CÁLCULO DIFERENCIAL y CÁLCULO INTEGRAL

CON APLICACIONES

DIONICIO MILTON CHÁVEZ MUÑOZ

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN
1971
TACNA

© Cálculo Diferencial y Cálculo Integral con Aplicaciones
1ra. Edición, Tacna diciembre 2019

Dirección editorial: Av. Miraflores s/n - Tacna
Diseño de portada y diagramación: Lila Miluska Viza Condori - Héctor Aguilar Coaquira

Revisión técnica: El presente libro cumplió con el sistema de evaluación por pares, (de doble ciego).
1° evaluador: Flabio Alfonso Gutiérrez Segura
2° evaluador: Juan Panta Cobeñas
Revisión de estilo: Gabriela Caballero Delgado

ISBN: 978-612-48189-0-5

Libro electrónico disponible en: http://repositorio.unjbg.edu.pe/handle/UNJBG/2899

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN
FACULTAD DE CIENCIAS - ESMA

ELABORACIÓN DE TEXTO UNIVERSITARIO
(Resolución de C.U. N° 13160-2016-UN/JBG)

CÁLCULO DIFERENCIAL Y CÁLCULO INTEGRAL CON APLICACIONES

PRESENTADO POR:

DR. DIONICIO MILTON CHÁVEZ MUÑOZ

AGOSTO – 2019

TACNA PERÚ

A Milton Cesar y Carlos Rodolfo, mis hijos.

ÍNDICE

Introducción 6

Capítulo I: Funciones Reales de Variable Real **8**

1.1. Función: Dominio, imagen y gráfica. 9

1.2. Clases de funciones. Funciones elementales. 20

1.3. Operaciones con funciones. Composición de funciones. 44

1.4. Transformaciones de una función real. 50

1.5. Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. 54

1.6. Función inversa. 57

1.7. Características de las funciones: Creciente, decreciente, par, impar y periódica. 61

1.8. Funciones trascendentes: Exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. 68

1.9. Funciones como modelos matemáticos. Problemas de aplicación. 76

1.10. Lista de ejercicios propuestos. 82

Capítulo II: Límites y Continuidad de Funciones Reales **93**

2.1. Definición no formal de Límite de una función real. Operaciones con límites. 94

2.2. Definición formal de Límite de una función real. Demostración de límites. 99

2.3. Límites laterales. Límites infinitos. 103

2.4. Propiedades de los límites. Cálculo de límites. 110

2.5. Equivalencias y formas indeterminadas en límites 112

2.6. Límites en el infinito. 115

2.7. Límites de la forma indeterminada 1^{∞}. Otros límites 119

2.8. Continuidad de las funciones reales. Continuidad puntual. 121

2.9. Propiedades de las funciones continuas. 122

2.10. Discontinuidad evitable e inevitable. 125

2.11. Dominio de continuidad de una función real. Continuidad por intervalos. 127

2.12. Lista de ejercicios propuestos. 133

Capítulo III: Derivada de Funciones Reales **135**

3.1. Génesis de la derivada. Definición de la derivada de una función real. 136

3.2. Problemas clásicos que requieren derivada. Derivada como razón de cambio. 140

3.3. Pendiente, recta tangente y recta normal a una curva. 146

3.4. Reglas de derivación. Obtención de reglas usando la definición de derivada. 148
3.5. Cálculo de la derivada de diversas funciones reales. 152
3.6. La regla de la cadena o derivada de funciones compuestas. 157
3.7. Derivadas de orden superior. 161
3.8. Derivación implícita. 164
3.9. Incremento y diferencial de una función real. 168
3.10. Lista de ejercicios propuestos. 171

Capítulo IV: Aplicaciones de la Derivada **175**

4.1. Velocidad y aceleración usando derivadas. 171
4.2. La regla de L'Hopital. 177
4.3. Razones de cambio relacionadas. 180
4.4. Primera derivada y monotonía de las funciones reales. 184
4.5. Valores extremos de las funciones reales. 187
4.6. Segunda derivada y concavidad de la gráfica de una función real. 190
4.7. Bosquejo de curvas polinomiales y racionales. 192
4.8. Segunda derivada y valores extremos relativos. 197
4.9. Diferenciales y cálculo de errores relativos y errores porcentuales. 202
4.10. Lista de ejercicios propuestos. 209

Capítulo V: La Antiderivada y la Integral Indefinida **213**

5.1. La antiderivada. 214
5.2. La integral indefinida. 215
5.3. Tabla básica de integración. 215
5.4. Integración por cambio simple de variable. Sustitución simple. 220
5.5. Integración por artificios: Desarrollo, simplificación, sumar y restar. 223
5.6. Integración por método de sustitución o cambio de variable. 228
5.7. Integración por completación de cuadrados en el denominador. 230
5.8. Método de integración por partes. 232
5.9. Integración por sustitución trigonométrica. 236
5.10. Integrales que contienen funciones trigonométricas. 238
5.11. Integración por fracciones parciales. 242
5.12. Problemas de aplicación de la integral indefinida. 248

5.13. Aplicaciones que involucran funciones exponenciales o logarítmicas. 252
5.14. Lista de ejercicios propuestos. 259

Capítulo VI: La Integral Definida de Funciones Reales 261

6.1. Génesis de la integral definida. La integral definida. 262
6.2. Teoremas fundamentales del cálculo. 265
6.3. Propiedades de la integral definida. 266
6.4. Integral definida y área de regiones bajo una curva. 269
6.5. Integral definida y área entre curvas. 271
6.6. Integral definida y el volumen por secciones planas conocidas. 274
6.7. Integral definida y el volumen de sólidos de revolución. 282
6.8. Integral definida y la longitud de arco de una curva. 289
6.9. Integral definida y centro de gravedad de una región plana. 291
6.10. Integral definida y el área de superficies de revolución. 295
6.11. Integral definida y el valor medio de una función real. 296
6.12. Integral definida y el trabajo realizado por una fuerza. 297
6.13. Integral definida en otras aplicaciones. 300
6.14. Lista de ejercicios propuestos. 302

Capítulo VII: La Integral Impropia 308

7.1. La integral impropia. Convergencia y divergencia. 309
7.2. Integral impropia en intervalos infinitos. 309
7.3. Integral impropia para funciones discontinuas en los extremos de su intervalo de integración. 312
7.4. Integral impropia para funciones discontinuas en puntos internos de su intervalo de integración. 314
7.5. Otras aplicaciones de la integral impropia. 315
7.6. Lista de ejercicios propuestos. 317

INTRODUCCIÓN

Sin duda alguna, el descubrimiento del cálculo ha sido una de las áreas del conocimiento matemático que revolucionó el tratamiento de problemas que en el siglo XVII inquietaban a científicos y matemáticos. De allí en adelante fueron apareciendo diversos representantes que, en distintas épocas, se centraron en el desarrollo de múltiples aspectos de esta ciencia y dejaron en ella valiosos aportes. No se les menciona aquí para no dejar en el olvido, alguno por quien el lector pudiera luego protestar; no obstante, todo aquel que —de manera particular y llevado por su inquietud de estudio— se aventure a realizar un recorrido a lo largo de la historia de la Matemática, quedará maravillado por la enorme contribución de tantos matemáticos famosos.

En la actualidad, la Matemática es una herramienta del conocimiento que se ha prestado para el desarrollo de casi todas las ciencias; pese a ello, aún falta profundizar en su estudio, es decir, adentrarnos más en lo que se ha dado en llamar Matemática Aplicada. Aunque muchos dicen que la Matemática es una sola y que cualquier otra ciencia debe hacer uso de ella según sus propias necesidades y tal como está planteada, la realidad nos demuestra a diario que no resulta de este modo. Si cada rama del saber tuviera un equipo de matemáticos ocupándose de su desarrollo, evidentemente su progreso sería superior.

Es necesario que los matemáticos conciban a las demás ciencias no como estructuras encerradas dentro de sus fronteras, sino como espacios abiertos con los cuales interactuar, estableciendo relaciones que brinden y fortalezcan posibilidades de un desarrollo pleno para que al estudiar todos sus procesos se consiga abstraer conocimientos nuevos, se planteen otras soluciones e incluso, quizás, se llegue a la invención de más operaciones matemáticas.

La Matemática continúa evolucionando y seguirá siendo una de las principales herramientas para el desarrollo humano.

Dionicio Milton Chávez Muñoz

Capítulo I

FUNCIONES VARIABLES DE VARIABLES REALES

CAPÍTULO I

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

CONTENIDO

1.1. Función real: Dominio, imagen y gráfica.

1.2. Clases de funciones. Funciones elementales.

1.3. Operaciones con funciones. Composición de funciones.

1.4. Transformaciones de una función real.

1.5. Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

1.6. Función inversa.

1.7. Características de las funciones reales: Creciente, decreciente, par, impar y periódica.

1.8. Funciones trascendentes: Exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

1.9. Funciones como modelos matemáticos. Problemas de aplicación.

1.10. Lista de ejercicios propuestos.

1.1. FUNCIÓN REAL: DOMINIO, IMAGEN Y GRÁFICA

INICIANDO. Estimados lectores, si han llegado hasta aquí es que ya conocen y recuerdan muchos temas, conceptos y propiedades tanto de la aritmética como del álgebra; si juntamos algunos de ellos, podemos darle forma concreta y crear una función.

Consideremos cuatro vasijas:

La primera llena con las siguientes operaciones: suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz.

La segunda con letras y variables mayúsculas: A, B, C,…, Y, Z; y minúsculas: a, b, c,…, y, z.

La tercera tiene todos los números reales que conocemos: 1; 2; −3; $\sqrt{2}$; π; $\frac{2}{3}$; etc.

La cuarta llena de reglas de correspondencia entre dos variables: algebraicas, valor absoluto, logaritmos, funciones exponenciales, funciones trigonométricas y otras inventadas por la imaginación humana.

Juntamos algunos elementos de las 4 vasijas formando expresiones y le colocamos un nombre; resultado: $P = 2x + 3$, $Q = (t-2)^2$, $f = 1 + 3x - x^2$, $g = \frac{y}{6-y}$

$M = \sqrt{6x-2}$, $L = 2\,Cos\,(x+15)$ $N = Log(9t-10)$ $P = |15-4x|$

Cada resultado anterior es ejemplo de una función real.

Lógicamente, también se puede construir expresiones que no representan funciones; sin embargo, estas no resultan de interés en esta parte del estudio, como sí lo son las relaciones binarias.

INTRODUCCIÓN. Una *función real de variable real* o simplemente *función real* $y = f(x)$ es un refinamiento de las relaciones binarias que se establece de forma intencional entre los elementos de dos conjuntos; buscando así una mejor descripción y representación de los hechos, sucesos o magnitudes en sus aplicaciones sobre los diferentes campos de las ciencias.

El refinamiento se establece en las reglas de correspondencia, el cual consiste en que para el elemento x del conjunto de partida exista un único elemento y en el conjunto de llegada.

Veamos el siguiente ejemplo:

Si por la compra de 1 piña me cobran 2 soles por el costo de producción y 1 sol más como costo fijo debido al uso de instalaciones, entonces el costo total será de 2(1)+1=3. Por 2 piñas me cobran 4 soles por el costo de producción y 1 sol más como costo fijo debido al uso de instalaciones; por tanto, ahora el costo total será de 2(2)+1=5. Así, sucesivamente, se puede construir la siguiente tabla:

Cantidad de piñas	Costo variable + costo fijo	Costo total según el número de piñas
0	2(0)+1	$f(0) = 1$

1	2(1)+1	$f(1) = 3$
2	2(2)+1	$f(2) = 5$
3	2(3)+1	$f(3) = 7$
...	...	...
x	$2(x)$+1	$f(x) = 2x + 1$
Estos valores están en el conjunto de partida A		Estos valores están en el conjunto de llegada B

Notamos que se llega a establecer la siguiente regla de correspondencia: $f(x) = 2x + 1$. Asimismo, se observa que hay dos conjuntos:

a) El de partida $A = \{x \in R/x \geq 0\}$ contabiliza la cantidad de piñas que se compra.

b) El de llegada $B = \{y \in R/y \geq 1\}$ contabiliza el costo en soles.

En la expresión $y = f(x)$, a "x" se le denomina variable independiente, así como a "y", variable dependiente.

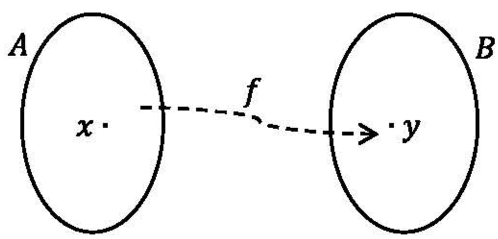
Aquí R representa al conjunto de los números reales.

En seguida veamos algunos ejemplos basados en esta *idea general* de función.

Ejemplo 1. Sea el conjunto A formado por los estudiantes del primer año de la Escuela Profesional de Ingeniería Ambiental de la UNJBG de Tacna, B el conjunto de los números naturales y f la regla de correspondencia entre los elementos x del conjunto A y los elementos y del conjunto B, lo que establece "la edad cumplida en años". En síntesis, se puede decir que el alumno x tiene "la edad cumplida" de y años.

Vemos que la regla de correspondencia f relaciona cada estudiante del conjunto A con una única edad cumplida en el conjunto B.

En este ejemplo, el hecho de que cada estudiante tenga una única edad cumplida caracteriza también el concepto de función real.

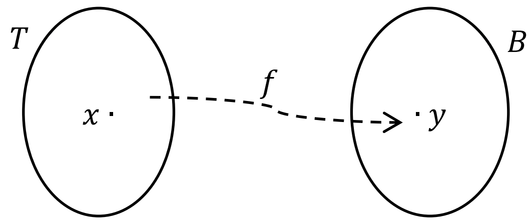


El alumno x tiene "la edad cumplida" de y años.

Ejemplo 2. Sea T el conjunto de todos los triángulos, B el conjunto de todos los números reales positivos y f la regla de correspondencia entre los elementos x del conjunto T y los elementos y del conjunto B, que establece "el triángulo ... tiene un área de ... centímetros cuadrados". En resumen, se puede afirmar que "el triángulo x tiene un área de y centímetros cuadrados".

Observamos que la regla de correspondencia f liga a cada triángulo del conjunto T, un único número positivo del conjunto B que representa su área.

También en este ejemplo, el hecho de que cada triangulo tenga un único valor como su área, caracteriza el concepto de función real.



El "triángulo x tiene un área de y centímetros cuadrados".

Formalicemos a continuación, la idea de una función real de variable real mediante una definición.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN REAL. La función real f de un conjunto A en un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento "x" del conjunto A exactamente un único elemento "y" en el conjunto B. Dicha regla de correspondencia se escribe de este modo: $y = f(x)$.

Equivalentemente, f es una función real de A en B si y solo si $(x;\ y) \in f \wedge (x;\ z) \in f \Rightarrow y = z$.

Esto implica que si existen dos valores "y" y "z" en el conjunto B como imágenes para un valor "x" del conjunto A, estos valores son iguales. Es decir que $y = z$.

OBSERVACIÓN 1.

a) Una función real f que va del conjunto A al conjunto B se denota entre otras formas como:

$f:\ A \to B\ /\ y = f(x)$ o $f = \{(x;\ y)\ /\ y = f(x)\}$ o $y = f(x)$

En cualquiera de las tres notaciones, se entiende como "f es una función de A en B cuya regla de correspondencia es $y = f(x)$".

b) Gráficamente, a una función real f se la reconoce cuando al trazar rectas verticales por toda la gráfica de f, esta es cortada como máximo en un punto. Si f es cortada en más de un punto, entonces no es una función real.

c) En adelante, los conjuntos A y B serán intervalos de números reales (gráficamente, intervalos de la recta numérica), salvo que se exprese otra condición.

Ejemplo 3. Se muestra ejemplos de reglas de correspondencia que generan conjuntos de pares ordenados que son o que no son funciones. Obedecen a la siguiente pregunta: ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son funciones reales?

a) $f = \{(x; y) / \ y = x^2 - 1\}$ b) $g = \{(x; y) / \ x^2 = y^2\}$ c) $h = \{(x; y)\ /\ x = 2y + 3\}$

Solución.

(a) El conjunto $f=\{(x;y)/\ y=x^2-1\}$ sí es una función real, su gráfica es una parábola.

Se cumple la condición f es una función real de $A=R$ en $B=[-1;\infty\rangle$ si y solo si $(x;\ y)\in f\ \wedge (x;\ z)\in f\ \Rightarrow\ y=z$. Es decir, para cada x existe un único y.

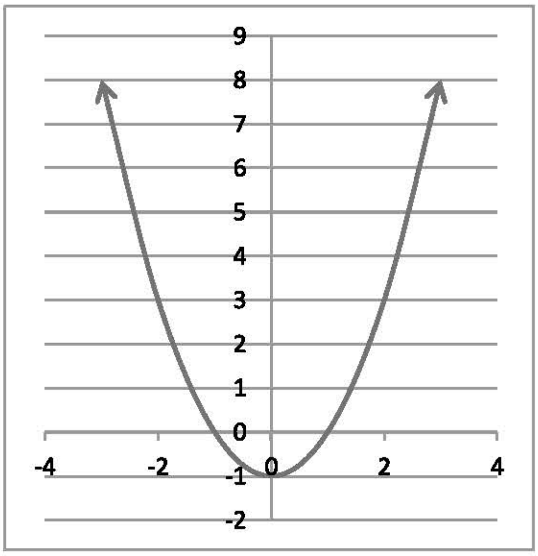


Figura 1.1

Así también se cumple que toda recta vertical cortaría a la gráfica de $y=x^2-1$ en un único punto. (Ver Figura 1.1).

(b) El conjunto $g=\{(x;y)/\ x^2=y^2\ \}$ no es una función real, la gráfica está formada por dos rectas que se cruzan en el origen de coordenadas. (Ver Figura 1.2).

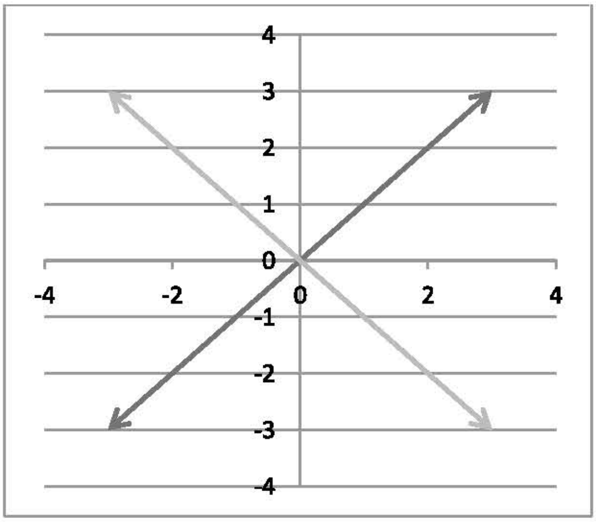


Figura 1.2

No se cumple la siguiente condición: g es una función real de $A = R$ en $B = R$ si y solo si $(x;\ y) \in g \wedge (x;\ z) \in g \Rightarrow y = z$; pues para cada "x", existe dos valores de "y". Por ejemplo, para $x = 2$, existe los valores de $y = 2$ y $y = -2$. Solo es único cuando $x = 0$.

Por otro lado, se cumple que rectas verticales cortarían a la gráfica de $x^2 = y^2$ en dos puntos.

Desde luego que al resolver $x^2 = y^2$ se obtiene las dos rectas: $x = y, x = -y$; lo cual garantiza los dos valores de y para cada x.

(c) El conjunto $h = \{(x; y) \ / \ x = 2y + 3\}$ si es una función real, la gráfica es una recta oblicua.

Se cumple esta condición: h es una función real de $A = R$ en $B = R$ si y solo si $(x;\ y) \in h \wedge (x;\ z) \in h \Rightarrow y = z$.

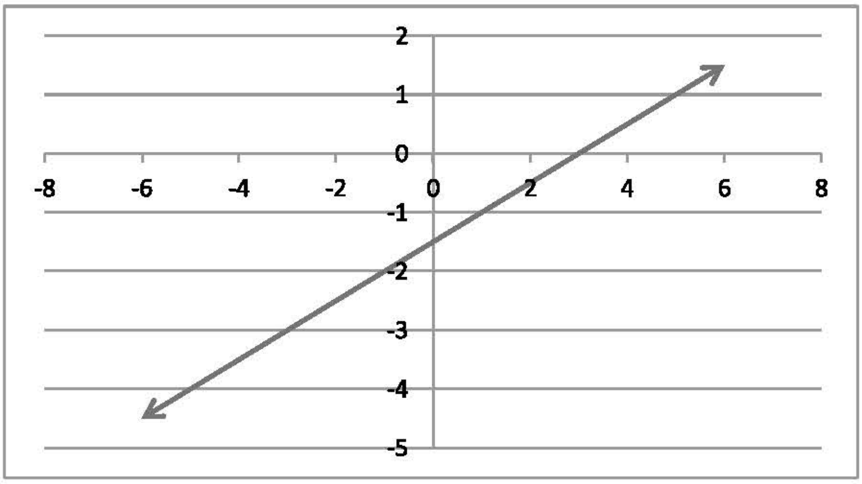


Figura 1.3

Se cumple que toda recta vertical cortaría a la gráfica de $x = 2y + 3$ en un único punto, tal como se verifica en la Figura 1.3.

Ejemplo 4. Muchas expresiones algebraicas o trascendentes pueden constituirse en reglas de correspondencia que son funciones reales, como se muestra a continuación:

a) Polinomios: (i) $f(x) = 3x - 7$ (ii) $f(x) = 5x^2 - 4x + 8$

(iii) $f(x) = 4 - 2x + x^2 - x^3$

b) Raíces: (i) $f(x) = \sqrt{x - 6}$ (ii) $f(x) = \sqrt{x(4 - x)}$

(iii) $f(x) = \sqrt[3]{8 - 2x}$

c) Cocientes: (i) $f(x) = \frac{x-7}{x+3}$ (ii) $f(x) = \frac{2}{x^2 - x}$

(iii) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

d) Exponenciales: (i) $f(x) = e^x - x$ (ii) $f(x) = e^{2x-1}$

(iii) $f(x) = 2^x + 3$

e) Trigonométricas: (i) $f(x) = Sen(2x)$ (ii) $f(x) = x^2 Cos\, x$

(iii) $f(x) = Tan(Ln\, x)$

f) Logaritmos: (i) $f(x) = Ln(9 - x^2)$ (ii) $f(x) = Log(2x - 3)$

(iii) $f(x) = Ln(Cos\, x)$

g) Valor absoluto: (i) $f(x) = |2x - 5|$ (ii) $f(x) = |x^2 - 4x + 6|$

(iii) $f(x) = |Sen\, x|$

Ejemplo 5. Funciones definidas por más de una regla de correspondencia.

a) $f(x) = \begin{cases} 5 - x; & si\ x \leq 0 \\ x^2 - 1; & si\ x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = |x| = \begin{cases} x; & si\ x \geq 0 \\ -x; & si\ x < 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x\, , si\ x < 1 \\ 3, si\ 1 \leq x \leq 4 \\ 2 - x, si\ x > 4 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} e^x\, , & si\ x < 0 \\ Sen\, x, & si\ 0 \leq x \leq \pi \\ Ln\, x, & si\ x > \pi \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{Sen\, x}{x}; & si\ x = 0 \\ 1; & si\ x \neq 0 \end{cases}$

OBSERVACIÓN 2. La forma que tendrá una función, según su regla de correspondencia, dependerá de lo que se quiera representar. En las aplicaciones se debe al hecho, suceso o magnitud que se quiera describir o representar.

Los dominios de las funciones anteriores se tienen que precisar de acuerdo a criterios de existencia de cada regla de correspondencia en mención.

Ejemplo 6. Sea la función real $f(x) = x^3 + x - 1$, hallar $f(-2)$, $f(3)$, $f(-x)$ y $f(a-1)$.

Solución.

Este proceso se conoce como *evaluación de una función* en algún valor real de su dominio.

Se sustituye x por -2 en la función dada, así $f(-2) = (-2)^3 + (-2) - 1, = -11$. Es decir, $f(-2) = -11$.

Luego se sustituye x por 3 en la función, resultando $f(3) = 29$.

También x por $-x$ en la función, dando por resultado $f(-x) = -x^3 - x - 1$.

Finalmente x por $a - 1$ en la función, con lo cual queda $f(a-1) =$? Hacerlo como ejercicio.

Ejemplo 7. Dada la función real $g(x) = x^2 - 2x + 3$

a) Hallar las raíces de la ecuación $g(x) = g(-1)$.

b) Hallar los ceros de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Solución.

(a) Esta igualdad solicitada genera la siguiente ecuación cuadrática: $g(x) = g(-1)$, así

$x^2 - 2x + 3 = 6 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow (x-3)(x+1) = 0.$

El conjunto solución es CS= $\{-1; 3\}$.

(b) Los ceros de la función $y = f(x)$ se encuentran igualando a cero dicha función, así los ceros de la función se obtienen de $f(x) = 0$.

$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x-3)(x-2) = 0$. El conjunto solución es CS= $\{2; 3\}$.

Los ceros de una función real son los valores de la variable independiente x en los cuales, la gráfica de la función corta al eje X. (Ver Figura 1.4).

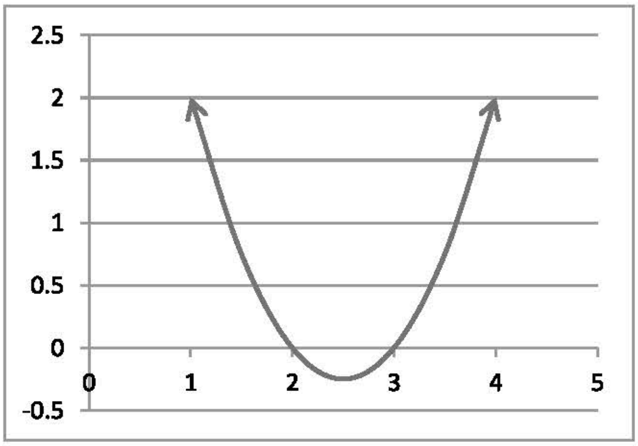


Figura 1.4

Ejemplo 8. Muchas fórmulas conocidas se pueden expresar como funciones reales.

a) Área de un círculo de radio r será $A(r) = \pi r^2$

b) Área de un cuadrado de lado x será $A(x) = x^2$

c) Área de un triángulo de base fija B y altura variable h será $A(h) = \frac{1}{2}Bh$

d) Espacio recorrido para una velocidad fija V y tiempo t variable $E(t) = Vt$

e) Presión para un área fija A y una fuerza variable F, será $P(F) = \frac{F}{A}$

f) Capitalización continua para un capital inicial P, un interés fijo r y tiempo t variable: $C(t) = Pe^{rt}$

g) Índice de masa corporal para una talla fija T y un peso variable p: $I(p) = \frac{p}{T^2}$

h) Superficie corporal de talla fija T y peso variable p será $S(p)=\sqrt{\frac{Tp}{36000}}$

DOMINIO, IMAGEN Y GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN REAL.

Una función real de variable real o simplemente función real f posee cuatro elementos:

i) La regla de correspondencia $y=f(x)$ ii) El dominio $Dom(f)$

iii) La imagen $Im(f)$ iv) La gráfica $Gra(f)$.

Obsérvese el diagrama en la Figura 1.5.

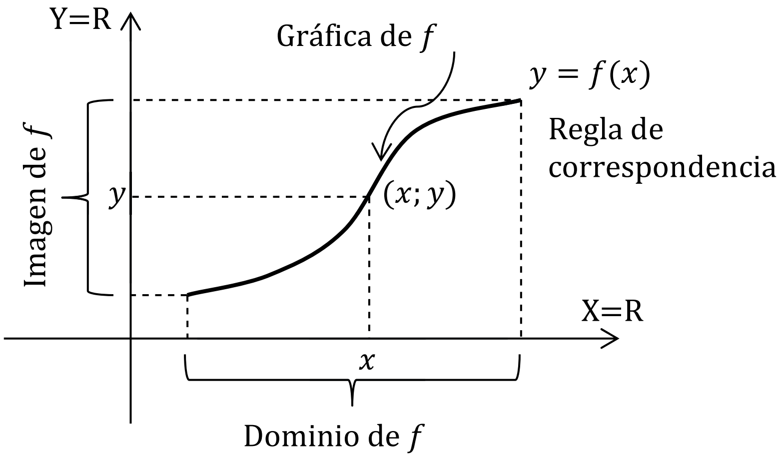


Figura 1.5

EL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN REAL. El **dominio** de una función real $f:R\to R$, que se denota como $Dom(f)$, es el conjunto de valores "x" del conjunto de partida R para los cuales existe un único valor "y" en el conjunto de llegada R, por lo que cumplen con la regla de correspondencia $y=f(x)$.

Simbólicamente se escribe así: $Dom(f)=\{x\in R/\exists!\, y\in R\wedge y=f(x)\}\subseteq R$.

Aquí, R representa todo el conjunto de los números reales.

OBSERVACIÓN 3. Teóricamente, una función real f tiene como *dominio* todo el conjunto de números reales R; este se reduce a un intervalo $A=Dom(f)$ cuando se ha restringido a dicho intervalo, o cuando es el resultado de hallar el dominio teórico de dicha función.

OBSERVACIÓN 4. Determinar el dominio teórico de una función real dependerá de la regla de correspondencia $y=f(x)$:

i) Cuando en la regla de correspondencia aparecen cocientes como $f(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$, la condición de restricción es que el denominador $D(x)$ sea diferente de cero, es decir, $D(x)\neq 0$.

ii) Cuando en la regla de correspondencia aparecen raíces de índice par como $f(x) = \sqrt[2n]{S(x)}$, con $n \in N$ la condición de restricción es que la cantidad sub-radical $S(x)$ sea mayor o igual que cero, esto es $S(x) \geq 0$.

iii) Cuando en la regla de correspondencia aparecen funciones logarítmicas como $f(x) = Log_a\, S(x)$, o $f(x) = Ln\, S(x)$, la condición de restricción es que el argumento del logaritmo $S(x)$ sea mayor que cero, es decir, $S(x) > 0$.

iv) Cuando en una regla de correspondencia aparecen de forma combinada dos o más de los casos descritos, se aplica cuidadosamente dichas restricciones.

Nota. En muchos casos la función real f se muestra acompañada de su dominio.

LA IMAGEN DE UNA **FUNCIÓN** REAL. La imagen de una función real $f: R \to R$, que se denota por $Im(f)$, es el conjunto de valores "y" del conjunto de llegada R para los cuales existe un valor "x" en el conjunto de partida R, por tanto, cumplen con la regla de correspondencia $y = f(x)$.

Simbólicamente, se escribe de la siguiente forma: $Im(f) = \{y \in R / \exists x \in R \wedge y = f(x)\} \subseteq R$.

Nota. La *imagen* se determina despejando la variable "x" y determinando el recorrido de la variable "y".

OBSERVACIÓN 5. Teóricamente, una función real f tiene como *imagen* todo el conjunto de números reales R; se reduce a un intervalo $B = Im(f)$ cuando es el resultado de hallar la imagen de dicha función correspondiente al dominio de la función $Dom(f)$.

OBSERVACIÓN 6. En muchos casos, para determinar la *imagen* de una función real es necesario construir la regla de correspondencia $y = f(x)$ a partir de los valores "x" del dominio de la función, usando las propiedades de los números reales.

GRÁFICA DE UNA **FUNCIÓN** REAL. Sea f: R→R una función real de variable real, entonces definimos la gráfica de la función f como el conjunto de pares ordenados $(x; y)$ que satisfacen la regla de correspondencia dada $y = f(x)$.

Simbólicamente, se escribe así: $Gra(f) = \{(x; y) \in \mathrm{R}^2 \,/\, y = f(x)\}$

OBSERVACIÓN 7. La gráfica generalmente es una *curva* en el plano cartesiano que se obtiene al construir una tabla de pares ordenados (tabulación), luego ubicarlos en un sistema de coordenadas o plano cartesiano y después suavizarlos mediante una curva que pase por todos ellos.

En adelante, las gráficas se realizarán a través de este proceso. Es preciso indicar que en algunas gráficas se puede usar escalas diferentes para el dominio o para la imagen.

OBSERVACIÓN 8. El dominio y la imagen de una función real se pueden obtener a partir de la gráfica de dicha función del siguiente modo:

i) El Dominio $Dom(f)$ de una función real f puede obtenerse como la proyección ortogonal de la gráfica de la función real $Gra(f)$ sobre el eje real de partida, X. Eje horizontal.

ii) La imagen $Im(f)$ de una función real f se puede obtener como la proyección ortogonal de la gráfica de la función real $Gra(f)$ sobre el eje real de llegada, Y. Eje vertical.

Ejemplo 9. Determinar el dominio, la imagen y la gráfica de las siguientes funciones reales:

a) $f(x) = 2 + \frac{x}{2}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ c) $g(x) = \sqrt{6-2x}$

d) $y = \frac{x}{x^3-4x}$ e) $F(t) = \sqrt{9-t^2}$

Solución.

El dominio y la imagen tienen que ser obtenidos desde la regla de correspondencia.

a) En la Figura 1.6, se grafica la función $f(x) = 2 + \frac{x}{2}$.

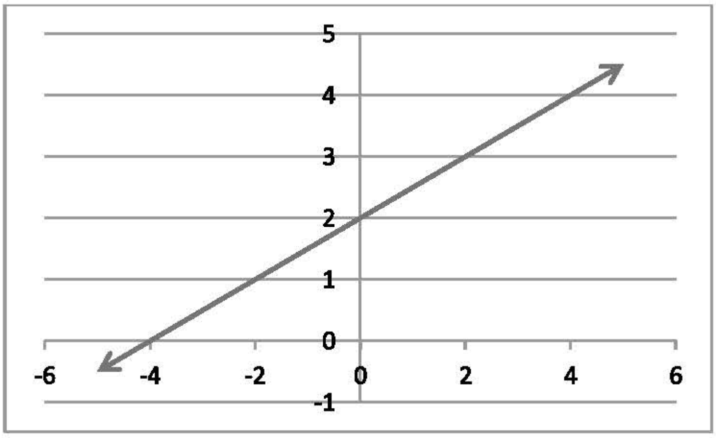


Figura 1.6

Observamos que esta función no tiene restricciones dado que la variable x puede ser sustituida por cualquier valor real y siempre se obtendrá un valor real para la variable y. Entonces $Dom(f) = \mathrm{R}$.

La imagen se obtiene al determinar el recorrido de $x = 2(y-2)$ donde y puede ser sustituido por cualquier valor real y el valor de x siempre existe, es decir, $Im(f) = R$.

(b) En la Figura 1.7, se grafica la función $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

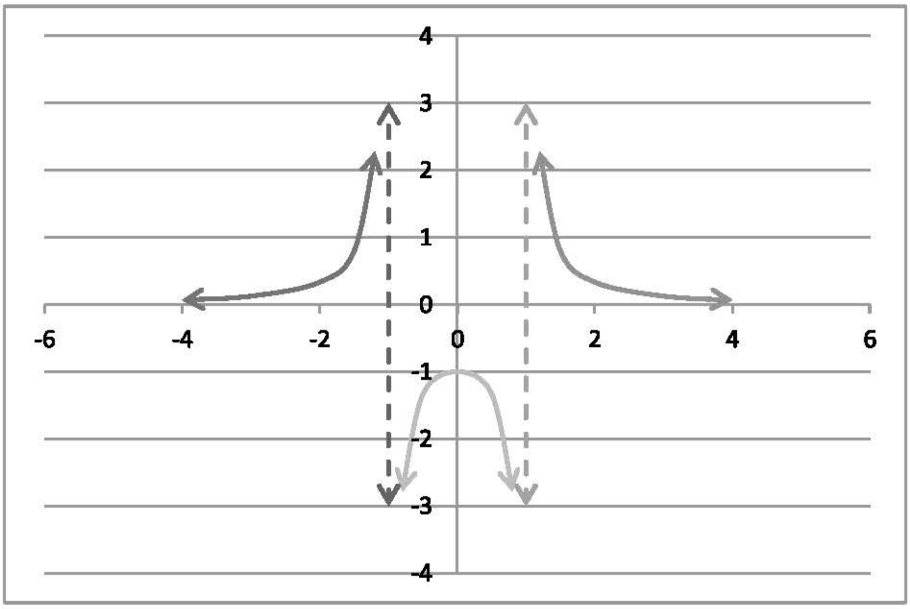


Figura 1.7

Cuando existe un cociente, el dominio se encuentra aplicando la *condición* "denominador diferente de cero", es decir, $x^2 - 1 \neq 0$, en donde al resolver la desigualdad, se obtiene que el dominio es el intervalo $Dom(f) = \mathrm{R} - \{-1; 1\}$. (Ver nuevamente Figura 1.7).

Las rectas $x = -1$ y $x = 1$ se denominan asíntotas verticales.

Para la imagen se despeja $x = \pm\sqrt{\frac{y+1}{y}}$ y se aplica la condición $\frac{y+1}{y} \geq 0$ por ser raíz de índice par; en donde, tras resolver la inecuación, la imagen será la unión de dos intervalos: $Im(f) = \langle -\infty; -1] \cup \langle 0; +\infty \rangle$.

La recta $y = 0$ se denomina asíntota horizontal.

(c) En la Figura 1.8, se grafica la función $g(x) = \sqrt{6 - 2x}$.

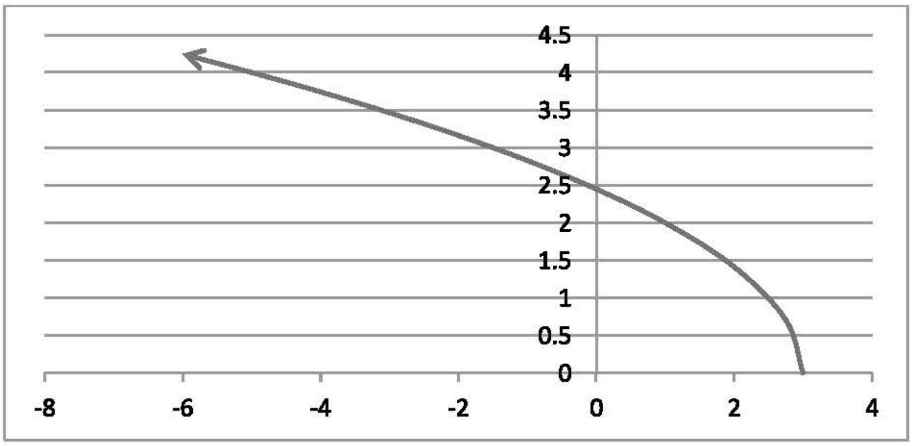


Figura 1.8

En este caso, cuando hay una raíz cuadrada, el dominio se encuentra aplicando la *condición* de restricción $6-2x \geq 0$; en donde resolviendo la inecuación, el dominio será el intervalo $Dom(g) = \langle -\infty; 3]$.

La imagen se obtiene por construcción de la regla de correspondencia a partir del dominio y usando las propiedades de los números reales.

Partimos del siguiente dominio: $x \in \langle -\infty{:}3]$

Reescribimos: $-\infty < x \leq 3$

Multiplicamos por dos: $-\infty < 2x \leq 6$

Cambiamos de signo: $\infty > -2x \geq -6$

Sumamos seis: $\infty > 6-2x \geq 0$

Ordenamos de menor a mayor: $0 \leq 6-2x < \infty$

Extraemos raíz cuadrada: $0 \leq \sqrt{6-2x} < \infty$

Finalmente, $0 \leq y < \infty$ o $y \in [0;+\infty\rangle$

Es decir, la imagen será el intervalo $Im(f) = [0;+\infty\rangle$

(d) $y = \frac{x}{x^3-4x}$. El dominio y la imagen son, respectivamente, $Dom(y) =$ R$-\{-2;0;2\}$, $Im(y) = \langle -\infty; -1/4] \cup \langle 0; +\infty \rangle$ ¡Verificar estas respuestas!

(e) $F(t) = \sqrt{16-t^2}$. El dominio y la imagen son respectivamente: $Dom(F) = [-4;4]$, $Im(F) = [0;4]$ ¡Verificar estas respuestas!

1.2. CLASES DE FUNCIONES REALES. FUNCIONES ELEMENTALES

Una primera forma de clasificar a las funciones reales es mediante reglas de correspondencia, las cuales son expresiones elementales conocidas.

Aquí se presenta las funciones acompañadas tanto de su dominio como de su imagen y se proyectarán sus gráficas.

LA FUNCIÓN CONSTANTE.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = C$ $y = C$	$Dom(f) =$ R	$Im(f) = \{C\}$	$Gra(f) =$ Recta horizontal paralela al eje real X.

Ejemplo 1. En la Figura 1.9, se grafica la función constante $f(x) = 2$, aquí $C = 2$.

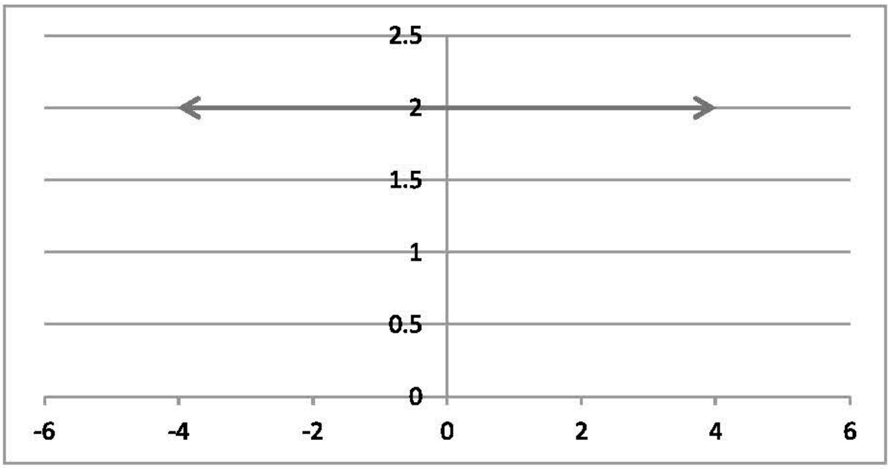


Figura 1.9

Ejercicio 1. Grafique las funciones reales a) $G(x) = -2$ b) $D(x) = \pi$.

