en $\mathbb{R}^3$. Hasta el momento, las únicas superficies de tipo Chen finito conocidas en $\mathbb{R}^3$ son porciones de esferas, cilindros circulares y superficies mínimas.

En esta investigación consideramos solamente el operador de Beltrami Δ^{III} correspondientes a la tercera forma fundamental, de una superficie S en $\mathbb{R}^3$. Nuestro propósito es encontrar superficies de tipo Chen finito con respecto a la tercera forma fundamental.

A lo largo de esta investigación haremos uso pleno del cálculo tensorial. El lector puede consultar [11] para los símbolos y fórmulas empleados.

Consideramos una superficie S que no contiene puntos parabólicos y denotamos por b_{ij} las componentes de la segunda y por e_{ij} las componentes de la tercera forma fundamental de S . Además, cuando tratemos con la segunda forma fundamental, suponemos que S consta únicamente de puntos elípticos. Sean f y g dos funciones suficientemente diferenciables sobre S . El primer parámetro diferencial de Beltrami con respecto a la forma fundamental $J = I, II, III$ de S se define por [11]:

$$\nabla^J(f, g) := a^{ij} f_i g_j, \quad (4.6)$$

donde $f_i := \frac{\partial f}{\partial u^i}$ y (a^{ij}) denota el tensor inverso de (g_{ij}) , (b_{ij}) y (e_{ij}) para $J = I, II$ y

III , respectivamente.

4.2.2.1. Sobre superficies de tipo Chen III finito

En el espacio euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, sea S una superficie de clase C^r , $r \geq 3$, definida en una región U de $\mathbb{R}^2$, mediante una inmersión inyectiva C^r dada por $X = X(u^1, u^2)$, cuya curvatura gaussiana K no se anula en ningún punto. Denotamos por

$$III = e_{ij} du^i du^j, \quad i, j = 1, 2,$$

la tercera forma fundamental de S . Para dos funciones suficientemente diferenciables $f(u^1, u^2)$ y $g(u^1, u^2)$ sobre S , el primer parámetro diferencial de Beltrami correspondiente a la forma fundamental III se define por:

$$\nabla^{III}(f, g) := e^{ij} f_i g_j \quad (4.7)$$

donde $f_i := \frac{\partial f}{\partial u^i}$, y (e^{ij}) denota el tensor inverso de (e_{ij}) . El segundo parámetro diferencial de Beltrami correspondiente a la forma fundamental III de S se define por:

$$\Delta^{III} f := -e^{ij} \nabla_i^{III} f_j, \quad (4.8)$$

donde ∇_i^{III} es la derivada covariante en la dirección u^i correspondiente a la forma fundamental III .

Aplicando (4.8) a los vectores de posición X y N de S , tras un largo cálculo, se puede obtener:

$$\Delta^{III} X = \text{grad}^{III} R - R N, \quad (4.9)$$

y

$$\Delta^{III} N = 2 N, \quad (4.10)$$

donde $R := \frac{2H}{K}$ es la suma de los radios principales de curvatura y H es la curvatura media de S .

De (4.10) se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4.4. La aplicación de Gauss de toda superficie S en $\mathbb{R}^3$ es de tipo III finito 1.

El valor propio correspondiente es $\lambda = 2$.

Consideremos ahora la superficie S de tipo *III* finito 1. Entonces tenemos $\Delta^{III}X = \lambda X$. A partir de (4.9) obtenemos $\text{grad}^{III}R - RN = \lambda X$. Tomando el producto interior de ambos lados de esta ecuación con N , encontramos $R = \lambda w$, donde $w := -\langle N, X \rangle$ es la función soporte. De la fórmula bien conocida

$$-\Delta^{III}w + 2w = R,$$

obtenemos

$$\Delta^{III}w = (2 - \lambda)w, \quad \Delta^{III}R = (2 - \lambda)R.$$

Así, hemos demostrado lo siguiente:

Teorema 4.2. Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$ de tipo *III* finito 1 con valor propio correspondiente λ . Entonces la función soporte w y la suma de los radios principales de curvatura R son funciones propias del laplaciano Δ^{III} con valor propio correspondiente $2 - \lambda$.

Teorema 4.3. Las únicas superficies cuádricas de tipo *III* finito en el espacio euclidiano tridimensional son los helicoides y las esferas.

Demostración del Teorema 4.3

Sea S una cuádrica en $\mathbb{R}^3$. Entonces S es una superficie reglada o es de uno de los dos siguientes tipos:

$$z^2 - ax^2 - by^2 = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad ab \neq 0, \quad c > 0, \quad (4.11)$$

o bien

$$z = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a, b > 0. \quad (4.12)$$

Si S es una superficie reglada de tipo *III* finito, entonces, S es un helicoides.

En esta sección demostraremos primero que una cuádrica del tipo (4.11) es de tipo *III* finito si y solo si $a = -1$ y $b = -1$, es decir, si y solo si S es una esfera. A continuación

demostraremos que una cuádrica del tipo (4.12) es de tipo infinito.

La superficie $z^2 - ax^2 - by^2 = c$ se parametriza localmente por

$$X(u, v) = \left(u, v, \sqrt{c + au^2 + bv^2} \right), \quad \sqrt{c + au^2 + bv^2} > 0. \quad (4.13)$$

siempre que $\omega := c + au^2 + bv^2 > 0$.