Ejemplo 2. (PROBLEMA) Un frigorífico tiene capacidad para 1000 kg de carne y por cada kg se paga 0,35 céntimos. Los días sábados siempre se vende toda la capacidad instalada de refrigeración. ¿Cuánto se recibe por el uso del frigorífico los días sábados si el pago tiene que hacerse se haga o no uso del frigorífico?

Solución.

Ingreso = (N° de kilos) x (precio de cada kg) = (1000) x (0,35) = 350 nuevos soles.

La función constante será $f(x) = 0{,}35$, $Dom(f) = [0; 1000]$, $Im(f) = \{0{,}35\}$

Los días sábados se recibe 350 nuevos soles.

LA **FUNCIÓN** IDENTIDAD .

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = x$ $y = x$	$Dom(f) = \mathrm{R}$	$Im(f) = \mathrm{R}$	$Gra(f)$ es una recta que biseca al primer y tercer cuadrante.

Ejemplo 3. Realizar la gráfica de la función identidad.

Solución. Coincide con la gráfica de la recta $y = x$. Se muestra la gráfica de $f(x) = x$. (Ver Figura 1.10).

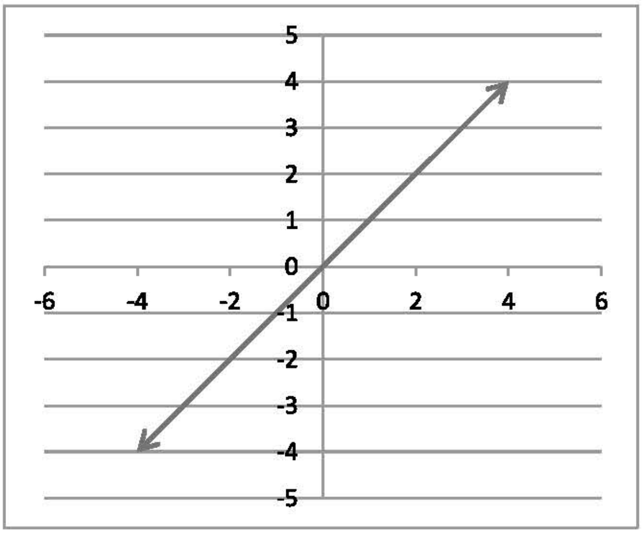


Figura 1.10

LA **FUNCIÓN** LINEAL O **POLINÓMICA** DE GRADO UNO.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = mx + b$ $y = mx + b$	$Dom(f) = \mathrm{R}$	$Im(f) = \mathrm{R}$	$Gra(f)$ es una recta no vertical.

Cuando $b = 0$, la recta pasa por el origen de coordenadas, esto es por $(0; 0)$ y cuando $b \neq 0$, no pasa por el origen de coordenadas.

Nota. La constante m se denomina pendiente de la recta y mide su grado de inclinación. Cuando $m > 0$, la recta se inclina hacia la derecha; cuando $m < 0$, la recta se inclina hacia la izquierda.

Ejemplo 4. Realizar la gráfica de las funciones lineales a continuación:

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $g(x) = -5x/2$

Solución.

a) La gráfica de la función $f(x) = 2x - 3$ es una recta que no pasa por el origen de coordenadas. Como $m = 2 > 0$, la recta se inclina hacia la derecha. (Ver Figura 1.11).

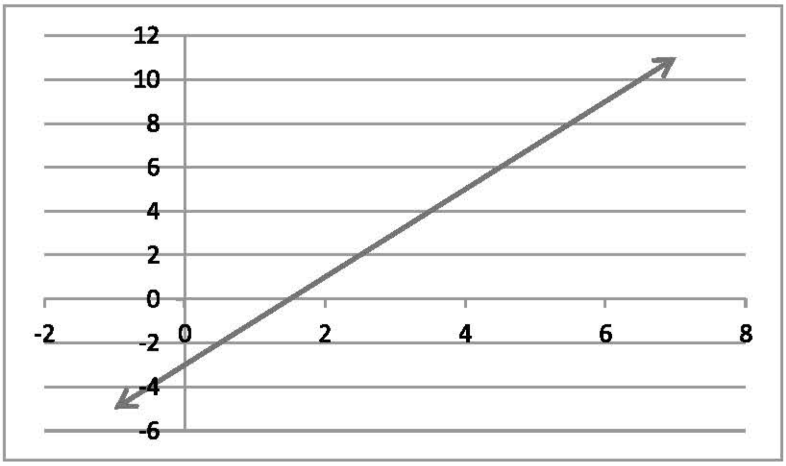


Figura 1.11

b) La gráfica de la función $g(x) = -\frac{5x}{2}$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Como $m = \frac{-5}{2} < 0$, la recta se inclina hacia la izquierda. Tal como se muestra en la Figura 1.12.

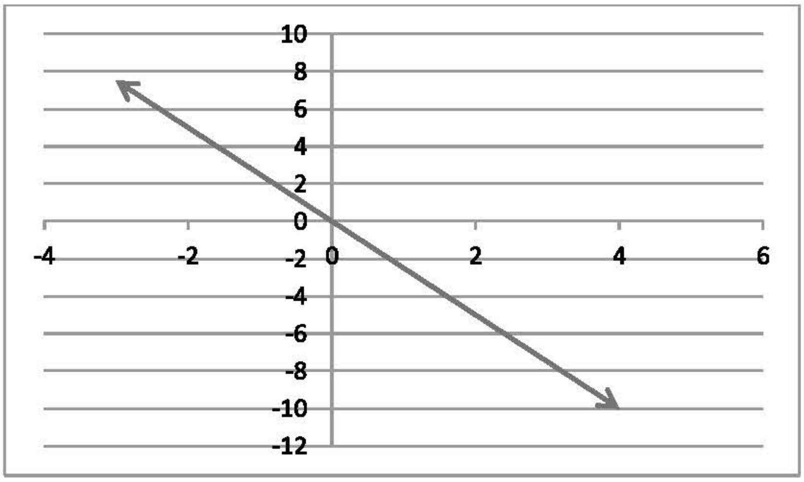


Figura 1.12

Ejemplo 5. (*PROBLEMA*) Un fabricante de patines estima sus costos de producción mediante la función real $C(x) = 300 + 40x$, donde "x" es el número de unidades producidas. Graficar la función de costos para $0 \leq x \leq 200$ y calcular el costo para $x = 0$, $x = 40$, $x = 90$ y $x = 150$. Interprete para cada caso y señale el costo en dólares.

Solución.

El valor $C(0) = 300$ significa que el costo fijo de la empresa es de 300 dólares.

El valor $C(40) = 1900$ significa que el costo de producción por 40 pares de patines es de 1 900 dólares.

De forma similar se interpreta otros casos para nuevas unidades de producción.

Nota. El valor 40 en la ecuación de costos, que es la pendiente de la recta, representa el "incremento variable del costo" por cada unidad de aumento en la producción.

En la Figura 1.13, se ubicaron los puntos $(0;\ 300)$ y $(200;\ 8\,300)$, mostrándose una recta.

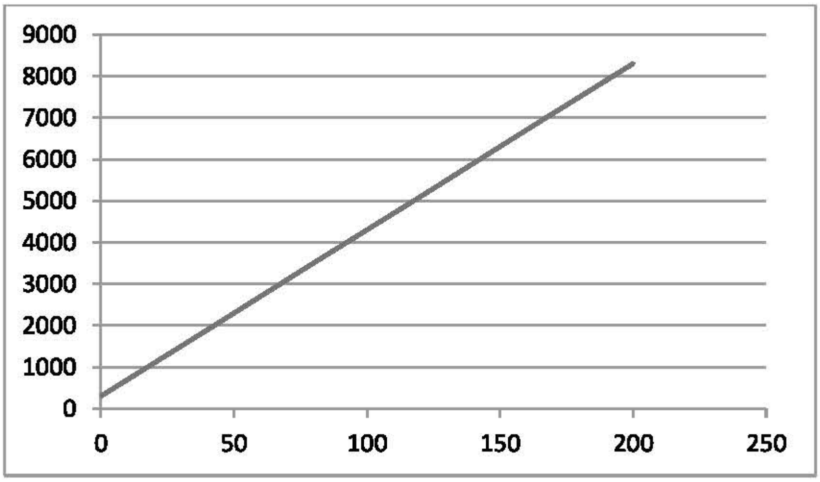


Figura 1.13

En este problema se da como intervalo dominio a $Dom(f) = [0; 200]$; le corresponde el intervalo imagen $Im(f) = [300;\ 8300]$.

OBSERVACIÓN 1. Con respecto a *dominios* se puede observar hasta aquí, dos aspectos:

a) Cuando el dominio se obtiene de la regla de correspondencia y de la definición de dominio, es un *dominio teórico*.

b) Cuando el dominio es sujeto a condiciones de un problema particular, se trata de un *dominio lógico* que tiene sentido con la naturaleza del problema y sus restricciones pertinentes.

LA LÍNEA RECTA. LA PENDIENTE. ECUACIONES DE LA RECTA

ECUACIONES LINEALES Y GRÁFICAS.

Se puede distinguir los dos siguientes *problemas* básicos:

i) Dada una ecuación lineal $E(x; y) = 0$, puede dibujarse su gráfica.

ii) Dada cierta información respecto a una línea recta en un sistema de coordenadas, es factible encontrar su ecuación de dos variables $E(x; y) = 0$.

Una *solución* de una ecuación lineal de dos variables se entiende como el par ordenado $(x; y)$ de números reales que satisfacen dicha ecuación.

El conjunto solución de una ecuación lineal de dos variables es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación.

Ejemplo 6. El par ordenado $(0; -3)$ es una solución de la ecuación lineal $3x - 4y = 12$. Encuentre dos "puntos solución" más.

Graficando la ecuación dada en el ejemplo, se obtiene:

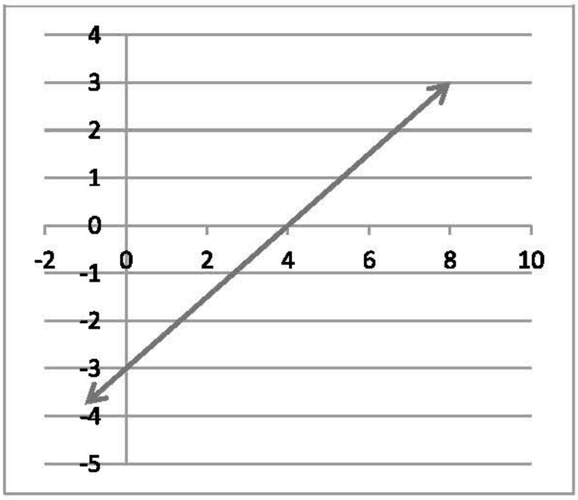


Figura 1.14

Otros puntos se consiguen de dar valores a y o a x, así como de obtener los valores de la otra variable en la ecuación $3x - 4y = 12$. Dichos puntos son $(0; -3)$, $(4; 0)$, $(8;\ 3)$.

OBSERVACIÓN 2.

i) Cuando se dice que se construye la gráfica de una ecuación de dos variables, se quiere señalar que se traza la gráfica de su conjunto solución en un sistema de coordenadas rectangulares, el plano cartesiano.

ii) A la ecuación lineal $Ax + By = C$ se le conoce como la forma estándar de la ecuación de la recta.

iii) La gráfica de cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$, donde A y B son constantes (no ambas cero) es una línea recta.

iv) Para realizar la gráfica de una recta es suficiente identificar dos puntos de ella.

v) Al despejar la variable y se obtiene una función lineal de la forma $y = mx + b$ o $f(x) = mx + b$.

Ejemplo 7. Construya la gráfica de las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 4y = 12$ b) $y = 2x - 1$

c) $y = \frac{x}{2} + 2$, con $-8 \leq x \leq 10$.

Solución. Tabúlese un par de puntos para cada caso por donde pasará la recta.

a) Graficando la recta $3x + 4y = 12$., se concluye que esta es ilimitada. (Ver Figura 1.15)

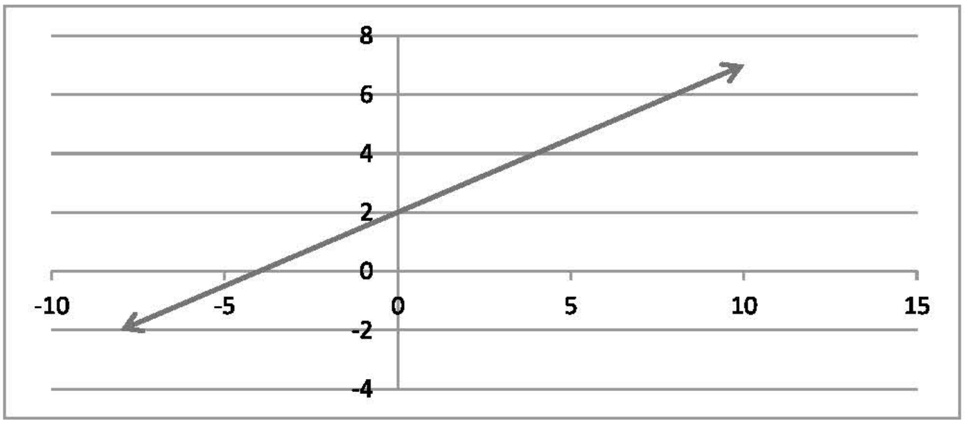


Figura 1.15

b) Graficando la recta $y = 2x - 1$. Esta es ilimitada, a fin de verificarlo véase la Figura 1.16.

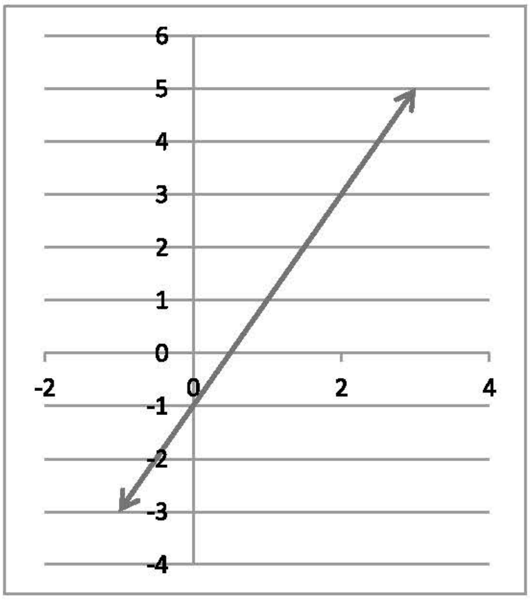
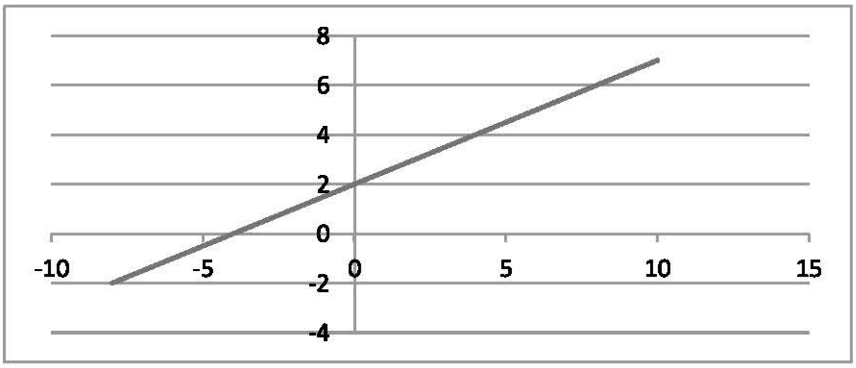


Figura 1.16

c) Graficando la recta $y = \frac{x}{2} + 2$, con $-8 \leq x \leq 10$, es limitada al intervalo dado. (Ver Figura 1.17).



PENDIENTE DE UNA RECTA. Es de gran utilidad tener la medida numérica de la inclinación de una recta. Para este propósito se utiliza el concepto de **pendiente** de una recta, a la cual se denota por "m".

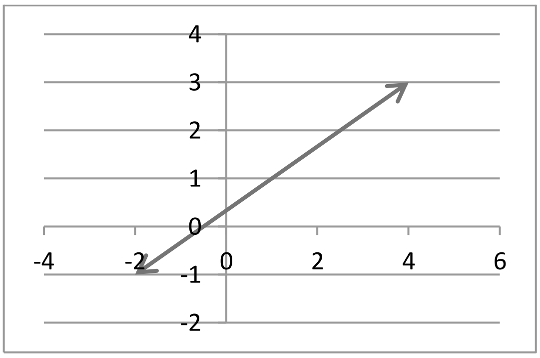
La pendiente "m" de una recta que pasa por los puntos $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ se obtiene de la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, con $x_1 \neq x_2$.

OBSERVACIÓN 3. La pendiente de una recta vertical no está definida. En general, siendo "m" la pendiente de una recta, se cumple lo siguiente:

Si la pendiente $m > 0$, la recta se inclina hacia la derecha. Figura 1.18.

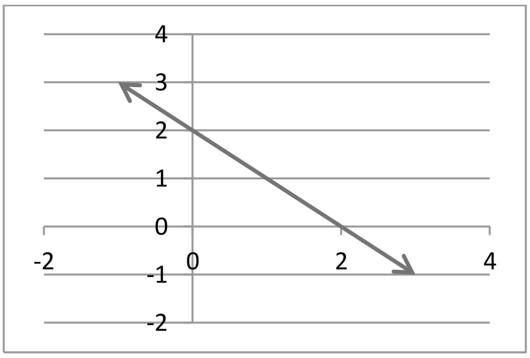
Si la pendiente $m < 0$, la recta se inclina hacia la izquierda. Figura 1.19.

Si la pendiente $m = 0$, la recta es horizontal (función constante). Figura 1.20.



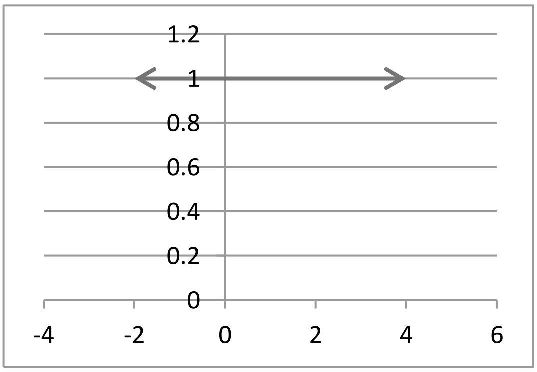
Pendiente positiva: $m > 0$

Figura 1.18



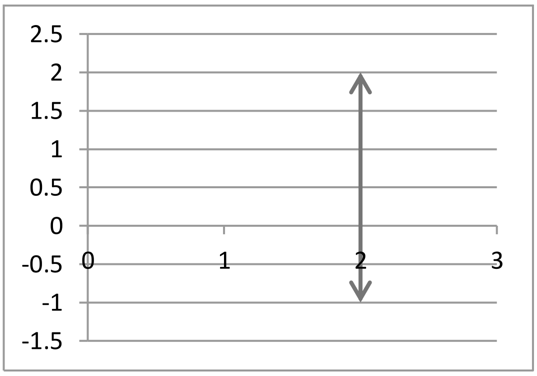
Pendiente negativa: $m < 0$

Figura 1.19



Pendiente cero: $m = 0$

Figura 1.20



Pendiente no existe o $m = \infty$

Figura 1.21

Nota. Cuando la recta es dada en su forma estándar $Ax + By = C$, su pendiente se da mediante $m = -\frac{A}{B}$.

Ejemplo 8. Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2;5)$ y $(4;-7)$. Realice una gráfica.

Solución. En la Figura 1.22, se grafica la recta que pasa por los dos puntos dados.

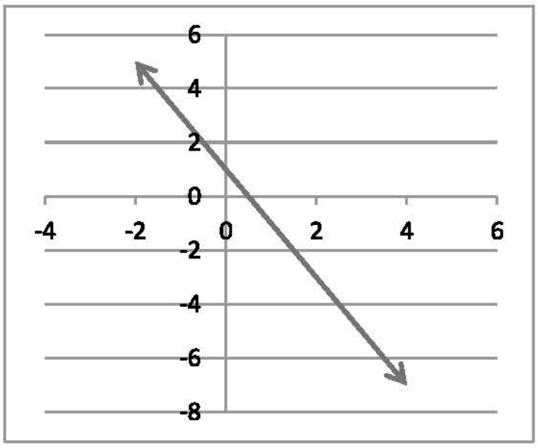


Figura 1.22

La pendiente $m=-2$. Se llega a dicha respuesta al realizar $(x_1;y_1)=(-2{,}5)$ y $(x_2;y_2)=(4;-7)$ y aplicar $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-7-5}{4-(-2)}=\frac{-12}{6}=-2$.

Ejemplo 9. ¿Qué pendiente tendrá la recta cuya ecuación es $2x-3y\ =\ 6$?

Solución.

Comparando la recta $2x-3y\ =\ 6$ con la forma estándar $Ax+By=C$, resulta la pendiente $m=-\frac{A}{B}=\frac{2}{3}$. A continuación, se muestra en la Figura 1.23 la gráfica que le corresponde.

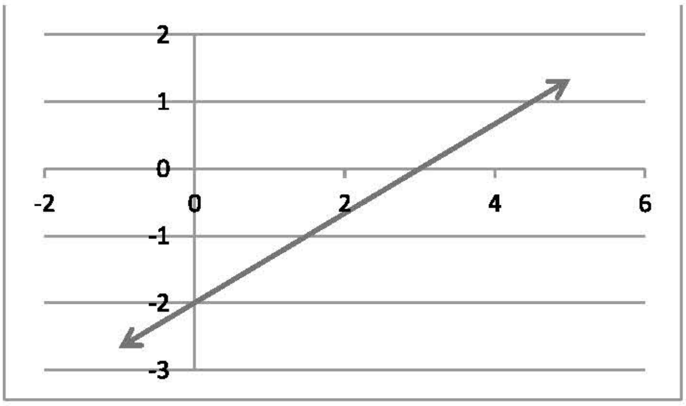


Figura 1.23

ECUACIONES DE LA RECTA. Son cuatro casos y todos se pueden reducir a la forma estándar $Ax+By=C$. También se la puede escribir como función en la forma $y=mx+b$.

i) Cuando se conoce dos puntos de la recta $(x_1;y_1)$ y $(x_2;y_2)$, la ecuación es obtenida de $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$.

ii) Cuando se conoce un punto de la recta $(x_1; y_1)$ y su pendiente "m", la ecuación se obtiene de $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$.

iii) Cuando se conoce la pendiente de la recta "m" y la ordenada en el origen "b", su fórmula es $y = mx + b$.

iv) Cuando se conocen los cortes "a" y "b" que realiza la recta en los ejes coordenados X e Y, respectivamente, es dada a través de $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Ejemplo 10. Determine la ecuación de la recta que se pide y haga su gráfica en el plano cartesiano.

a) Recta que pasa por los dos puntos $(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3})$ y $(3; \frac{5}{3})$.

b) Recta que pasa por el $(6; -6)$ y cuya pendiente es $m = \frac{1}{3}$.

c) Recta que tiene pendiente $m = 2$ y su ordenada en el origen es $b = -\frac{3}{2}$.

d) Recta que corte al eje X en 4, y al eje Y en –5.

Solución.

Use la fórmula adecuada para cada caso.

(a) Reemplazamos los puntos $(x_1; y_1) = (-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3})$ y $(x_2; y_2) = (3; \frac{5}{3})$ para el primer caso en $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Luego se tiene la ecuación de la recta en forma estándar: $42x - 81y - 26 = 0$. (Ver Figura 1.24).

En forma de función queda expresada como sigue: $\quad y = \frac{42x - 26}{81}$

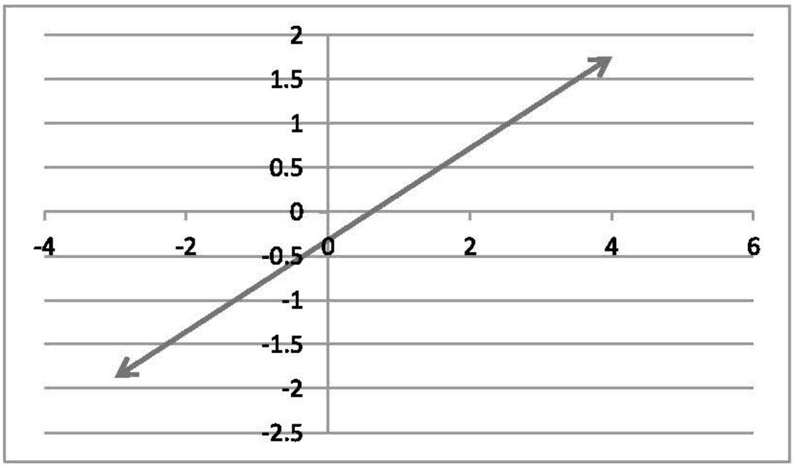


Figura 1.24

(b) Reemplazamos el punto $(x_1; y_1) = (6; -6)$ y la pendiente $m = \frac{1}{3}$ para el segundo caso en $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Luego se tiene la ecuación de la recta en su forma estándar: $x - 3y - 24 = 0$. (Ver Figura 1.25).

En forma de función queda expresada así: $y = \frac{x-24}{3}$

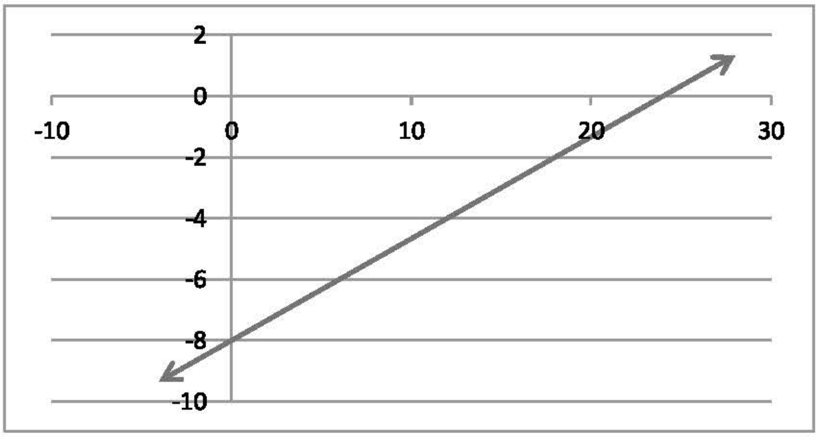


Figura 1.25

(c) Reemplazando la pendiente $m = 2$ y la ordenada en el origen es $b = -\frac{3}{2}$ para el tercer caso en $y = mx + b$.

Después se tiene la ecuación de la recta en su forma estándar: $2x - y - \frac{3}{2} = 0$. (Ver Figura 1.26)

En forma de función queda expresada de la siguiente manera: $y = 2x - \frac{3}{2}$

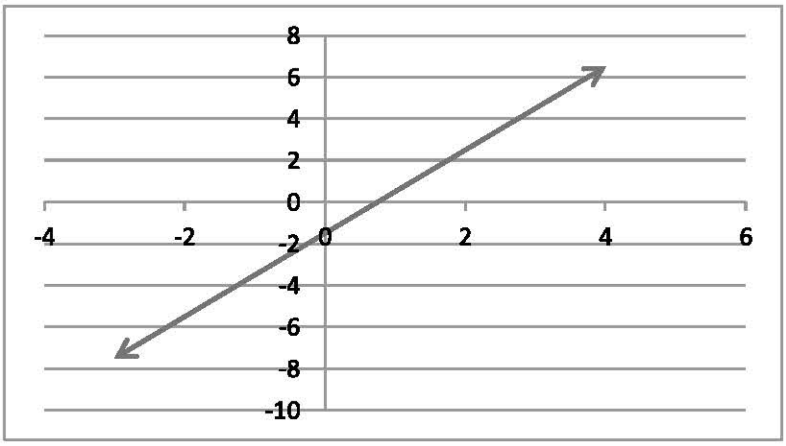


Figura 1.26

(d) Reemplazando $a = 4$, y $b = -5$ para el cuarto caso en $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; se llega a la ecuación de la recta en su forma estándar: $5x - 4y - 20 = 0$. (Ver Figura 1.27).

En forma de función queda expresada por $y = \frac{5x-20}{4}$.

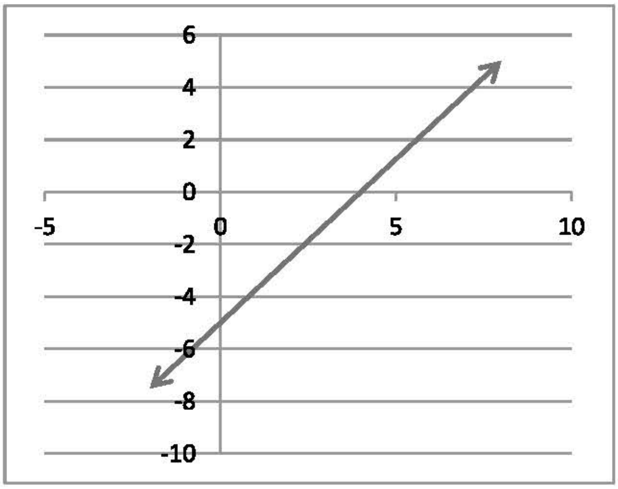


Figura 1.27

Ejemplo 11. (*PROBLEMA*) La gerencia de una empresa que fabrica patines tiene costos fijos (costo a cero salidas) de $300 diarios y costos totales de $4 300, cuando hay una salida de 100 pares de patines por día. Suponga que el costo C está linealmente relacionado con la salida.

a) Determine la pendiente de la recta que une los puntos asociados con las salidas.

b) Encuentre la ecuación de la recta que relaciona la salida con el costo. Escriba la respuesta final en la forma $y = mx + b$.

c) Construya la gráfica de la ecuación del costo tomado de la parte (b) para el intervalo [0; 200]. Use una escala apropiada.

Solución.

(a) Para $x = 0$ salidas, el costo es $300 y para $x = 100$ salidas el costo es $4 300; es decir, la recta pasa por los puntos (0; 300) y (100; 4 300), entonces la pendiente de la recta es dada por $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4300-300}{100-0} = 40$.

La pendiente $m = 40$ obtenida de la recta representa el incremento en el costo total por cada unidad adicional producida y se conoce como costo marginal.

(b) Se debe encontrar la ecuación de la recta que pase por el punto (0; 300), cuya pendiente es $m = 40$; entonces, $y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow \ y - 300 = 40(x - 0)$. Donde la función será $y = 40x + 300$.

(c) La gráfica se realiza usando los puntos extremos $P = (0;\ 300)$ y $Q = (200;\ 8\,300)$ (Ver Figura 1.28).

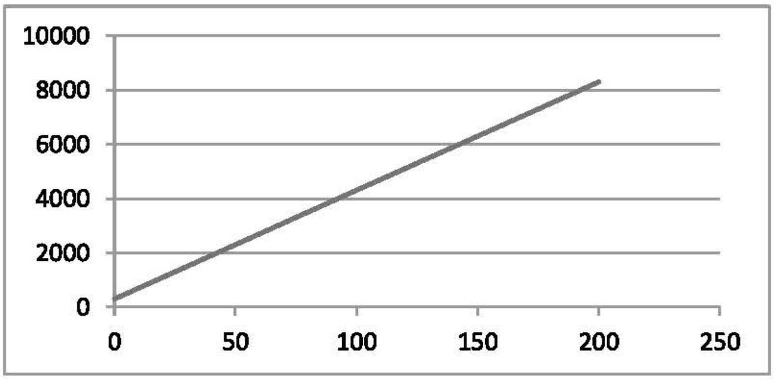


Figura 1.28

Ejemplo 12. (*PROBLEMA*) En un experimento de nutrición, un biólogo desea preparar una dieta especial para animales de laboratorio. Dispone de dos mezclas de alimentos, A y B. Si la mezcla A contiene 20% de proteína y la mezcla B, 10% de proteína ¿qué combinaciones de cada mezcla proporcionarán exactamente 20 gramos de proteína? Con "x" se representa la cantidad que se usa de A y con "y" la que se usa de B. Después, escriba la ecuación lineal que relaciona "x", "y" y 20. Construya la gráfica de esta ecuación para $x \geq 0, y \geq 0$. Elija un par de puntos de la gráfica e interprete en el contexto del problema.

Solución. La función será $y = 200 - 2x$.

En efecto, siendo x la cantidad de mezcla A así como y la cantidad de mezcla B; y según los datos $\frac{20}{100}x + \frac{10}{100}y = 20 \rightarrow \frac{2}{10}x + \frac{1}{10}y = 20 \rightarrow 2x + y = 200$. (Ver Figura 1.29).

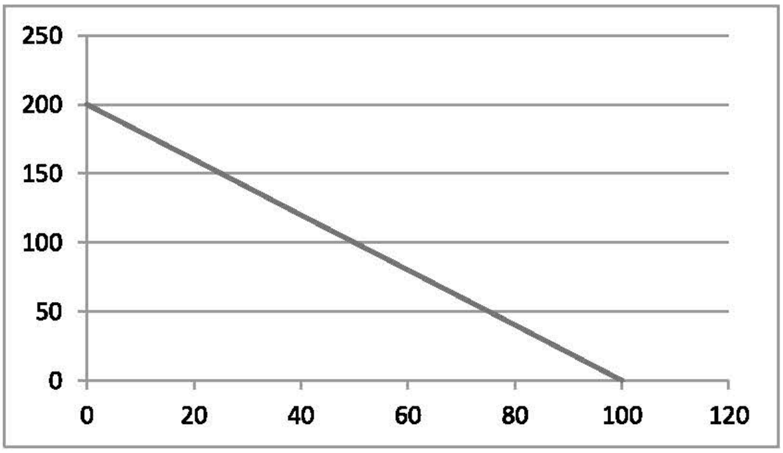


Figura 1.29

FUNCIóN CUADRÁTICA O POLINóMICA DE GRADO DOS.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = ax^2 + bx + c$ $y = ax^2 + bx + c$ Con $a \neq 0$	$Dom(f) = \mathrm{R}$	$Im(f) = [k; +\infty\rangle$, si $a > 0$ $Im(f) = \langle -\infty; k]$, $si\ a < 0$	$Gra(f)$ es una parábola.

OBSERVACIÓN. Una función cuadrática siempre puede escribirse en la forma siguiente: $f(x) = a(x-h)^2 + k$, donde el punto $V = V(h;k)$ es el vértice de la parábola. Además:

Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba, el vértice V es el punto mínimo de f y la imagen es el intervalo $Im(f) = [k; +\infty\rangle$.

Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo, el vértice V es el punto máximo de f y la imagen es el intervalo $Im(f) = \langle -\infty; k]$.

Ambas se muestran en la gráfica a continuación:

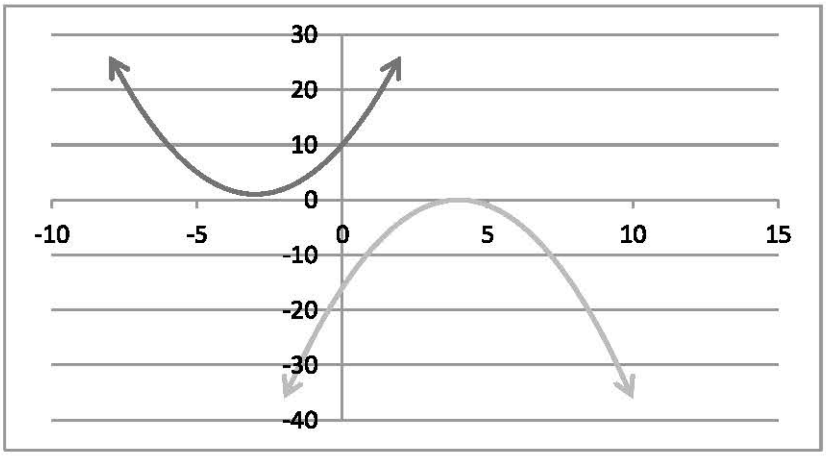


Figura 1.30

Ejemplo 13. Graficar la ecuación cuadrática $y = 2x^2 - 4x$ e indicar su dominio y su imagen.

Solución. Tabular algunos pares ordenados, ubicarlos en el plano cartesiano y suavizarlos con una curva "parábola". $Dom(y) = \mathrm{R}$ y la imagen es el intervalo $Im(y) = [-2; +\infty\rangle$. (Ver Figura 1.31).

En efecto, $y = 2x^2 - 4x \rightarrow y = 2[x^2 - 2x + 1 - 1] \rightarrow y = 2(x-1)^2 - 2 \rightarrow V(1; -2)$.

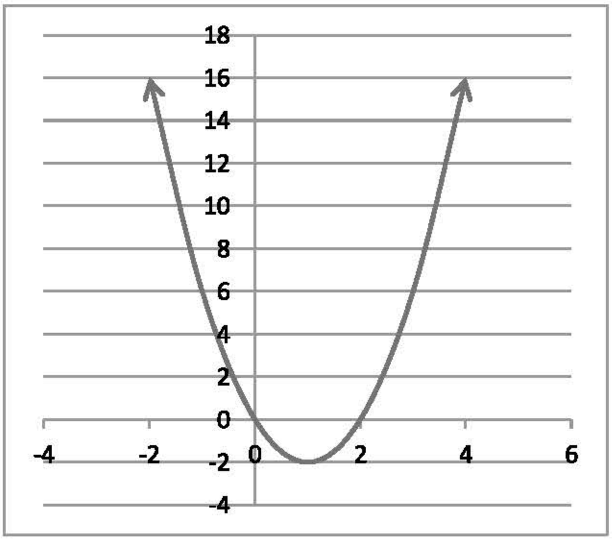


Figura 1.31

Ejemplo 14. (PROBLEMA) Calcular el máximo ingreso de una compañía que se estima mediante la función real $R(p) = 6\,000p - 30p^2$, siendo p el precio con $0 \leq p \leq 150$ en dólares.

Solución. Aplicando la definición y la observación respectiva, para una función cuadrática en general, se debe tener $f(x) = a(x-h)^2 + k$, adaptando a función "R" de variable "p" se tendrá $R(p) = a(p-h)^2 + k$.

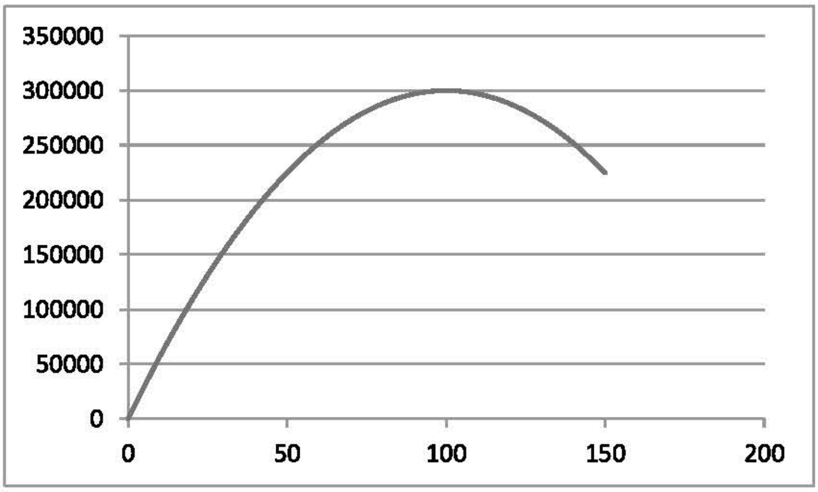


Figura 1.32

Completando cuadrados en la función dada se logra obtener la función particular que aparece en la Figura 1.32:

$$R(p) = -30(p - 1000)^2 + 300\,000$$

Al comparar las $R(p)$ general y particular: $a = -30$, se llega a la conclusión de que la parábola abre hacia abajo y el vértice es el punto V=V(100; 300 000); esto es el punto máximo.

Significa que el máximo ingreso de la compañía es de \$300 000 y se logra cuando el precio es de \$100.

Ejemplo 15. (*PROBLEMA*) Supongamos que la cantidad de desperdicios echados en un río es una función cuadrática del tiempo. Si se arrojan 11,5 toneladas en un periodo de 5 días, y 20,8 toneladas después de 8 días, hallar la cantidad lanzada en t días. Luego determinar la cantidad para 12 días.

Solución.

La primera expresión nos indica que se busca la función $w(t) = at^2 + bt + c$, en donde no se conocen a, b y c; sin embargo, estas pueden ser determinadas usando las siguientes condiciones: Si $t = 0, w = 0$; si $t = 5, w = 11{,}5$ y si $t = 8, w = 20{,}8$.

Al reemplazar los datos en la función $w(t)$ se obtiene que $a = 0{,}1$; $b = 1{,}8$ y $c = 0$, por tanto, finalmente la función será $w(t) = 0{,}1t^2 + 1{,}8t$.

Asimismo, se pide calcular $w(12) = (0{,}1)(12)^2 + (1{,}8)(12) = 36$; esto significa que a los 12 días, 36 toneladas de desperdicios son echados al río.

En la Figura 1.33, se muestra la gráfica correspondiente.

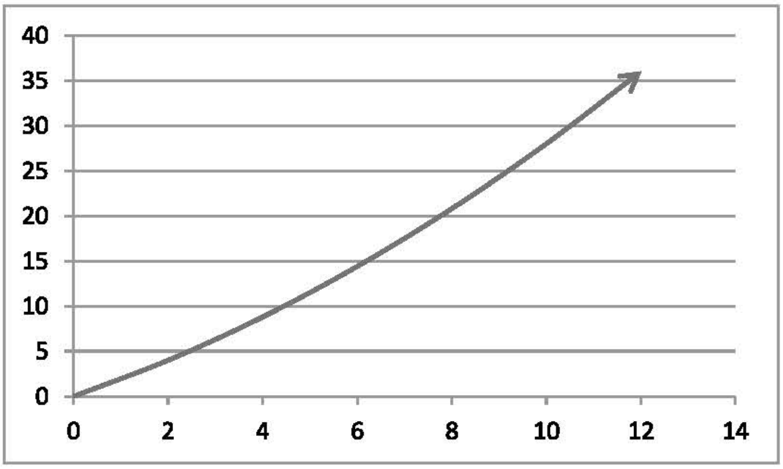


Figura 1.33

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = \|x\|$ $y = \|x\|$ Con $\|x\| = \begin{cases} x, si\ x \geq 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{cases}$	$Dom(f) = \mathrm{R}$	$Im(f) = [0; +\infty >.$	$Gra(f)$ dos rayos que bisecan al primer y segundo cuadrante.