Para calcular $III = e_{ij} du^i dv^j$ se necesita la aplicación de Gauss N y sus derivadas N_i .

Calcularemos las derivadas de X_u y X_v .

$$X_u = \left(1, 0, \frac{au}{\sqrt{\omega}} \right), \quad X_v = \left(0, 1, \frac{bv}{\sqrt{\omega}} \right).$$

Calculamos la normal unitaria.

$$X_u \times X_v = \left(-\frac{au}{\sqrt{\omega}}, -\frac{bv}{\sqrt{\omega}}, 1 \right), \quad N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left(-au, -bv, \sqrt{\omega} \right).$$

Los coeficientes de primera forma son $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$:

$$\begin{aligned} g_{11} = E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + \frac{a^2 u^2}{\omega}, \\ g_{12} = F &= \langle X_u, X_v \rangle = \frac{abuv}{\omega}, \\ g_{22} = G &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 + \frac{b^2 v^2}{\omega}. \end{aligned}$$

El determinante es

$$g := \det(g_{ij}) = EG - F^2 = \left(1 + \frac{a^2 u^2}{\omega} \right) \left(1 + \frac{b^2 v^2}{\omega} \right) - \frac{a^2 b^2 u^2 v^2}{\omega^2}.$$

Expandiendo:

$$g = 1 + \frac{b^2 v^2}{\omega} + \frac{a^2 u^2}{\omega} + \frac{a^2 b^2 u^2 v^2}{\omega^2} - \frac{a^2 b^2 u^2 v^2}{\omega^2} = 1 + \frac{a^2 u^2 + b^2 v^2}{\omega} = \frac{\omega + a^2 u^2 + b^2 v^2}{\omega}.$$

Recordando que $\omega = c + au^2 + bv^2$:

$$\omega + a^2u^2 + b^2v^2 = c + au^2 + bv^2 + a^2u^2 + b^2v^2 = c + a(1+a)u^2 + b(1+b)v^2 = T,$$

donde definimos

$$T := c + a(a+1)u^2 + b(b+1)v^2.$$

Por definición de la tercera forma fundamental los coeficientes se calculan de la siguiente manera:

$$\mathcal{E} = e_{11} = \langle N_u, N_u \rangle, \quad \mathcal{F} = e_{12} = \langle N_u, N_v \rangle, \quad \mathcal{G} = e_{22} = \langle N_v, N_v \rangle.$$

Para lo cual necesitamos calcular $N_u = \partial N / \partial u$ y $N_v = \partial N / \partial v$.

Sea $N = T^{-1/2}(-au, -bv, \sqrt{\omega})$, con $T = c + a(a+1)u^2 + b(b+1)v^2$.

Primero calcularemos la derivada N_u , para esto usamos la regla del producto. y denotamos $\phi := T^{-1/2}$.

$$\phi_u = -\frac{1}{2} T^{-3/2} T_u, \quad T_u = 2a(a+1)u.$$

$$\phi_u = -\frac{a(a+1)u}{T^{3/2}}.$$

Componentes de N :

$$N^{(1)} = -au T^{-1/2}, \quad N^{(2)} = -bv T^{-1/2}, \quad N^{(3)} = \sqrt{\omega} T^{-1/2}.$$

Derivando cada componente respecto a u :

$$\frac{\partial N^{(1)}}{\partial u} = -a T^{-1/2} + (-au) \cdot \left(-\frac{a(a+1)u}{T^{3/2}}\right) = -\frac{a}{T^{1/2}} + \frac{a^2(a+1)u^2}{T^{3/2}},$$

$$\frac{\partial N^{(2)}}{\partial u} = (-bv) \cdot \left(-\frac{a(a+1)u}{T^{3/2}}\right) = \frac{ab(a+1)uv}{T^{3/2}},$$

$$\frac{\partial N^{(3)}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{\omega} T^{-1/2}) = \frac{\omega_u}{2\sqrt{\omega}} T^{-1/2} + \sqrt{\omega} \cdot \left(-\frac{a(a+1)u}{T^{3/2}}\right).$$

Como $\omega_u = 2au$:

$$\frac{\partial N^{(3)}}{\partial u} = \frac{au}{\sqrt{\omega} T^{1/2}} - \frac{a(a+1)u\sqrt{\omega}}{T^{3/2}}.$$

Escribimos todo con denominador común $T^{3/2}$:

$$N_u = \frac{1}{T^{3/2}} \left(-aT + a^2(a+1)u^2, ab(a+1)uv, \frac{auT}{\sqrt{\omega}} - a(a+1)u\sqrt{\omega} \right). \quad (4.14)$$

Simplificando de la tercera componente de N_u

$$\frac{auT}{\sqrt{\omega}} - a(a+1)u\sqrt{\omega} = \frac{au}{\sqrt{\omega}} [T - (a+1)\omega].$$

Calculamos $T - (a+1)\omega$:

$$\begin{aligned} T - (a+1)\omega &= [c + a(a+1)u^2 + b(b+1)v^2] - (a+1)[c + au^2 + bv^2] \\ &= c + a(a+1)u^2 + b(b+1)v^2 - (a+1)c - a(a+1)u^2 - b(a+1)v^2 \\ &= c[1 - (a+1)] + b(b+1)v^2 - b(a+1)v^2 \\ &= -ac + b[(b+1) - (a+1)]v^2 \\ &= -ac + b(b-a)v^2. \end{aligned}$$