Esta función puede generalizarse escribiendo otras funciones como $f(x) = |g(x)|$, entre otras.

Ejemplo 16. Graficar la función valor absoluto para $-10 \leq x \leq 10$.

Solución. Tabular y graficar en el plano cartesiano $f(x) = |x|$. (Ver Figura 1.34)

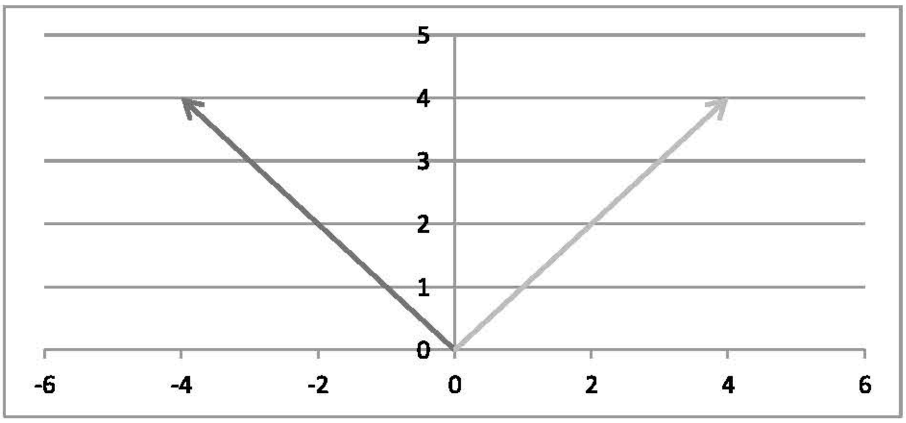


Figura 1.34

Ejemplo 17. Graficar la función $f(x) = |2x+4|$ para $-5 \leq x \leq 5$.

Solución. Tabular y graficar en el plano cartesiano. (Ver Figura 1.35).

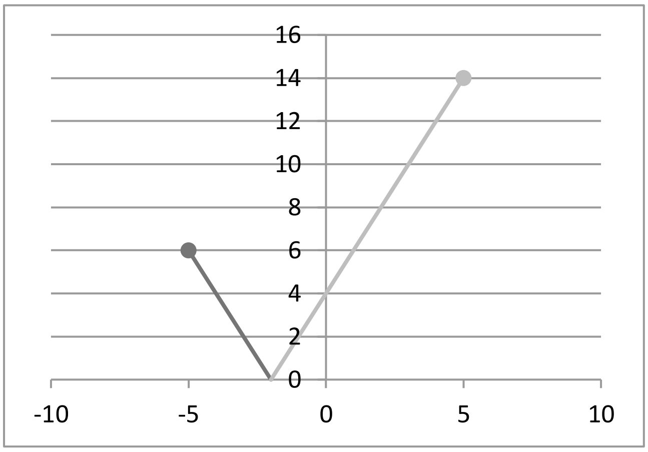


Figura 1.35

FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = \sqrt{x}$ $y = \sqrt{x}$	$Dom(f) = [0;\ +\infty\rangle$	$Im(f) = [0; +\infty >$	$Gra(f) =$ Semiparábola que abre hacia la derecha.

Generalizando esta función se puede tener $f(x) = \sqrt{S(x)}$, donde $S(x)$ es cualquier expresión real que depende de "x", cuyo dominio sale de la condición $S(x) \geq 0$.

Ejemplo 18. Realizar la gráfica de la función raíz cuadrada.

Solución. Tabular y graficar en el plano cartesiano $f(x) = \sqrt{x}$. (Ver Figura 1.36)

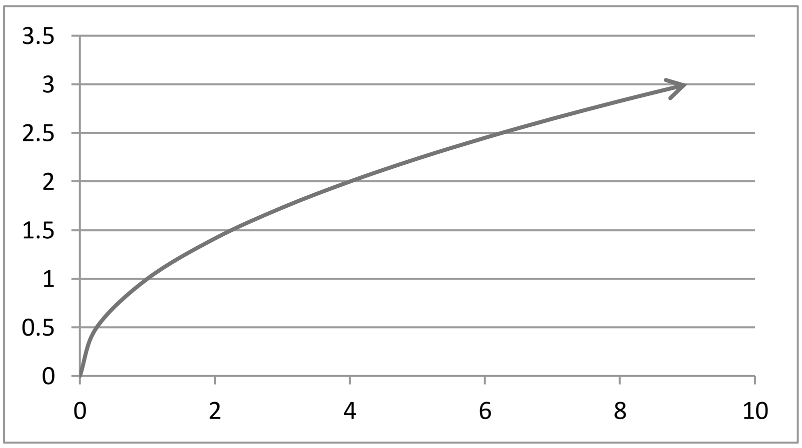


Figura 1.36

Ejemplo 19. Para la función $f(x) = \sqrt{2x+6}$ determinar el dominio, la imagen y la gráfica.

Solución. Tabular y graficar en el plano cartesiano. Es una semiparábola, parte positiva.

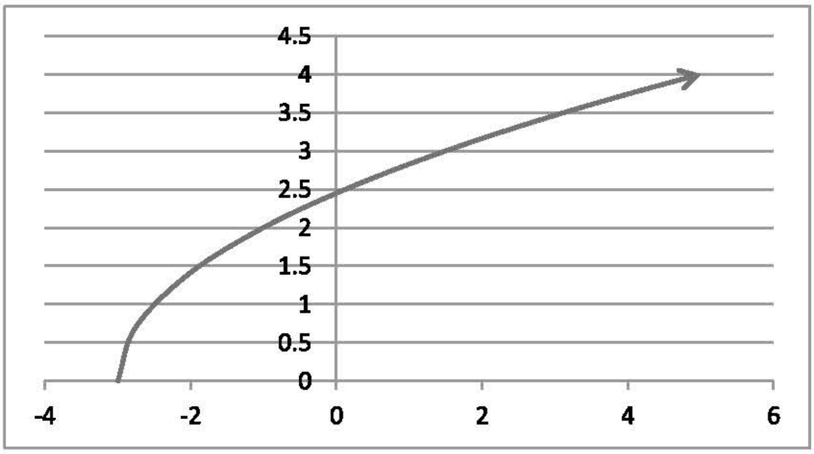


Figura 1.37

Se observa que su dominio es $Dom(f) = [-3; +\infty\rangle$ y su imagen, $Im(f) = [0; +\infty\rangle$. (Ver Figura 1.37).

Ejemplo 20. (*PROBLEMA*) El rendimiento de un corrector periodístico de estilo es estimado mediante la función $f(t) = \sqrt{\frac{t}{2}}$, donde "$f$" representa a los artículos corregidos y "t" es el tiempo dado en minutos. Calcular e interpretar $f(0)$, $f(2)$, $f(8)$ y $f(18)$.

Solución.

t	0	2	8	18	32	50
$f(t)$	0	1	2	3	4	5

$f(0) = 0$, significa que al inicio hay cero artículos corregidos.

$f(2) = 1$, significa que a los dos minutos hay 1 artículo corregido.

$f(8) = 2$, significa que pasados ocho minutos ha corregido dos artículos.

$f(18) = 3$, significa que pasados dieciocho minutos ha corregido tres artículos.

A medida que el tiempo transcurre el número de artículos corregidos aumenta proporcionalmente, aunque en menor medida. ¿Cuál es la razón? Intente explicarlo en un contexto real. (Ver Figura 1.38).

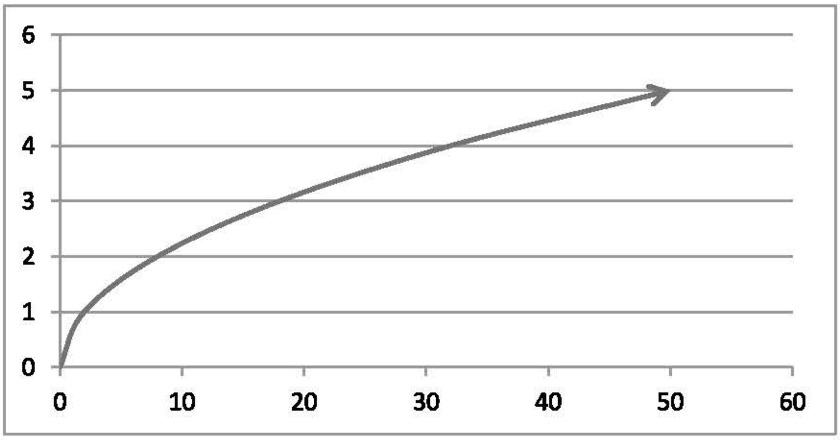


Figura 1.38

FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = [\![x]\!]$ $y = [\![x]\!]$ Con $[\![x]\!] = n$ si y solo si $n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$	$Dom(f) = R$	$Im(f) = Z$	$Gra(f)$ es un conjunto de segmentos horizontales escalonados de longitud 1.

Generalizando se pueden escribir funciones como $f(x) = [\![g(x)]\!]$, entre otras.

Ejemplo 21. Realizar la gráfica de la función Mayor entero $f(x) = [\![x]\!]$ para $-4 \leq x \leq 4$. Figura 1.39

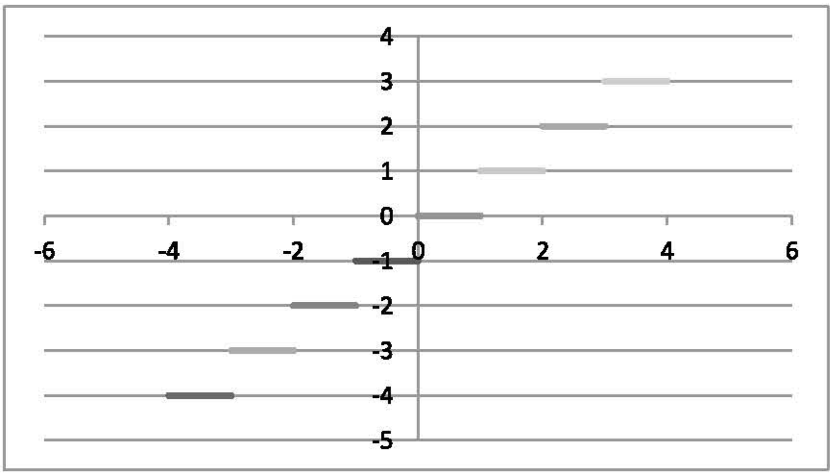


Figura 1.39

Ejemplo 22. Realice la gráfica de la función $f(x) = [\![\sqrt{x}]\!]$. (Ver Figura 1.40).

Solución. $[\![\sqrt{x}]\!] = n \Leftrightarrow n \leq \sqrt{x} < n+1 \Leftrightarrow n^2 \leq x < (n+1)^2$, pues $x \geq 0$.

Si $n = 0$: $[\![\sqrt{x}]\!] = 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1\rangle$ Si $n = 1$: $[\![\sqrt{x}]\!] = 1 \Leftrightarrow x \in [1; 4\rangle$

Si $n = 2$: $[\![\sqrt{x}]\!] = 2 \Leftrightarrow x \in [4; 9\rangle$ Si $n = 3$: $[\![\sqrt{x}]\!] = 3 \Leftrightarrow x \in [9; 16\rangle$

Si $n = 4$: $[\![\sqrt{x}]\!] = 4 \Leftrightarrow x \in [16; 25\rangle$

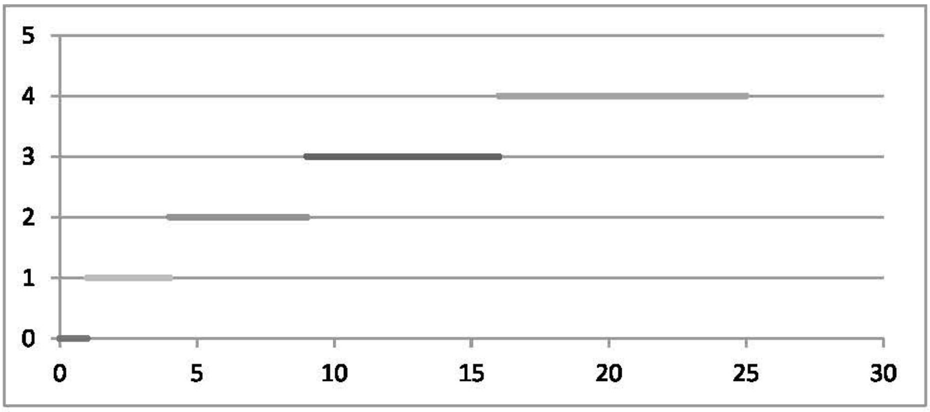


Figura 1.40

FUNCIÓN POLINÓMICA DE GRADO n.

Regla de correspondencia	$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$		
Polinomio de grado n	Dominio	Imagen	Gráfica
	$Dom(f) = R$	Si n es impar $Im(f) = R$. Si n es par, depende de la función.	$Gra(f)$, depende de la función.

Donde $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números reales con $a_n \neq 0$ y "n" es un número entero positivo por el cual el polinomio es de grado n.

Para valores particulares de "n", se tiene:

$n = 0 \rightarrow f(x) = a_0$ es una función constante o de grado cero. Recta horizontal.

$n = 1 \rightarrow f(x) = a_1x + a_0$ es una función lineal o de grado uno. Recta.

$n = 2 \rightarrow f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ es una función cuadrática o de segundo grado. Parábola.

En toda función polinómica, el dominio es todo el conjunto de números reales: $Dom(f) = \mathrm{R}$.

La imagen depende del grado n: Si n es impar la $Im(f) = R$; si n es par la $Im(f)$ ¡depende de la función polinómica dada!

Ejemplo 23. Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x - 1$.

Solución. El dominio es $Dom(f) = R$ y la imagen es $Im(f) = R$. Calcular los pares ordenados de la tabla, ubicarlos en el plano cartesiano y suavizarlos con una curva. (Ver Figura 1.41).

x	...	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3	...
y	...	-16	$-6{,}625$	-1	$1{,}625$	2	0875	-1	$-2{,}875$	-4	$-3{,}625$	-1	$4{,}625$	14	...

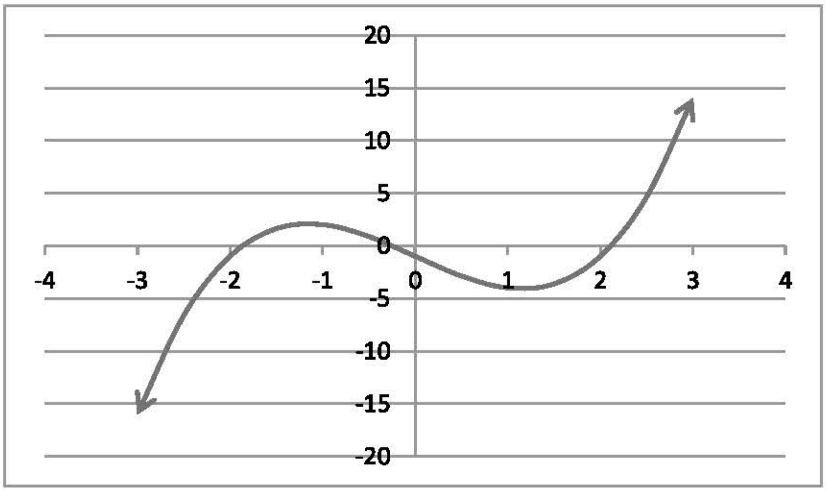


Figura 1.41

Ejemplo 24. (*PROBLEMA*) Una compañía estima sus ingresos mediante la función $R(x) = 4x - x^2$ con $x \in [0; 3]$, donde "R" es el ingreso en miles de dólares y "x" es la producción en miles de unidades. Calcular los ingresos para los niveles de producción de $x = 0$, $x = 1/2$, $x = 1$, $x = 3/2$, $x = 2$, $x = 5/2$ y $x = 3$. Graficar e interpretar.

Solución. Realice la gráfica en el intervalo dominio que se da: $[0; 3]$. (Ver Figura 1.42).

El dominio en esta función es para indicar que ella solo es significativa en el intervalo $[0; 3]$.

Figura 1.42

$R(0) = 0$: significa que cuando la venta es de 0 unidades, el ingreso es de 0 dólares.

$R(1{,}5) = 3{,}75$: denota que cuando la venta es de 1 500 unidades, el ingreso es de 3 750 dólares.

Nota. Puede hacerse otras interpretaciones: El ingreso máximo se da cuando la venta es de 2 000 unidades, este será de 4 000 dólares.

FUNCIÓN RACIONAL.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ o $y=\frac{p(x)}{q(x)}$, $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.	$Dom(f)=R-\{x/q(x)=0\}$	$Im(f)$, depende de la función.	$Gra(f)$, depende de la función.

Ejemplo 25. Realice la gráfica de las siguientes funciones e indique el dominio y la imagen:

a) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ b) $g(x)=\frac{1}{x-2}$ c) $y=|x^2-4|$

Solución.

(a) La función $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ tiene como dominio $Dom(f)=$ R e imagen $Im(f)=[-1;1]$. (Ver Figura 1.43).

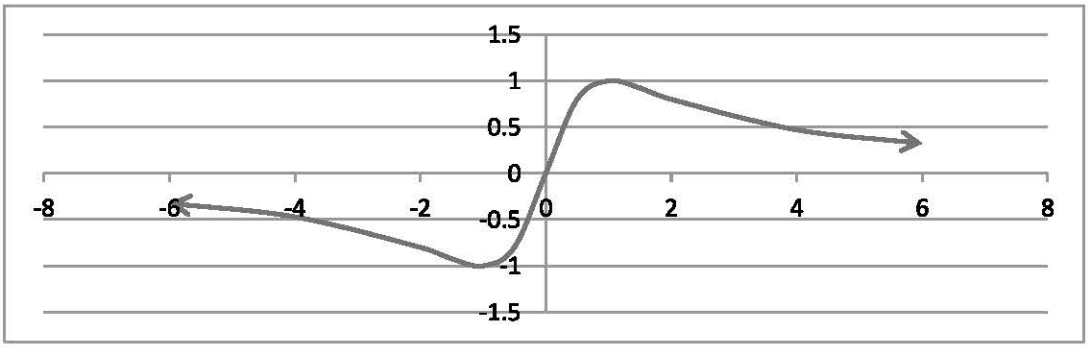


Figura 1.43

b) La función $g(x)=\frac{1}{x-2}$ tiene como dominio $Dom(f)=$ R $-\{2\}$ e imagen $Im(f)=$ R $-\{0\}$. Tal como se muestra en la Figura 1.44.

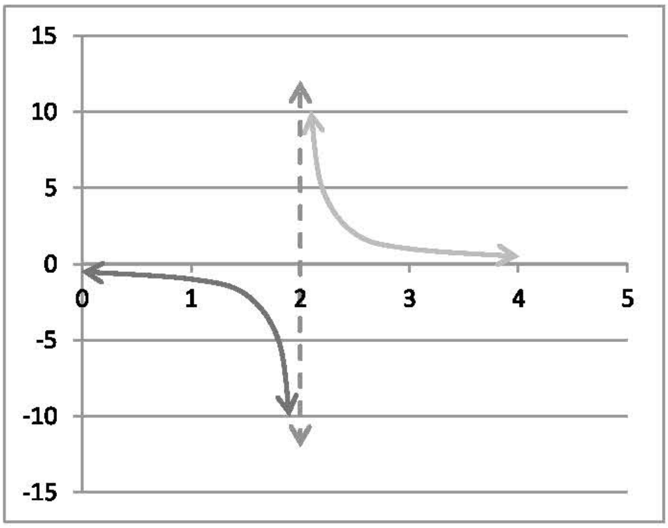


Figura 1.44

c) La función $y = |x^2 - 4|$ tiene como dominio $Dom(f) = \mathrm{R}$ e imagen $Im(f) = [0; +\infty\rangle$. (Ver Figura 1.45)

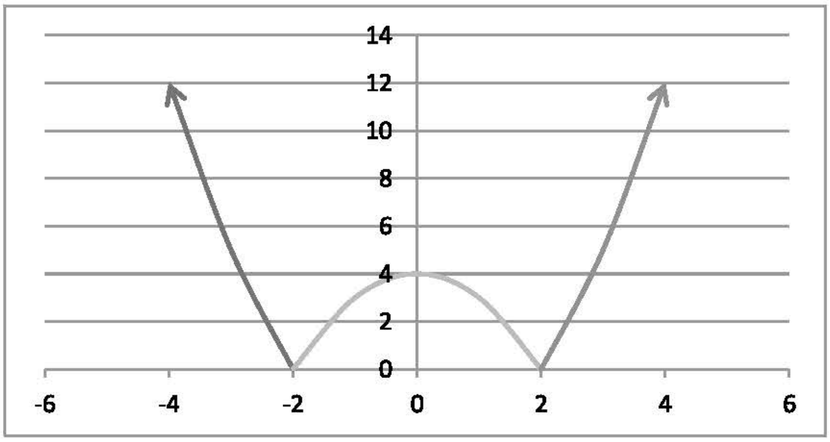


Figura 1.45

GRÁFICA DE FUNCIONES DIVERSAS.

Ejemplo 26. Graficar en el plano cartesiano, las siguientes funciones reales de variable real:

a) $f(x) = \frac{3}{2}x$ b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ c) $y = 3 + 4x - x^2$

Solución.

(a) Se hace una tabulación de la función $f(x) = \frac{3}{2}x$:

x	...	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
$f(x)$	...	$-1{,}5$	0	1,5	3	4,5	6	7.5	9	...

Se observa que el dominio es el intervalo $Dom(f) = R$ y la imagen, el intervalo $Im(f)$ = R; dado que en la regla de correspondencia no se descubre restricciones.

La gráfica de la función real $f(x) = \frac{3}{2}x$ se muestra en seguida como una recta. (Ver Figura 1.46).

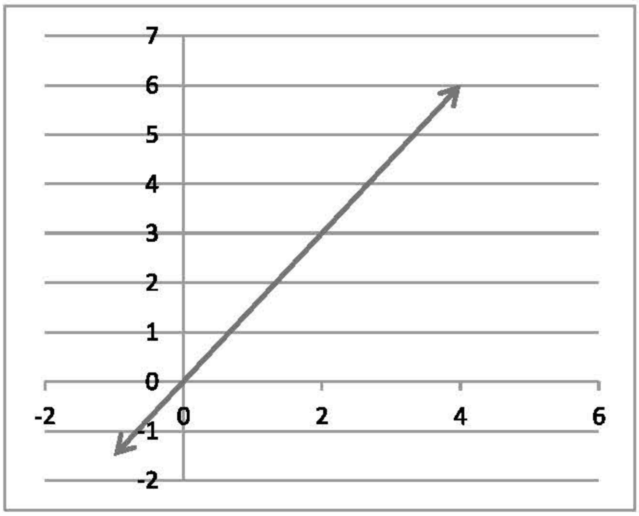


Figura 1.46

(b) Se hace una tabulación de la función $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$:

Se observa que el dominio es el intervalo $Dom(f) = [-3; 3]$, el cual surge de la condición $9 - x^2 \geq 0$. La imagen es el intervalo $Im(f) = [0; 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x)$	0	2,24	2,83	3	2,83	2,24	0	...

En la Figura 1.47, se muestra a continuación la gráfica de la función real $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ como una semicircunferencia, parte positiva (lo que está por sobre el eje X).

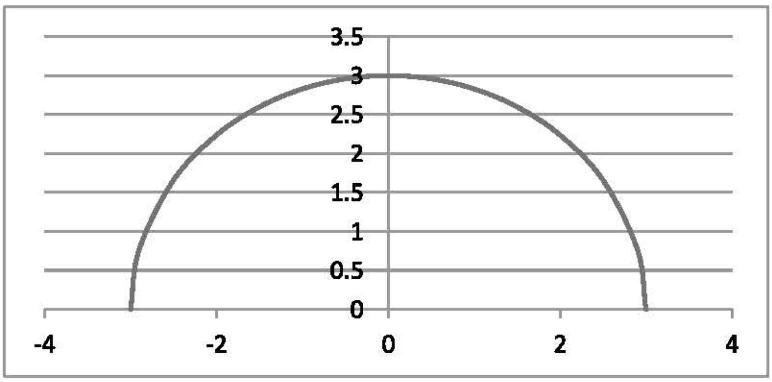


Figura 1.47

(c) Se hace la tabulación de la función real $y = 3 + 4x - x^2$.

x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
$f(x)$	...	-15	-8	-3	0	1	0	-3	-8	-15	...

Se advierte que el dominio es el intervalo $Dom(f) = \mathrm{R}$ y la imagen, el intervalo $Im(f) = \langle -\infty; 1]$. (Ver Figura 1.48).

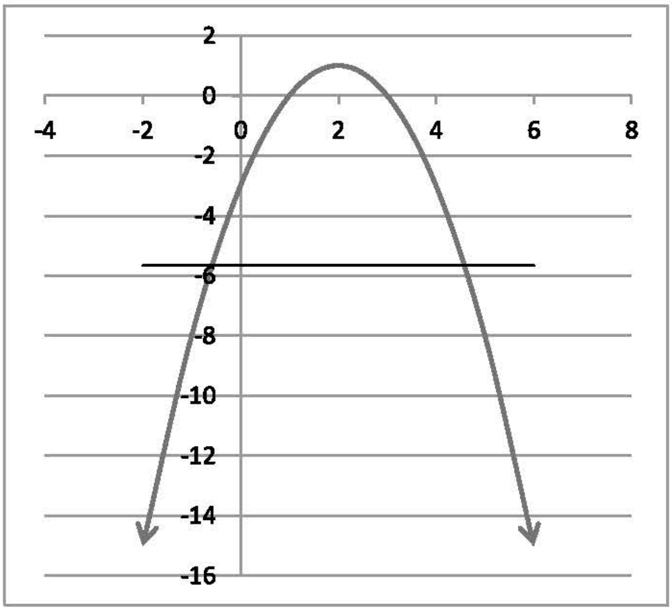


Figura 1.48

La gráfica de la función real $y = 3 + 4x - x^2$ es una parábola.

Ejemplo 27. Realice la gráfica de las funciones reales que se dan a continuación (en algunos casos se puede usar una escala apropiada):

a) $D(t) = 100 + 15t$, con $2 \leq t \leq 24$.

b) $h(x) = \frac{100x}{20+x}$ con $x \geq 0$.

Solución. Notamos que estas funciones son dadas con su respectivo dominio. Se tabula para el dominio, se ubica los puntos en el sistema de coordenadas y se suaviza mediante una curva continua.

a) La función $D(t) = 100 + 15t$ es dada con el dominio $2 \leq t \leq 24$. (Observar Figura 1.49).

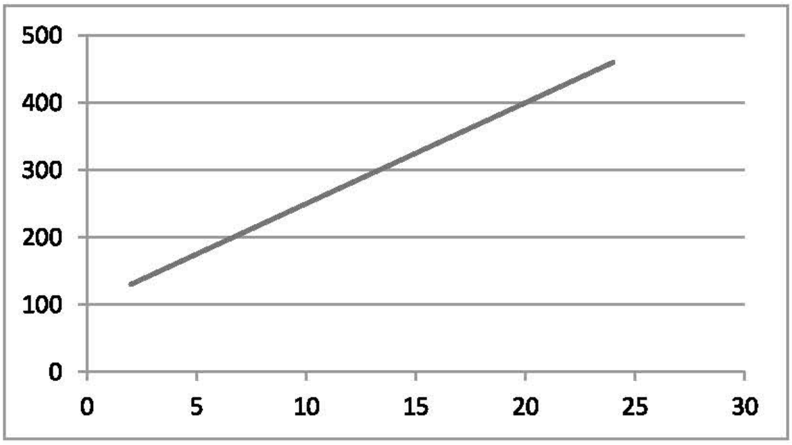


Figura 1.49

b) La función $h(x) = \frac{100x}{20+x}$ surge con el dominio $x \geq 0$. (Ver Figura 1.50).

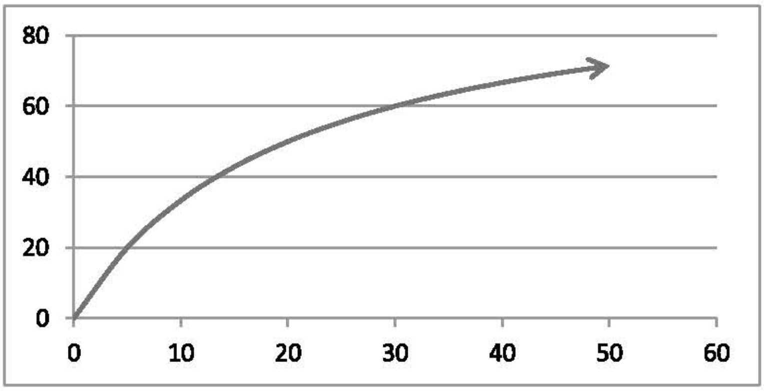


Figura 1.50

Ejemplo 28. Sea la función $h(x) = \begin{cases} x^2; x \leq 3 \\ x + 3; x > 3 \end{cases}$, determinar $h(-1)$, $h(3)$, $h(5)$, su dominio, su imagen y su gráfica.

Solución.

Se procede tal como en el ejemplo 7. La gráfica (Figura 1.51) resultante será la siguiente:

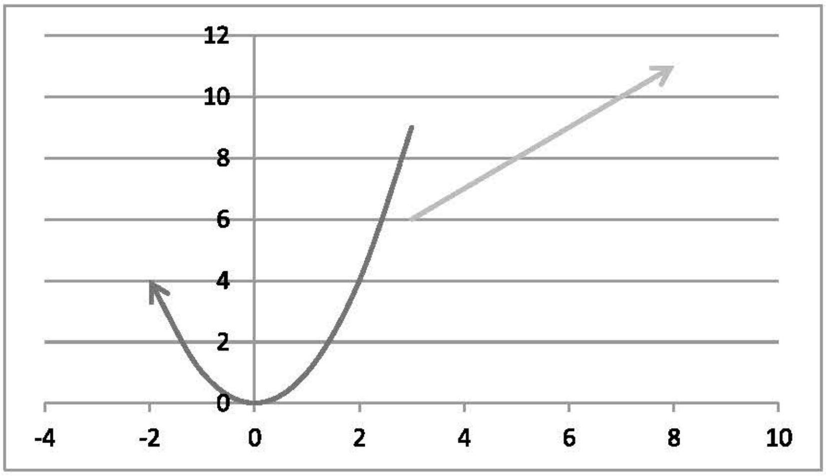


Figura 1.51

Ejemplo 29. Sea la función $h(x) = x^2 - 4x + 2$. Determinar dominio, imagen y gráfica.

Solución. El dominio es $Dom(f) = R$ y la imagen es $Im(f) = [-2; +\infty\rangle$. La gráfica (Figura 1.52) será la siguiente:

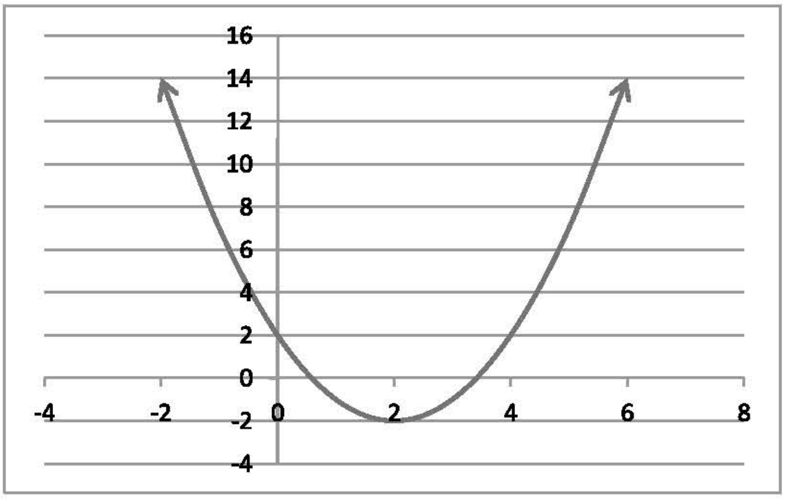


Figura 1.52

OBSERVACIÓN. Se advierte hasta aquí que toda función real queda conformada por cuatro elementos: la regla de correspondencia, el dominio, la imagen y la gráfica.

El *dominio* y la *imagen* serán intervalos de números reales, salvo que se exprese otra característica.

1.3. OPERACIONES CON FUNCIONES. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Siendo las funciones reales $y = f(x)$ números reales, puede realizarse con ellos las operaciones básicas de números reales.

DEFINICIÓN. Sean $y = f(x)$ e $y = g(x)$ dos funciones cuyos dominios, respectivamente, son $Dom(f)$ y $Dom(g)$, entonces también resultan funciones reales:

El *Producto por un escalar* dado por $(kf)(x) = kf(x)$, con $Dom(kf) = Dom(f)$.

La *Suma* dada por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, con $Dom(f + g) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

La *Diferencia* dada por $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, con $Dom(f - g) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

El *Producto* dado por $(fg)(x) = f(x)g(x)$, con $Dom(fg) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

El *Cociente* dado por $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$,

con $Dom\left(\frac{f}{g}\right) = Dom(f) \cap Dom(g) - \{x \in Dom(f) \ / \ g(x) = 0\}$.

Ejemplo 1. Sean las funciones $f(x) = 8x - 3$, $g(x) = 5x + 5$ con $Dom(f) = [10; 22\rangle$, $Dom(g) = [9; 20]$. Determinar la función *diferencia*, la función *producto* y la función *cociente* con sus respectivos dominios.

Solución.

a) La función diferencia es $(f - g)(x) = 8x - 3 - (5x + 5)$, esto significa $(f - g)(x) = 3x - 8$.

El dominio será $Dom(f - g) = [10; 22\rangle \cap [9; 20]$, es decir $Dom(f - g) = [10; 20]$.

b) La función producto es $(fg)(x) = (8x - 3)(5x + 5)$, esto es $(fg)(x) = 40x^2 + 25x - 15$.

El dominio será $Dom(fg) = [10; 22\rangle \cap [9; 20]$, en síntesis $Dom(fg) = [10; 20]$.

c) La función cociente será $(f/g)(x) = \frac{8x-3}{5x-5}$.

El dominio de la función cociente resulta ser $Dom(f/g) = [10; 22\rangle \cap [9; 20] - \{x: 5x + 5 = 0\}$, es decir $Dom(f/g) = [10; 20]$.

Ejemplo 2. (PROBLEMA) Una compañía arroja una cantidad de desechos a un río, la que se modela mediante la función $f(x) = 10x - x^2$ en toneladas; mientras que el municipio limpia el cauce de dicho río recogiendo desechos cuya cantidad es modelada por la función $g(x) = 8x - x^2$. Siendo x el tiempo en horas para una jornada de 8 h.

a) Hallar e interpretar $f(6)$.

b) Hallar e interpretar $g(6)$.

c) Determinar la cantidad de desperdicios que deja de recogerse a las 6 horas de jornada.

d) Identificar la función que representaría la cantidad de desperdicios que se dejaría de recoger.

e) Precisar el dominio y la imagen para las funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$ y realizar la gráfica en un mismo sistema de coordenadas.

f) Graficar la función que representaría la cantidad de desperdicios que se dejaría de recoger y precisar tanto su dominio como su imagen.

Solución.

(a) Calculando $f(6) = 24$ Ton. Significa que, a las seis horas, la compañía ha arrojado 24 toneladas de desperdicios al río.

(b) Calculando $g(6) = 12$ Ton. Se entiende que a las seis horas el municipio recogió 12 toneladas de desperdicios del río.

(c) La cantidad de desperdicios que dejaría de recogerse sería $f(6) - g(6) = 12$ toneladas.

(d) La función sería la diferencia $(f - g)(x) = 10x - x^2 - (8x - x^2) \to (f - g)(x) = 2x$

(e) El $Dom(f) = [0; 8]$ y el $Dom(g) = [0; 8]$, es decir, las ocho horas de jornada diaria.

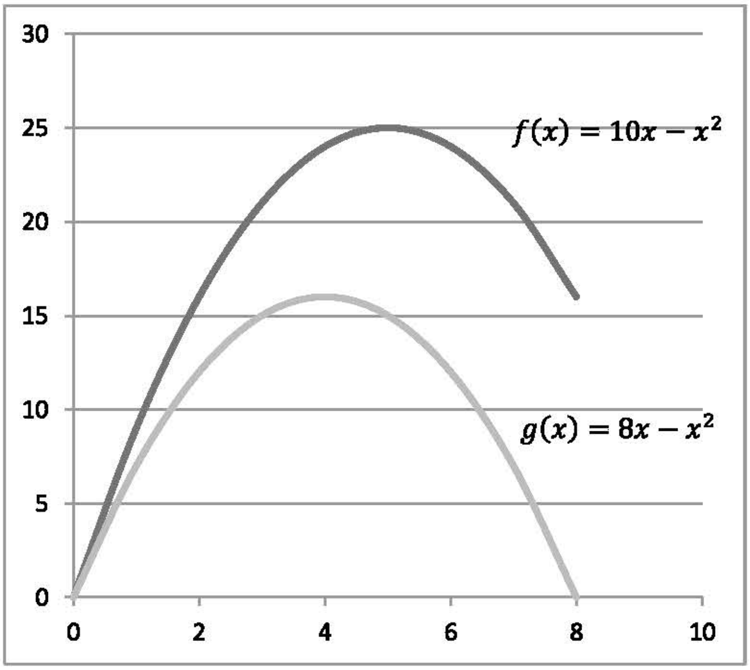


Figura 1.53

La imagen de $y = f(x)$ es $Im(f) = [0; 25]$; asimismo, la imagen de $y = g(x)$ es $Im(g) = [0; 16]$. (Ver Figura 1.53).

(f) La función sería la diferencia $(f - g)(x) = 2x$, cuyo dominio resulta ser $Dom(f - g) = [0; 8]$, la imagen será $Im(f) = [0; 16]$; cuya gráfica se muestra en seguida a través de la Figura 1.54:

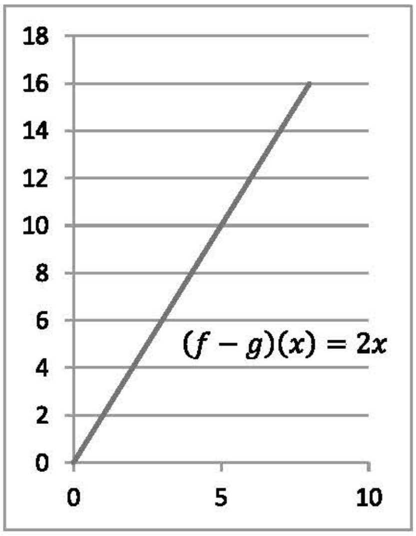


Figura 1.54

Ejemplo 3. (PROBLEMA) Una planta tiene capacidad para producir de 0 a 100 refrigeradoras diarias. Los gastos generales fijos de la planta son \$ 2 200 y el costo directo (material y mano de obra) para producir un refrigerador es de \$ 151. Escriba una fórmula para $T(x)$, el costo total de producir "x" refrigeradoras al día, también el costo unitario $U(x)$ (costo medio por refrigerador). ¿Cuáles son los dominios de estas funciones?

Solución. El N° de refrigeradoras $= x$, x entero, con $0 \leq x \leq 100$.

Gastos fijos = 2 200; Gastos directos en cada producto =151.

Costo total: $T(x) = 2\,200 + 151x$, con $0 \leq x \leq 100$.

Costo unitario: $U(x) = \frac{T(x)}{x} \rightarrow U(x) = \frac{2200}{x} + 151$, con $0 \leq x \leq 100$.

Ejemplo 4. (PROBLEMA) A la compañía ABC le cuesta $400 + 5\sqrt{x(x-4)}$ dólares fabricar "x" estufas de juguete, las cuales vende a \$6,00 cada una.

a) Encuentre una fórmula para la utilidad total $P(x)$ de fabricar "x" estufas.

b) Evalúe e interprete $P(200)$ y $P(1\,000)$.

c) ¿Cuántas estufas tiene que fabricar la ABC únicamente para romper el equilibrio?

Solución.

Costo: $C(x) = 400 + 5\sqrt{x(x-4)}$, Ingreso: $R(x) = 6x$, Utilidad: $P(x) = R(x) - C(x)$

(a) La función utilidad será $P(x) = 6x - 400 - 5\sqrt{x(x-4)}$.

(b) Evaluando $P(200) = -189{,}95$ dólares. Se tiene una pérdida de 189.95 dólares.

Evaluando luego $P(1\,000) = 610{,}01$ dólares. Hay una ganancia de 610,01 dólares.

(c) Para romper el equilibrio debe suceder que $6x = 400 - 5\sqrt{x(x-4)}$, lo que al resolverse dentro del universo $x \in U = [\frac{400}{6}; +\infty\rangle$ da como resultado $x = 389{,}97 \approx 390 \in U$ y $x = 37{,}26 \notin U$, siendo U el universo de solución de la ecuación.

Ejemplo 5. Un comerciante modela los costos de producción mediante el modelo $f(x) = 30x + 250$ nuevos soles, siendo la capacidad instalada para 120 productos por día.

a) Escriba la función para la época de auge si esta es aumentada en un 50 por ciento.

b) Escriba la función para la época de austeridad si esta es reducida en un 25 por ciento.

c) Grafique las funciones en un mismo sistema de coordenadas.

Solución.

(a) La función para época de auge será $(1{,}5 \cdot f)(x) = 45x + 375$ nuevos soles.

Renombrando: $g(x) = 45x + 375$

(b) La función para época de auge será $(0{,}75 \cdot f)(x) = 22{,}5x + 187{,}5$ nuevos soles.