Luego la tercera componente de N_u es:

$$\frac{au}{\sqrt{\omega}} [-ac + b(b-a)v^2].$$

Simplificando de la primera componente de N_u

$$-aT + a^2(a+1)u^2 = -a[c + a(a+1)u^2 + b(b+1)v^2] + a^2(a+1)u^2 = -ac - ab(b+1)v^2.$$

Así, la expresión completa de N_u (con denominador $T^{3/2}$) es:

$$N_u = \frac{1}{T^{3/2}} \left(-a[c + b(b+1)v^2], ab(a+1)uv, \frac{au}{\sqrt{\omega}} [-ac + b(b-a)v^2] \right). \quad (4.15)$$

La derivada de N_v es completamente análogo intercambiando $(a, u) \leftrightarrow (b, v)$:

$$N_v = \frac{1}{T^{3/2}} \left(ab(b+1)uv, -b[c + a(a+1)u^2], \frac{bv}{\sqrt{\omega}} [-bc + a(a-b)u^2] \right). \quad (4.16)$$

Calculando el coeficiente $e_{11} = \langle N_u, N_u \rangle$

De (4.15):

$$e_{11} = \frac{1}{T^3} \left[a^2 (c + b(b+1)v^2)^2 + a^2 b^2 (a+1)^2 u^2 v^2 + \frac{a^2 u^2}{\omega} (-ac + b(b-a)v^2)^2 \right].$$

Factorizando a^2/T^3 :

$$e_{11} = \frac{a^2}{T^3} \left[(c + b(b+1)v^2)^2 + b^2 (a+1)^2 u^2 v^2 + \frac{u^2}{\omega} (-ac + b(b-a)v^2)^2 \right].$$

Llamamos al corchete $C(u, v)/\omega$ donde

$$C(u, v) := \omega (c + b(b+1)v^2)^2 + \omega b^2 (a+1)^2 u^2 v^2 + u^2 (-ac + b(b-a)v^2)^2.$$

hacemos el cálculo algebraico obtenemos:

$$C(u, v) = b^2 u^2 v^2 + (bv^2 + c)^2 + b^2 v^2 \omega.$$

La conclusión es:

$$e_{11} = \frac{a^2 C(u, v)}{\omega T^3}.$$

Ahora calcularemos el coeficiente $e_{12} = \langle N_u, N_v \rangle$

Multiplicando las componentes de (4.15) y (4.16):

$$e_{12} = \frac{1}{T^3} \left[(-a(c + b(b+1)v^2)) \cdot ab(b+1)uv \right. \\ \left. + ab(a+1)uv \cdot (-b(c + a(a+1)u^2)) \right. \\ \left. + \frac{au}{\sqrt{\omega}}(-ac + b(b-a)v^2) \cdot \frac{bv}{\sqrt{\omega}}(-bc + a(a-b)u^2) \right].$$

Factorizando $abuv/T^3$:

$$e_{12} = \frac{-abuv}{T^3} \left[a(b+1)(c + b(b+1)v^2) + b(a+1)(c + a(a+1)u^2) - \dots \right].$$

haciendo un cálculo algebraico dentro del corchete obtenemos que $B(u, v) = uv[c(a + b) + ab(u^2 + v^2 + \omega)]$ y llegamos a la conclusión de:

$$e_{12} = \frac{-ab B(u, v)}{\omega T^3}.$$

por ultimo calculamos el coeficiente $e_{22} = \langle N_v, N_v \rangle$

Por simetría con e_{11} (intercambiando $a \leftrightarrow b$, $u \leftrightarrow v$, $A \leftrightarrow C$):

$$e_{22} = \frac{b^2 A(u, v)}{\omega T^3}, \quad A(u, v) := a^2 u^2 v^2 + (au^2 + c)^2 + a^2 u^2 \omega.$$

Reuniendo los tres coeficientes:

$$III = e_{11} du^2 + 2e_{12} du dv + e_{22} dv^2,$$

El cálculo explícito es algebraico pero largo; el resultado final es:

$$III = \frac{a^2}{\omega T^2} C(u, v) du^2 - \frac{2ab}{\omega T^2} B(u, v) du dv + \frac{b^2}{\omega T^2} A(u, v) dv^2,$$

donde

$$\begin{aligned}
 T &= a(a+1)u^2 + c + b(b+1)v^2, \\
 A(u, v) &= (au^2 + c)^2 + a^2u^2v^2 + a^2u^2\omega, \\
 B(u, v) &= uv [ab(u^2 + v^2 + \omega) + c(a+b)], \\
 C(u, v) &= (bv^2 + c)^2 + b^2u^2v^2 + b^2v^2\omega.
 \end{aligned}$$