Renombrando: $h(x) = 45x + 375$

(c) En la Figura 1.55, se muestra la gráfica correspondiente:

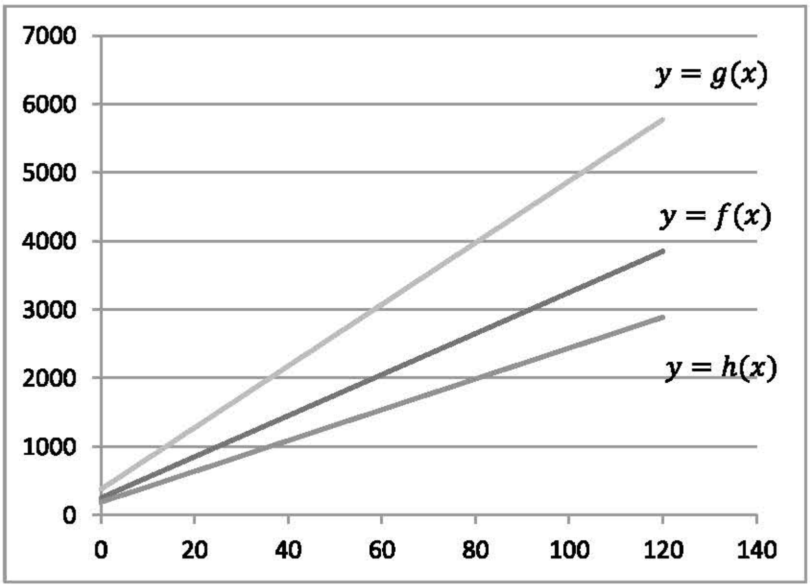


Figura 1.55

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES. La composición de dos funciones reales se ve como una nueva forma de operación entre dichas funciones.

Dadas las funciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$, la Función Compuesta de f y g, que se denota por gof, está definida como $[gof](x) = g[f(x)]$, cuyo dominio es $Dom(gof) = \{x \in Dom(f) \,/\, f(x) \in Dom(g)\}$.

Nota. La función compuesta $(f o\, g)$ estaría definida como $[f o\, g](x) = f[g(x)]$, cuyo dominio es $Dom(f o\, g) = \{x \in Dom(g) \,/\, g(x) \in Dom(f)\}$.

Ejemplo 5. Dadas las funciones $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2 + 1$, determinar la función composición de f con g, así también de g con f y sus dominios.

Solución.

En primer lugar, se tiene $Dom(f) = R$ y $Dom(g) = R$.

Aplicando la definición, respectivamente, se obtiene lo siguiente:

a) $[go\, f](x) = g[f(x)] = [f(x)]^2 + 1 = [2x - 3]^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$.

Es decir, $[go\, f](x) = 4x^2 - 12x + 10$.

El dominio será $Dom(gof) = \{x \in Dom(f) \,/\, f(x) \in Dom(g)\}$.

$Dom(go\, f) = \{x \in \mathrm{R} \,/ 2x - 3 \in \mathrm{R}\} = \mathrm{R}$.

b) $[f o\, g](x) = f[g(x)] = 2g(x) - 3 = 2[x^2 + 1] - 3 = 2x^2 - 1$.

Es decir, $[f o\, g](x) = 2x^2 - 1$.

El dominio resulta ser $Dom(fog) = \{x \in Dom(f) \,/\, f(x) \in Dom(g)\}$.

$Dom(f o\, g) = \{x \in \mathrm{R} \,/ x^2 + 1 \in \mathrm{R}\} = \mathrm{R}$.

Ejemplo 6. Determinar dos funciones, f y g, que cumplan la composición $h(x) = [f o\, g](x)$.

a) $h(x) = (3x + 2)^6$ b) $h(x) = \frac{100}{4-3x}$ c) $h(x) = \sqrt{2 - x^2}$

Solución.

No existe una única solución, por lo que se proponen las siguientes:

(a) Sean las funciones reales $f(x) = x^6$ y $g(x) = 3x + 2$ que forman la composición.

En efecto, $[f o\, g](x) = f[g(x)] = [g(x)]^6 = (3x + 2)^6 = h(x)$.

(b) Sean las funciones reales $f(x) = \frac{100}{x}$ y $g(x) = 4 - 3x$ que forman la composición.

En efecto, $[f o\, g](x) = f[g(x)] = \frac{100}{g(x)} = \frac{100}{4-3x} = h(x)$.

(c) Sean las funciones reales $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2 - x^2$ que forman la composición.

En efecto, $[f o\, g](x) = f[g(x)] = \sqrt{g(x)} = \sqrt{2 - x^2} = h(x)$.

Ejemplo 7. (PROBLEMA) La compañía FACUSA estima que el costo "y" (en dólares) de producir "u" tenedores es $f(u) = 30\sqrt{u} + 1000$. El número de tenedores producidos semanalmente depende, a su vez, del número "x" de empleados; donde $g(x) = 500x - 400$. Expresar el costo como una función del número de empleados. Si la compañía cuenta con 25 trabajadores, ¿cuántos tenedores se producirá semanalmente y a qué costo?

Solución.

En la función de costos $f(u) = 30\sqrt{u} + 1000$, $f[g(x)] = 30\sqrt{500x - 400} + 1000 \quad \rightarrow$ $[fog](x) = 30\sqrt{500x - 400} + 1000$.

Con 25 trabajadores se produce $g(25) = 500(25) - 400 = 12\,100$ tenedores.

El costo de producir los 12 100 tenedores con los 25 trabajadores es el siguiente:

$[fog](25) = f[g(25)] = 30\sqrt{12100} + 1000 = 4\,300$ dólares.

Respuesta. Con 25 trabajadores se produce $g(25) = 12\,100$ tenedores semanalmente a un costo total de $[fog](25) = 4\,300$ dólares.

Ejemplo 8. Si $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x + 2}$, hallar $\boldsymbol{g(x)}$ tal que cumpla $\boldsymbol{f(g(x)) = x^2 - 4x + 5}$.

Solución.

Hay dos de tales funciones: $g_1(x) = x - 3$ y $g_2(x) = 1 - x$.

En efecto, $f\big(g(x)\big) = x^2 - 4x + 5 \quad \rightarrow \quad [g(x)]^2 + 2g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5 \rightarrow$

$[g(x)]^2 + 2g(x) + 1 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow [g(x) + 1]^2 = (x - 2)^2 \rightarrow g(x) + 1 = \pm(x - 2)$

De donde se obtiene dos soluciones: $g_1(x) = x - 3$ y $g_2(x) = 1 - x$.

Ejemplo 9. (PROBLEMA) Los defensores del medioambiente han estimado que el nivel promedio de monóxido de carbono en el aire es dado por $M(P) = (1 + 0{,}6P)$ partes por millón cuando el número de personas es P-miles. Si la población en miles en el momento t en años es modelado por $P(t) = 400 + 30t + 0.5t^2$.

a) Exprese el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función del tiempo.

b) Calcule el nivel de monóxido de carbono en $t = 5$ años y luego en $t = 8$ años.

Solución.

(a) Para expresar el monóxido de carbono en función del tiempo, se requiere establecer la función compuesta $[MoP](t) = M[P(t)]$. Sustituyendo $P(t)$ en $M(P)$, tenemos:

$M[P(t)] = M[400 + 30t + 0{,}5t^2] = 1 + 0{,}6(400 + 30t + 0{,}5t^2) = 241 + 18t + 0{,}09t^2$

Es decir, $[MoP](t) = 241 + 18t + 0{,}09t^2$.

(b) Se nos pide evaluar la función compuesta en t = 5 años.

$[MoP](5) = M[P(5)] = 241 + 18(5) + 0{,}09(5)^2 = 333{,}25$ ppm.

Luego en $t = 8$ años: $[MoP](8) = M[P(8)] = 241 + 18(8) + 0{,}09(8)^2 = 379{,}24$ ppm.

1.4. TRANSFORMACIONES EN UNA FUNCIÓN REAL

Dada una función real $y = f(x)$ se puede realizar con ella una serie de transformaciones; lo cual da como resultado nuevas funciones equivalentes, aunque en otras posiciones trasladadas según un valor real de referencia $c > 0$:

a) Traslaciones horizontales:

i) Función original: $y = f(x)$

ii) Traslación horizontal de "c" unidades a la derecha: $y = f(x - c)$

iii) Traslación horizontal de "c" unidades a la izquierda: $y = f(x + c)$

b) Traslaciones verticales:

i) Función original: $y = f(x)$

ii) Traslación vertical de "c" unidades hacia abajo: $y = f(x) - c$

iii) Traslación vertical de "c" unidades hacia arriba: $y = f(x) + c$

c) Expansiones y contracciones:

i) Función original: $y = f(x)$

ii) Alargamiento vertical en c unidades ($c > 1$): $y = c \cdot f(x)$

iii) Reducción vertical en c unidades ($0 < c < 1$): $y = c \cdot f(x)$

iv) Reflexión respecto a eje X: $y = -f(x)$

Ejemplo 1. Aplicar las traslaciones horizontales y verticales a la función $y = \sqrt{x}$ para $c = 2$. Una reflexión respecto al eje X.

Solución.

(i) Función original (observar Figura 1.56): $y = \sqrt{x}$

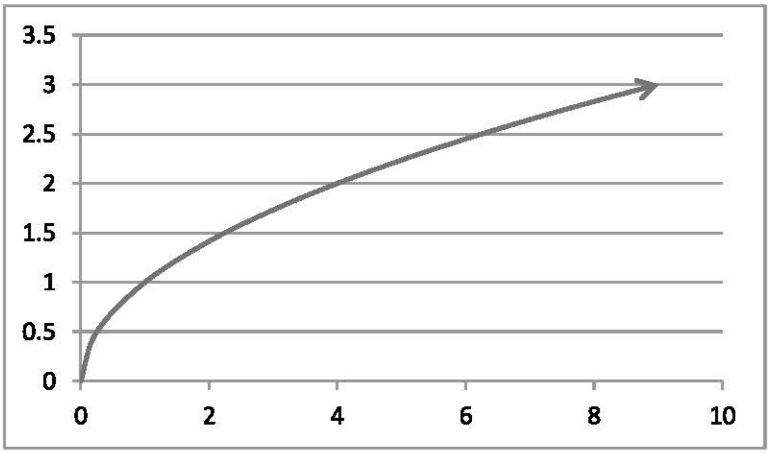


Figura 1.56

(ii) Traslación horizontal de "$c = 2$" unidades a la derecha (ver Figura 1.57): $y = \sqrt{x-2}$

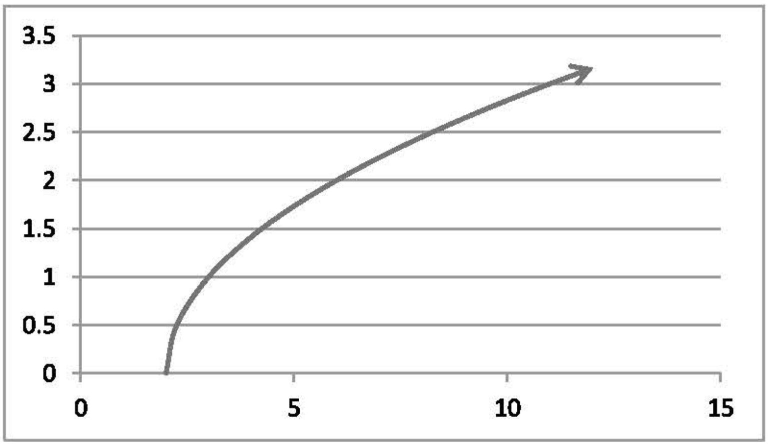


Figura 1.57

(iii) Traslación horizontal de "$c = 2$" unidades a la izquierda (ver Figura 1.58): $y = \sqrt{x+2}$

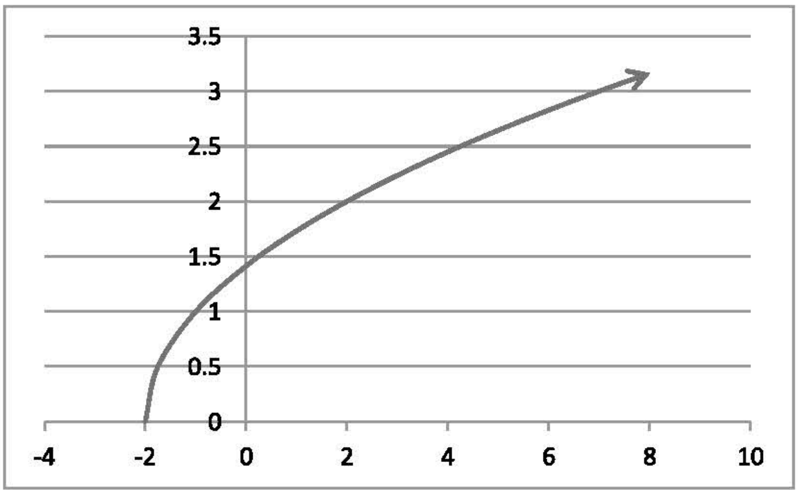


Figura 1.58

(iv) Traslación vertical de "$c = 2$" unidades hacia abajo (ver Figura 1.59): $y = \sqrt{x} - 2$

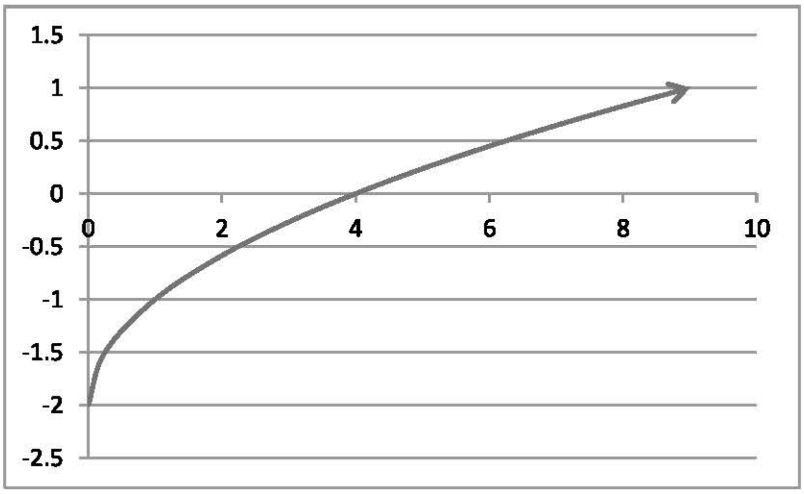


Figura 1.59

(v) Traslación vertical de "$c = 2$" unidades hacia arriba (ver Figura 1.60): $y = \sqrt{x} + 2$

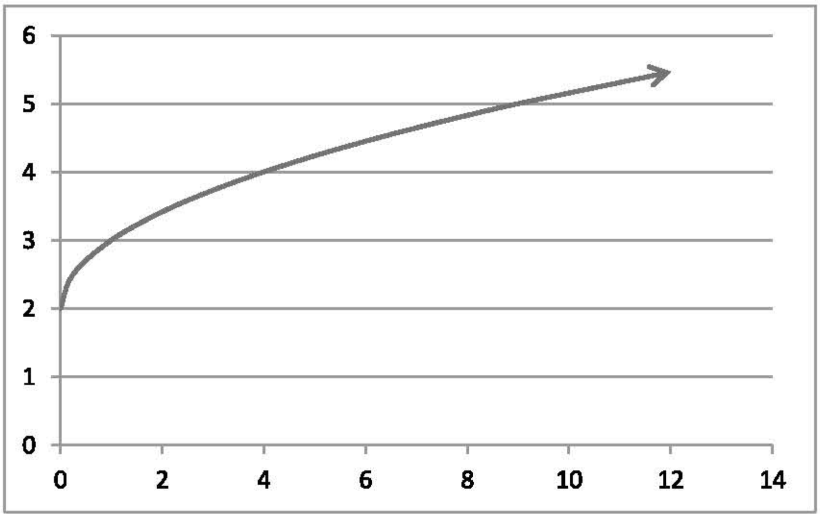


Figura 1.60

(vi) Reflexión respecto a eje X (ver Figura 1.61): $y = -\sqrt{x}$

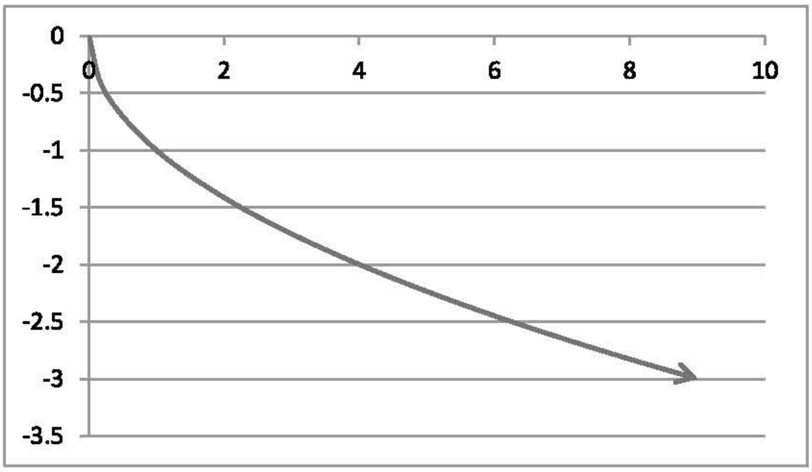


Figura 1.61

Ejemplo 2. Sea la función $f(x) = x^2$; se hace las siguientes transformaciones: un alargamiento vertical de $c = 3$ unidades; una reducción de $c = 0{,}5$ unidades; y una reflexión respecto al eje X. Obsérvese estos hechos gráficamente.

Solución.

(i) Un alargamiento vertical de $c = 3$ unidades (Figura 1.62): $y = 3x^2$.

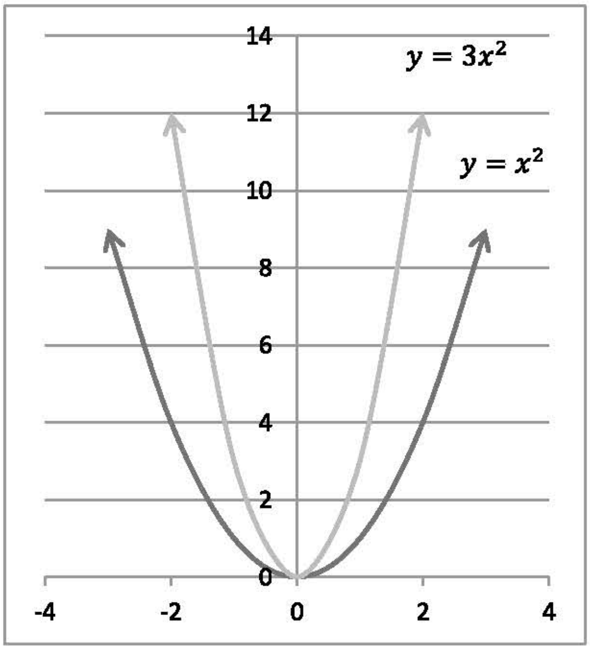


Figura 1.62

(ii) Un alargamiento vertical de $c = 0{,}5$ unidades (Figura 1.63): $y = 0{,}25x^2$

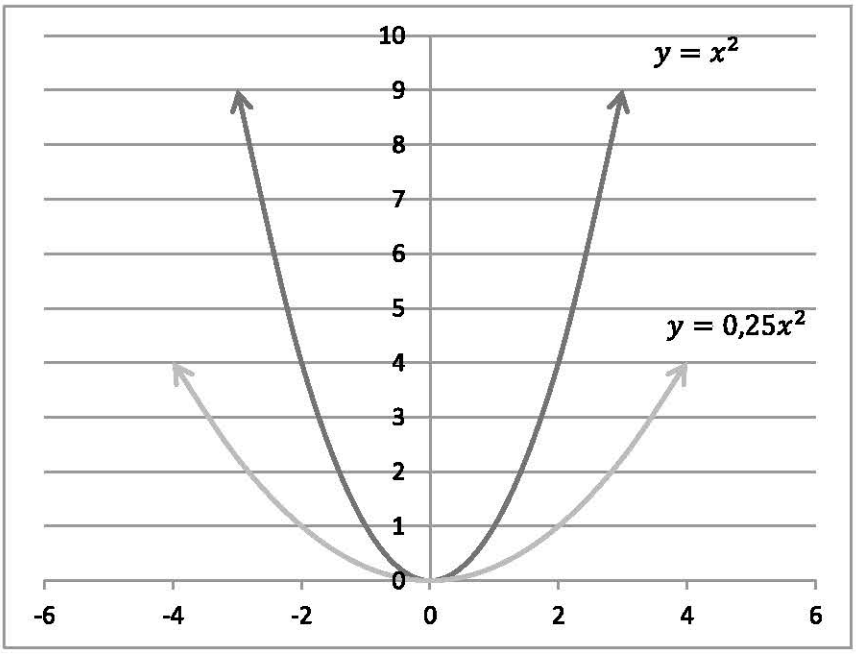


Figura 1.63

(iii) Una reflexión respecto al eje X (Figura 1.64): $y = -x^2$

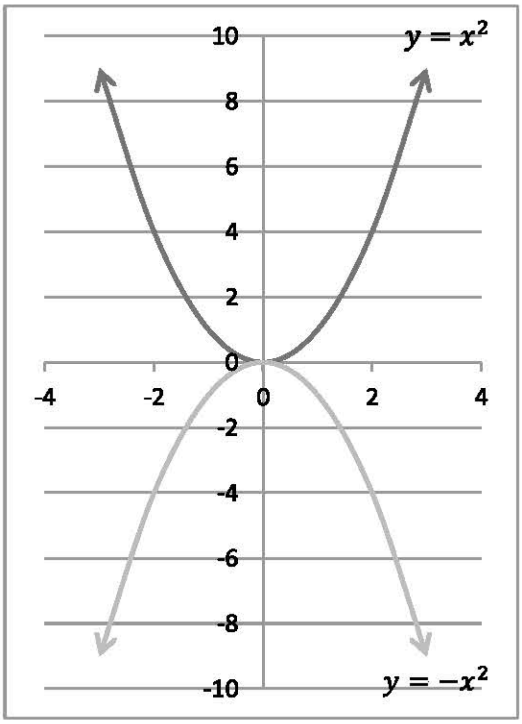


Figura 1.64

1.5. FUNCIÓN INYECTIVA, SOBREYECTIVA Y BIYECTIVA

Esta es otra manera de clasificar a las funciones reales, tomando como referencia el dominio o la imagen de una función real.

DEFINICIÓN. Sea $f: A \to B$ una función real de variable real, entonces se dice:

i) Que f es una *aplicación* si el dominio es todo el conjunto de partida, es decir, $Dom(f) = A$.

ii) Que f es una función *Sobreyectiva* si la imagen es todo el conjunto de llegada, esto significa $Im(f) = B$.

iii) Que f es una función *Inyectiva* si cumple $\forall x_1, x_2 \in Dom(f)$ y $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Gráficamente, una función es inyectiva cuando al trazar rectas horizontales por toda la gráfica, esta es cortada en un punto como máximo.

iv) Que f es una función *Biyectiva* si simultáneamente resulta sobreyectiva e inyectiva.

Ejemplo 1. En base a la definición anterior, verifique las siguientes funciones reales:

a) $f(x) = 3x - 2$ b) $g(x) = \frac{x+1}{2x}$ c) $h(x) = \sqrt{5 - x}$

Solución.

Aplique cada parte de la definición cuidadosamente.

(a) La función $f(x) = 3x - 2$ tiene como dominio $Dom(f) = \mathrm{R}$, así como imagen $Im(f) = \mathrm{R}$.

Entonces f es una aplicación, es sobreyectiva, es inyectiva y biyectiva. (Ver Figura 1.65).

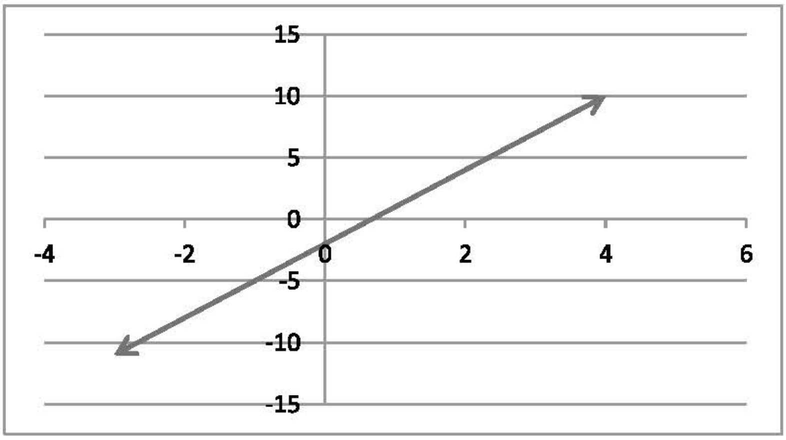


Figura 1.65

(b) La función $g(x) = \frac{x+1}{2x}$ tiene como dominio $Dom(f) = \mathrm{R} - \{0\}$, así como imagen $Im(f) = \mathrm{R} - \{1/2\}$. (Ver Figura 1.66).

La recta vertical $x = 0$ se denomina asíntota vertical.

La recta horizontal $y = \frac{1}{2}$ se denomina asíntota horizontal.

Entonces g es una aplicación, es sobreyectiva, es inyectiva y biyectiva en su dominio.

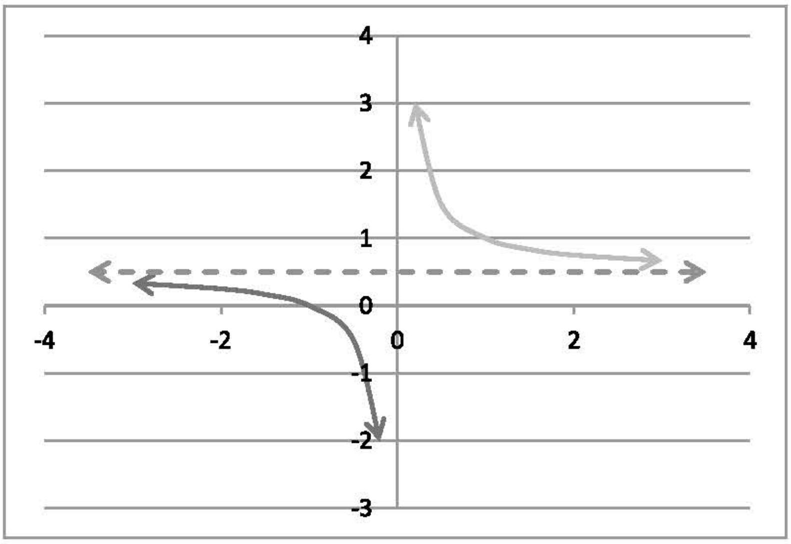


Figura 1.66

(c) La función $h(x) = \sqrt{5-x}$ tiene como dominio $Dom(f) = \langle -\infty; 5]$, así como imagen $Im(f) = [0; +\infty\rangle$. (Ver Figura 1.67).

Entonces f es una aplicación, es sobreyectiva, es inyectiva y biyectiva en su dominio.

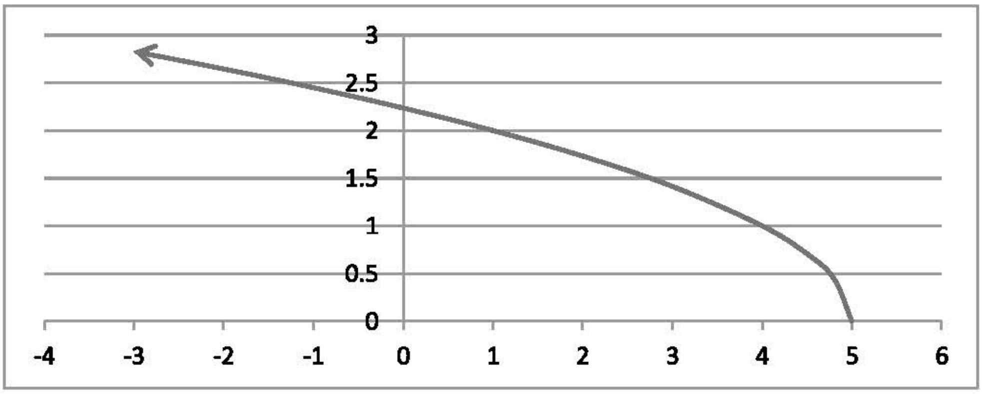


Figura 1.67

Ejemplo 2. (*PROBLEMA*) Una compañía arroja $D(t) = 0{,}7t^2 + 6t$ toneladas de desperdicios en el océano en el tiempo t días, con $0 \leq t \leq 16$. Muestre que la función es inyectiva.

Solución.

D es una función *Inyectiva* si cumple $\forall t_1, t_2 \in Dom(f)$ y $D(t_1) = D(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$.

Entonces, $\forall\, t_1, t_2 \in [0;16] \wedge 0{,}7t_1^2 + 6t_1 = 0{,}7t_2^2 + 6t_2$

$$\Rightarrow 0{,}7\left[t_1^2 + \frac{60}{7}t_1 + \left(\frac{30}{7}\right)^2 - \left(\frac{30}{7}\right)^2\right] = 0{,}7\left[t_2^2 + \frac{60}{7}t_2 + \left(\frac{30}{7}\right)^2 - \left(\frac{30}{7}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow 0{,}7\left[\left(t_1 + \frac{30}{7}\right)^2 - \left(\frac{30}{7}\right)^2\right] = 0{,}7\left[\left(t_2 + \frac{30}{7}\right)^2 - \left(\frac{30}{7}\right)^2\right]$$

$\Rightarrow 0{,}7\left(t_1+\frac{30}{7}\right)^2-0{,}7\left(\frac{30}{7}\right)^2=0{,}7\left(t_2+\frac{30}{7}\right)^2-0{,}7\left(\frac{30}{7}\right)^2 \Rightarrow 0{,}7\left(t_1+\frac{30}{7}\right)^2=0{,}7\left(t_2+\frac{30}{7}\right)^2$

$\Rightarrow \left(t_1+\frac{30}{7}\right)^2=\left(t_2+\frac{30}{7}\right)^2 \Rightarrow t_1+\frac{30}{7}=\pm\left(t_2+\frac{30}{7}\right)$, pero como $0\le t\le 16$

$\Rightarrow t_1+\frac{30}{7}=t_2+\frac{30}{7} \Rightarrow t_1=t_2$.

Gráficamente, una función es inyectiva cuando al trazar rectas horizontales por toda la gráfica, esta es cortada en un punto como máximo. (Ver Figura 1.68).

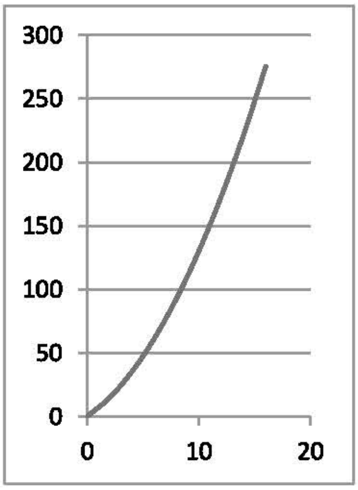


Figura 1.68

1.6. FUNCIÓN INVERSA

INVERSA DE UNA FUNCIÓN. Sea $f: A\to B$ una función real de variable real. Si f es inyectiva definimos la inversa de la función f como la nueva función, la cual se denota por f^*, del modo siguiente: $f^*: B\to A$, dada por $f^*(y)=x$.

Se cumple esta propiedad: $y=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^*(y)=x$.

OBSERVACIONES:

i) Para hallar la inversa de una función $y=f(x)$, se debe despejar la variable x; en el resultado se intercambia x por y, así mismo y por x, lo cual finalmente da: $f^*(x)=y$.

ii) La inversa de cualquier función no siempre es una función, puede ser solo relación binaria.

iii) Cuando se grafican, la función dada f y su inversa f^* son simétricas con respecto a la función identidad: $y=x$.

A fin de tener una mejor idea de la función inversa, veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. (Ilustrando la función inversa). Sea T el conjunto de todos los triángulos, B el conjunto de todos los números positivos y f "el área". Así f *liga a cada triángulo un único número positivo que representa su área.* En este caso se observa que la función va de T a B, $f: T\to B$.

Pero, si tomamos la inversa de f, como $f^*: B \to T$, entonces se diría que f^*, es decir, la función inversa *liga a cada número positivo el área de algún triángulo.* Lo cual nos da la idea de función inversa.

Ejemplo 2. Encuentre la inversa de las siguientes funciones en sus respectivos dominios:

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $g(x) = \frac{2x-3}{2-x}$ c) $h(x) = x^2 - 2x + 1$

Solución.

a) Escribimos $f(x) = 2x - 3$ en la forma $y = 2x - 3$.

Al despejar la variable x queda $x = \frac{y+3}{2}$, aquí se intercambia x por y, simultáneamente, y por x, lo que da como resultado: $y = \frac{x+3}{2}$ que ya es la función inversa y se escribe de la siguiente forma: $f^*(x) = \frac{x+3}{2}$.

Observamos que la función inversa también es una función real, puesto que f es inyectiva.

En efecto, si f es una función Inyectiva debe cumplir $\forall x_1, x_2 \in Dom(f)$ y $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Aplicado al ejemplo $\forall x_1, x_2 \in Dom(f) = \mathrm{R}$ y $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, implica que f es inyectiva en su dominio.

Grafiquemos ambas funciones: la $f(x) = 2x - 3$ con su inversa $f^*(x) = \frac{x+3}{2}$ en un mismo sistema de coordenadas. (Ver Figura 1.69).

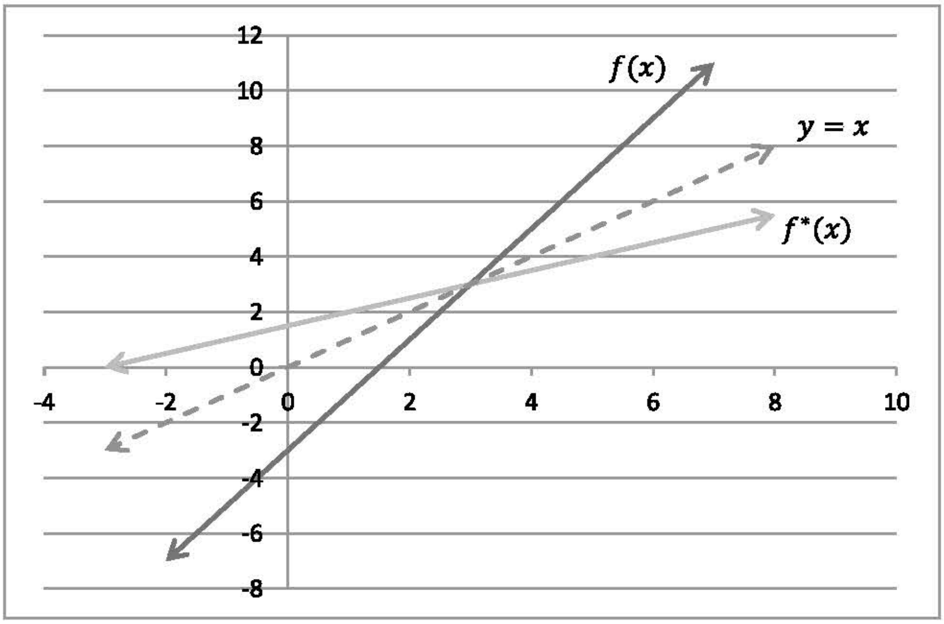


Figura 1.69

Puede verse que la función dada f y su inversa f^* son simétricas con respecto a la función identidad $y = x$.

b) Escribimos $g(x) = \frac{2x-3}{2-x}$ en la forma $y = \frac{2x-3}{2-x}$.

Al despejar la variable x resulta $x = \frac{2y+3}{2+y}$, luego se intercambia x por y, simultáneamente y por x, entonces se obtiene $y = \frac{2x+3}{2+x}$, lo cual ya es la función inversa y se escribe de la siguiente manera: $g^*(x) = \frac{2x+3}{2+x}$.

Observamos que la función inversa también es una función real, pues g es inyectiva.

En efecto, si g es una función inyectiva debe cumplir $\forall x_1, x_2 \in Dom(g)$ y $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Aplicando al ejemplo $\forall x_1, x_2 \in Dom(g) = \text{R} - \{2\}$ y $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1-3}{2-x_1} = \frac{2x_2-3}{2-x_2} \Rightarrow (2x_1 - 3)(2 - x_2) = (2x_2 - 3)(2 - x_1) \Rightarrow 4x_1 - 2x_1x_2 - 6 + 3x_2 = 4x_2 - 2x_1x_2 - 6 + 3x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$, lo cual implica que g es inyectiva en su dominio.

En consecuencia, la función dada resulta ser $g(x) = \frac{2x-3}{2-x}$, su inversa es $g^*(x) = \frac{2x+3}{2+x}$.

c) Escribimos $h(x) = x^2 - 2x + 1$ en la forma $y = x^2 - 2x + 1$, con $Dom(f) = R$.

Despejando la variable x, queda $x = 1 \pm \sqrt{y}$. Al intercambiar x por y, así como y por x, se llega a tener $y = 1 \pm \sqrt{x}$. Esta es la inversa de h que se escribe del modo siguiente: $h^*(x) = 1 \pm \sqrt{x}$; la cual no es una función, pues h no es inyectiva. Para cada x existe dos valores de y, con excepción de $x = 0$.

En la Figura 1.70, observamos que la función $y = h(x)$ no es inyectiva, una recta horizontal la cortaría en dos puntos.

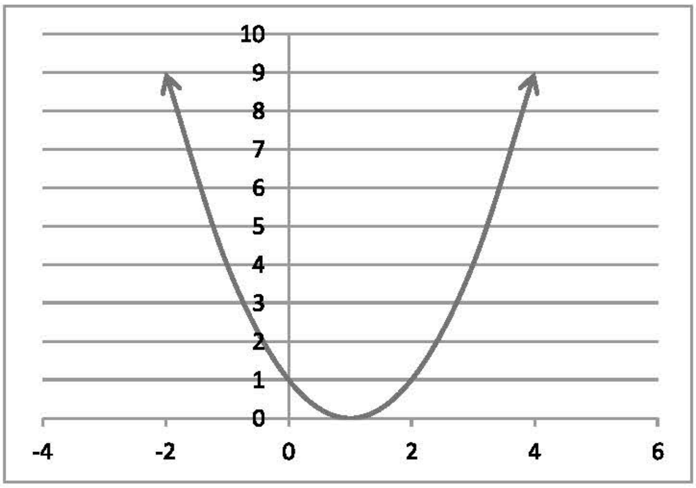


Figura 1.70

Ejemplo 3. Sea la función de costos en dólares $f(x) = 4x + 6$, donde x es el número de artículos producidos. Se entiende que "f es la función que representa el costo para x artículos producidos".

a) Construya una tabla para los seis primeros números enteros positivos.

x	0	1	2	3	4	...
C	6	10	14	18	22	...

Por ejemplo: para $x = 2$ artículos producidos, se tiene un costo de 14 soles.

b) Hállese la función inversa $f(x) = 4x + 6 \rightarrow y = 4x + 6 \rightarrow y - 6 = 4x \rightarrow x = \frac{y-6}{4}$.

Intercambiando variables: $y = \frac{x-6}{4} \rightarrow N(x) = \frac{x-6}{4}$.

Se entiende que "N es la función que representa la cantidad de artículos producidos para x costo de producción".

Una tabla para los seis primeros valores enteros será como sigue a continuación:

x	6	10	14	18	22	...
N	1	2	3	4	5	...

Por ejemplo: para $x = 14$ soles de costo, se tiene $N = 3$ artículos producidos.

c) Graficando ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas. Dado que es una función de costos y de artículos producidos, entonces los dominios están formados por números positivos. (Ver Figura 1.71).

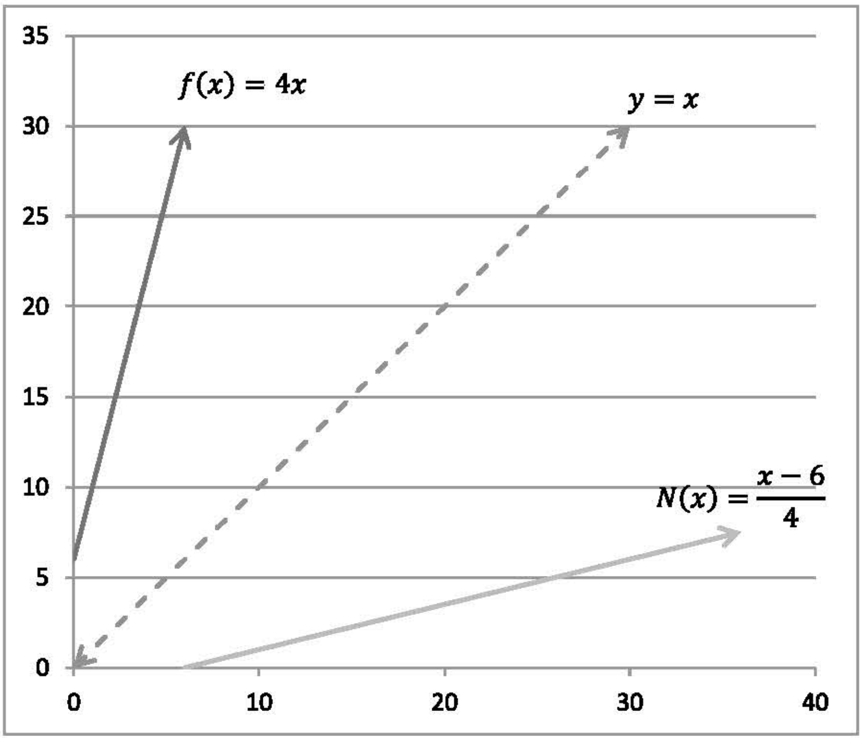


Figura 1.71

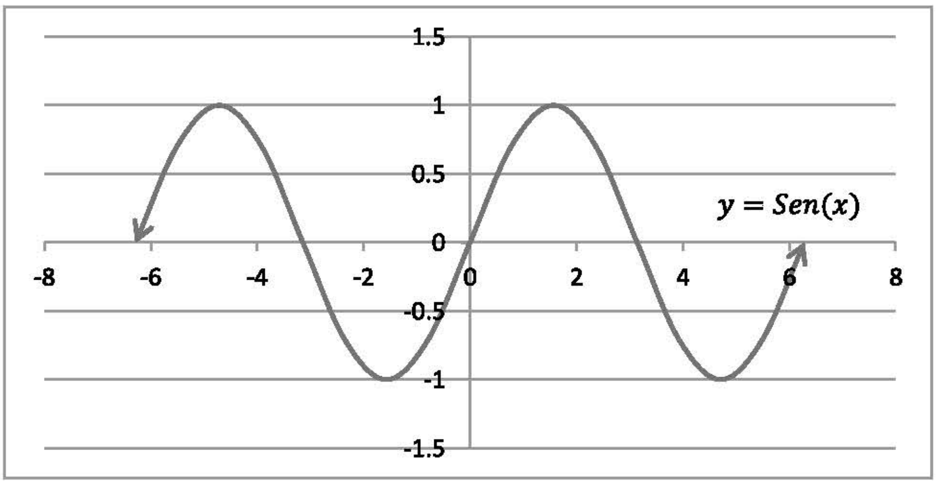
1.7. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES REALES: CRECIENTE, DECRECIENTE, PAR, IMPAR Y PERIÓDICA

Esta es una clasificación distinta de las funciones reales, tomando como referencia la forma de la gráfica en dichas funciones.

LAS FUNCIONES SENO Y COSENO.

FUNCIÓN SENO . Es la que tiene como regla de correspondencia $f(x) = Sen(x)$. (Ver Figura 1.72)

Siendo el dominio y la imagen, respectivamente, $Dom(Sen) = R$, $Im(Sen) = [-1; 1]$.



FUNCIÓN COSENO. Es la que tiene como regla de correspondencia $f(x) = Cos(x)$. (Ver Figura 1.73).

Siendo el dominio y la imagen, respectivamente, $Dom(Cos) = R$, $Im(Cos) = [-1; 1]$.

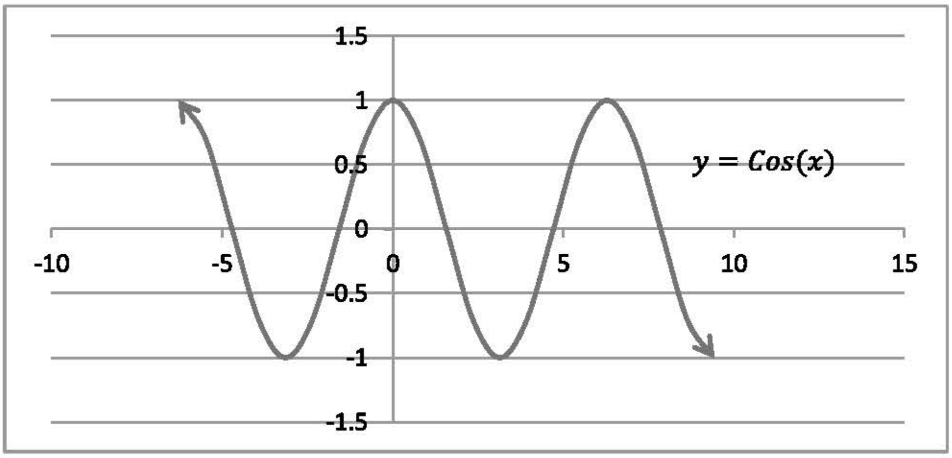


Figura 1.73

FUNCIONES PARES, IMPARES Y **PERIÓDICAS**.

FUNCIÓN PAR. f es una función par cuando cumple lo siguiente: Si $x \in Dom(f) \Rightarrow -x \in Dom(f)$ y además se tiene que $f(x) = f(-x), \forall x \in Dom(f)$.

Gráficamente se caracterizan por ser simétricas con respecto al eje Y.

Ejemplo 1. La siguiente es una función par (Figura 1.74): $y = x^4 - 1$.

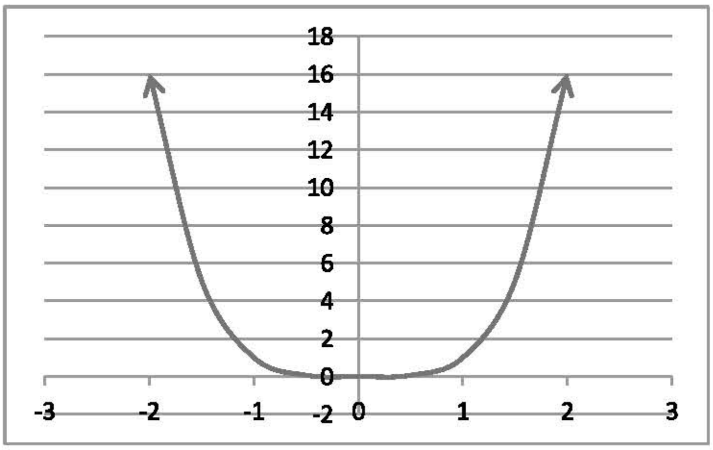


Figura 1.73

Cumple con la definición si $x \in Dom(f) \Rightarrow -x \in Dom(f)$ y además $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in Dom(f)$.

Si $x \in R \Rightarrow -x \in R$.

Asimismo, se tiene que $\forall x \in R$: $x^4 - 1 = (-x)^4 - 1 \rightarrow x^4 - 1 = x^4 - 1$.

FUNCIÓN IMPAR. f es una función Impar cuando cumple lo siguiente: Si $x \in Dom(f) \Rightarrow -x \in Dom(f)$ y además se tiene que $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in Dom(f)$.

Gráficamente se caracterizan por ser simétricas con respecto al origen de coordenadas.

Ejemplo 2. En la figura 1.75, se presenta la función impar $y = x^{1/3}$.

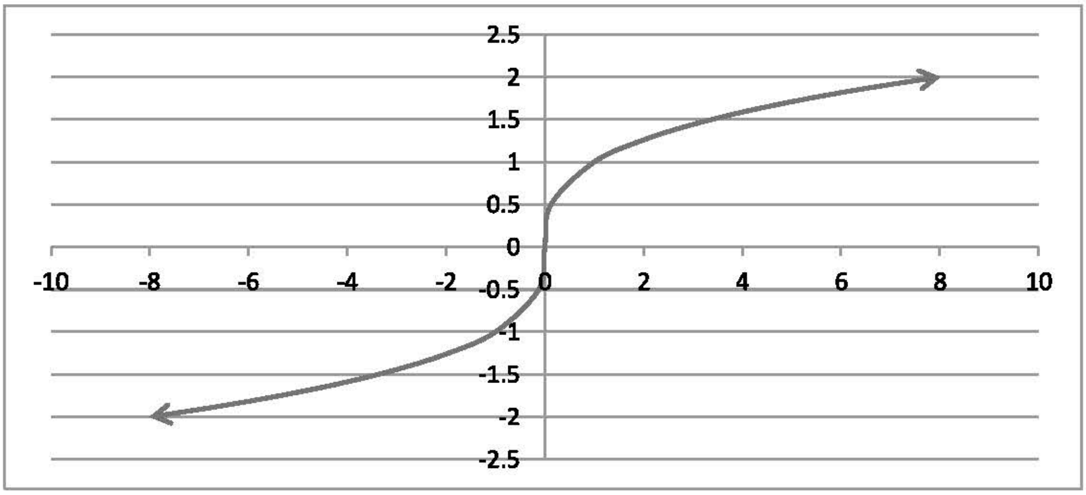


Figura 1.75

Cumple con la definición si $x \in Dom(f) \Rightarrow -x \in Dom(f)$ y además se tiene que $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in Dom(f)$.

En efecto, si $x \in R \Rightarrow -x \in R$.

Así también se tiene que $\forall x \in R$: $x^{1/3} = -(-x)^{1/3} \rightarrow x^{1/3} = x^{1/3}$.

FUNCIÓN PERIóDICA. f es una función periódica cuando cumple lo siguiente: Si $x \in Dom(f) \Rightarrow x + p \in Dom(f)$ y además $f(x) = f(x + p)$, $\forall x \in Dom(f)$.

Se caracterizan porque su gráfica se repite cada cierto intervalo o periodo p.

Ejemplo 3. La siguiente es una función periódica: $y = Cos(x)$.

Cumple con la definición:

Si $x \in Dom(f) \Rightarrow x + p \in Dom(f)$ y además $f(x) = f(x + p), \forall x \in Dom(f)$

Si $x \in R \Rightarrow x + p \in R$.

Asimismo, tiene que $\forall x \in R$: $Cos\, x = Cos(x + p)$ $\rightarrow$ $Cos\, x = (Cos\, x)(Cos\, p) - (Sen\, x)(Sen\, p)$

Entonces, $Cos\, p = 1 \Rightarrow$ $p = 0;\ \pm 2\pi;\ \pm 4\pi; \ldots$

y $Sen\, p = 0 \Rightarrow$ $p = 0;\ \pm\pi;\ \pm 2\pi; 3\pi; \ldots$

Luego, el periodo mínimo positivo es $p = 2\pi$. (Ver Figura 1.76).

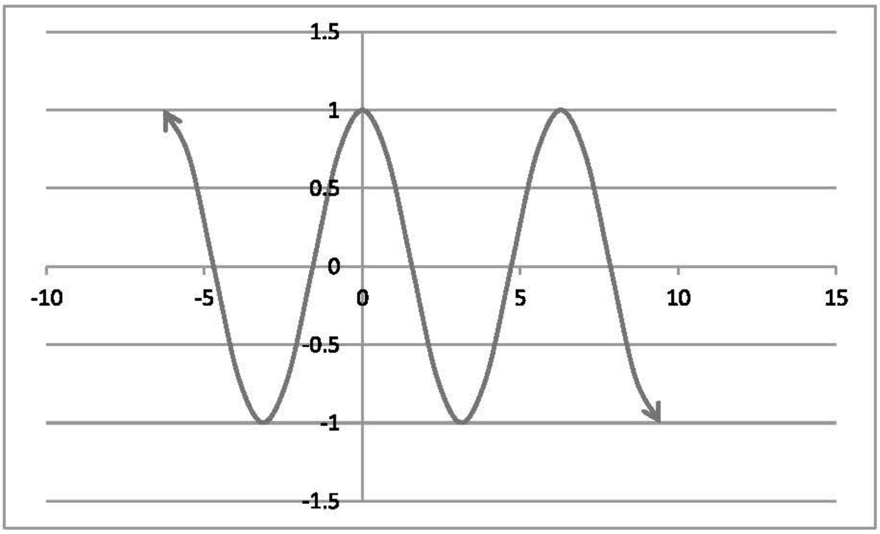


Figura 1.76

Ejercicio 1. Muestre que las siguientes funciones son pares:

a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = 1 - |x|$ c) $h(t) = 2t^2 - t^4$ d) $R(t) = Cos(2t)$

Ejercicio 2. Muestre que las siguientes funciones son impares:

a) $f(x) = x^3$ b) $g(t) = t^3 + t$ c) $G(t) = Sen(t)$ d) $h(t) = |x^2 - 1|$

Ejercicio 3. Muestre que las siguientes funciones son periódicas y halle su periodo.

a) $f(x) = Sen(x)$ b) $g(x) = Cos(x)$ c) $h(x) = |Sen(x)|$

FUNCIONES **MONÓTONAS** (CRECIENTE O DECRECIENTE). Sea $f: I \subset R \rightarrow R$ una función real de variable real definida en el intervalo $I \subset R$, entonces:

i) f es una función monótona creciente si para todo x_1 , x_2 de I con $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

ii) f es una función monótona estrictamente creciente si para todo x_1 , x_2 de I con $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.

iii) f es una función monótona decreciente si para todo x_1 , x_2 de I con $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

iv) f es una función monótona estrictamente decreciente si para todo x_1 , x_2 de I con $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$.

Nota. El hecho de que una función sea creciente o decreciente se puede observar en la gráfica de cada función.

Ejemplo 1. La siguiente es una función creciente: $y = x^2, x \geq 0$. Figura 1.77

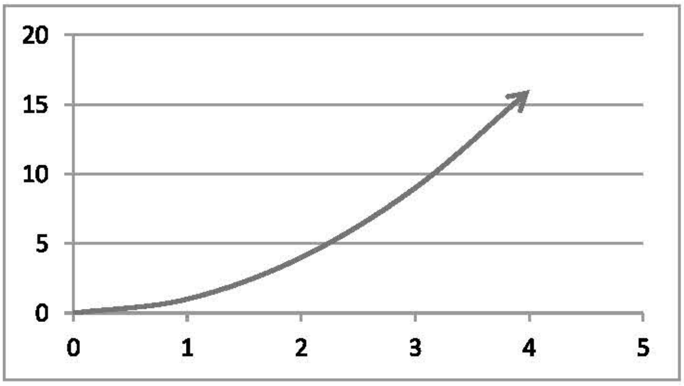


Figura 1.77

Cumple con la definición f es una función monótona creciente:

Si para todo x_1 , x_2 de I con $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Si para todo x_1 , $x_1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ de $[0; +\infty\rangle$ se tiene que $x_1 < x_1 + \varepsilon$.

Se cumple $x_1^2 \leq (x_1 + \varepsilon)^2 \rightarrow x_1^2 \leq x_1^2 + 2\varepsilon x_1 + \varepsilon^2$ y como $2\varepsilon x_1 + \varepsilon^2$ siempre es positivo, entonces esta desigualdad, en definitiva, siempre es cierta.

Es más, en este caso se cumple también $x_1^2 < (x_1 + \varepsilon)^2 \rightarrow x_1^2 < x_1^2 + 2\varepsilon x_1 + \varepsilon^2$ y como $2\varepsilon x_1 + \varepsilon^2$ siempre es positivo, entonces esta desigualdad resulta ser siempre verdadera,

Con lo cual esta función $y = x^2, x \geq 0$ es estrictamente creciente.

Ejemplo 2. La siguiente es una función decreciente: $y = 2 - x^2, x \geq 0$.

Cumple con la definición f es una función monótona decreciente si para todo x_1 , x_2 de I con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Este hecho puede ser verificado como en el caso anterior. (Ver Figura 1.78).

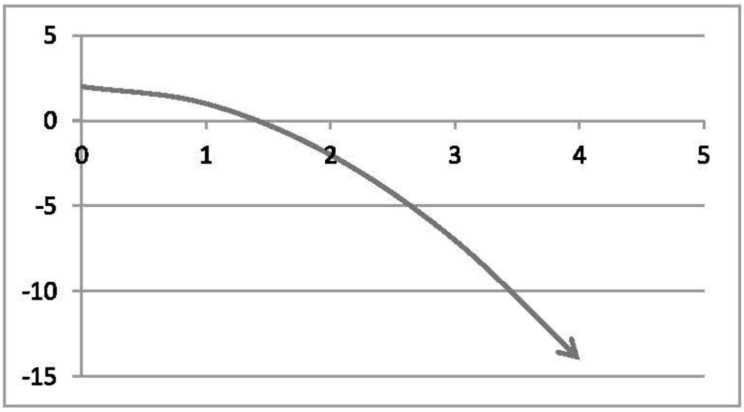


Figura 1.78

Ejemplo 3. Determinar los intervalos donde las funciones dadas son crecientes, estrictamente crecientes, decrecientes o estrictamente decrecientes.

a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = \begin{cases} x^2, x \in \langle -\infty; 2] \\ x+2,\ x \in \langle 2;\ 5\rangle \\ 7, x \in [5;\ +\infty\rangle \end{cases}$ c) $h(x) = \frac{1}{x}$

Solución.

(a) Obsérvese la gráfica de la función (Figura 1.79): $f(x) = (x-2)^2$.

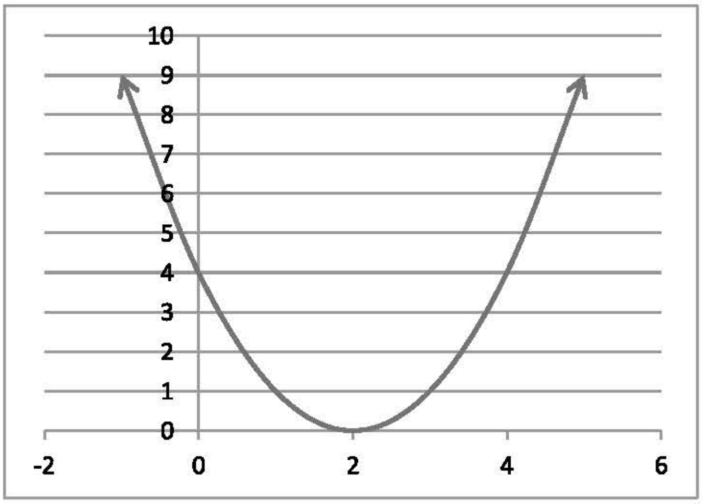


Figura 1.79

Se ve que es (estrictamente) decreciente en el intervalo $I = \langle -\infty; 2\rangle$

Así también es (estrictamente) creciente en el intervalo $J = \langle 2; +\infty\rangle$

(b) Obsérvese la gráfica de la función en la Figura 1.80: $g(x) = \begin{cases} x^2, x \in \langle -\infty; 2] \\ x+2,\ x \in \langle 2;\ 5\rangle \\ 7, x \in [5;\ +\infty\rangle \end{cases}$

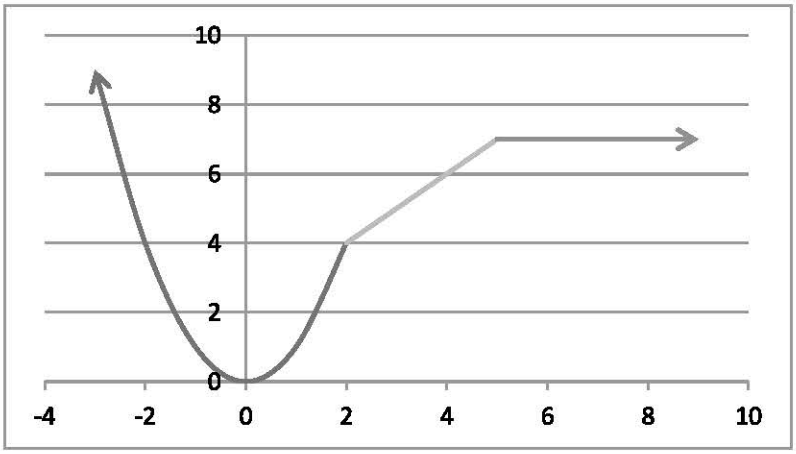


Figura 1.80

Se advierte que es (estrictamente) decreciente en el intervalo $I = \langle -\infty; 0\rangle$

También que es creciente en el intervalo $J = \langle 0; +\infty\rangle$

Pero es (estrictamente) creciente en el intervalo $K = \langle 0; 5\rangle$

(c) Obsérvese en la Figura 1.81, la gráfica de la función $h(x) = \frac{1}{x}$.

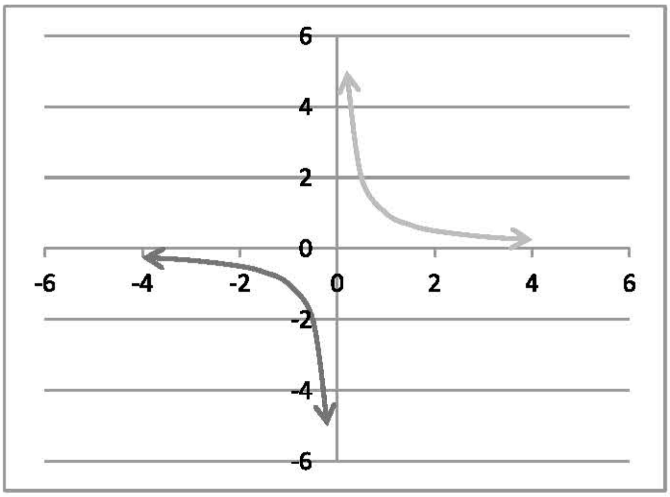


Figura 1.81

Se percibe que es (estrictamente) decreciente en el intervalo $I = \langle -\infty; 0\rangle$ y en el intervalo $J = \langle -\infty; 0\rangle$.

Ejemplo 4. (Función utilidad). Si la utilidad $P(x)$ en dólares para una salida de x unidades se calcula mediante la función $P(x) = -\frac{x^2}{30} + 200x - 7200$, con $x > 0$. Determine los niveles de producción para los cuales P es creciente y los niveles para los que P es decreciente.

Solución.

Graficando la función dada, se observa lo siguiente:

a) Es creciente en el intervalo $[0; 3000]$. Esto significa que la utilidad es creciente en este intervalo.

b) Decreciente en el intervalo $[3000; 5000]$. Es decir, la utilidad es decreciente en este intervalo. (Ver Figura 1.82).

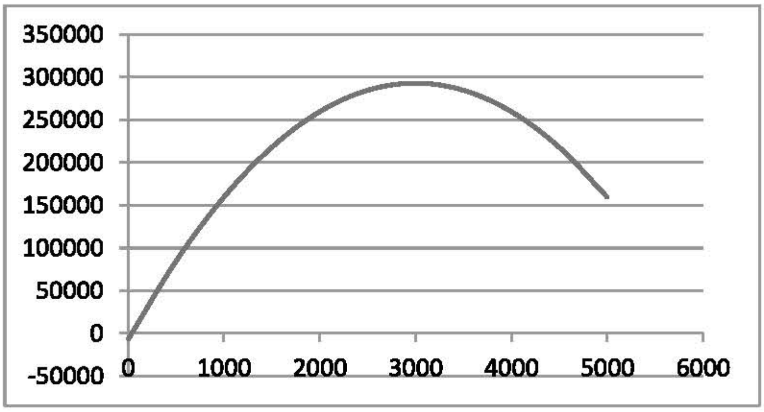


Figura 1.82

Ejemplo 5. (Ritmo del pulso). Una persona que mide x pulgadas de altura tiene un ritmo de pulso de y pulsaciones por minuto, calculadas aproximadamente con la fórmula $y = 590x^{-1/2}$, $30 \leq x \leq 75$. En el intervalo que se indica, ¿el ritmo de pulso es creciente o decreciente?

Solución.

Al graficar la función dada, se observa que es decreciente en el intervalo $[30; 75]$.

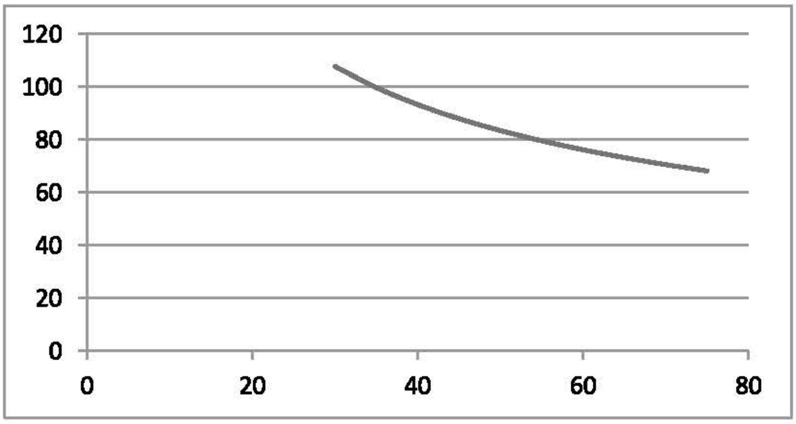


Figura 1.83

1.8. FUNCIONES TRASCENDENTES: EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.

Cuando en la regla de correspondencia la variable independiente aparece formando parte del exponente.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f_a(x) = a^x$ o $f(x) = a^x$ Con base $a \in$ R, $a > 0, a \neq 1$	$Dom(f_a) = R$	$Im(f_a) = R^+$	$Gra(f_a)$, depende de la función.

PROPIEDADES: La función exponencial cumple con todas las propiedades de las leyes de los exponentes. Veamos algunas de ellas:

1. $f(x+z) = f(x) \cdot f(z) \quad \rightarrow \quad a^{x+z} = a^x \cdot a^z$

2. $f(x-z) = \frac{f(x)}{f(z)} \quad \rightarrow \quad a^{x-z} = \frac{a^x}{a^z}$

3. $[f(x)]^z = f(xz) \quad \rightarrow \quad (a^x)^z = a^{xz}$

OBSERVACIÓN 1. Toda función exponencial f_a cumple con:

- $Dom(f_a) = R$ - Es sobreyectiva - $Im(f_a) = R^+$ - Es inyectiva

- f es estrictamente decreciente cuando $0 < a < 1$.

- f es estrictamente creciente cuando $a > 1$.

Nota. Cuando la base es e=2.7182818..., entonces se tiene $f(x) = e^x$.

Ejemplo 1. Construir la gráfica de las funciones exponenciales que se piden.

a) Cuando $a = \frac{1}{2}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ o $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. (Ver Figura 1.84).

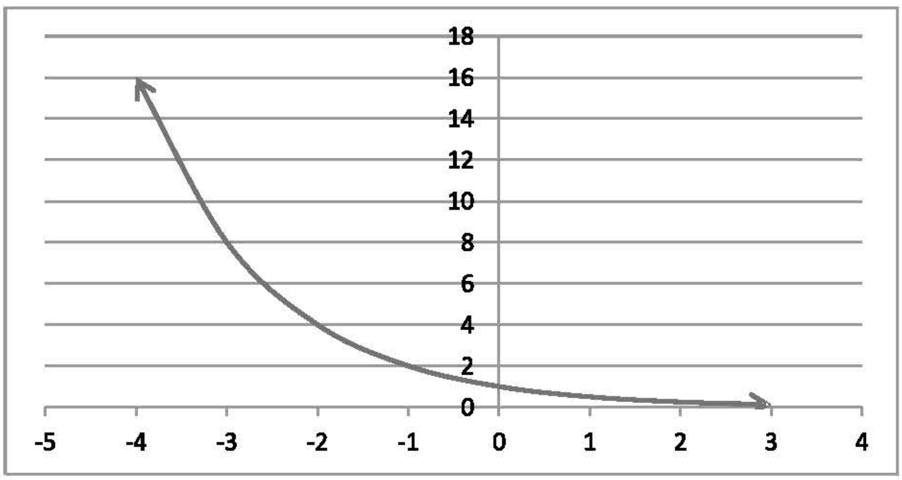


Figura 1.84

b) Cuando $a = 2, f(x) = 2^x$ o $y = 2^x$. (Ver Figura 1.85).

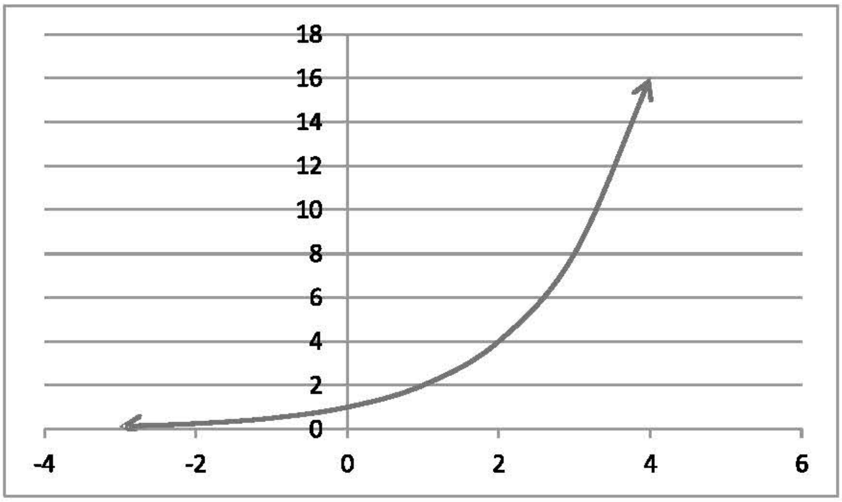


Figura 1.85

OBSERVACIÓN 2. En general la función exponencial tiene otras formas en las que puede aparecer configurando operaciones combinadas, como se mostrará en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2. (*PROBLEMA*) Una sola bacteria de cólera se divide cada media hora para producir dos bacterias completas. Si se empieza teniendo 100 bacterias, en t horas (suponiendo un medio de cultivo adecuado) se tendrá $B = (100)2^{2t}$ bacterias.

a) Graficar la función B para $0 \leq t \leq 3$.

b) Calcular el número de bacterias para cuando $t = 1$ hora, $t = 1{,}5$ horas y $t = 2{,}5$ horas.

Solución.

Se hace una tabulación para el intervalo $0 \leq t \leq 3$ de ½ en ½. (Ver Figura 1.86).

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(t)$	100	200	400	800	1600	3200	6400

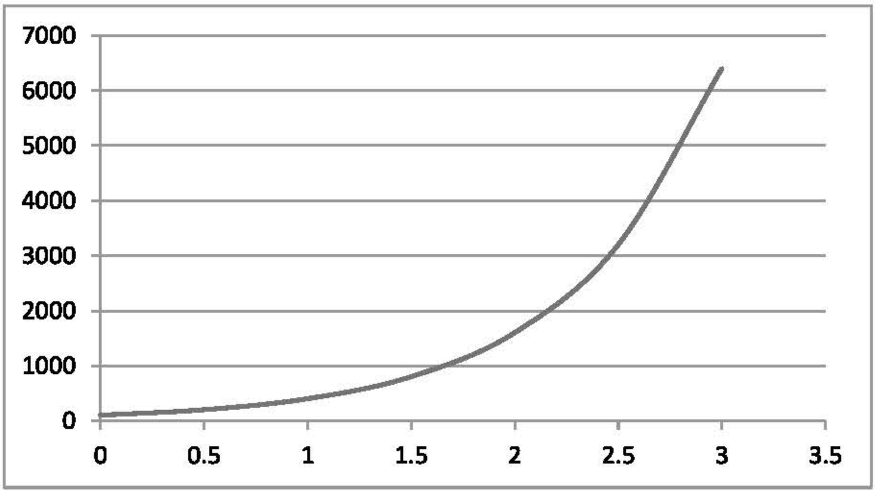


Figura 1.86

El valor $B(1) = 400$ significa que al transcurrir una hora de iniciado el experimento se han formado 400 nuevas bacterias.

El valor $B(1{,}5) = 800$ da a entender que al pasar una hora y media de iniciado el experimento se han formado 800 nuevas bacterias.

El valor $B(2{,}5) = 3200$ significa que tras dos horas y media de iniciado el experimento, ya se han formado 3200 nuevas bacterias.

Ejemplo 3. (*PROBLEMA*) Los registros de capacidad de cierta persona que aprende a digitar un teclado se obtienen, aproximadamente, de la fórmula $N(t) = 100(1 - e^{-0{,}1t})$, donde N es el número de palabras digitadas por minuto y t es el número de semanas de aprendizaje.

a) Graficar la función N para $0 \leq t \leq 40$.

b) Calcular el número de palabras para $t = 5$ semanas, $t = 15$ semanas, $t = 35$ semanas y $t = 40$ semanas.

c) Qué tendencia observa usted en la gráfica cuando el tiempo avanza.

Solución. Haga una tabulación de 5 en 5 para graficar y luego interprete lo que se pide. (Ver Figura 1.87).

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40
f(t)	0	39,35	63,21	77,69	86,47	91,79	95,02	96,98	98,17

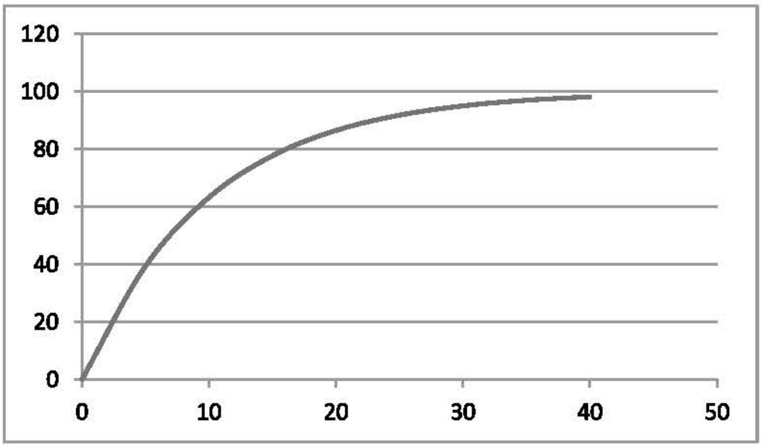


Figura 1.87

El valor $N(5) = 39{,}35$ significa que al pasar cinco semanas de iniciado el experimento se ha registrado 39,35 palabras digitadas.

El valor $N(15) = 77{,}69$; es decir, cuando han pasado quince semanas de iniciado el experimento se registró 77,69 palabras digitadas.

El valor $N(35) = 96{,}98$ da a entender que a las treinta y cinco semanas de iniciado el experimento, se ha registrado 96,98 palabras digitadas.

El valor $N(40) = 98{,}17$ significa que al transcurrir cuarenta semanas de iniciado el experimento se registró 98,17 palabras digitadas.

LA **FUNCIÓN** LOGARÍTMICA.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = Log_a x$ Con base $a \in$ R, $a > 0$, $a \neq 1$	$Dom(Log_a) = R^+$	$Im(Log_a) = R$	$Gra(f)$, depende de la función.

DEFINICIÓN. Sea la función exponencial f_a : R→R$^+$definida por $f_a(x) = a^x$ para $a\in$ R, $a > 0$, $a \neq 1$. Llamaremos Función Logarítmica en base "a" a la función inversa de f_a , f_a^*: R$^+ \to$ R definida por $f_a^*(x) = Log_a(x) = y$ si y solamente si $x = a^y$. Es decir, $Log_a(x) = y \Leftrightarrow$ si $x = a^y$.

PROPIEDAD: $Log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad$ si $x = a^y$.

OBSERVACIÓN. En una función logarítmica se cumple lo siguiente:

- $Dom(Log_a) =$ R$^+$ - Es sobreyectiva - $Im(Log_a) =$ R - Es inyectiva

- f es estrictamente decreciente cuando $0 < a < 1$.

- f es estrictamente creciente cuando $a > 1$.

PROPIEDADES: La función logarítmica cumple con todas las propiedades de los logaritmos. Veamos algunas de ellas:

1. $f(xz) = f(x) + g(z) \quad \rightarrow \quad Log(xz) = Log(x) + Log(z)$

2. $f\left(\frac{x}{z}\right) = f(x) - g(z) \quad \rightarrow \quad Log\left(\frac{x}{z}\right) = Log(x) - Log(z)$

3. $f(x^k) = kf(x) \quad \rightarrow \quad Log(x^k) = k\, Log(x)$

Nota. Cuando la base es e =2.7182818..., entonces $f(x) = Log_e\,(x)$ o $f(x) = Ln(x)$, llamada función logaritmo natural.

Ejercicio 1. Construir la gráfica de las funciones logarítmicas que se piden.

a) Cuando $a = \frac{1}{2}$: $f(x) = Log_{1/2}(x)$ o $y = Log_{1/2}(x)$. (Ver Figura 1.88).

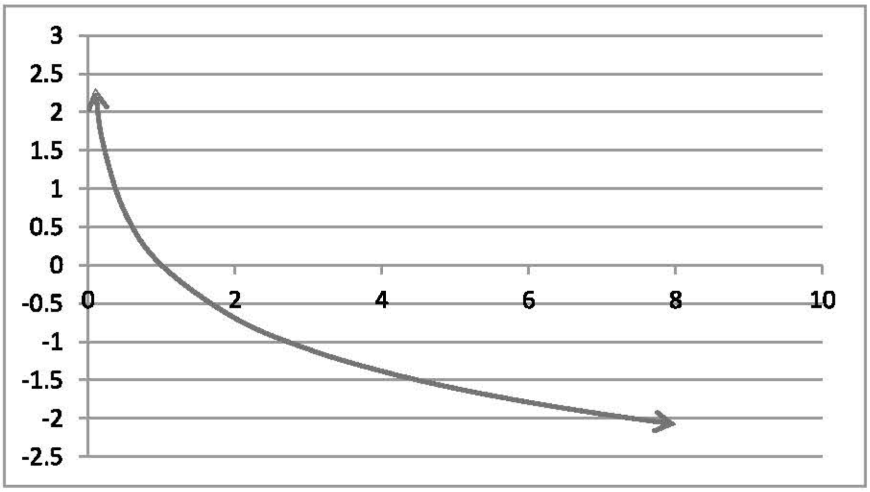


Figura 1.88

b) Cuando $a = 2$, $f(x) = Log_2(x)$ o $y = Log_2(x)$. (Observar la Figura 1.89).

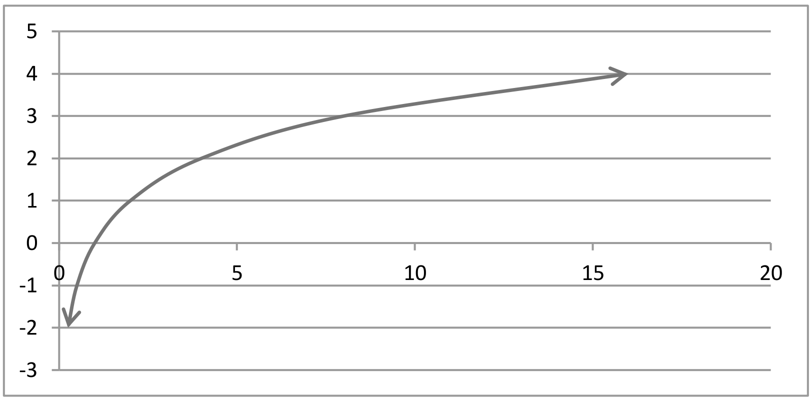


Figura 1.89

c) $f(x) = Ln(x)$. (Ver Figura 1.90).

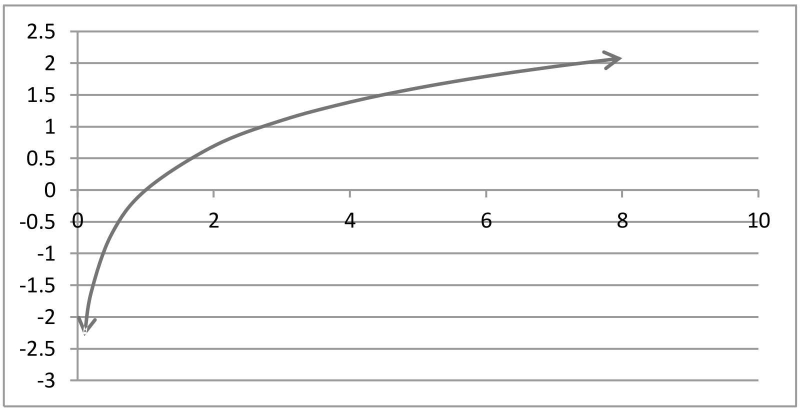


Figura 1.90

OBSERVACIÓN. En sentido general, la función logarítmica tiene otras formas en que puede aparecer configurando operaciones combinadas, tal como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4. (*PROBLEMA*) En la acústica se ha determinado que la sensación de volumen que produce un sonido en el oído humano es una función logarítmica de intensidad. La intensidad se mide en watts por metro cuadrado. El sonido audible más débil (apenas audible) tiene intensidad $I_0 = 10^{-12}\ watts/m^2$. El volumen de un sonido se mide en decibeles, con el supuesto que un sonido de intensidad I_0 tiene 0 decibeles. Si un sonido tiene intensidad I, entonces el volumen del sonido está dado por $L = 10Log\left(\frac{I}{I_0}\right)$.

a) Hallar el volumen en decibeles del sonido de una banda de rock que está ubicada a 100 metros del estrado si en ese lugar el sonido tiene intensidad de $10^{-5}\ watts/m^2$.

b) Calcular la intensidad de un sonido de volumen igual a 60 decibeles.

Solución.

(a) Usando $L = 10Log\left(\frac{I}{I_0}\right) \rightarrow L = 10Log\left(\frac{10^{-5}}{10^{-12}}\right) \rightarrow L = 70$ decibeles de volumen.

Se entiende que a 100 metros de distancia un sonido de intensidad $10^{-5}\ watts/m^2$ produce un volumen de 70 decibeles.

(b) Usamos $L = 10Log\left(\frac{I}{I_0}\right) \rightarrow 60 = 10Log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \rightarrow I = 10^{-6}\ watts$por m^2 de intensidad.

Quiere decir que a 100 metros de distancia un volumen de 60 decibeles es producido por un sonido de $I = 10^{-6}\ watts$por m^2 de intensidad.

Ejemplo 5. (*PROBLEMA*) La magnitud M de un sismo en la escala de Richter es dada por $M = 0{,}6Log(0{,}37E) + 1{,}46$; donde E es la energía del sismo, medida en kilowatts hora. Encuentre la energía de un sismo de magnitud 7.

Solución.

Usamos $M = 0{,}6Log(0{,}37E) + 1{,}46$. Reemplazando $M = 7$ y despejando E, así:

$7 = 0{,}6Log(0{,}37E) + 1{,}46 \rightarrow E = \frac{10^{5{,}54/0{,}67}}{0{,}37} \rightarrow E = 5{,}017110^8\ kwh.$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

FUNCIÓN SENO. (Ver Figura 1.91).

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = Sen(x)$	$Dom(Sen) = R$	$Im(Sen) = [-1; 1]$	$Gra(f)$, depende de la función.

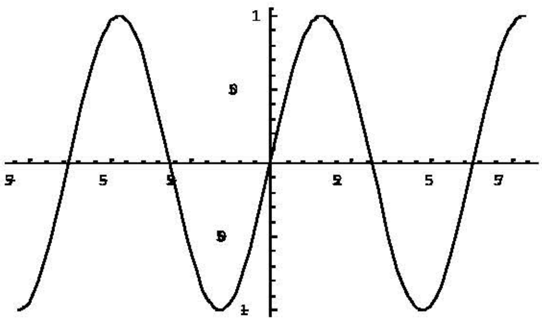


Figura 1.91

FUNCIÓN COSENO. (Ver Figura 1.92).

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = Cos(x)$	$Dom(Cos) = R$	$Im(Cos) = [-1; 1]$	$Gra(f)$, depende de la función.

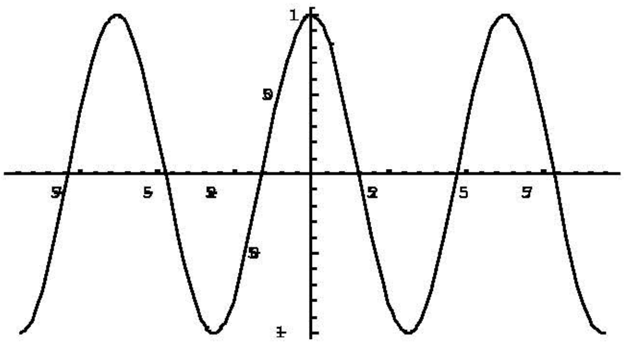


Figura 1.92

FUNCIÓN TANGENTE. (Ver Figura 1.93).