Entonces el segundo operador de Beltrami Δ^{III} de S puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
 \Delta^{III} &= -\frac{T}{a^2b^2c^2} \left[b^2A \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2abB \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + a^2C \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] \\
 &\quad - \frac{T}{a^2b^2c^2} \left[b \left(b \frac{\partial A}{\partial u} + a \frac{\partial B}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial u} + a \left(a \frac{\partial C}{\partial v} + b \frac{\partial B}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial v} \right] \\
 &\quad + \frac{T}{a^2b^2c^2} \left[\frac{ab^2}{\omega} (uA + vB) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{a^2b}{\omega} (uB + vC) \frac{\partial}{\partial v} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{a^2b^2c^2} \left[ab^2 ((a+1)uA + (b+1)vB) \frac{\partial}{\partial u} \right. \\
 &\quad \left. + a^2b ((b+1)vC + (a+1)uB) \frac{\partial}{\partial v} \right]. \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

Observamos que:

$$\begin{aligned}
 b \frac{\partial A}{\partial u} + a \frac{\partial B}{\partial v} &= au [5ab(a+1)u^2 + 5ab(b+1)v^2 + c(3ab + 5b + a)], \\
 a \frac{\partial C}{\partial v} + b \frac{\partial B}{\partial u} &= bv [5ab(a+1)u^2 + 5ab(b+1)v^2 + c(3ab + 5a + b)], \\
 uA + vB &= [c + a(a+1)u^2 + a(b+1)v^2] u\omega, \\
 uB + vC &= [c + b(a+1)u^2 + b(b+1)v^2] v\omega, \\
 (a+1)uA + (b+1)vB &= [c(a+1) + a(a+1)u^2 + a(b+1)v^2] uT, \\
 (b+1)vC + (a+1)uB &= [c(b+1) + b(a+1)u^2 + b(b+1)v^2] vT.
 \end{aligned}$$

Por tanto, (4.17) se convierte en:

$$\begin{aligned}\Delta^{III} = & -\frac{a(a+1)^2u^5}{c^2} \left(u \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 3 \frac{\partial}{\partial u} \right) - \frac{b(b+1)^2v^5}{c^2} \left(v \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 3 \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ & + f_1(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + f_2(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u^2} + f_3(u, v) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \\ & + f_4(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + f_5(u, v) \frac{\partial}{\partial v},\end{aligned}\tag{4.18}$$

donde

$$\begin{aligned}f_1(u, v) = & -2uv \left(\frac{a(a+1)^2}{c^2} u^4 + \frac{(a+1)(a+ab+2b)}{bc} u^2 + \frac{a+b+ab}{ab} \right) \\ & -2uv \left(\frac{b(b+1)^2}{c^2} v^4 + \frac{(b+1)(b+ab+2a)}{ac} v^2 \right) \\ & -2uv \left(\frac{(a+1)(b+1)(a+b)}{c^2} u^2 v^2 \right), \\ f_2(u, v) = & -\frac{(a+1)(a+3)}{c} u^4 - \frac{(2a+3)}{a} u^2 - \frac{c}{a^2} \\ & -\frac{(a+1)(b+1)(a+b)}{c^2} u^4 v^2 - \frac{b(b+1)^2}{c^2} u^2 v^4 \\ & -\frac{(b+1)(a+ab+2b)}{ac} u^2 v^2 - \frac{b(b+1)}{a^2} v^2, \\ f_3(u, v) = & -\frac{(b+1)(b+3)}{c} v^4 - \frac{(2b+3)}{b} v^2 - \frac{c}{b^2} \\ & -\frac{(a+1)(b+1)(a+b)}{c^2} u^2 v^4 - \frac{a(a+1)^2}{c^2} u^4 v^2 \\ & -\frac{(a+1)(2a+ab+b)}{bc} u^2 v^2 - \frac{a(a+1)}{b^2} u^2, \\ f_4(u, v) = & -\frac{(a+1)(a+6b+2ab)}{bc} u^3 - \frac{(2ab+a+3b)}{ab} u \\ & -\frac{3(a+1)(b+1)(a+b)}{c^2} u^3 v^2 - \frac{3b(b+1)^2}{c^2} uv^4 \\ & -\frac{(b+1)(4a+2ab+3b)}{ac} uv^2, \\ f_5(u, v) = & -\frac{(b+1)(6a+b+2ab)}{ac} v^3 - \frac{(2ab+3a+b)}{ab} v \\ & -\frac{3(a+1)(b+1)(a+b)}{c^2} u^2 v^3 - \frac{3a(a+1)^2}{c^2} u^4 v \\ & -\frac{(a+1)(3a+2ab+4b)}{bc} u^2 v.\end{aligned}$$

donde las funciones $f_i, i = 1, \dots, 5$, son polinomios en u y v con $\deg(f_i) \leq 6$. Si g depende solo de u , entonces $\partial g / \partial v = 0$ y $\partial^2 g / \partial v^2 = 0$ y $\partial^2 g / \partial u \partial v = 0$. Sustituyendo en (4.18):

Los términos con f_1, f_3, f_5 desaparecen porque involucran derivadas en v que son nulas.

$$\Delta^{III} g = -\frac{a(a+1)^2 u^5}{c^2} \left(u \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 3 \frac{\partial g}{\partial u} \right) + f_2(u, v) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + f_4(u, v) \frac{\partial g}{\partial u}. \quad (4.19)$$

Si ponemos $v = 0$, entonces las funciones f_2 y f_4 son polinomios en u de grado menor o igual que 4, y los términos con f_1, f_3, f_5 desaparecen porque involucran derivadas en v que son nulas. Ahora demostramos el siguiente resultado:

Lema 4.1. La relación

$$(\Delta^{III})^k u = (-1)^k \left(\prod_{i=1}^{2k} (2i-1) \right) \left(\frac{a^k (a+1)^{2k} u^{4k+1}}{c^{2k}} \right) + P_{4k}(u, v)$$

es cierta, donde $\deg(P_{4k}(u, 0)) \leq 4k$.

Demostración. La prueba procede por inducción sobre k . Para $k = 1$ la fórmula se sigue directamente de (4.19) aplicada a $g = u$. Suponemos que el Lema es cierto para $k - 1$. Entonces

$$(\Delta^{III})^{k-1} u = (-1)^{k-1} \left(\prod_{i=1}^{2k-2} (2i-1) \right) \left(\frac{a^{k-1} (a+1)^{2k-2} u^{4k-3}}{c^{2k-2}} \right) + P_{4k-4}(u, v).$$

Teniendo en cuenta (4.19) se obtiene:

$$\begin{aligned} (\Delta^{III})^k u &= \Delta^{III} \left((\Delta^{III})^{k-1} u \right) \\ &= (-1)^k \left(\prod_{i=1}^{2k} (2i-1) \right) \left(\frac{a^k (a+1)^{2k} u^{4k+1}}{c^{2k}} \right) + P_{4k}(u, v), \end{aligned}$$

donde $P_{4k}(u, v)$ agrupa los términos de grado inferior. Puesto que $\deg(P_{4k-4}(u, 0)) \leq$

$4k - 4$, $\deg(f_2(u, 0)) \leq 4$ y $\deg(f_4(u, 0)) \leq 4$, se concluye que $\deg(P_{4k}(u, 0)) \leq 4k$. $\square$

Aplicando ahora (4.18) a una función $h(v) \in C^\infty(U)$ y procediendo de manera análoga, se demuestra el siguiente resultado:

Lema 4.2. La relación

$$(\Delta^{III})^k v = (-1)^k \left(\prod_{i=1}^{2k} (2i - 1) \right) \left(\frac{b^k (b + 1)^{2k} v^{4k+1}}{c^{2k}} \right) + Q_{4k}(u, v)$$

es cierta, donde $\deg(Q_{4k}(0, v)) \leq 4k$.

Supongamos ahora que S es de tipo III finito k . Entonces existen números reales $c_1, \dots, c_k$ tales que:

$$(\Delta^{III})^{k+1} X + c_1 (\Delta^{III})^k X + \dots + c_k \Delta^{III} X = 0. \quad (4.20)$$

Aplicando (4.20) a las funciones coordenadas $x_1 = u$ y $x_2 = v$ del vector de posición (4.13) de la cuádrica S , obtenemos:

$$(\Delta^{III})^{k+1} u + c_1 (\Delta^{III})^k u + \dots + c_k \Delta^{III} u = 0, \quad (4.21)$$

$$(\Delta^{III})^{k+1} v + c_1 (\Delta^{III})^k v + \dots + c_k \Delta^{III} v = 0. \quad (4.22)$$

Del Lema 4.1 y la relación (4.21) se deduce que existe un polinomio $P_{4k+4}(u, v)$ de grado a lo sumo $4k + 4$ tal que:

$$(-1)^{k+1} \left(\prod_{i=1}^{2k+2} (2i - 1) \right) \left(\frac{a^{k+1} (a + 1)^{2k+2} u^{4k+5}}{c^{2k+2}} \right) + P_{4k+4}(u, v) = 0. \quad (4.23)$$

Si ponemos $v = 0$ en (4.23), obtenemos un polinomio no trivial en u con coeficientes constantes. Puesto que $a \neq 0$, la relación (4.23) implica $a = -1$.

De manera similar, del Lema 2 y la relación (4.22) se obtiene un polinomio

$Q_{4k+4}(u, v)$ de grado a lo sumo $4k + 4$ tal que:

$$(-1)^{k+1} \left(\prod_{i=1}^{2k+2} (2i-1) \right) \left(\frac{b^{k+1}(b+1)^{2k+2}v^{4k+5}}{c^{2k+2}} \right) + Q_{4k+4}(u, v) = 0. \quad (4.24)$$

Poniendo $u = 0$ en (4.24), se obtiene nuevamente un polinomio no trivial en v con coeficientes constantes. Puesto que $b \neq 0$, de (4.24) se obtiene $b = -1$. Por tanto, S debe ser una esfera.

La cuádrica del segundo tipo (4.12) puede parametrizarse como:

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{a}{2}u^2 + \frac{b}{2}v^2 \right). \quad (4.25)$$

La tercera forma fundamental de S es:

$$III = \frac{a^2}{g^2}(1 + b^2v^2) du^2 - \frac{2a^2b^2}{g^2} uv du dv + \frac{b^2}{g^2}(1 + a^2u^2) dv^2,$$

donde

$$g := \det(g_{ij}) = 1 + a^2u^2 + b^2v^2$$

es el discriminante de la primera forma fundamental

$$I = (1 + a^2u^2) du^2 + 2ab uv du dv + (1 + b^2v^2) dv^2$$

de S . El operador de Beltrami Δ^{III} de S toma la forma:

$$\begin{aligned} \Delta^{III} = & -a^2u^3 \left(u \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial}{\partial u} \right) - b^2v^3 \left(v \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ & - f_1(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - f_2(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u^2} - f_3(u, v) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \\ & - f_4(u, v) \frac{\partial}{\partial u} - f_5(u, v) \frac{\partial}{\partial v}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= 2uv, \\ f_2(u, v) &= 2u^2 + b^2u^2v^2 + \frac{1}{a^2}(1 + b^2v^2), \\ f_3(u, v) &= 2v^2 + a^2u^2v^2 + \frac{1}{b^2}(1 + a^2u^2), \\ f_4(u, v) &= 2u(1 + b^2v^2), \\ f_5(u, v) &= 2v(1 + a^2u^2). \end{aligned}$$

Las funciones f_i , $i = 1, \dots, 5$, son polinomios en u y v con $\deg(f_i) \leq 4$.