Regla de correspondencia	Dominio e imagen	Gráfica
$f(x) = Tan(x)$	$Dom(Tan) = R - \{x \in \mathrm{R} / \ x = (2n-1)(\pi/2), n \in N\}$	$Gra(f)$, depende de la función.
	$Im(Tan) = R$	

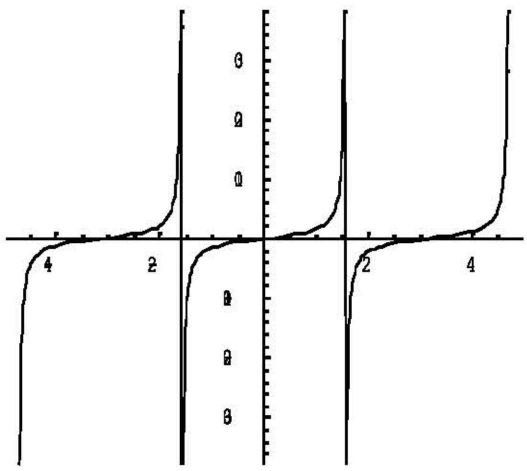


Figura 1.93

FUNCIÓN COTANGENTE. (Ver Figura 1.94).

Regla de correspondencia	Dominio e imagen	Gráfica
$f(x) = Tan(x)$	$Dom(Cot) = R - \{x \in \mathrm{R} / \ x = n\pi, n \in N\}$	$Gra(f)$, depende de la función.
	$Im(Cot) = R$	

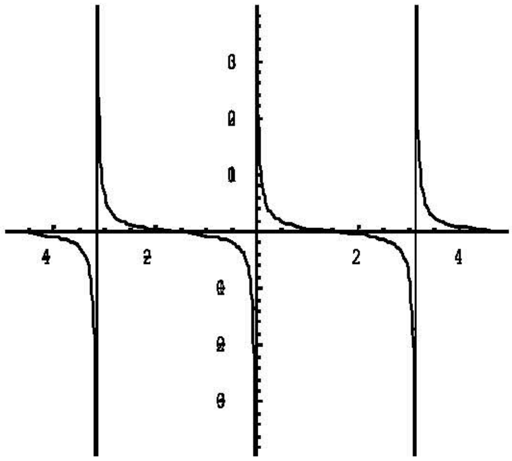


Figura 1.94

FUNCIÓN SECANTE. (Ver Figura 1.95).

Regla de correspondencia	Dominio e imagen	Gráfica
$f(x) = Sec(x)$	$Dom(Sec) = R - \{x \in \mathrm{R} / \ x = (2n+1)(\pi/2), n \in \mathrm{N}\}$	$Gra(f)$, depende de la función.
	$Im(Sec) = - \{x \in \mathrm{R} / \ \lvert x \rvert < 1\}$	

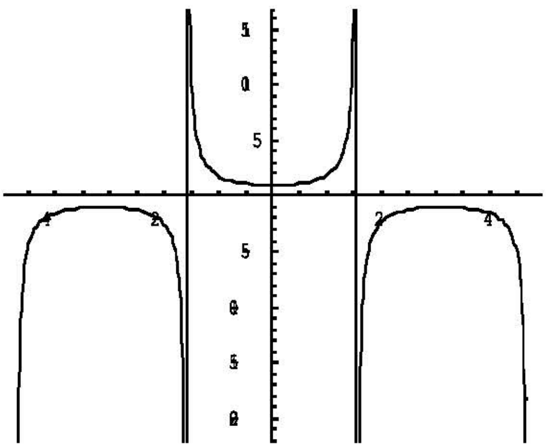


Figura 1.95

FUNCIÓN OSECANTE. (Ver Figura 1.96).

Regla de correspondencia	Dominio e imagen	Gráfica
$f(x) = Csc(x)$	$Dom(Csc) = \{x \in \mathrm{R} / \ x = n\pi, n \in \mathrm{N}\}$	$Gra(f)$, depende de la función.
	$Im(Csc) = \mathrm{R} - \{x \in \mathrm{R} / \ \lvert x \rvert < 1\}$.	

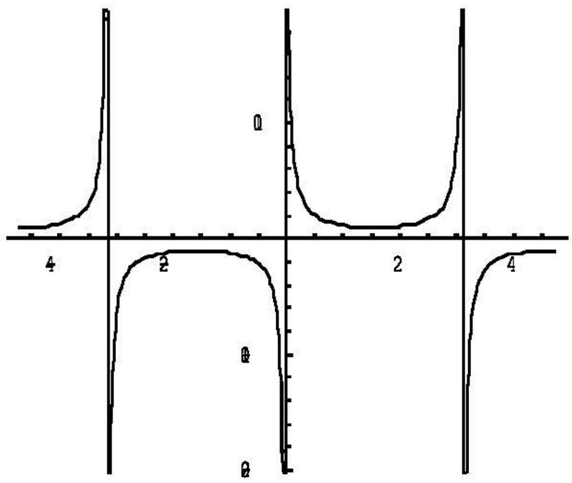


Figura 1.96

1.9. FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS. PROBLEMAS DE APLICACIóN

DIFERENCIA ENTRE UN PROBLEMA REAL Y UN MODELO MATEMÁTICO.

Un problema de aplicación es el planteamiento de un hecho o suceso con la intención de darle una representación matemática y, posteriormente, una solución matemática. Puede ser de solución fija o de solución variable.

a) PROBLEMA DE SOLUCIÓN FIJA.

Problema de aplicación. Se ha talado los $\frac{7}{8}$ de la madera de un bosque. Se reforesta 38 hectáreas (ha) y el bosque queda cubierto en sus $\frac{3}{5}$ partes. Calcular el área total del bosque en ha.

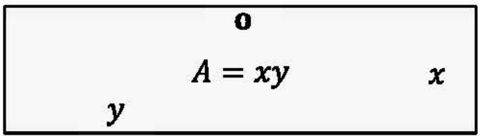
Modelo matemático. Siendo x la incógnita que representa el área total del bosque y usando los datos dados, se llega a tener el siguiente modelo: $\frac{1}{8}x + 38 = \frac{3}{5}x$.

Solución. La solución fija es dada por $x = 80$ ha.

b) PROBLEMA DE SOLUCIÓN VARIABLE.

Problema de aplicación. Una empresa fabrica puertas de diferentes anchos y alturas. Se desea calcular el área de dichas puertas sabiendo que las medidas de ancho y altura deben sumar 2,8 m y el ancho no debe ser menor de 0,65 m. Hallar la función que modele este hecho e indicar el área para una puerta cuyo ancho es 0,80 m. Así también, determinar el ancho para el cual el área es máxima.

Solución. Se muestra el esquema del problema:



Modelo matemático. La función que permite tener las diversas áreas de las puertas es $A(x) = 2{,}8x - x^2$ en m^2, con dominio lógico $0{,}65 \leq x \leq 2{,}15$. Los pasos (que son cuatro) para llegar a este modelo se verán luego.

Nótese que este modelo sirve para calcular áreas de puertas de diversas anchuras, y tiene solución variable. En seguida se presenta una gráfica del modelo matemático.

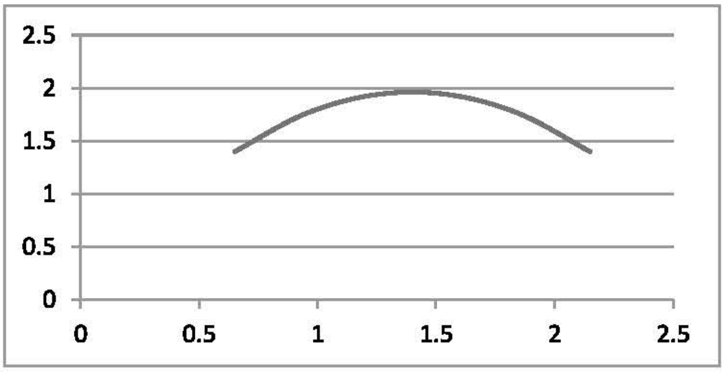


Figura 1.97

La solución particular es $A(0{,}80) = 1{,}6\, m^2$. El ancho para el cual el área es máxima será de $A(1{,}4) = 1{,}96\, m^2$.

Cada punto de la gráfica es de la forma $(x; A)$, donde x representa el ancho de cada puerta y A representa su área o superficie. (Ver Figura 1.97).

Nota. Un modelo matemático es una función obtenida a partir de hechos, sucesos o situaciones concretas.

Son cuatro los pasos que se siguen en la resolución de un problema real:

i) Se asigna letras o variables a las cantidades (magnitudes) dadas y a aquellas por determinar (incógnitas). De ser posible, se hace un esquema del problema.

ii) Se escribe una *ecuación primaria* para la magnitud que va a representar la función pedida, la cual será llamada variable dependiente.

iii) Se formula *ecuaciones secundarias* que permitan transcribir la ecuación primaria en otra que tenga una sola variable independiente.

iv) Se determina el "Dominio Lógico" de la ecuación primaria; es decir, el dominio para el cual la función tenga sentido real.

Finalmente, se expresa la función $y = f(x)$ con su respectivo dominio $Dom(f)$.

PROBLEMA 1. Se va a cercar un terreno rectangular de perímetro 100 m. Expresar el área como función de la longitud de uno de sus lados. Hallar el área máxima y la longitud para la cual ocurre.

Solución.

Apliquemos los cuatro pasos anteriores. En un rectángulo:

i) A =área; p =perímetro; y =largo; x =ancho.

ii) La ecuación primaria va por el área $A = xy$

iii) La ecuación secundaria: $P = 2x + 2y \rightarrow 100 = 2x + 2y \rightarrow y = 50 - x$

Reemplazando en la ecuación primaria: $A = 50x - x^2$ o $A(x) = 50x - x^2$.

iv) Como x e y son longitudes de un terreno, $x > 0$, $y > 0$.

Pero si $y > 0 \rightarrow 50 - x > 0 \rightarrow x < 50$, de donde $0 < x < 50$ que es el dominio lógico.

La función con su dominio lógico será $A(x) = 50x - x^2$ con $0 < x < 50$.

Cada punto de la gráfica es de la forma $(x; A)$, donde x representa el ancho del rectángulo y A representa su área o superficie.

A continuación, en la Figura 1.98 se muestra la gráfica de este modelo.

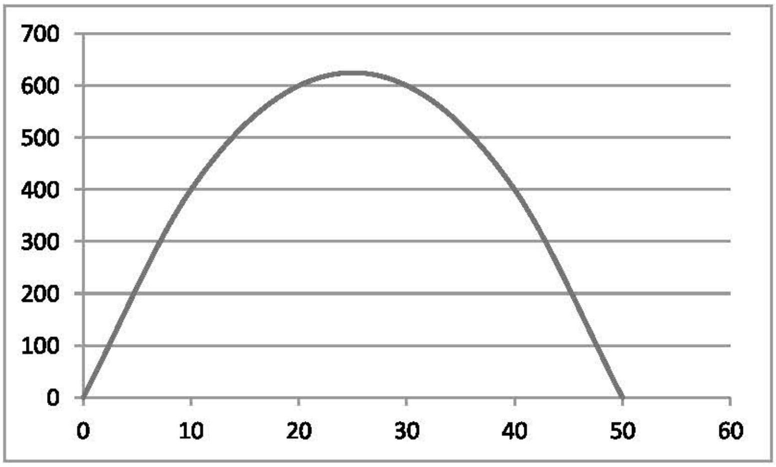


Figura 1.98

Como el modelo es una función cuadrática, hallando el vértice se determinará el área máxima y la longitud para la cual ocurre. Ver la teoría de la función cuadrática.

En efecto, $A(x) = 50x - x^2 \rightarrow A(x) = -[x^2 - 50x + 25^2 - 25^2]$

$\rightarrow A(x) = -[(x - 25)^2 - 625] \rightarrow A(x) = -(x - 25)^2 + 625$

Se observa que el máximo es $A = 625\ m^2$ y ocurre cuando la longitud del ancho es de $25\ m$.

PROBLEMA 2. Una compañía renta equipos de cómputo y tiene 150 disponibles. El dueño sabe que podrá rentarlos todos a S/. 50 cada uno por semana, pero que un equipo dejará de rentarse por cada aumento de S/. 2 en la renta semanal. Exprese el ingreso del dueño como función de una variable apropiada.

Solución.

i) Sean $x = n°$ de equipos rentados $\quad y = n°$ de equipos no rentados

$I_P =$ Ingreso por equipo $\quad I =$ Ingreso total.

ii) Ecuación primaria: $\quad I = (x)(I_P)$

iii) Ecuaciones secundarias: $x + y = 150$ o $y = 150 - x$

$$I_P = 50 + 2y$$

Reemplazando y en I_p: $\quad I_P = 350 - 2x$

En la ecuación primaria $I = x(350 - 2x) \rightarrow I = 350x - 2x^2$ o $I(x) = 350x - 2x^2$.

iv) El dominio lógico prácticamente es $0 \leq x \leq 150$.

La función Ingreso con su dominio será $\quad I(x) = 350x - 2x^2$ con $0 \leq x \leq 150$.

Cada punto de la gráfica es de la forma $(x; I)$, donde x representa el número de equipos rentados e I simboliza el ingreso total correspondiente. (Ver Figura 1.99).

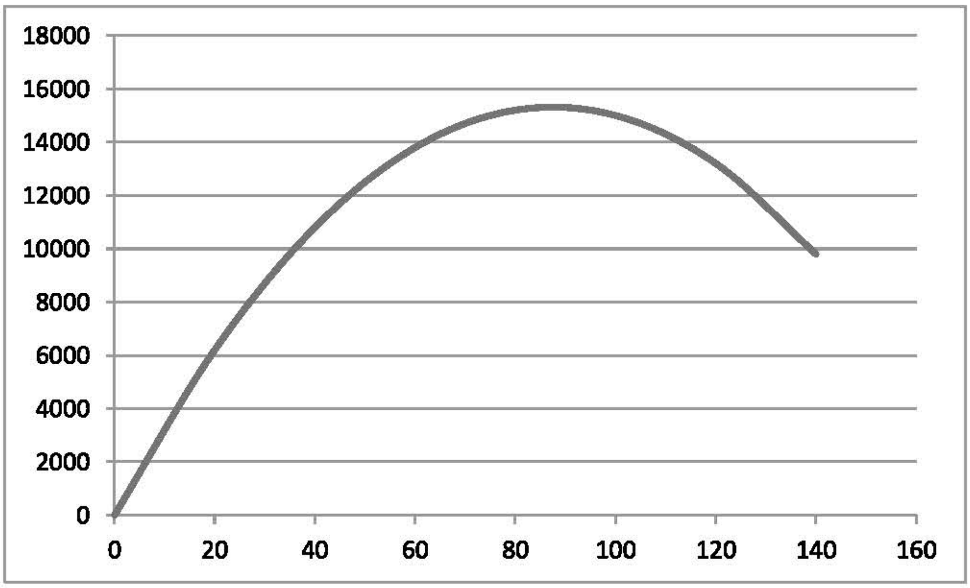


Figura 1.99

PROBLEMA 3. Una droguería ha descubierto que puede vender 10 000 unidades de cierto medicamento al mes, a un precio de \$15 la unidad; pero únicamente 8 000 si el precio unitario es de \$20.

a) Expresar el precio como una función del número de unidades vendidas, suponiendo que la relación es lineal. Interpretar para $x = 6\ 000$.

b) Si sus costos fijos son de \$5 000 y los de mano de obra ascienden a \$8, hallar el costo, ingreso y beneficio como funciones de las ventas. Interprete para $x = 12\ 000$.

Solución parte (a).

i) $y =$ Precio; $x =$ Unidades vendidas.

ii) Ecuación primaria. Relación lineal $y = y(x)$ conociendo dos puntos:

$(x_1; y_1) = (10\ 000;\ 15), (x_2; y_2) = (8\ 000;\ 20)$

iii) Ecuación secundaria: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Usando los puntos conocidos se tiene $y = 40 - \frac{x}{400}$ o $f(x) = 40 - \frac{x}{400}$

iv) Dominio lógico: $x \geq 0$; $y \geq 0$, pero si $y \geq 0 \rightarrow 40 - \frac{x}{400} \geq 0 \rightarrow x \leq 16000$, de donde $x \leq 16000$.

La función con su dominio queda expresada por $f(x) = 40 - \frac{x}{400}$ con $x \leq 16000$.

Piden además interpretar $f(6000) = 25$, quiere decir que cuando la droguería vende 6 000 unidades de dicho medicamento es porque el precio es de \$25 la unidad.

Solución parte (b)

Siendo: $C(x) =$ Costo ; $R(x) =$ Ingreso; $P(x) =$ Beneficio

Ecuaciones respectivas:

La función de Costo total = Costo Fijo + Costo Variable $\rightarrow$ $C(x) = 5\ 000 + 8x$

La función de Ingreso = n° de unidades por el precio; luego $R(x) = 40x - \frac{x^2}{400}$

La función de Beneficio = Ingreso – Costo; luego $P(x) = 32x - \frac{x^2}{400} - 5000$

El dominio para las tres funciones es $0 \leq x \leq 16\ 000$.

Piden además interpretar:

$C(12\ 000) = 101\ 000$, se entiende que cuando la droguería produce 12 000 unidades, el costo para su producción es de \$101 000.

$R(12\,000) = 120\,000$, quiere decir que si la droguería vende 12 000 unidades, el ingreso por las ventas es de \$120 000.

$P(12\,000) = 19\,000$, lo cual denota que cuando la droguería vende 12 000 unidades, el beneficio obtenido por las ventas es de \$19 000.

PROBLEMA 4. El dueño de una clínica de 50 habitaciones privadas tiene una ganancia de \$4.00 con cada habitación ocupada por día, pero pierde \$1,00 por habitación vacía.

a) Exprese la ganancia diaria como una función del número de cuartos ocupados.

b) Halle e interprete para el caso de $x = 25$ habitaciones ocupadas.

Solución.

a) Expresar la ganancia como función.

i) Sean G = Ganancia. x = n° de habitaciones ocupadas.

$y = n°$ de habitaciones no ocupadas. \$4 = Ganancia por habitación ocupada.

\$1 = Pérdida por habitación no ocupada.

ii) Ecuación primaria: $G = 4(x) - 1(y)$

iii) Ecuaciones secundarias: $x + y = 50 \to y = 50 - x$.

Reemplazando y en la ecuación primaria: $G = 5(x - 10)$ o $G(x) = 5(x - 10)$

iv) El dominio lógico es [0; 50].

La función con su dominio queda como $G(x) = 5(x - 10)$ con $x \in [0;\ 50]$.

Cada punto de la gráfica es de la forma $(x; G)$ donde x representa el número de habitaciones ocupadas y G, la ganancia correspondiente. (Ver Figura 1.100).

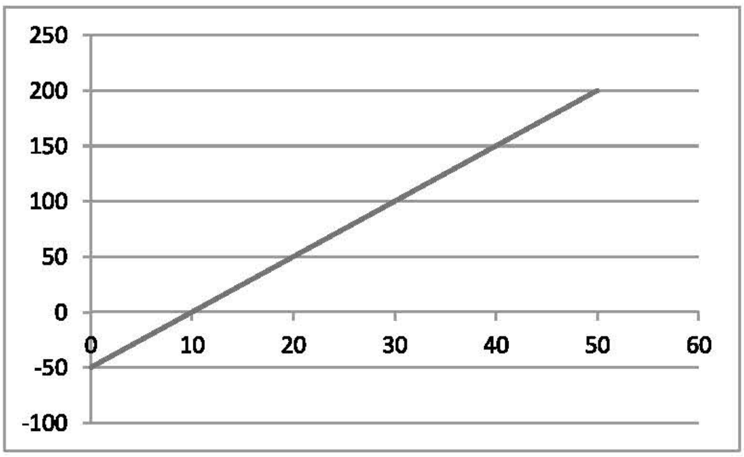


Figura 1.100

b) Se calcula $G(25) = 5(25 - 10) = 75$ dólares.

Esto significa que cuando hay 25 habitaciones ocupadas, se tendrá una ganancia de 75 dólares.

1.10. LISTADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

FUNCIÓN: DOMINIO, IMAGEN Y GRÁFICA.

1. Determinar cuáles de las siguientes relaciones son funciones reales:

a) F: R→R/ $x \rightarrow y = x^2$

b) T: R→R/ $y^2 + x = 5$

c) $G = \{(x; y) \in$ RxR / $y = \sqrt{4 - x^2}\ \}$

d) $G = \{(x; y) \in$ RxR/$|y| = |x + 2|\ \}$

2. Desarrollar según se pide:

a) Si $f(x) = x^2 - 10x + 6$; calcular $f(-4)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(-2x)$.

b) Dada la función $f(x - 1) = 2x^2 - 3x + 1$, hallar $f(x + 1)$.

3. Graficar las siguientes funciones e indicar dominio e imagen:

a) $f(x) = \sqrt{3 - x}$

b) $g(x) = 40x - x^2$

c) $H(x) = 1 + \frac{x}{3}, x \leq 0.$

d) $R(t) = 200 + 25t, 4 \leq t \leq 32.$

4. Graficar la ecuación de costos $C(x) = 5\,000 + 2x$, para $0 \leq x \leq 8\,000$.

5. Graficar la ecuación de ingresos $R(x) = 300x - x^2$, para $0 \leq x \leq 9\,000$.

6. Graficar: a) $y = x^3 - 4x$ b) $y = 4x(x^2 + 1)$

c) $y = 2 + \frac{1}{x-3}$ d) $y = 0{,}1(x - 3)^2 - 100$

7. Graficar las siguientes funciones:

a) $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - 2}$

b) $h(t) = \sqrt{6 - 3t}, -2 \leq t \leq 10$

c) $f(x) = |2x - x^2|$

d) $g(x) = \sqrt{|3x - 5|}$

e) $f(x) = [\![x^2 + 1]\!]$

f) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

g) $h(x) = (x - 2)^2 - 1$

CLASES DE FUNCIONES. FUNCIONES ELEMENTALES.

1. Construya la recta que pasa por los puntos (1; 1) y (8; 3).

2. Hallar y graficar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1; 3) con pendiente $m = -2$.

3. a) Hallar el valor máximo de la función $f(x) = 6x - x^2$. Grafique la función para $-1 \leq x \leq 6$.

b) Hallar el valor mínimo de la función $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$. Grafique la función para $-5 \leq x \leq 2$.

4. Un equipo de oficina se deprecia linealmente y su valor se calcula mediante la función

$D(t) = 30\,000 - 1\,500t$.

a) Determine el valor del equipo después de 5 años, luego de 10 años e interprete.

b) Construya la gráfica para $0 \leq t \leq 20$.

c) ¿Cuál fue el valor del equipo cuando era nuevo?

d. Halle la pendiente e indique su significado en el contexto de este problema.

5. El costo de la fabricación de "x" pares de patines, si los costos fijos son \$550 por día y los costos variables son \$70 por par de patines fabricados. Grafique dicha función e interprete para tres valores.

6. La gerencia de una empresa que fabrica juguetes deportivos tiene costos fijos (cero salidas) de \$200 por día y costos totales de \$1 400 por día para una salida diaria de 20 unidades. Determine la recta y grafíquela para $0 \leq x \leq 20$.

7. Un animal pesa 10 libras al nacer y 15 un mes después. Elabore la función que rige este suceso. ¿Cuánto pesará el animal en 1 año si la relación edad-peso es una ecuación lineal?

8. Una compañía estima sus ingresos mediante la función: $R(p) = 400p - 25p^2$, siendo "p" el precio con $0 \leq p \leq 120$, en dólares.

a. Calcular el ingreso para $p = 30, p = 60$ y $p = 90$ e interpretar cada caso.

b. Hallar el ingreso máximo y el precio en el cual se da.

9. Si una persona aprende "y" cosas en "x" horas, calculadas mediante la fórmula $y = 50\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 9$.

a) Construya la gráfica de $y = f(x)$.

b) Calcule $f(1), f(4), f(7), f(9)$ e interprete cada caso.

OPERACIONES CON FUNCIONES. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.

1. Para las funciones $f(x) \quad 3 \quad 5x, g(x) \quad 4x + 7$:

a) $(f + g)(x)$ y su dominio.

b) $(f \cdot g)(x)$ y su dominio.

c) $(f \div g)(x)$ y su dominio.

2. Un fabricante estima que su costo promedio $\bar{C}(x)$ por par de patines a un nivel de salida de "x" millares es $\bar{C}(x) = (2x - 8)^2 + 25$ en dólares.

a) Calcular $\bar{C}(2)$, $\bar{C}(4)$, $\bar{C}(6)$ e interpretar cada caso.

b) Graficar $\bar{C}(x)$ para $0 \leq x \leq 9$.

3. Una empresa tiene como ecuación de demanda a $x = 9\,000 - 30p$, siendo "p" el precio por unidad, su ecuación de costos es $C(x) = 72\,000 + 60x$. La ecuación de ingresos se obtiene de $R = xp$, finalmente la ecuación de beneficio es $P = R - C$.

a) Exprese el costo como una función lineal del precio.

b) Señale el ingreso como una función cuadrática del precio.

c) Halle la función de beneficio.

4. Suponga que se tiene la ecuación de demanda $x = f(p) = 16\,000 - 30p$, donde $x = f(p)$ es el número de unidades vendidas a S/. p cada una. Observe que a medida que el precio sube, el número de unidades que se vende disminuye.

a. Suponga además que la demanda es afectada por un incremento del 15 por ciento. Señale la nueva función demanda y calcule otra para cuando $p = 250$ soles y $p = 350$ soles.

b. Imagine ahora que la demanda es afectada por una reducción del 20 por ciento. Exprese esta nueva función demanda y determine otra para cuando $p = 250$ soles y $p = 350$ soles.

c. Calcule la demanda original para $p = 250$ soles y $p = 350$ soles y compare estos resultados con los obtenidos en (a) y (b).

d. Grafique las tres funciones en un mismo sistema de coordenadas para $0 \leq p \leq 400$.

5. Un hombre que pesa 300 libras se pone a dieta y pierde 3 libras por semana. Otro que pesa 130 libras lleva una dieta rica en alimentos sanos y proteínas, por lo que gana 4 libras por semana. Construya la función que rige este hecho. ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que los dos hombres tengan el mismo peso?

6. Encontrar las funciones compuestas $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$ para:

a) $f(x) = x^3$ y $g(x) = x + 2$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 4$

7. Figure que, durante el verano, el número de insectos en el instante "t" se modela mediante la función $N(t) = 2t^2 + 1$ (millones). Si la población de pájaros se estima en $P(N) = 3N + 2$, donde N es el número (millones) de insectos presentes, aplique la idea de la composición para expresar la población de pájaros como una función del tiempo.

8. Se estima que la población de una ciudad para los próximos 10 años está dada mediante la relación $N(t) = 50\,000 + 300t$ (t en años), en tanto que el índice promedio de contaminación para dicha ciudad se representa por $P(N) = \sqrt{10 + \frac{N}{1000}}$. Determine la función compuesta $P[N(t)]$. Calcule e interprete $N(0)$, $P(50\,000)$. Así también: $P[N(5)]$, $P[N(8)]$, $P[N(10)]$.

TRANSFORMACIONES DE UNA FUNCIÓN REAL.

1. Realice las translaciones horizontales (a la izquierda y a la derecha) en la función $f(x) = 4x - x^2$, tomando como valor de referencia $c = 4$.

2. Ejecute las translaciones verticales (hacia arriba y hacia abajo) en la función $f(x) = 4x - x^2$, con $c = 4$ como valor de referencia.

3. Realice el alargamiento vertical de la función $f(x) = 4x - x^2$, tomando como valor de referencia $c = 1/2$.

4. Efectúe la reducción vertical de la función $f(x) = 4x - x^2$ con $c = 2$ como valor de referencia.

FUNCIÓN INYECTIVA, SOBRE YECTIVA Y BIYECTIVA.

1. Sea la función $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = \frac{4}{x^2+2}$; determinar si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

2. Sea la función $f: R \rightarrow \langle 0; 2]$ definida por $f(x) = \frac{4}{x^2+2}$; determinar si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

FUNCIÓN INVERSA.

1. Determine la inversa de la función $f(x) = (x+1)^2$ con $x \in \langle -\infty; -1 \rangle$ e indique si se trata o no de una función. Grafique ambas en un mismo sistema de coordenadas.

2. Para cada una de las siguientes funciones que sea inyectiva, encuentre su inversa en términos de x:

a. $f(x) = 7 - 2x$ b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES: CRECIENTE, DECRECIENTE, PAR, IMPAR Y PERIÓDICA.

1) Para las funciones $f(x) = 3 - 5x$, $g(x) = 4x + 7$:

a. Señale si f es creciente o decreciente.

b. Decidir si f es par, impar o periódica.

2. Grafique las siguientes funciones e indique en qué intervalo es creciente y/o decreciente:

a. $f(x) = \sqrt{3 - x}$ b. $g(x) = 40x - x^2$

c. $H(x) = 1 + \frac{x}{3}, x \leq 0.$ d) $R(t) = 200 + 25t, 4 \leq t \leq 32.$

FUNCIONES TRASCENDENTES: EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS.

1. Realizar la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = 3^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) $y = Log_4(x)$ d) $f(x) = 50(1 - e^{-0,2t}),\ t \leq 0.$

2. En 1970, la población mundial era de 3 500 millones. Desde entonces ha crecido a una tasa de 1,8% (0,018) al año. Calcular y dar una interpretación de la población en los años 1980 (t=10) y 1990. La función es $P(t) = P_0e^{rt}$, donde P_0es la población inicial y r es la tasa de crecimiento. Si la tasa aún persiste, hallar la población durante los años 2010 y 2012.

3. Si se deposita hoy \$ 375 en el banco, identifique la función que vincula el capital con el interés. Además, ¿cuánto se tendrá al cabo de 2 años si el interés es de 9,5% y se capitaliza en la forma que se especifica a continuación?:

a) Anualmente. b) Bimestralmente. c) Mensualmente. d) Continuamente.

El *interés simple* es dado por $A = P + Prt$, donde $A =$Cantidad a obtener en el tiempo t, $P =$ Capital inicial, $r =$Tasa anual, $t =$Tiempo en años.

El *interés compuesto* es dado por $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, cuando el interés se compone n veces al año; donde $A =$Cantidad a obtener en el tiempo t, $P =$ Capital inicial, $r =$Tasa anual, $t =$Tiempo en años.

El *interés continuo* es dado por $A = Pe^{rt}$, donde $A =$Cantidad a obtener en el tiempo t, $P =$ Capital inicial, $r =$ Tasa anual, $t =$ Tiempo en años.

4. En una ciudad de 10 000 habitantes, dos personas inician un rumor que alcanza a 25 personas al finalizar el día, ¿cuántas lo conocen al final del tercer día, si este rumor se propaga mediante $N(t) = \frac{10\ 000}{1+4999(0,08)^t}$? Interprete su resultado.

5. Usar la función dada para el volumen $L = 10Log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ a fin de evaluar la intensidad de un sonido de volumen igual a 60 decibeles.

FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

1. Cuando la agencia para la protección del ambiente de los Estados Unidos descubrió que cierta compañía descargaba ácido sulfúrico en el río Mississipi, la multó con 12 0000 dólares, más 1 000 dólares diarios hasta que dicha compañía cumpliera con la reglamentación federal de contaminación del agua. Exprese la multa total como una función del número total de días que la compañía continuó violando las reglas federales.

2. El costo de producción de muñecas para la compañía CUPIDO es de $C(x) = 0{,}1x^2 - 0{,}2x + 600$ dólares para una producción diaria de "x" muñecas. El número de muñecas producidas, transcurridas "t" horas de la jornada, es $x = 50t - 10$. Exprese el costo de producción "C" como una función de "t". Determine el costo de producción de una jornada de 8 horas e interprete.

3. Cuando se introduce una solución de acetilcolina en el músculo del corazón de una rana, disminuye la fuerza con que el músculo se contrae. Los datos de los experimentos de A. J. Clark se pueden aproximar bastante por medio de una función de la forma $R(x) = \frac{100x}{b+x}, x \leq 0$, donde "$x$" es la concentración de acetilcolina (en las unidades apropiadas); "b", una constante positiva que depende de la rana en particular; y $R(x)$, la respuesta del músculo a la acetilcolina, que se expresa como un porcentaje del efecto máximo posible de la droga.

a. Si $b = 20$, halle la respuesta del músculo si $x = 60$. Luego, interprete este resultado.

b. Determine el valor de b si $R(50) = 60$ (60%).

4. La velocidad V del torrente sanguíneo, en cm por segundo a "x" centímetros del centro de una determinada arteria, se obtiene de $V = f(x) = 1{,}28 - 20000x^2$ para $0 \leq x \leq 8(10)^{-3}$. Calcule e interprete $f(0)$, $f(0{,}004)$ y $f(0{,}002)$.

5. Una persona mide "x" pulgadas de altura y tiene un pulso de "y" pulsaciones por minuto, cuantificados aproximadamente con la fórmula $y = 590x^{-1/2}$, con $30 \leq x \leq 75$. Además se sabe que $y = f(x)$. Calcule e interprete $f(36)$, $f(45)$, $f(52)$ y $f(64)$. Asimismo, halle la inversa y cuantifique para algunos valores de su variable.

6. El área de una herida que cicatriza se determina con $A(t) = 2t^{-2}$, $1 \leq t \leq 10$, donde "t" está en días. Calcular e interpretar $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(5)$ $A(8)$ y $A(10)$.

7. El cerebro de un bebé es proporcional al peso de su cuerpo. Si un bebé pesa 3,5 kg y tiene un cerebro de 420gr, establezca la función que rige este hecho para cualquier peso. Además, determine cuánto pesa el cerebro de un bebé de 4 kg y halle la función inversa.

8. Se ha determinado que la población de zancudos en el instante t, durante el verano en que se siembra arroz, se modela por $f(t) = 2t^2 + 1$ miles de zancudos. Si el verano inicia el 1 de enero y finaliza el 30 de abril, determinar:

a. El número de zancudos al inicio del verano.

b. El número de zancudos a los 20, 50 y 80 días después que inició el verano.

c. Precisar el dominio y rango lógicos para este modelo.

d. Graficar para $0 \leq t \leq 120$.

9. El costo en cientos de dólares al fabricar x centenares de tarros de leche para adultos se modela por la función $C(x) = 3 + 10x - x^2, 0 \leq x \leq 4$.

a. Calcular el costo promedio que se define como el cociente $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$.

b. Graficar las funciones de costo y de costo promedio en un mismo sistema de coordenadas.

10. Una empresa que vende equipos de cómputo determinó que su utilidad total es establecida por $T(x) = 0{,}08x^2 + 80x + 260$ dólares, siendo x el número de unidades vendidas. Ahora suponga que x está en función del tiempo t en meses, donde $x(t) = 4t + 3$. Halle $T[x(t)]$ e interprete para $t = 2$ y luego para $x = 5$.

Capítulo II

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES

CAPÍTULO II

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES

CONTENIDO

2.1. Definición no formal de límite de una función real. Operaciones con funciones.

2.2. Definición formal de límite de una función real. Demostración de límites.

2.3. Límites laterales. Límites infinitos

2.4. Propiedades de los límites. Cálculo de límites.

2.5. Equivalencias y formas indeterminadas en límites.

2.6. Límites en el infinito.

2.7. Límites de la forma indeterminada 1^{∞}. Otros límites

2.8. Continuidad de las funciones reales. Continuidad puntual.

2.9. Propiedades de las funciones continuas.

2.10. Discontinuidad evitable e inevitable.

2.11. Dominio de continuidad de una función real. Continuidad por intervalos.

2.12. Lista de ejercicios propuestos.

2.1. DEFINICIóN NO FORMAL DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL. OPERACIONES CON LÍMITES

NOCIONES PRELIMINARES.

¿En qué se diferencia el álgebra del cálculo?

El álgebra estudia la matemática en forma estática; por ejemplo, en esta rama de la matemática se resuelve ecuaciones para hallar valores particulares fijos de una variable. En cambio, el cálculo se ocupa de la matemática en su forma dinámica, cómo el cambio en una variable afecta a otra variable.

Son problemas del cálculo:

- Calcular la pendiente m de una curva en un punto cualquiera.
- Hallar la recta tangente L_T a una curva en un punto cualquiera.
- Hallar la velocidad de un móvil en un instante dado.
- Calcular el límite de una función $y = f(x)$ cuando x tiende a un valor fijo x_0.
- La razón de cambio instantáneo de un suceso con respecto al tiempo.
- La curvatura de una curva en un punto cualquiera.
- El valor máximo de una función que describe una trayectoria.
- La dirección de movimiento de una curva, etc.

OBSERVACIÓN El estudio del cálculo diferencial parte desde el límite de una función real, luego la continuidad de la función real, la derivada de una función real y finalmente aplicaciones de la derivada.

El límite de una función real se debe entender como el acercamiento de una variable independiente x a un valor fijo x_0, luego ver lo que sucede con la variable dependiente y en la función $y = f(x)$.

La continuidad de una función real $y = f(x)$ debe ser entendida, intuitivamente, como la no interrupción de los puntos que constituyen la gráfica de dicha función real.

La derivada de una función real es la variación de la función $y = f(x)$ con respecto a su variable independiente x, la cual actúa como una unidad de medida.

Las aplicaciones de la derivada son definidas como la resolución de problemas que tengan vinculación con la *variación de la función* con respecto a una magnitud dada. Dependiendo del área al que pertenezca el problema, dicha variación tiene distintos significados: Pendiente de una recta, velocidad de un móvil, razón de cambio de un suceso, tasa de natalidad, índice de consumo, magnitudes marginales en administración...

El LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL.

La idea de límite se usa para describir el comportamiento de una función $y = f(x)$ en acercamientos de la variable independiente x hacia un valor fijo x_0, sobre todo en aquellas funciones en las cuales se tiene la sospecha de que no se comporta como se espera.

Para ver ideas preliminares de lo que es el límite de una función real, veamos un ejemplo:

INTRODUCCIÓN. Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = \frac{x^2}{2}$, intentemos determinar lo que sucede con $y = f(x) = \frac{x^2}{2}$ cuando nos acercamos desde x al valor $x_0 = 2$, es decir, calcular $L = \underset{x\to 2}{Lím}\, f(x)$, lo cual se entiende como identificar el valor al que se aproxima la función f en el eje Y, cuando x se acerca al valor $x_0 = 2$ en el eje X.

Calculemos: $L = \underset{x\to x_0}{Lím}\, f(x) = \underset{x\to 2}{Lím}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{2^2}{2} = 2.$

La función $f(x) = \frac{x^2}{2}$ se acerca como límite al valor $L = 2$ en el eje Y, cuando x se aproxima al valor $x_0 = 2$ en el eje X, tal como se observa en la Figura 2.1.

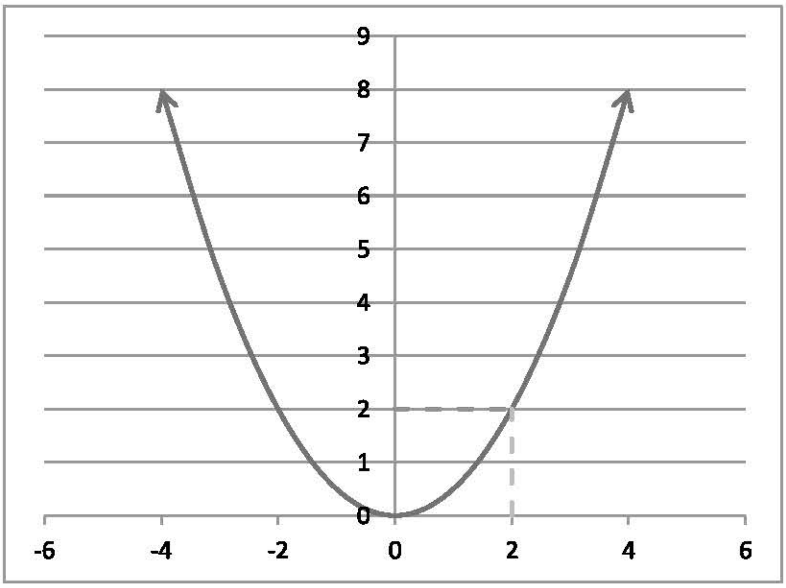


Figura 2.1

Del mismo modo se puede calcular más límites en tanto nos acercamos a otros valores x_0:

i) $\underset{x\to 0}{Lím}\, f(x) = L = \underset{x\to 0}{Lím}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{0^2}{2} = 0$

ii) $\underset{x\to -2}{Lím}\, f(x) = L = \underset{x\to -2}{Lím}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{(-2)^2}{2} = 2$

iii) $\underset{x\to 2,5}{Lím}\, f(x) = L = \underset{x\to 2,5}{Lím}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{(2,5)^2}{2} = 3,125$

DEFINICIÓN NO FORMAL DE LÍMITE. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real definida en el intervalo I y sea $x_0 \in I$ un número real. Se dice que L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0, si y solo si los valores de $f(x)$ se acercan al valor límite L. Este hecho se denota de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

OBSERVACIÓN 1.

a) En la expresión $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se debe entender que cuando x se cerca a x_0 $(x \to x_0)$, la función $f(x)$ tiende al valor L, es decir, $f(x) \to L$.

b) Si $y = f(x)$ no se orienta a ningún valor L cuando x tiende a x_0, se dice que el límite de f no existe en x_0.

c) Formalmente se exige que el punto x_0 sea un punto de acumulación; no obstante, en el conjunto de los números reales todo punto es punto de acumulación, por lo que en adelante se toma en cuenta esta exigencia, aunque no se la mencione.

d) El límite L puede existir para $y = f(x)$, aunque $y = f(x)$ no esté definida en x_0.

e) Cuando el valor límite L existe, este es único.

OBSERVACIÓN 2. Calcular un límite es una de las formas "más cuidadosas" de evaluar alguna función para un valor x_0; se trata del acercamiento cuidadoso por valores x hasta llegar a x_0.