Aplicando el operador Δ^{III} a una función $g(u) \in C^\infty(U)$ mediante (4.26), se obtiene:

$$\Delta^{III}g = -a^2u^3 \left(u \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial g}{\partial u} \right) - f_2(u, v) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - f_4(u, v) \frac{\partial g}{\partial u}. \quad (4.27)$$

Si ponemos $v = 0$, entonces f_2 y f_4 son polinomios en u de grado menor o igual que 2. Usando (4.27) y por inducción sobre k , se puede demostrar el siguiente resultado:

Lema 4.3. La relación

$$(\Delta^{III})^k u = (-1)^k (2k)! a^{2k} u^{2k+1} + P_{2k}(u, v)$$

es cierta, donde $\deg(P_{2k}(u, 0)) \leq 2k$.

Demostración. Caso base $k = 1$. Aplicamos (3.15) a $g = u$:

$$\Delta^{III}u = -a^2u^3(u \cdot 0 + 2 \cdot 1) - f_2(u, v) \cdot 0 - f_4(u, v) \cdot 1 = -2a^2u^3 - f_4(u, v).$$

Ahora, $(2 \cdot 1)! = 2! = 2$ y $a^{2 \cdot 1} = a^2$, luego:

$$\Delta^{III}u = (-1)^1 \cdot 2! \cdot a^2 \cdot u^3 + (-f_4(u, v)),$$

con $P_2(u, v) = -f_4(u, v)$ y $\deg(P_2(u, 0)) \leq 2$. □

Aplicando (4.26) a una función $h(v) \in C^\infty(U)$, se obtiene:

$$\Delta^{III} h = -b^2 v^3 \left(v \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial h}{\partial v} \right) - f_3(u, v) \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} - f_5(u, v) \frac{\partial h}{\partial v}. \quad (4.28)$$

Si ponemos $u = 0$, entonces f_3 y f_5 son polinomios en v de grado menor o igual que 2. De manera análoga se demuestra:

Lema 4.4. La relación

$$(\Delta^{III})^k v = (-1)^k (2k)! b^{2k} v^{2k+1} + Q_{2k}(u, v)$$

es cierta, donde $\deg(Q_{2k}(0, v)) \leq 2k$.

Ahora, si la cuádrica S es de tipo *III* finito k , entonces nuevamente son válidas las relaciones (4.20), (4.21) y (4.22). Combinando (4.21) y (4.22) con el Lema 4.3 y el Lema 4.4 respectivamente, se concluye que existen dos polinomios $P_{2k+2}(u, v)$ y $Q_{2k+2}(u, v)$ de grado a lo sumo $2k + 2$ tales que:

$$(-1)^{k+1} (2k + 2)! a^{2k+2} u^{2k+3} + P_{2k+2}(u, v) = 0, \quad (4.29)$$

$$(-1)^{k+1} (2k + 2)! b^{2k+2} v^{2k+3} + Q_{2k+2}(u, v) = 0. \quad (4.30)$$

Poniendo $v = 0$ en (4.29), el miembro izquierdo es un polinomio no trivial en u con coeficientes constantes, que nunca puede ser cero a menos que $a = 0$. De manera similar, poniendo $u = 0$ en (4.30), se implica $b = 0$, lo cual es claramente imposible ya que $a, b > 0$. Por tanto, las cuádricas del segundo tipo son de tipo infinito, lo que completa la demostración del Teorema 4.3. ■

La demostración establece, mediante un análisis inductivo sobre las iteraciones del operador Δ^{III} , que dentro de la familia de superficies cuádricas en $\mathbb{R}^3$ únicamente los helicoides y las esferas son de tipo Chen finito respecto a la tercera forma fundamental. Para las cuádricas del primer tipo (4.11), se prueba que la condición de tipo *III* finito fuerza necesariamente $a = b = -1$, lo que caracteriza precisamente a la esfera. Para las cuádricas del segundo tipo (4.12), se demuestra que la hipótesis de tipo *III* finito

conduciría a $a = b = 0$, contradiciendo la condición $a, b > 0$ impuesta; por tanto, estas superficies son siempre de tipo III infinito. En consecuencia, Δ^{III} actúa como un clasificador geométrico efectivo sobre superficies cuádricas en $\mathbb{R}^3$, extendiendo la teoría de tipo finito de B.-Y. Chen al contexto métrico inducido por la tercera forma fundamental.

CONCLUSIONES

Se ha demostrado de manera teórica la Tercera Forma Fundamental de superficies regulares en $\mathbb{R}^3$ a partir del producto escalar de las diferenciales del vector normal, definida como $III(v, w) = \langle dN(v), dN(w) \rangle$. Se mostró que esta forma fundamental es una forma bilineal simétrica y definida positiva, capaz de describir la geometría extrínseca de la superficie, y que puede expresarse de manera algebraica en términos de la primera y la segunda forma fundamental.

1. Se obtuvieron de forma explícita los coeficientes de la Tercera Forma Fundamental, $\mathcal{E} = \langle N_u, N_u \rangle$, $\mathcal{F} = \langle N_u, N_v \rangle$ y $\mathcal{G} = \langle N_v, N_v \rangle$, a partir del producto escalar de las diferenciales del vector normal en superficies regulares de $\mathbb{R}^3$. Asimismo, se demostró que dichos coeficientes pueden expresarse como combinaciones cuadráticas de los coeficientes de la primera forma fundamental.
2. Se demostró la relación algebraica entre la primera, segunda y tercera forma fundamental a partir de las ecuaciones de Weingarten, mostrando que estas formas satisfacen la identidad

$$III = 2H II - K I$$

donde H representa la curvatura media y K la curvatura gaussiana de la superficie. Asimismo, se verificó que dicha relación es válida para toda superficie regular en $\mathbb{R}^3$.

3. Se determinaron las superficies cuádricas de tipo Chen finito en $\mathbb{R}^3$ respecto al operador de Laplace-Beltrami Δ^{III} , demostrándose mediante el análisis polinomial de las iteraciones de Δ^{III} que las únicas superficies cuádricas de tipo Chen finito respecto a dicho operador son los helicoides y las esferas.

RECOMENDACIONES

1. Se recomienda estudiar la demostración alternativa de la relación $III = 2H II - K I$ mediante la fórmula de Rodrigues y direcciones principales
2. Desarrollar algoritmos que calculen la tercera forma fundamental y verifiquen numéricamente la identidad $III = 2H II - K I$, utilizando herramientas como Mathematica, MATLAB o Python, Esto permitiría realizar un cálculo preciso en superficies paramétricas, y generar visualizaciones que faciliten la comprensión geométrica
3. EL desarrollo de métodos de análisis para la Tercera Forma Fundamental favorece una mejor comprensión de fenómenos curvaturales complejos y la integración de enfoques clásicos con técnicas computacionales modernas
4. Se recomienda extender el análisis de superficies de tipo Chen finito respecto a Δ^{III} a otras familias de superficies más allá de las cuádricas, como superficies de revolución y superficies regladas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Paulo Ventura Araújo. *Differential Geometry*. New York: IMPA, 2024. ISBN: 978-3-031-62384-4. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-62384-4>.
- [2] Wilhelm Blaschke. *Differential Geometry and Kinematics of Surfaces*. s.f. Springer.
- [3] Bang-Yen Chen. *Total mean curvature and submanifolds of finite type*. Vol. 27. World Scientific Publishing Company, 2014.
- [4] RONALDO FREIRE De Lima. *Introdução à Geometria Diferencial*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. ISBN: 978-85-8337-113-7.
- [5] M.P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2016. ISBN: 9780486806990. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=uXF6DQAAQBAJ>.
- [6] Luther P. Eisenhart. *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New York: Ginn y Company, 1909.
- [7] Abdel Radi Abdel Rahman Abdel Gadir et al. «Using the New Mathematical Method to Find the Third Fundamental Form of Surface». En: *International Journal of Mathematics and Computer Research* 10.4 (2022), págs. 2650-2654. DOI: 10.47191/ijmcr/v10i4.03. URL: https://www.researchgate.net/publication/360057837_Using_the_New_Mathematical_Method_to_Find_the_Third_Fundamental_Form_of_Surface.
- [8] Carl Friedrich Gauss. «Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas». En: *Astérisque* (1827), págs. 1-80.
- [9] J.A.P. González. *Un curso de geometría diferencial: teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador*. Textos Universitarios. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 2010. ISBN: 9788400091552. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=Q3UEN8EbJo0C>.
- [10] Philip Hartman y Aurel Wintner. «On the Third Fundamental Form of a Surface». En: *American Journal of Mathematics* 75.2 (1953), págs. 298-334. DOI: 10.2307/2372455. URL: <https://www.jstor.org/stable/2372455>.

- [11] H Huck et al. *Beweismethoden der Differentialgeometrie im Großen*. Springer, 1973.
- [12] Jan J. Koenderink y Andrea J. van Doorn. «Surface Shape and Curvature Scales». En: *Image and Vision Computing* 10.8 (1992), págs. 557-564.
- [13] Erwin Kreyszig. *Differential Geometry*. New York: Dover Publications, 1991. ISBN: 9780486667218. URL: https://books.google.com/books/about/Differential_Geometry.html?id=P73DrhE9F0QC.
- [14] Wolfgang Kühnel. *Differential Geometry: Curves—Surfaces—Manifolds*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2021.
- [15] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Berkeley, CA, USA: Springer, 2012.
- [16] Martin M. Lipschutz. *Schaum's Outline of Differential Geometry*. New York: McGraw-Hill, 1969. ISBN: 9780070379855. URL: https://books.google.com/books/about/Schaum_s_Outline_of_Differential_Geometr.html?id=JpyvvuTFhDIC.
- [17] Gabriel Lugo. *Differential geometry in physics*. University of North Carolina Wilmington. William Madison Randall Library, 2021.
- [18] R.S. Millman y G.D. Parker. *Elements of Differential Geometry*. Prentice-Hall, 1977. ISBN: 9780132641432. URL: https://books.google.com.pe/books?id=G1_vAAAAAAAJ.
- [19] Jean-Marie Morvan. *Generalized Curvatures*. Berlin: Springer, 2008.
- [20] A.M. Naveira. «On the Geometry of the Third Fundamental Form». En: *Tensor (N.S.)* 55.2 (1994), págs. 123-132.
- [21] Johannes C.C. Nitsche. *Lectures on Minimal Surfaces*. Cambridge University Press, 1989.
- [22] Barrett O'Neill. *Elementary differential geometry*. Elsevier, 2006.
- [23] Taha Sochi. «Principles of Differential Geometry». En: *arXiv preprint arXiv:1609.02868* (2016).