La definición no formal ayuda en el cálculo de límites de una función real, los cuales pueden obtenerse de dos formas:

a) Por reemplazo directo al sustituir el valor x_0 en la función dada $y = f(x)$ y en donde se halla el valor límite L, en este caso se cumple que $L = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

b) Si por reemplazo directo no se puede hallar el valor límite, al querer sustituir el valor x_0 en la función dada $y = f(x)$, se llega a una forma indeterminada que puede ser alguna de las siguientes: $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \infty - \infty, 1^{\infty}, \frac{\infty}{0}, \infty^0$, entre otros casos.

Una *forma indeterminada* siempre puede ser resuelta y encontrarse el valor del límite L, como se verá más adelante.

Ejemplo 1. Véanse los siguientes límites por reemplazo directo en los que no hay dificultad en calcular el límite solicitado:

a) Siendo $f(x) = 10 - 2x$, calcular $L = \lim_{x \to 3} (10 - 2x) = 10 - 2(3) = 4$

b) Siendo $f(x) = x^2 + 3x + 6$, calcular $L = \lim_{x \to 2} (x^2 + 3x + 6) = 2^2 + 3(2) + 6 = 16$

c) Siendo $f(x) = \sqrt{10-2x}$, calcular $\quad L = \lim_{x \to -3} \sqrt{10-2x} = \sqrt{10-2(-3)} = \sqrt{16} = 4$

d) Siendo $f(x) = \frac{2x-5}{x+4}$, calcular $\quad L = \lim_{x \to 0} \frac{2x-5}{x+4} = \frac{2(0)-5}{0+5} = -\frac{5}{4}$

e) Siendo $f(x) = x\ Sen\ x$, calcular $\quad L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\pi}{2} Sen\ \left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}(1) = \frac{\pi}{2}$

f) Siendo $f(x) = \frac{Ln\ x}{x+e}$, calcular $\quad L = \lim_{x \to 2} \frac{Ln\ x}{x+e} = \frac{Ln\ e}{e+e} = \frac{1}{2e}$

g) Siendo $f(x) = \frac{2^{1-x}}{1-x}$, calcular $\quad L = \lim_{x \to 3} \frac{2^{1-x}}{1-x} = \frac{2^{1-3}}{1-3} = \frac{2^{-2}}{-2} = -\frac{1}{8}$

Ejemplo 2. Véase el cálculo de estos otros límites:

a) $L = \lim_{x \to 2} \sqrt[3]{8x^2 + 15x + 2} = \sqrt[3]{8(2)^2 + 15(2) + 2} = 4$

b) $L = \lim_{x \to -2} \left(2^x - \frac{1}{2}\right) = 2^{-2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

c) $L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (x - Sen\ x) = \frac{\pi}{2} - Sen\ \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$

d) $L = \lim_{x \to 2} [Ln(2x-3)] = Ln\ [2(2)-3] = Ln\ 1 = 0$

Ejemplo 3. Véase el límite que nos lleva a una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.

Siendo la función $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$, al calcular por reemplazo directo $L = \lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$ se llega a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$: $\quad L = \lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{4^2-16}{4-4} = \frac{0}{0}$.

Sin embargo, como x tiende a 4, $x \to 4$ (x no es cuatro aún) el límite se calcula luego de factorizar y simplificar del modo siguiente:

$L = \lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = L = \lim_{x \to 4} \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = L = \lim_{x \to 4} (x+4) = 8$. Esto se ilustra en la Figura 2.2.

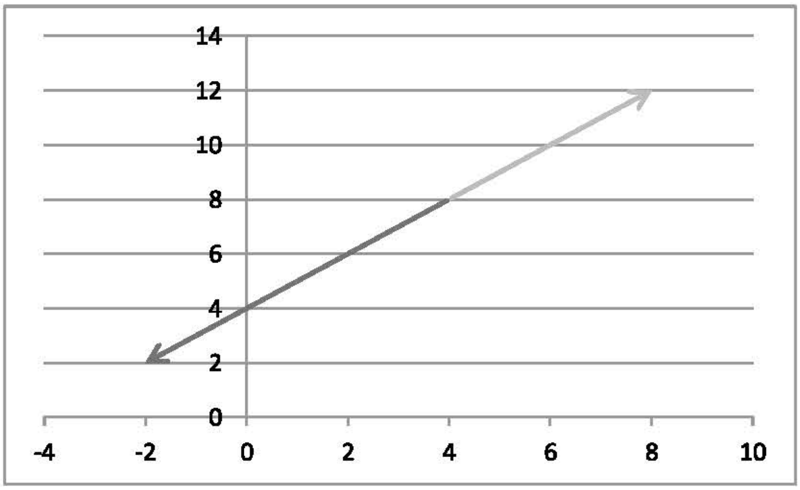


Figura 2.2

Observamos que el límite $L = 8$ existe, aunque la función no está definida para $x_0 = 4$. Hay un vacío en la gráfica.

Ejemplo 4. Se muestra otros límites con formas indeterminadas de la forma $\frac{0}{0}$, los cuales son resueltos por factorización y simplificación en la regla de correspondencia de la función:

a) $L = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} x = 3$

b) $L = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)} = \lim\limits_{x\to 3} (x-3) = 0$

c) $L = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{2-2}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$

d) $L = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{4x^2-1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{2(1/2)+1} = \frac{1}{2}$

e) $L = \lim\limits_{x\to -2} \frac{4x+8}{x^2-2x-8} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{4(x+2)}{(x-4)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{4}{x-4} = \frac{4}{-2-4} = -\frac{2}{3}$

f) $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$

g) $L = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\sqrt{2x-1}-1)}{x-1} \frac{(\sqrt{2x-1}+1)}{\sqrt{2x-1}+1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} = \frac{2}{2} = 1$

h) $L = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} (\sqrt{x}+1) = 2$

Ejemplo 5. (PROBLEMA) Una empresa de energía eléctrica produce la cantidad de $f(t) = 25t^2 + 20t$ kilowatts en el tiempo t en días. Calcular e interpretar $L = \lim\limits_{x\to 7} f(t)$.

Solución.

Calculemos $L = \lim\limits_{x\to 7} f(t) = \lim\limits_{x\to 7} (25t^2 + 20t) = 25(7)^2 + 20(7) = 1365$.

Esto significa que cuando el tiempo t se acerca a los 7 días, la empresa tiende a producir 1365 kilowatts de energía eléctrica.

Ejemplo 6. (PROBLEMA) Una compañía estima sus ingresos mediante la función $R(x) = 4x - x^2$ con $x \in [0; 3]$, donde "R" es el ingreso en miles de dólares y "x" es la producción en miles de unidades. Calcular e interpretar $L = \lim\limits_{x\to 1} R(x)$, $L = \lim\limits_{x\to 2^+} R(x)$, $L = \lim\limits_{x\to 3^-} R(x)$. Graficar e interpretar.

Solución.

a) $L = \lim\limits_{x\to 1} R(x) = \lim\limits_{x\to 1} (4x - x^2) = 3$.

Quiere decir que si la compañía está próxima a vender mil productos, sus ingresos se acercan a tres mil dólares.

b) $L = \underset{x\to 2^+}{Lím} R(x) = \underset{x\to 2^+}{Lím} (4x - x^2) = 4.$

Esto significa que cuando en la compañía están por vender dos mil productos (desde valores mayores que dos mil), sus ingresos son cercanos a cuatro mil dólares.

c) $L = \underset{x\to 3^-}{Lím} R(x) = \underset{x\to 3^-}{Lím} (4x - x^2) = 3.$

Significa que si la compañía se acerca a la venta de tres mil productos (desde valores menores que tres mil), sus ingresos con cercanos a tres mil dólares. (Ver Figura 2.3).

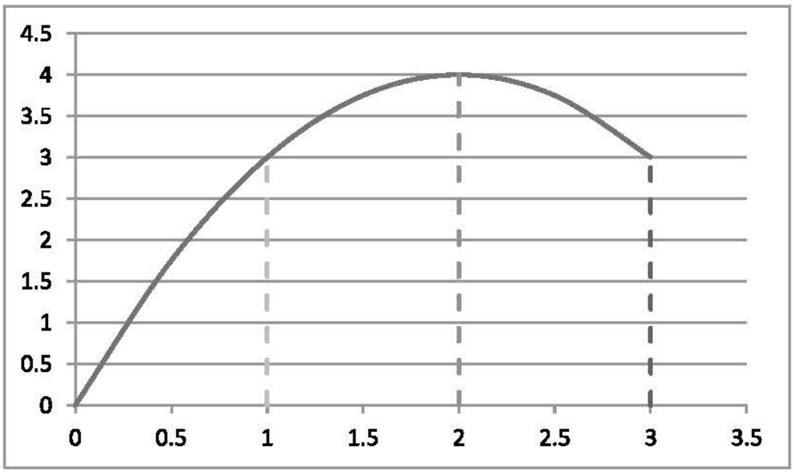


Figura 2.3

2.2. DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL. DEMOSTRACIÓN DE LÍMITES

La esencia de la definición formal radica en que para cualquier intervalo "centrado en x_0", $\langle x_0 - \delta; x_0 + \delta\rangle$, su imagen mediante $y = f(x)$ debe estar dentro del intervalo "centrado en L", $\langle L - \varepsilon; L + \varepsilon\rangle$; esto deberá suceder con cualquier número real positivo ε .

Este hecho se formaliza matemáticamente mediante la siguiente definición.

DEFINICIÓN. La afirmación $L = \underset{x\to x_0}{Lím} f(x)$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que si $x \in Dom(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

O simplemente:

$$\underset{x\to x_0}{Lím} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \text{si } x \in Dom(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

El número ε es dado, el número δ se debe encontrar para que el límite quede demostrado.

(i) En la expresión $|x - x_0| < \delta \to -\delta < x - x_0 < \delta \to x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

Se tiene que $x \in \langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle$, lo cual significa que todo x que se aproxime a x_0 debe estar acotado por el intervalo $\langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle$. (Ver Figura 2.4).

(ii) En la expresión $|f(x) - L| < \varepsilon \rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, se tiene que $f(x) \in \langle L - \varepsilon; L + \varepsilon \rangle$, lo que se interpreta de la siguiente forma: todo $f(x)$ que se aproxime a L debe estar acotado por el intervalo $\langle L - \varepsilon; L + \varepsilon \rangle$.

Las dos expresiones (i) y (ii) garantizan la existencia del límite de una función real en los términos señalados en la definición, con ε y δ tan pequeños como se quieran.

(iii) El valor δ siempre dependerá de ε, es decir, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

(iv) En el límite $L = \underset{x \to x_0}{Lím} f(x)$ siempre están presentes tres elementos:

- La función $y = f(x)$,
- El valor de acercamiento x_0,
- El límite L.

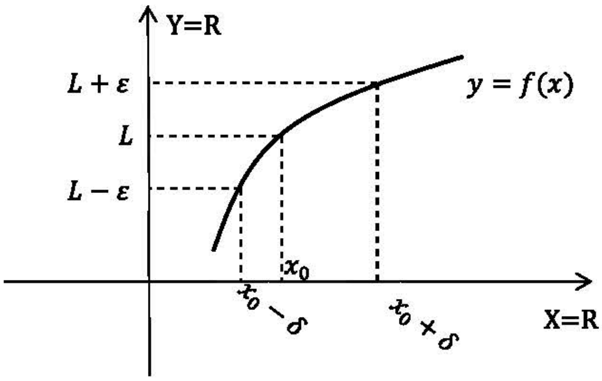


Figura 2.4

OBSERVACIÓN. La definición formal es útil para demostrar límites y propiedades, así también para calcular algunos límites cuyo valor tiene que ser supuesto y luego demostrado.

En seguida se ofrece algunas demostraciones aplicando la definición formal.

Ejemplos. Demostrar los siguientes límites usando la definición formal:

a) $\underset{x \to 2}{Lím}(3x - 7) = -1$; nótese que $f(x) = 3x - 7$, $\quad x_0 = 2$, $\quad L = -1$.

Entonces $\underset{x \to 2}{Lím}(3x - 7) = -1$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ / si $x \in Dom(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ / si $x \in R \wedge 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |3x - 7 - (-1)| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ / si $x \in R \wedge 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |3x - 6| < \varepsilon$.

Partiendo de $|3x-6| = |3(x-2)| = 3|x-2|$

Se debe cumplir $|3x-6| < \varepsilon \rightarrow 3|x-2| < \varepsilon \rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$

Se usa el hecho de que $|x-2| < \delta$. De donde $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$.

Basta tomar (existe) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ y el límite queda demostrado.

b) $\underset{x\to 3}{Lím}\ (x^2 - x) = 6$, nótese que $f(x) = x^2 - x$, $x_0 = 3$, $L = 6$.

Entonces $\underset{x\to 3}{Lím}\ (x^2 - x) = 6$

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ / si $x \in Dom(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ / si $x \in R \wedge 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x^2 - x - 6| < \varepsilon$.

Partiendo de $|x^2 - x - 6| = |(x+2)(x-3)| = |x+2||x-3|$

Acotamos el factor $|x+2|$ suponiendo que $\delta = 1$ usando el hecho de que $|x-3| < \delta$:

$|x-3| < 1 \quad \rightarrow \quad -1 < x-3 < 1 \quad \rightarrow \quad 4 < x+2 < 6 \quad \rightarrow \quad -6 < x+2 < 6$

$\rightarrow |x+2| < 6$

Se debe cumplir $|x^2 - x - 6| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad |x+2||x-3| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad 6\delta < \varepsilon \rightarrow \quad \delta < \frac{\varepsilon}{6}$

Basta tomar (existe) $\delta = Mínimo\ de\ \left\{1; \frac{\varepsilon}{6}\right\}$ y el límite queda demostrado.

c) $\underset{x\to 0}{Lím}\ (x^3 + 2x + 3) = 3$; nótese que $f(x) = x^3 + 2x + 3$, $x_0 = 0$, $L = 3$.

Entonces $\underset{x\to 0}{Lím}\ (x^3 + 2x + 3) = 3$

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ / si $x \in Dom(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ / si $x \in R \wedge 0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |x^3 + 2x + 3 - 3| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ / si $x \in R \wedge 0 < |x| < \delta \Rightarrow |x^3 + 2x| < \varepsilon$

Partiendo de $|x^3 + 2x| = |x(x^2+2)| = |x||x^2+2|$

Acotamos el factor $|x^2+2|$ suponiendo que $\delta = 1$ y usando el hecho de que $|x| < \delta$:

$|x| < 1 \quad \rightarrow \quad -1 < x < 1 \quad \rightarrow \quad 0 < x^2 < 1 \quad \rightarrow \quad 2 < x^2 + 2 < 3 \quad \rightarrow \quad -3 < x^2 + 2 < 3$

$\rightarrow \quad |x^2+2| < 3$

Se debe cumplir: $|x^3+2x| < \varepsilon \;\rightarrow\; |x||x^2+2| < \varepsilon \;\rightarrow\; (\delta)(3) < \varepsilon \;\rightarrow\; \delta < \frac{\varepsilon}{3}$

Basta tomar (existe) $\delta = Mínimo\ de\ \left\{1;\ \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ y el límite queda demostrado.

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{2(x^2+1)} = 0$, nótese que $f(x) = \frac{x-1}{2(x^2+1)}$, $\quad x_0 = 1, \quad L = 0.$

Entonces $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{2(x^2+1)} = 0$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\, /\, \text{si } x \in Dom(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\, /\, \text{si } x \in R \wedge 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x-1}{2(x^2+1)} - 0\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\, /\, \text{si } x \in R \wedge 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right| < \varepsilon$

Partiendo de $\left|\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right| = \frac{1}{|2(x^2+1)|}|x-1|$

Acotamos el factor $\frac{1}{|2(x^2+1)|}$ suponiendo que $\delta = 1$ y usando el hecho de que: $|x-1| < \delta$:

$|x-1| < 1 \;\rightarrow\; -1 < x-1 < 1 \;\rightarrow\; 0 < x < 2 \;\rightarrow\; 0 < x^2 < 4 \;\rightarrow\; 1 < x^2+1 < 5$

$\rightarrow\; \frac{1}{5} < \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{1} \;\rightarrow\; \frac{1}{10} < \frac{1}{2(x^2+1)} < \frac{1}{2} \;\rightarrow\; -\frac{1}{2} < \frac{1}{2(x^2+1)} < \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \frac{1}{|2(x^2+1)|} < \frac{1}{2}$

Se debe cumplir: $\left|\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right| < \varepsilon \;\rightarrow\; \frac{1}{|2(x^2+1)|}|x-1| < \varepsilon \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\delta < \varepsilon \;\rightarrow\; \delta < 2\varepsilon$

Basta tomar (existe) $\delta = Mínimo\ de\ \{1;\ 2\varepsilon\}$ y el límite queda demostrado.

e) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{4}{x-2} = 4$, nótese que $f(x) = \frac{4}{x-2}$, $\quad x_0 = 3, \quad L = 4.$

Entonces $\lim\limits_{x\to 3} \frac{4}{x-2} = 4$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\, /\, \text{si } x \in Dom(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\, /\, \text{si } x \in R - \{2\} \wedge 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow \left|\frac{4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon$

Partiendo de $\left|\frac{4}{x-2} - 4\right| = \left|\frac{4-4x+8}{x-2}\right| = \left|\frac{12-4x}{x-2}\right| = \frac{4|x-3|}{|x-2|} = \frac{4}{|x-2|}|x-3|$

Acotamos el factor $\frac{}{|x-2|}$ suponiendo que $\delta = \frac{}{2}$ (pues con $\delta = 1$, falla) y usando el hecho de que $|x-3| < \delta$:

$$|x-3| < \frac{1}{2} \;\rightarrow\; -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \frac{1}{2} < x-2 < \frac{3}{2} \;\rightarrow\; \frac{2}{3} < \frac{1}{x-2} < 2 \;\rightarrow\; \frac{8}{3} < \frac{4}{x-2} < 8$$

$$\rightarrow\; -8 < \frac{4}{x-2} < 8 \;\rightarrow\; \frac{4}{|x-2|} < 8$$

Se debe cumplir $\left|\frac{4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon \;\rightarrow\; \frac{4}{|x-2|}|x-3| < \varepsilon \;\rightarrow\; 8\delta < \varepsilon \;\rightarrow\; \delta < \frac{\varepsilon}{8}$

Basta tomar (existe) $\delta = Mínimo\ de\ \left\{\frac{1}{2}; \frac{\varepsilon}{8}\right\}$ y el límite queda demostrado.

f) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \sqrt{4x-1} = 1$, nótese que $f(x) = \sqrt{4x-1}$, $\quad x_0 = \frac{1}{2}$, $\quad L = 1$.

Entonces $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \sqrt{4x-1} = 1$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\,$ si $x \in Dom(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\,$ si $x \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right\rangle \wedge 0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{4x-1} - 1\right| < \varepsilon$

Partiendo de $\left|\sqrt{4x-1} - 1\right| = \left|(\sqrt{4x-1} - 1)\frac{\sqrt{4x-1}+1}{\sqrt{4x-1}+1}\right| = \left|\frac{4x-2}{\sqrt{4x-1}+1}\right| = \frac{4\left|x-\frac{1}{2}\right|}{\left|\sqrt{4x-1}+1\right|} = \frac{4}{\left|\sqrt{4x-1}+1\right|}\left|x - \frac{1}{2}\right|$

Acotamos el factor $\frac{4}{\left|\sqrt{4x-1}+1\right|}$ usando propiedades de los números reales.

$$\sqrt{4x-1} \geq 0 \;\rightarrow\; \sqrt{4x-1} + 1 \geq 1 \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{4x-1}+1} \leq 1 \;\rightarrow\; \frac{4}{\sqrt{4x-1}+1} \leq 4 \;\rightarrow\; \frac{4}{\left|\sqrt{4x-1}+1\right|} \leq 4$$

Se debe cumplir $\left|\sqrt{4x-1} - 1\right| < \varepsilon \;\rightarrow\; \frac{4}{\left|\sqrt{4x-1}+1\right|}\left|x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \;\rightarrow\; 4\delta < \varepsilon \;\rightarrow\; \delta < \frac{\varepsilon}{4}$

Basta tomar (existe) $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ y el límite queda demostrado.

2.3. LÍMITES LATERALES. LÍMITES INFINITOS

LÍMITES LATERALES.

Se puede acercar a un valor x_0 del dominio de una función $y = f(x)$ de dos maneras: por la izquierda (valores menores que x_0) o por la derecha (valores mayores que x_0). Esto se formaliza del siguiente modo:

a) Al acercarse a x_0 por valores menores que x_0, decimos que el límite L es calculado por la izquierda de x_0 (se denota x_0^-) y se expresa en la forma $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

b) Cuando nos acercamos a x_0 por valores mayores que x_0, señalamos que el límite L es calculado por la derecha de x_0 (se denota x_0^+) y se expresa en la forma: $\underset{x\to x_0^+}{Lím} f(x) = L$.

c) Si los límites laterales por la izquierda y por la derecha existen y no son iguales, entonces afirmamos que el límite de la función f no existe en x_0.

$$\underset{x\to x_0^-}{Lím} f(x) \neq \underset{x\to x_0^+}{Lím} f(x) \Rightarrow \underset{x\to x_0}{Lím} f(x) \text{ No existe}$$

d) En caso de que los límites laterales por la izquierda y por la derecha existan y sean iguales, entonces decimos que el límite de la función f existe en x_0 y es igual a L; lo cual se escribe así:

$$\underset{x\to x_0^-}{Lím} f(x) = L = \underset{x\to x_0^+}{Lím} f(x) \Rightarrow \underset{x\to x_0}{Lím} f(x) = L$$

Ejemplo 1. Calcule los límites laterales de la función $f(x) = x^2 + 2$ cuando x tiende a $x_0 = 0$.

Solución.

i) Calculamos el límite lateral por la izquierda: $L = \underset{x\to 0^-}{Lím} (x^2 + 2) = 2$.

ii) Calculamos el límite lateral por la derecha: $L = \underset{x\to 0^+}{Lím} (x^2 + 2) = 2$.

Como los límites laterales existen y son iguales, se concluye que el límite de la función existe y es igual a 2; esto se escribe del modo siguiente: $L = \underset{x\to 0}{Lím} (x^2 + 2) = 2$. (En la Figura 2.5, ver grafica adjunta).

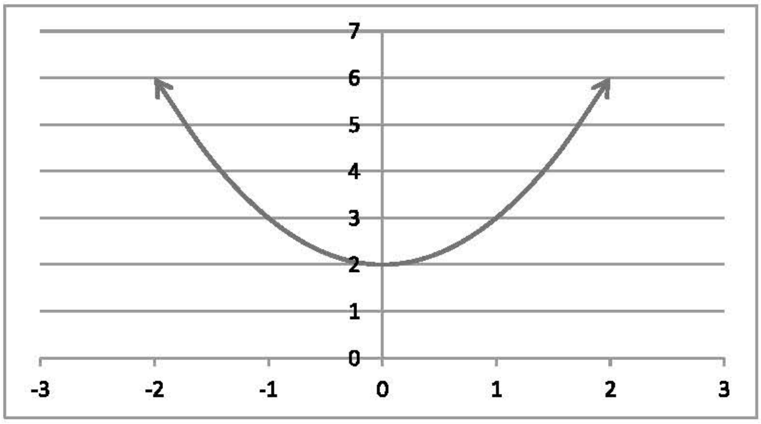


Figura 2.5

Puede verse que cuando se calcula el límite en una función por reemplazo directo, no existe dificultades en sus límites laterales, estos son siempre iguales.

Ejemplo 2. La función $f(x) = \begin{cases} 5 - x; & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 1; & 2 < x < 3 \end{cases}$ tiene límite cuando x tiende a $x_0 = 2$.

Solución. Calculamos los límites laterales:

i) Calculamos el límite por la izquierda: $L = \underset{x \to 2^-}{Lím} f(x) = \underset{x \to 2^-}{Lím} (5 - x) = 3$

ii) Calculamos el límite por la derecha: $L = \underset{x \to 2^+}{Lím} f(x) = \underset{x \to 2^+}{Lím} (x^2 - 1) = 3$

Como los límites laterales son iguales, entonces la función $y = f(x)$ tiene límite en $x_0 = 2$, es igual a $L = 3$. En la gráfica observamos que ambos límites son iguales.

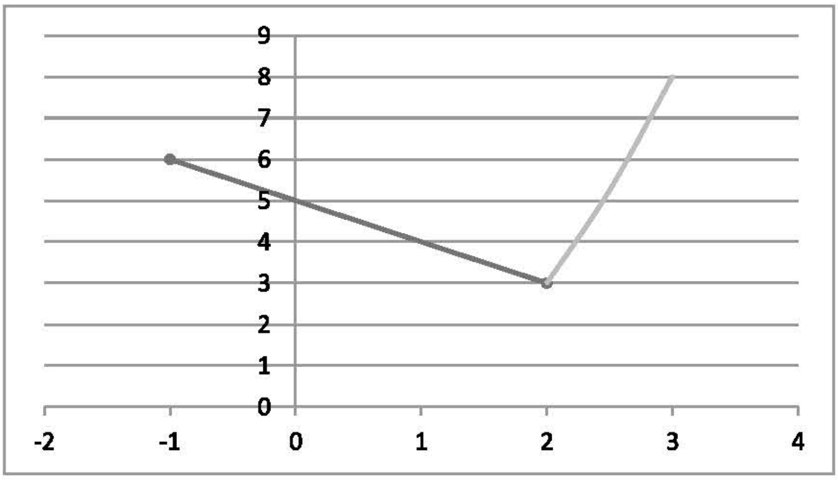


Figura 2.6

Se observa en la Figura 2.6 que el valor $x_0 = 2$ es el punto de división de la regla de correspondencia. A la izquierda de $x_0 = 2$ está definida mediante a $f_1(x) = 5 - x$; a la derecha de $x_0 = 2$, mediante $f_2(x) = x^2 - 1$.

Ejemplo 3. La función $f(x) = \begin{cases} x; \ x \leq 1 \\ 1 - x; \ x > 1 \end{cases}$, NO tiene límite cuando x tiende a $x_0 = 1$.

Solución. Calculamos los límites laterales:

i) Calculamos el límite por la izquierda: $L = \underset{x \to 1^-}{Lím} f(x) = \underset{x \to 1^-}{Lím} (x) = 1$

ii) Calculamos el límite por la derecha: $L = \underset{x \to 1^+}{Lím} f(x) = \underset{x \to 1^+}{Lím} (1 - x) = 0$

Como los límites laterales NO son iguales, entonces la función $y = f(x)$ NO tiene límite en $x_0 = 1$. En la gráfica a continuación observamos que ambos límites son diferentes.

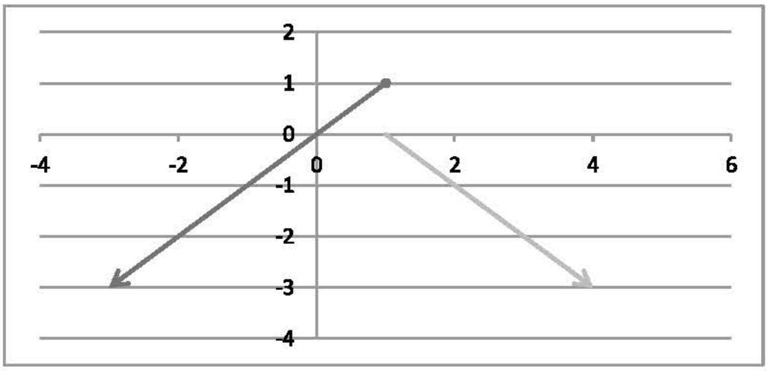


Figura 2.7

Ejemplo 4. (PROBLEMA) Los fisiólogos pueden medir el consumo aproximado de oxígeno $C(x)$ de un atleta como una función de su velocidad x en km por hora. El modelo que describe este hecho es el siguiente: $C(x) = \frac{4}{81}(x^2 + 5)$; con $0 \leq x < 20$.

Hagamos algunas predicciones mediante un examen a la gráfica dada de $C(x)$. (Ver Figura 2.8).

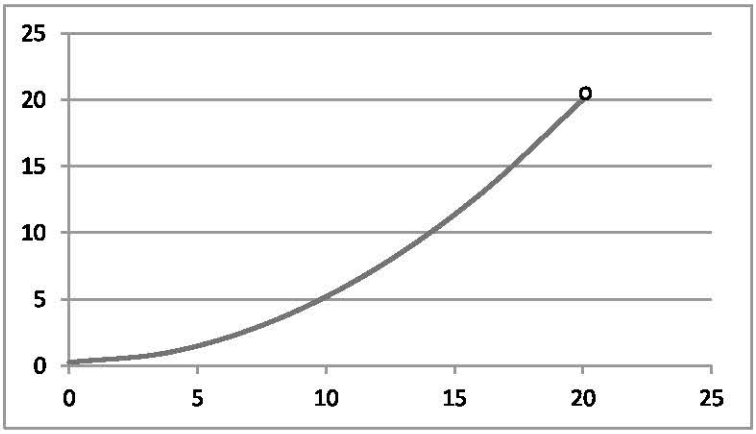


Figura 2.8

a) En la figura, concentremos la atención en la parte de la gráfica cercana a la máxima velocidad del atleta. A medida que la velocidad x aumenta acercándose a 20 kilómetros por hora, se pronostica que el consumo de oxígeno se aproxima a 20 unidades.

El atleta no puede alcanzar una velocidad de 20 kilómetros por hora, solo puede estar muy cerca de $x = 20$ por la izquierda (según este modelo). En notación matemática esto se escribe $L = \underset{x \to 20^-}{Lím}\ C(x) = 20$.

Se entendería que "el consumo de oxígeno $C(x)$ sería de 20 unidades conforme la velocidad del atleta se aproxima y está muy cerca de 20 kilómetros por hora".

b) Apliquemos la misma idea cerca de la velocidad $x = \sqrt{76}$ kilómetros por hora. A medida que aumenta la velocidad de caminata acercándose progresivamente a $x = \sqrt{76}$ (por la izquierda) —como se muestra en la misma figura—, es natural predecir que el consumo de oxígeno $C(x)$ se aproxime al valor de 4 unidades. Su notación será $L = \underset{x \to \sqrt{76}^-}{Lím} C(x) = 4$.

c) Puede considerarse que conforme disminuye la velocidad de la carrera hasta llegar a valores cercanos a $x = \sqrt{76}$ kilómetros por hora (por la derecha), se observa en la gráfica que también el consumo de oxígeno se acerca a 4 unidades. Su notación será $\underset{x \to \sqrt{76}^+}{Lím} C(x) = 4$.

d) De las partes (b) y (c) se rescata que acercándose por la izquierda o por la derecha de $x = \sqrt{76}$, el consumo de oxígeno se aproxima a 4 unidades, en este caso se puede escribir simplemente $L = \underset{x \to \sqrt{76}}{Lím} C(x) = 4$, dado que el límite existe.

Ejercicio. Explique el ejercicio anterior si la función fuera $C(x) = \begin{cases} \frac{5}{81}x^2 + 1; & 0 \leq x \leq 9 \\ x - 3; & 9 < x < 20 \end{cases}$, para valores $x = 9$ y $x = 20$. Previamente realice la gráfica.

LÍMITES INFINITOS.

En el cálculo de algunos límites, a veces al aproximarse a un valor x_0 el valor correspondiente para la imagen se hace muy grande, esto significa que se orienta al infinito positivo ($y_0 \to +\infty$) o al infinito negativo ($y_0 \to -\infty$). Estos límites se denominan "límites infinitos" y se formalizan del modo siguiente:

DEFINICIÓN. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real y sea $x_0 \in I$, entonces:

a) $\underset{x \to x_0^-}{Lím} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0/$ si $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > M$. (Ver Figura 2.9).

b) $\underset{x \to x_0^+}{Lím} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0/$ si $0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) > M$. (Ver Figura 2.10).

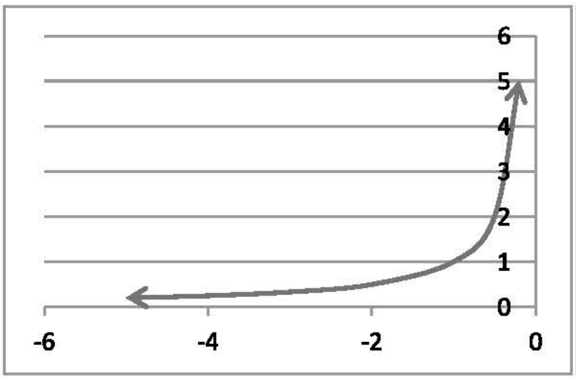


Figura 2.9

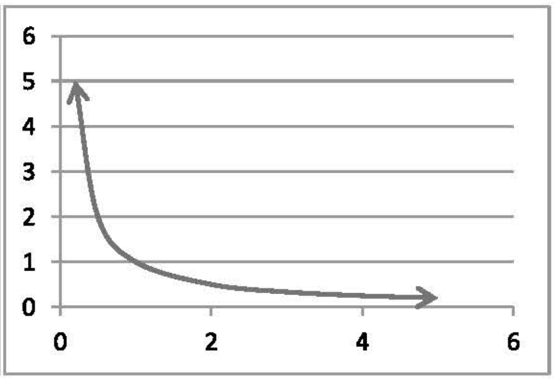


Figura 2.10

c) $\underset{x\to x_0^-}{Lím} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, \exists\delta > 0/$ si $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) < N$. (Ver Figura 2.11).

d) $\underset{x\to x_0^+}{Lím} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, \exists\delta > 0/$ si $0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) < N$. (Ver Figura 2.12).

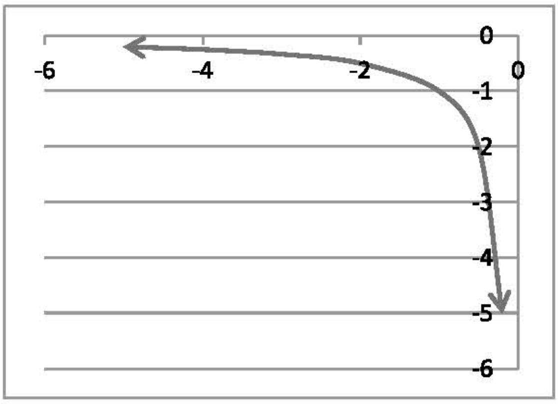


Figura 2.11

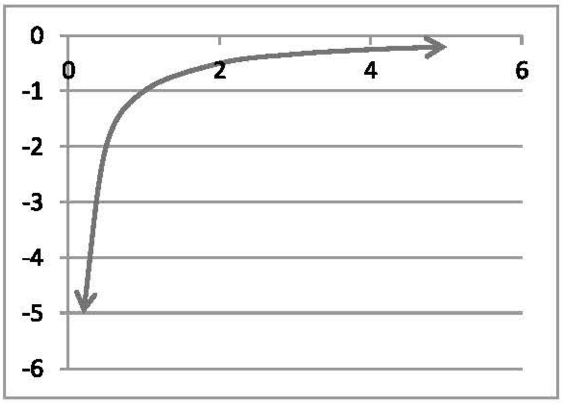


Figura 2.12

e) $\underset{x\to x_0}{Lím} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0/$ si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. (Ver Figura 2.13).

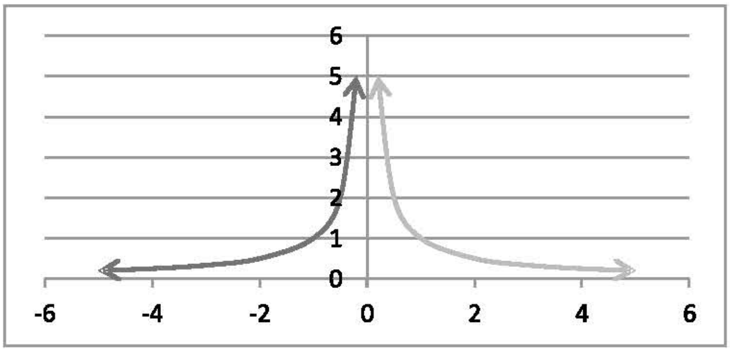


Figura 2.13

f) $\underset{x\to x_0}{Lím} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, \exists\delta > 0/$ si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < N$. (Observar la Figura 2.14).

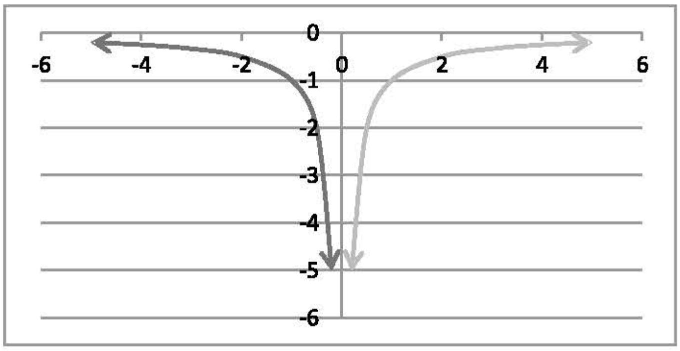


Figura 2.14

Ejemplo 5. En estos ejemplos se usan las equivalencias que se establecieron para el cálculo de límites. Las cuales se presentan más adelante, en el acápite 2.5.

a) $L = \underset{x\to 3^-}{Lím}\left(\frac{1}{x-3}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

b) $L = \underset{x\to 3^+}{Lím}\left(\frac{1}{x-3}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

c) $L = \underset{x\to 2^-}{Lím}\left[\frac{x+3}{x-2}\right] = \frac{5}{0^-} = -\infty$

d) $L = \underset{x\to -4^+}{Lím}\left[\frac{x+3}{x+4}\right] = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

e) $L = \underset{x\to -2^-}{Lím}\left[\frac{x}{x+2}\right] = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

f) $L = \underset{x\to 0^+}{Lím}\left[\frac{x+4}{x}\right] = \frac{4}{0^-} = -\infty$

Ejemplo 6. Observemos aquí que pese a existir los límites laterales, el límite no existe, dado que $+\infty$ o $-\infty$ no son números reales.

Como $L = \underset{x\to 1^-}{Lím}\left[\frac{3}{(x-1)^2}\right] = \frac{3}{0^+} = +\infty$ y $L = \underset{x\to 1^+}{Lím}\left[\frac{3}{(x-1)^2}\right] = \frac{3}{0^+} = +\infty$, entonces $L = \underset{x\to 1}{Lím}\left[\frac{3}{(x-1)^2}\right] = \frac{3}{0^+} = +\infty$.

Ejemplo 7. (PROBLEMA) El costo (en millones de dólares) para un gobierno, por la captura del x % de una droga ilegal al entrar en su país es dada por $C(x) = \frac{528x}{100-x}$ con $0 \le x < 100$.

a) Hallar el costo de la captura del 25 %.

b) Hallar el costo de la captura del 50 %.

c) Hallar el costo de la captura del 75 %.

d) Hallar el costo de la captura del 90 %.

e) Determinar el límite de $y = C(x)$ cuando x se aproxima al 100 % por la izquierda.

Solución. Evaluamos en la función de costo, el valor de cada porcentaje propuesto:

a) C(25)= 176 millones de dólares.

b) C(50)= 528 millones de dólares.

c) C(75)= 1 584 millones de dólares.

d) C(90)= 4 752 millones de dólares.

e) $C = \underset{x \to 100^-}{Lím} \left[\frac{528x}{100-x}\right] = \frac{528000}{0^+} = +\infty$, inversión muy grande. Es decir, a medida que se pretende una mayor captura de droga ilegal (acercarse al 100%), la inversión crece enormemente.

Si se optara por capturar toda la droga, la inversión resultaría "infinita"; lo cual quiere decir que, según este modelo, es imposible eliminar el ingreso de la droga. (Ver Figura 2.15).

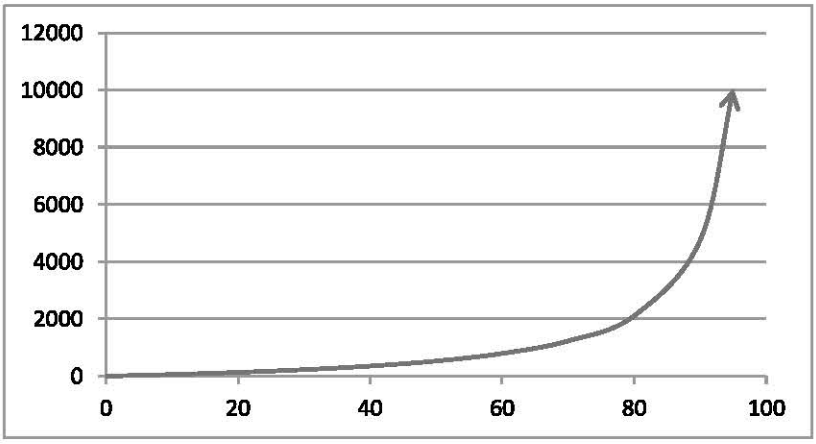


Figura 2.15

2.4. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES. CÁLCULO DE LÍMITES

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

a) $\underset{x \to x_0}{Lím}\ k = k$, siendo k una constante real.

b) $\underset{x \to x_0}{Lím}\ x^n = x_0^n$

c) $\underset{x \to x_0}{Lím}\ P(x) = P(x_0)$, siendo $P(x)$ un polinomio de grado n.

d) $\underset{x \to x_0}{Lím}\ k \cdot f(x) = k \cdot \underset{x \to x_0}{Lím}\ f(x)$

e) $\underset{x \to x_0}{Lím}[\mathrm{f(x)}]^{\mathrm{n}} = \left[\underset{x \to x_0}{Lím}\ \mathrm{f(x)}\right]^{\mathrm{n}}$

f) $\underset{x \to x_0}{Lím}\ \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$, siempre que la raíz está definida.

g) $\underset{x \to x_0}{Lím}\ \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\underset{x \to x_0}{Lím}\ f(x)}$, siempre que la raíz está definida.

h) $\underset{x \to x_0}{Lím}[f(x) + g(x)] = \underset{x \to x_0}{Lím}\ f(x) + \underset{x \to x_0}{Lím}\ g(x)$

i) $\underset{x \to x_0}{Lím}[f(x) - g(x)] = \underset{x \to x_0}{Lím}\ f(x) - \underset{x \to x_0}{Lím}\ g(x)$

j) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

k) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\div g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\div \lim_{x\to x_0} g(x)$, con $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$

OBSERVACIONES.

a) En las propiedades de los límites de funciones reales que tienen raíces de índice par, son válidas para valores de "x" estar en el dominio que les corresponde.

b) Muchos de los límites pueden ser calculados por sustitución directa de x por x_0, sin mayores dificultades.

c) Cuando en la evaluación de un límite por sustitución directa aparecen formas indeterminadas como $0/0$, entonces se reescribe la función haciendo uso de identidades, factorización, simplificaciones o propiedades y así llegar a formas equivalentes y simplificadas en las que se puedan calcular los límites.