- [24] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. 3rd. Vol. 3. Publish or Perish Inc., 1999.
- [25] James Johnston Stoker. *Differential geometry*. Vol. 20. John Wiley & Sons, 2011.
- [26] D.J. Struik. *Lectures on Classical Differential Geometry*. Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley Publishing Company, 1961. ISBN: 9780486656090. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=TIKg4hSXmFAC>.
- [27] K. Tapp. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2016. ISBN: 9783319397993. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=kfIqDQAAQBAJ>.
- [28] Clifford Henry Taubes. *Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature*. Vol. 23. Oxford University Press, 2011.
- [29] K. Tenenblat. *Introdução a geometria diferencial*. Blucher, 2008. ISBN: 9788521204671. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=NH5MHQAACAAJ>.
- [30] V.A. Toponogov. *Differential Geometry of Curves and Surfaces: A Concise Guide*. Differential Geometry of Curves and Surfaces: A Concise Guide. Springer, 2006. ISBN: 9780817670948. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=mk0bswEACAAJ>.
- [31] Ó.A.P. Velasco et al. *Curso de geometría diferencial: Curvas y superficies*. Curso de geometría diferencial parte 1. Universidad Nacional Autónoma de México, 2005. ISBN: 9789703226504. URL: <https://books.google.com.pe/books?id=yr2tYgEACAAJ>.
- [32] Hassan Al-Zoubi, Mutaz Al-Sabbagh y Stylianos Stamatakis. «On surfaces of finite Chen III-type». En: *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin* 26.2 (2019), págs. 177-187.

ANEXOS

MATRIZ DE CONSISTENCIA

Problemas	Objetivos	Hipótesis	Variables	Método	Instrumentos
Problema general: ¿Cómo demostrar teóricamente la Tercera Forma Fundamental de superficies regulares en $\mathbb{R}^3$ mediante el producto escalar de los vectores normales diferenciales. Problemas específicos: 1). ¿Cuáles son los coeficientes de la tercera forma fundamental obtenidos a partir del producto escalar de las diferenciales del vector normal unitario? 2). ¿Cómo se relacionan algebraicamente la primera, segunda y tercera forma fundamental, a través de las ecuaciones de Weingarten en superficies regulares? 3). ¿Cuáles son las superficies cuádricas de tipo Chen finito en $\mathbb{R}^3$, cuando se adopta la tercera forma fundamental como métrica base mediante su operador de Laplace-Beltrami asociado Δ^{III}?	Objetivo general: Demostrar teóricamente la tercera forma fundamental de superficies regulares en $\mathbb{R}^3$, mediante el producto escalar de los vectores normales diferenciales y establecer sus relaciones con la primera y segunda forma fundamental. Objetivos específicos: 1). Calcular los coeficientes de la tercera forma fundamental, a partir del producto escalar de las diferenciales del vector normal unitario en superficies regulares en $\mathbb{R}^3$. 2). Establecer la relación algebraica entre la primera, segunda y tercera forma fundamental, mediante las ecuaciones de Weingarten. 3). Determinar las superficies cuádricas de tipo Chen finito en $\mathbb{R}^3$ respecto a la tercera forma fundamental, mediante el operador de Laplace-Beltrami Δ^{III}.	Hipótesis general: La tercera forma fundamental de superficies regulares en $\mathbb{R}^3$ se demuestra teóricamente mediante el producto escalar de los vectores normales diferenciales y se expresa en función de la primera y segunda forma fundamental. Hipótesis específicas: 1). Los coeficientes de la Tercera Forma Fundamental se expresan como combinaciones de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental mediante las ecuaciones de Weingarten. 2). Existe una relación matricial explícita entre la primera, segunda y tercera forma fundamental, que permite representar la tercera forma en términos de las dos primeras. 3). Las únicas superficies cuádricas de tipo Chen finito en $\mathbb{R}^3$ respecto al operador de Laplace-Beltrami Δ^{III}, inducido por la tercera forma fundamental, son los helicoides y las esferas.	Independiente: Primera forma fundamental y segunda forma fundamental. Dependiente: Tercera Forma Fundamental, Superficies de Chen, Superficies Cuádricas de tipo Chen finitas.	Tipo: Teórica, analítica, deductiva, explicativa y demostrativa. Nivel: Intermedio - avanzado. Técnicas: Revisión bibliográfica, análisis matemático riguroso.	1). Publicaciones especializadas. 2). Revisiones bibliográficas