PROPOSICIONES DE LOS LÍMITES.

Las proposiciones que se muestran a continuación se usan casi exclusivamente para hacer uso de otros límites o propiedades, en mucho de los casos se aplican en asignaturas de matemática más avanzadas.

a) Límites notables: (i) $\lim_{x\to 0}\frac{Sen\, x}{x}=1$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1-Cos\, x}{x}=0$

b) Teorema del Sándwich: Si $f(x)\le h(x)\le g(x)$ y $\lim_{x\to x_0} f(x)=L=\lim_{x\to x_0} g(x)$, entonces $\lim_{x\to x_0} h(x)=L$.

c) Límite de la función compuesta: Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ y $\lim_{t\to t_0} g(t)=x_0$, entonces $\lim_{t\to t_0} f[g(t)]=L$, siempre que $t_0\in Dom(fog)$ y $\exists C>0$ tal que $|t-t_0|<C\Rightarrow g(t)=x_0$.

d) Límite de la función acotada: Si $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ y $f(x)$ es una función acotada (existe $k>0$ tal que $|f(x)|\le k$), entonces $\lim_{x\to x_0}\big(g(x)\big)\cdot(f(x))=0$.

Ejemplo 1. Observemos el cálculo de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -3} x^3=(-3)^3=-27$

b) $\lim_{x\to 3}(17-2x-x^2)=17-2(3)-(3)^2=2$

c) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}5\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}(x+5)=5+5=10$

d) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$

Ejemplo 2. Véase el cálculo de los límites siguientes:

a) $L = \underset{x\to 0}{Lím} \frac{Sen(3x)}{x} = \underset{x\to 0}{Lím}\ 3\frac{Sen(3x)}{3x} = 3\underset{x\to 0}{Lím}\frac{Sen(3x)}{3x} = 3(1) = 3.$

b) $L = \underset{x\to 0}{Lím}\frac{Sen\,x}{5x} = \frac{1}{5}\left(\underset{x\to 0}{Lím}\frac{Sen\,x}{x}\right) = \frac{1}{5}(1) = \frac{1}{5}$

c) $L = \underset{x\to 0}{Lím}\frac{Sen\,(4x)}{Sen\,(3x)} = \underset{x\to 0}{Lím}\frac{\frac{Sen\,(4x)}{x}}{\frac{Sen\,(3x)}{x}} = \frac{\underset{x\to 0}{Lím}\frac{Sen(4x)}{x}}{\underset{x\to 0}{Lím}\frac{Sen(3x)}{x}} = \frac{4\left(\underset{x\to 0}{Lím}\frac{Sen(4x)}{4x}\right)}{3\left(\underset{x\to 0}{Lím}\frac{Sen(3x)}{3x}\right)} = \frac{4(1)}{3(1)} = \frac{4}{3}$

d) Sea $f(x) = Ln\,x$, se ve que $\underset{x\to e}{Lím} f(x) = \underset{x\to e}{Lím} Ln\,x = Ln\,e = 1.$

Por otro lado, sea $g(t) = e^{2t+1}$ y se observa que $\underset{t\to 0}{Lím}\ g(t) = \underset{t\to 0}{Lím}\ (e^{2t+1}) = e.$

Entonces, $\underset{t\to 0}{Lím} f[g(t)] = \underset{x\to 0}{Lím} Ln(e^{2t+1}) = Ln\,e = 1.$

e) $L = \underset{x\to 0}{Lím}\ x\,Sen\,(1/x)$. Se debe aplicar el teorema del sándwich.

Veamos: $-1 \le Sen(1/x) \le 1 \;\rightarrow\; 0 \le |Sen(1/x)| \le 1 \;\rightarrow\; |x|0 \le |x||Sen(1/x)| \le |x|$

$\rightarrow\; 0 \le |x\,Sen(1/x)| \le |x|.$

En lo último: $f(x) = 0,\quad h(x) = |x\,Sen\,(1/x)|,\quad g(x) = |x|.$

Por lo tanto, como $\underset{x\to 0}{Lím} f(x) = \underset{x\to 0}{Lím}(0) = 0$ y $\underset{x\to 0}{Lím} g(x) = \underset{x\to 0}{Lím}\ |x| = 0$, entonces $\underset{x\to 0}{Lím}\ h(x) = \underset{x\to 0}{Lím}\ |x\,Sen(1/x)| = 0.$

f) $L = \underset{x\to 0}{Lím}\ \sqrt[5]{x}\,Sen(1/x^2)$. Debe usarse el límite de la función acotada.

Sea: $g(x) = \sqrt[5]{x}$, se ve que $\underset{x\to 0}{Lím}\ \sqrt[5]{x} = 0$; y la función $f(x) = Sen(1/x^2)$ es acotada, pues $-1 \le Sen(1/x^2) \le 1$,

Entonces, $\underset{x\to 0}{Lím}\ \big(g(x)\big)\cdot\big(f(x)\big) = \underset{x\to 0}{Lím}\ \big(\sqrt[5]{x}\big)(Sen(1/x^2)) = 0$

2.5. EQUIVALENCIAS Y FORMAS INDETERMINADAS EN LÍMITES

EQUIVALENCIAS EN EL CÁLCULO DE LÍMITES DE UNA FUNCIÓN REAL.

En el estudio de los límites aparecen algunas equivalencias que en el álgebra se dejaron de lado, por ser formas indeterminadas o porque no estaban definidas. Para un mejor entendimiento se usará el signo “=” en lugar del signo de equivalencia “≈”.

OBSERVACIÓN. En el estudio de los límites de las funciones reales, algunas expresiones algebraicas tienen equivalentes que facilitan los cálculos de límites. Así mismo se debe indicar que los resultados $-\infty$ o $+\infty$ no son números reales, por lo que en estos casos en realidad el límite no existe, no obstante, nos informa sobre la tendencia de las funciones reales para valores muy grandes de x.

En seguida se muestra algunos de ellos:

Si $k > 0$	$k \cdot (+\infty) = +\infty$	$k \cdot (-\infty) = -\infty$	$+\infty + k = +\infty$	$-\infty + k = -\infty$
	$\frac{+\infty}{k} = +\infty$	$\frac{k}{0^+} = +\infty$	$\frac{k}{0^-} = -\infty$	$\infty^k = \infty$
Si $k < 0$	$k \cdot (+\infty) = -\infty$	$k \cdot (-\infty) = +\infty$	$+\infty + k = +\infty$	$-\infty + k = -\infty$
	$\frac{+\infty}{k} = -\infty$	$\frac{k}{0^+} = -\infty$	$\frac{k}{0^-} = +\infty$	
Otros	$\infty + \infty = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$		

Ejemplo 1. Al calcular los siguientes límites se usarán equivalencias de esta forma:

Si $k > 0$: $\frac{k}{0^+} = +\infty$; $\frac{k}{0^-} = -\infty$. o Si $k < 0$: $\frac{k}{0^+} = -\infty$; $\frac{k}{0^-} = +\infty$.

a) $L = \underset{x \to 3^+}{Lím} \left(\frac{x+1}{x^2-9}\right) = \frac{4}{0^+} = +\infty$, pues al acercarse x a 3 por la derecha, la expresión $x^2 - 9$ tiende a 0 por la derecha (por valores mayores que cero): 0^+

b) $L = \underset{x \to 3^-}{Lím} \left(\frac{x+1}{x^2-9}\right) = \frac{4}{0^-} = -\infty$, puesto que al aproximarse x a 3 por la izquierda, la expresión $x^2 - 9$ tiende a 0 por la izquierda (por valores menores que cero): 0^-

Lo mismo sucede en el punto $x_0 = -3$.

c) $L = \underset{x \to -3^+}{Lím} \left(\frac{x+1}{x^2-9}\right) = \frac{4}{0^+} = +\infty$, ya que al acercarse x a -3 por la derecha, la expresión $x^2 - 9$ tiende a 0 por la derecha (por valores mayores que cero): 0^+

d) $L = \underset{x \to -3^-}{Lím} \left(\frac{x+1}{x^2-9}\right) = \frac{4}{0^-} = -\infty$, pues al orientarse x a -3 por la izquierda, la expresión $x^2 - 9$ tiende a 0 por la izquierda (por valores menores que cero): 0^-

Tal como se muestra en la Figura 2.16.

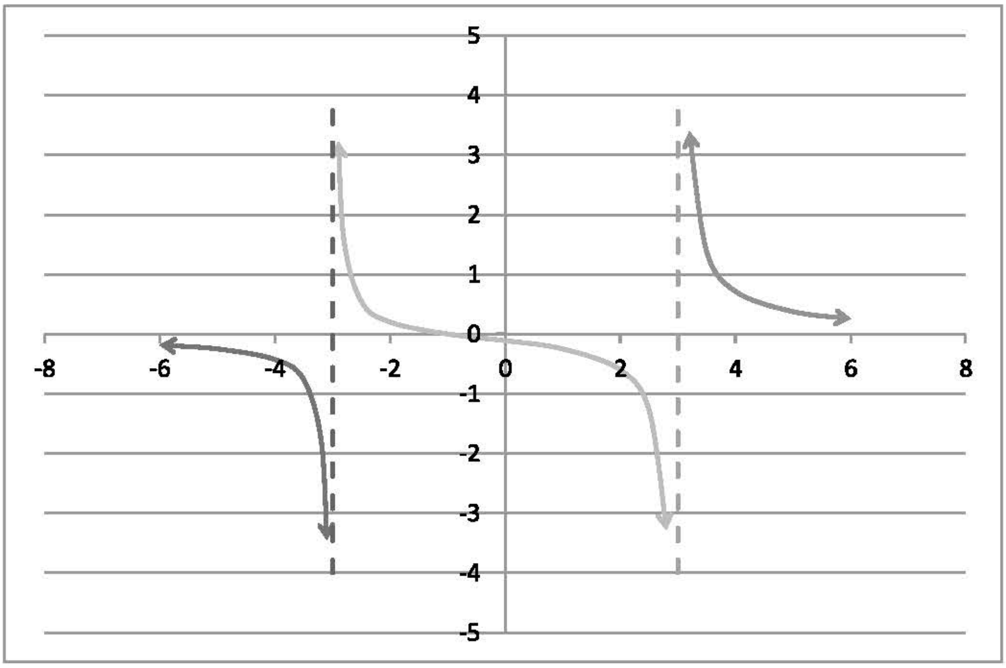


Figura 2.16

e) $L = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)^3} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{(x-2)^2} = \frac{4}{0^+} = \infty$, esto se debe a que al acercarse x a 2 por la izquierda o por la derecha, la expresión $(x-2)^2$ tiende a 0 por la derecha (por valores mayores que cero): 0^+

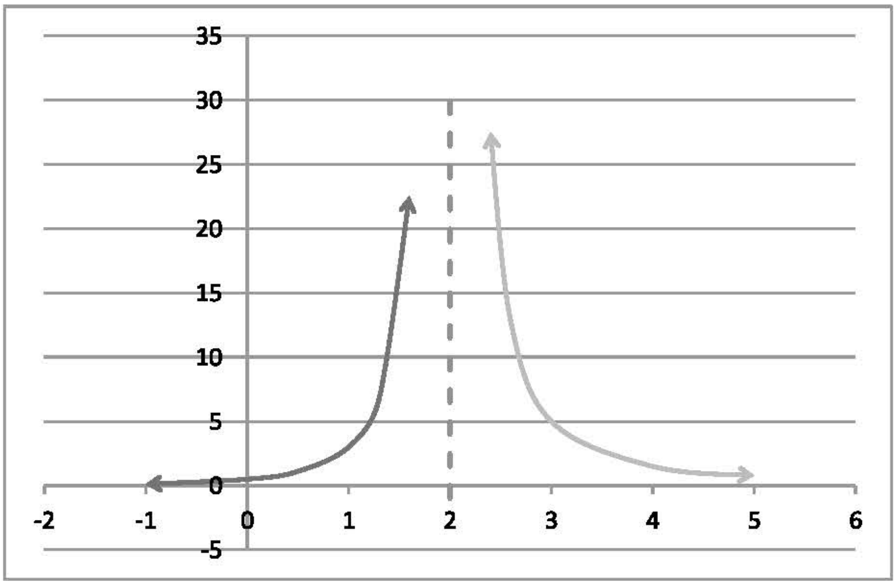


Figura 2.17

f) $L = \lim_{x \to 4^-} \left(\frac{-3}{x^2-16}\right) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$, pues cuando x se aproxima a 4 por la izquierda, la expresión x^2-16 tiende a 0 por la izquierda: 0^-.(Ver Figura 2.17).

g) $L = \underset{x \to 4^+}{Lím} \left(\frac{-3}{x^2-16} \right) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$, ya que al hacerse x cercano a 4 por la derecha, la expresión $x^2 - 16$ tiende a 0 por la derecha: 0^+. (Ver Figura 2.18).

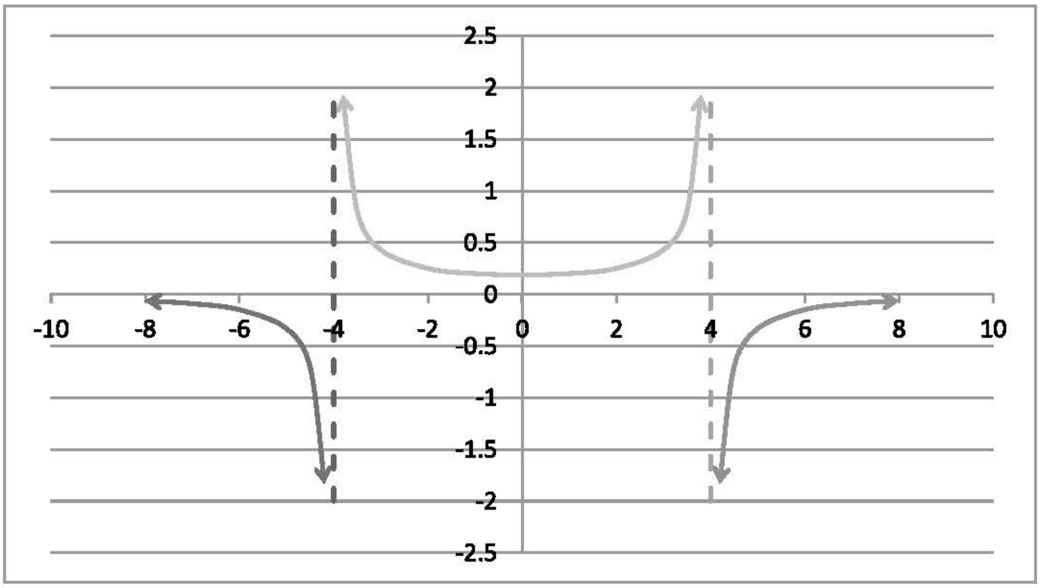


Figura 2.18

2.6. LÍMITES EN EL INFINITO

Existen límites cuyo acercamiento a través de x es hasta el infinito positivo $(x \to +\infty)$ o hasta el infinito negativo $(x \to -\infty)$. Teóricamente, estos límites indican la tendencia de la variable dependiente "y" para posibles crecimientos ilimitados de la variable independiente "x".

Estos se calculan de dos maneras:

a) Usando un *artificio algebraico* que consiste en dividir numerador (N) y denominador (D) de la fracción entre la variable independiente con el exponente más alto que aparece en el denominador; se simplifica y se halla el resultado usando las equivalencias que existen para el caso de límites.

b) *Observando los grados* del numerador (°N) y del denominador (°D) de la función dada, siempre que sea un cociente de polinomios; según el siguiente detalle: siendo $L = \underset{x \to -\infty}{Lím} f(x)$ o $L = \underset{x \to +\infty}{Lím} f(x)$

(i) Si °N=°D, entonces $L = k$, siendo k una constante obtenida como cociente de los coeficientes principales del numerador y del denominador.

(ii) Si °N>°D, entonces $L = \pm\infty$.

(iii) Si °N< °D, entonces $L = 0$.

DEFINICIÓN 1. Siendo $y = f(x)$ una función real:

a) $\underset{x\to+\infty}{Lím} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0/$ si $x \in Dom(f) \wedge x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

b) $\underset{x\to-\infty}{Lím} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0/$ si $x \in Dom(f) \wedge x < -N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

DEFINICIÓN 2 . Siendo $y = f(x)$ una función real:

a) $\underset{x\to+\infty}{Lím} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N > 0$ tal que si $x \in Dom(f) \wedge x > N \Rightarrow f(x) > M$.

b) $\underset{x\to-\infty}{Lím} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N < 0$ tal que si $x \in Dom(f) \wedge x < N \Rightarrow f(x) > M$.

c) $\underset{x\to+\infty}{Lím} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists N > 0$ tal que si $x \in Dom(f) \wedge x > N \Rightarrow f(x) < M$.

d) $\underset{x\to-\infty}{Lím} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists N < 0$ tal que si $x \in Dom(f) \wedge x < N \Rightarrow f(x) < M$.

CÁLCULO DE LÍMITES EN EL INFINITO.

En el cálculo de los límites que se dan a continuación aparecen modos indeterminados de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$.

Ejemplo1. Usando el artificio algebraico (dividiendo numerador y denominador entre la variable independiente con el mayor exponente que aparece en el denominador), se calcula los siguientes límites:

a) $L = \underset{x\to-\infty}{Lím} \frac{x^2+3}{x+1} = \underset{x\to-\infty}{Lím} \frac{\frac{x^2+3}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \underset{x\to-\infty}{Lím} \frac{x+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{(-\infty)+0}{1+0} = -\infty$. (Ver Figura 2.19).

b) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{x^2+3}{x+1} = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{\frac{x^2+3}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{x+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{(+\infty)+0}{1+0} = +\infty$. (Ver Figura 2.20).

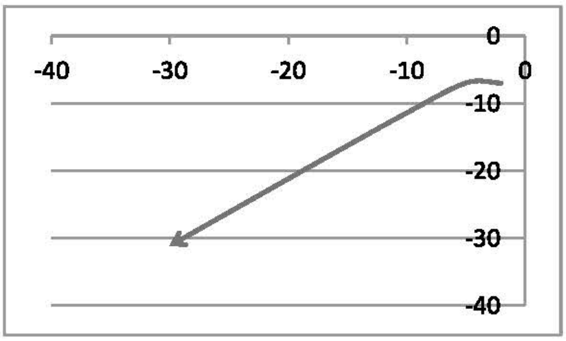


Figura 2.19

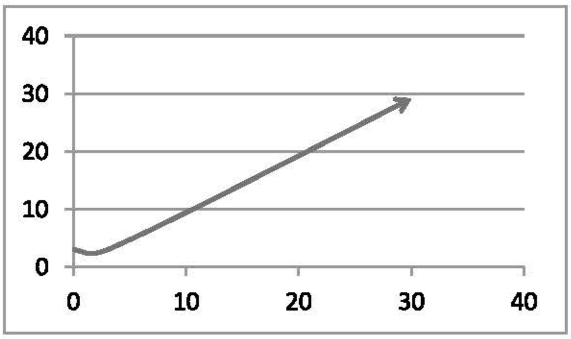


Figura 2.20

c) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{\sqrt{x^2+7x+10}}{x} = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2})}}{x} = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}}{x} = \underset{x\to+\infty}{Lím} \sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}$

$= \sqrt{1+0+0} = 1$. (Ver Figura 2.21).

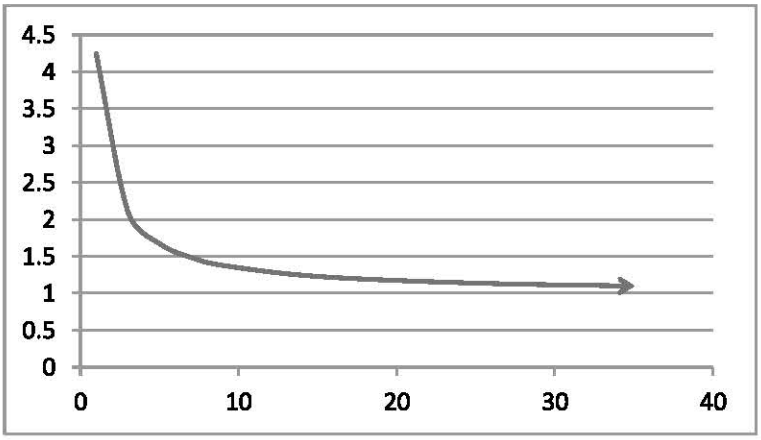


Figura 2.21

d) $L = \underset{x\to-\infty}{Lím} \quad = \underset{x\to-\infty}{Lím} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2})}}{x} = \underset{x\to-\infty}{Lím} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}}{x} = -\underset{x\to-\infty}{Lím} \sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}$

$= -\sqrt{1+0+0} = -1$. (Observar la Figura 2.22).

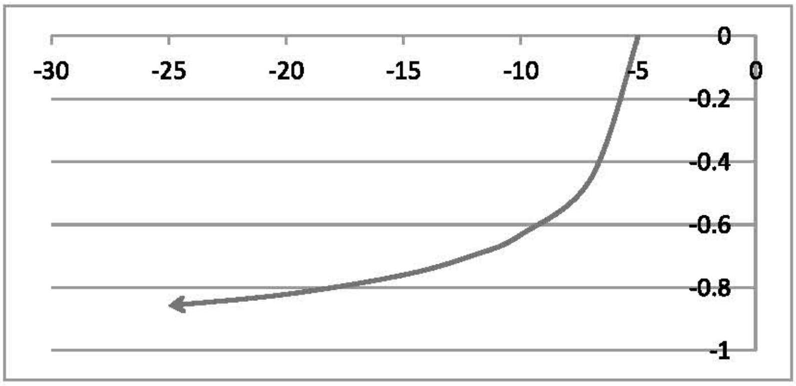


Figura 2.22

e) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím} (\sqrt{x^2+2} - x) = \underset{x\to+\infty}{Lím} (\sqrt{x^2+2} - x) \frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}+x} = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} = \frac{2}{\infty} = 0.$

(Ver Figura 2.23).

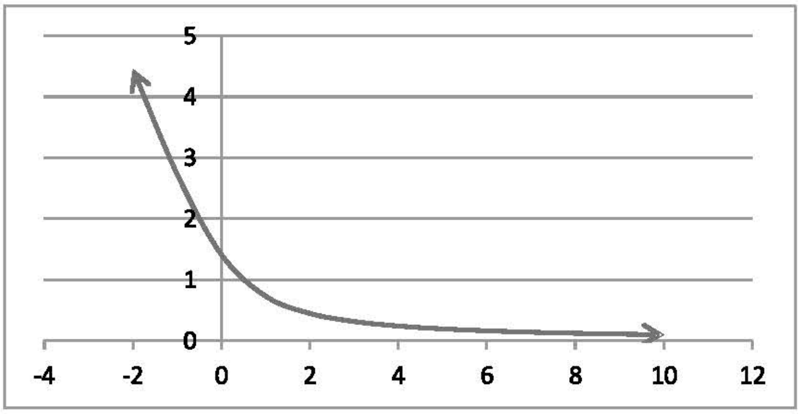


Figura 2.23

f) $L = \underset{x\to-\infty}{Lím}(\sqrt{x^2+2} - x) = +\infty + \infty = +\infty$

Ejemplo 2. Usando la observación de los grados de numerador y denominador, calcular:

a) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{2x^2+7x+5}{x^3+2x+1} = 0$, pues el °N=2, el °D=3, se cumple que el °N < °D, $\Rightarrow L = 0$.

b) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{2x^2+3x+5}{3x^2+2x+1} = \frac{2}{3}$, pues el °N=2, el °D=2, se cumple que el °N = °D, $\Rightarrow L = \frac{2}{3}$.

c) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{2x^2+2x+1}{2x+3} = +\infty$, pues el °N=2, el °D=1, se cumple que el °N >°D, $\Rightarrow L = +\infty$

Ejemplo 3. (PROBLEMA) Se invierte 5 000 dólares al 12% de interés compuesto semestralmente, el capital tras t años es dado por $A(t) = 5000(1{,}06)^{2t}$.

a) Calcular el capital A luego de 1 año.
b) Calcular el capital A al término de 2 años.
c) Calcular el capital A tras 5 años.
d) Calcular el capital A después de 10 años.
e) Calcular el capital A luego de 20 años.
f) Hallar e interpretar $A = \underset{t\to+\infty}{\text{Lím}}\, A(t)$

Solución.

Recordemos que el interés compuesto se obtiene por la experiencia de los bancarios según la siguiente relación: $A(t) = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, donde P es el capital invertido; r, la tasa anual de interés n veces al año; t dado en años; y A es la cantidad acumulada tras n años.

Para el presente problema, la relación es dada por $A(t) = 5000(1{,}06)^{2t}$a) $A(1) =$ 5 000 $(1{,}06)^{2(1)}$ = 5 618 dólares.

b) $A(2) =$ 5 000 $(1{,}06)^{2(2)}$ = 6 312,38488 dólares.

c) $A(5) =$ 5 000 $(1{,}06)^{2(5)}$ = 8 954,2384 dólares.

d) $A(10) =$ 5 000 $(1{,}06)^{2(10)}$ = 16 035,6773 dólares.

e) $A(20) = 5\,000\,(1{,}06)^{2(20)} = 51\,428{,}5896$ dólares.

f) $A = \lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}[5000(1{,}06)^{2t}] = +\infty$, la cantidad acumulada es muy grande.

Lo que se grafica a continuación:

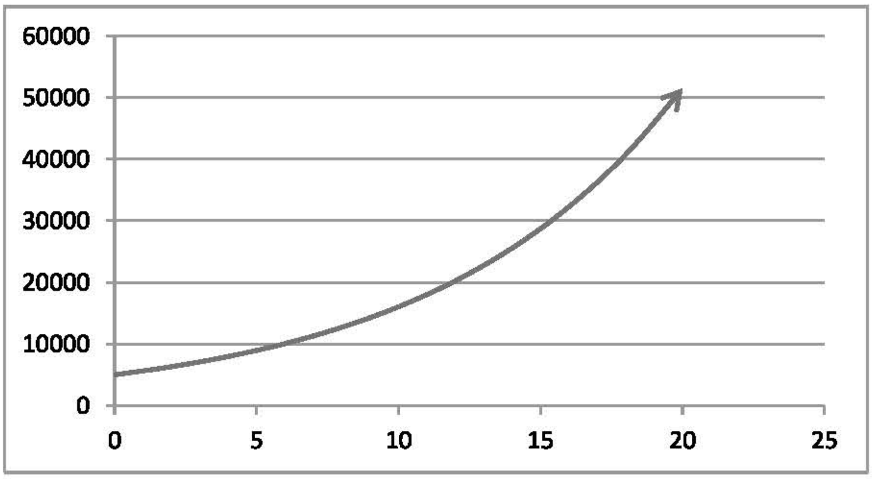


Figura 2.24

2.7. LÍMITES DE LA FORMA INDETERMINADA $1^{+\infty}$. OTROS LÍMITES

Algunos límites requieren de un estudio particular sofisticado que use expresiones más adelantadas de la matemática, como por ejemplo las *sucesiones infinitas* a fin de ser expresadas y así sean demostrados sus resultados; es el caso de este límite que tiene al número trascendente "$e = 2{,}718281828\ldots$" como protagonista.

TEOREMA. La función $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ tiene al límite "e" siendo $e = 2{,}718281828\ldots$, cuando x se oriente al infinito, es decir, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

OBSERVACIÓN 1. Si se hace el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$ se tiene $x = \frac{1}{t}$

Por otro lado, si x se orienta al infinito $x \to +\infty$, entonces $\frac{1}{x}$ tiende a cero, $\frac{1}{x} \to 0$.

Por lo que el límite del teorema se transforma en $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$.

OBSERVACIÓN 2. El límite anterior se puede extender al cálculo de límites de la forma indeterminada $1^{+\infty}$ del modo siguiente: Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}$.

En efecto, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}[1+(f(x)-1)]^{g(x)}$

$$= \underset{x\to x_0}{Lím}\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{(f(x)-1)g(x)} = \left\{\underset{x\to x_0}{Lím}[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{\underset{x\to x_0}{Lím}(f(x)-1)(g(x)}$$

$$= e^{\underset{x\to x_0}{\text{Lím}}(f(x)-1)g(x)}.$$

Ejemplo 1. Calcular los siguientes límites:

a) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5} = \underset{x\to+\infty}{Lím}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}$

$= \underset{x\to+\infty}{Lím}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\underset{x\to+\infty}{Lím}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5} = e\cdot 1^5 = e$

b) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \left[\underset{x\to+\infty}{Lím}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^3 = [e]^3 = e^3$

c) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \underset{x\to+\infty}{Lím}\left(1+\frac{x+3}{x-1}-1\right)^{x+3} = \underset{x\to+\infty}{Lím}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}$

$= \underset{x\to+\infty}{Lím}\left\{\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right\}^{\frac{4}{x-1}(x+3)} = \left\{\underset{x\to+\infty}{Lím}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right\}^{\frac{4}{x-1}(x+3)} = e^{\underset{x\to+\infty}{Lím}4(x+3)/(x-1)} = e^4$

d) $L = \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lím}(1+Cos\,x)^{3Sec\,x} = \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lím}\left\{\left(1+\frac{1}{Secx}\right)^{Sec\,x}\right\}^3 = \left[\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lím}\left(1+\frac{1}{Sec\,x}\right)^{Sec\,x}\right]^3 = e^3$

e) $L = \underset{x\to 0}{Lím}\frac{Ln\,(1+kx)}{x} = \underset{x\to 0}{Lím}\frac{1}{x}Ln(1+kx) = \underset{x\to 0}{Lím}Ln\,(1+kx)^{1/x}$

$= Ln\left\{\underset{x\to 0}{Lím}\left[(1+kx)^{1/kx}\right]^k\right\} = Ln\,(e^k) = k\cdot(Ln\,e) = k$

f) $L = \underset{x\to 0}{Lím}\frac{e^x-1}{x}$. Se desarrolla haciendo un cambio de variable.

Sea $e^x - 1 = t$ entonces $e^x = t+1$, además si $x\to 0 \Rightarrow t\to 0$.

Aplicamos Ln para despejar x:

$Ln(e^x) = Ln\,(t+1) \quad\rightarrow\quad x\,Ln\,e = Ln\,(t+1) \quad\rightarrow\quad x = Ln\,(t+1)$

En el límite $\underset{x\to 0}{Lím}\frac{e^x-1}{x} = \underset{t\to 0}{Lím}\frac{t}{Ln(t+1)} = \underset{t\to 0}{Lím}\frac{1}{\frac{Ln(t+1)}{t}} = \underset{t\to 0}{Lím}\frac{1}{Ln(t+1)^{1/t}}$

$= \frac{1}{Ln\left[\underset{t\to 0}{Lím}(t+1)^{1/t}\right]} = \frac{1}{Ln\,e} = 1.$

Ejercicio. Calcular el siguiente límite: $L = \underset{x\to 0}{Lím} \frac{a^x-1}{x}$, $a > 0$. Respuesta: $L = Ln\ a$

Ejemplo 2. Calcular $L = \underset{x\to 0}{Lím} \frac{3^x-2^x}{x} = \underset{x\to 0}{Lím} \frac{3^x-1-2^x+1}{x} = \underset{x\to 0}{Lím} \frac{3^x-1}{x} - \underset{x\to 0}{Lím} \frac{2^x-1}{x}$

$= Ln\ 3 - Ln\ 2 = Ln(3/2)$

2.8. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES REALES. CONTINUIDAD PUNTUAL

INTRODUCCIÓN. Literalmente una función $y = f(x)$ es continua en su dominio, cuando para cada valor x del dominio existe un valor y en la imagen; por otro lado, no será continua cuando existe algún valor x en el dominio para el cual la función no está definida o hay un salto finito o infinito en la imagen, o este es indeterminado.

DEFINICIÓN. (Continuidad en un punto). Sea $f: I\subset R \to R$ una función real que está definida sobre el intervalo abierto I de números reales que contiene al punto x_0. Se dice que f es continua en x_0 si cumple con la igualdad: $\underset{x\to x_0}{Lím} f(x) = f(x_0)$

OBSERVACIÓN. Viendo esta definición por separado se dirá que una función $f: I\subset R \to R$ es continua en el punto $x_0 \in I$ si cumple estas tres condiciones:

i) Existe f el punto x_0: Existe $f(x_0)$

ii) Existe el límite cuando $x \to x_0$: Existe $\underset{x\to x_0}{Lím} f(x)$

iii) Los dos resultados anteriores son iguales: $\underset{x\to x_0}{Lím} f(x) = f(x_0)$

Ejemplo 1. ¿Será la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2, x \le 0 \\ \frac{2\,Sen\,x}{x}, x > 0 \end{cases}$ continua en $x_0 = 0$?

Solución. A fin de determinar que sea continua, esta debe cumplir lo siguiente: $\underset{x\to x_0}{Lím} f(x) = f(x_0)$.

Para la existencia del límite, los límites laterales por la derecha e izquierda deben ser iguales. Veamos:

i) Existe $f(x_0) = f(0) = 2$.

ii) Debe existir $\underset{x\to x_0}{Lím} f(x)$. Para este tipo de funciones se usará límites laterales:

Por la izquierda de $x_0 = 0$: $\underset{x\to x_0^-}{Lím} f(x) = \underset{x\to 0^-}{Lím} f(x) = \underset{x\to 0^-}{Lím} (x^2+2) = 2$,

Por la derecha de $x_0 = 0$: $\underset{x\to x_0^+}{Lím} f(x) = \underset{x\to 0^+}{Lím} f(x) = \underset{x\to 0^+}{Lím} \frac{2Sen\,x}{x} = 2$, Esto significa que el límite existe: $\underset{x\to 0}{Lím} f(x) = 2$.

iii) Se cumple que $\underset{x\to 0}{Lím} f(x) = 2 = f(0)$.

Por tanto, la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, x \leq 0 \\ \frac{2\,Sen\,x}{x}, x > 0 \end{cases}$ es continua en $x_0 = 0$.

EJEMPLO DE APLICACIÓN. Durante una cirugía a corazón abierto, este se enfría para retardar su comportamiento normal. En la figura adjunta se muestra el flujo de sangre de cierto paciente a medida que se enfriaba su corazón. El hueco en la gráfica (para $t_o = 2$) representa un momento en que, por razones fuera de control, no se registró dato alguno.

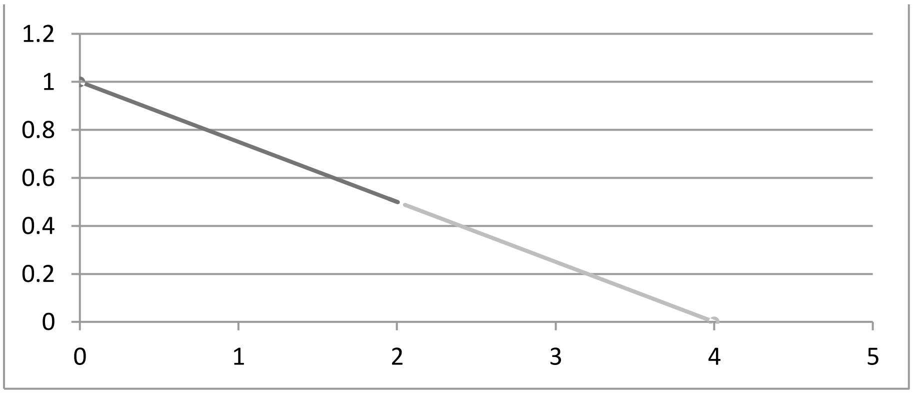


Figura 2.25

a) Hallar el límite de $f(t) = 1 - \frac{t}{4}$, cuando t tiende a 2, donde $y = f(t)$ representa el flujo de sangre a t grados, inferior a la temperatura normal del cuerpo (ver figura anterior).

Rpta. $f(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ es el flujo sanguíneo cuando la temperatura baja 2 grados desde la temperatura normal del cuerpo.

b) ¿Es f continua en $t = 2$?

Rpta. No lo es, pues $y = f(t)$ no está definida para $t = 2$.

c) El hueco en la gráfica ocurre cuando hay una catástrofe, como por ejemplo una falla mecánica.

2.9. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Sean $f: I \subset R \to R$ y $g: I \subset R \to R$ funciones reales definidas en el intervalo abierto I, para las funciones f y g continuas en el punto $x_0 \in I$ y siendo k un número real, se concluye que también son continuas en x_0 las siguientes funciones:

i) Suma $(f+g)(x)$

i) Diferencia $(f-g)(x)$

iii) Producto $(f\cdot g)(x)$

iv) Cociente $(f/g)(x)$, con $g(x)\neq 0$

v) Producto por un escalar $(k\cdot f)(x)$

Ejemplo 1. La función $f(x)=x^2-2x$ es continua en $x_0=1$ y la función $g(x)=2+5x$ es continua en $x_0=1$, entonces la función suma $(f+g)(x)=x^2+3x+2$ también es continua en el punto $x_0=1$. En efecto:

i) La función $f(x)=x^2-2x$ es continua en $x_0=1$ si cumple lo siguiente:

i) Existe $f(x_0)=\ f(1)=-1$.

ii) Debe existir $\underset{x\to x_0}{Lím} f(x)=\underset{x\to 1}{Lím} f(x)=\underset{x\to 1}{Lím}(x^2-2x)=-1$,

iii) Se cumple que $\underset{x\to 1}{Lím} f(x)=-1=f(1)$.

Por lo tanto, la función $y=f(x)$ es continua en $x_0=1$.

ii) La función $g(x)=2+5x$ es continua en $x_0=1$ si cumple estos requisitos:

i) Existe $g(x_0)=\ g(1)=7$.

ii) Debe existir $\underset{x\to x_0}{Lím} g(x)=\underset{x\to 1}{Lím} g(x)=\underset{x\to 1}{Lím}(2+5x)=7$,

iii) Se cumple que $\underset{x\to 1}{Lím} g(x)=7=g(1)$.

En consecuencia, la función $y=g(x)$ es continua en $x_0=1$.

iii) Entonces la función suma $(f+g)(x)=x^2+3x+2$ es continua en $x_0=1$ si se dan las siguientes condiciones:

i) Existe $(f+g)(x_0)=(f+g)(1)=6$.

ii) Debe existir $\underset{x\to x_0}{Lím}(f+g)(x)=\underset{x\to 1}{Lím}(f+g)(x)=\underset{x\to 1}{Lím}(x^2+3x+2)=6$,

iii) Se cumple que $\underset{x\to 1}{Lím}(f+g)(x)=6=(f+g)(1)$.

Por ende, la función suma $y=(f+g)(x)$ es continua en $x_0=1$. Esto se observa en la Figura 2.26.

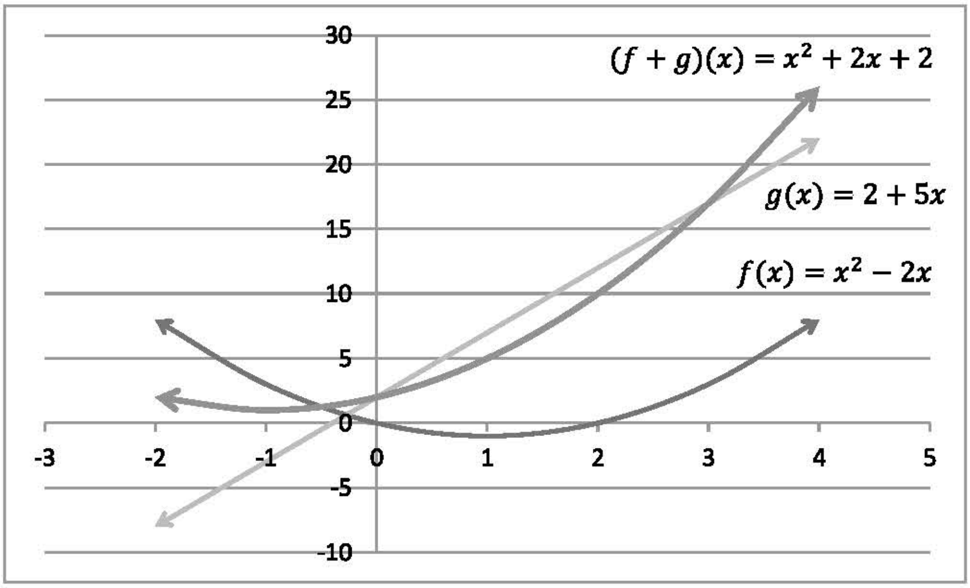


Figura 2.26

Ejemplo 2. La función $f(x) = \sqrt{x-1}$ es continua en $x_0 = 5$, entonces la función producto por el escalar $k = 2$, $(2f)(x) = 2\sqrt{x-1}$ también es continua en el punto $x_0 = 5$. En seguida se muestra que si se cumple:

i) La función $f(x) = \sqrt{x-1}$ es continua en $x_0 = 5$ si satisface estas condiciones:

i) Existe $f(x_0) = f(5) = 2$.

ii) Debe existir $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x-1} = 2$,

iii) Se cumple que $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 2 = f(5)$.

Por lo tanto, la función $y = f(x)$ es continua en $x_0 = 5$.

ii) La función producto por el escalar $k = 2$, $(2f)(x) = 2\sqrt{x-1}$ es continua en $x_0 = 5$ si cumple lo siguiente:

i) Existe $(kf)(x_0) = (2f)(5) = 4$.

ii) Debe existir $\lim\limits_{x \to x_0} (2f)(x) = \lim\limits_{x \to 5} (2f)(x) = \lim\limits_{x \to 5} (2\sqrt{x-1}) = 4$,

iii) Se cumple que $\lim\limits_{x \to 5} (2f)(x) = 4 = (2f)(5)$.

Entonces, la función producto por el escalar $k = 2$, $y = (2f)(x)$ es continua en $x_0 = 5$.

Esto se precisa en la Figura 2.27.

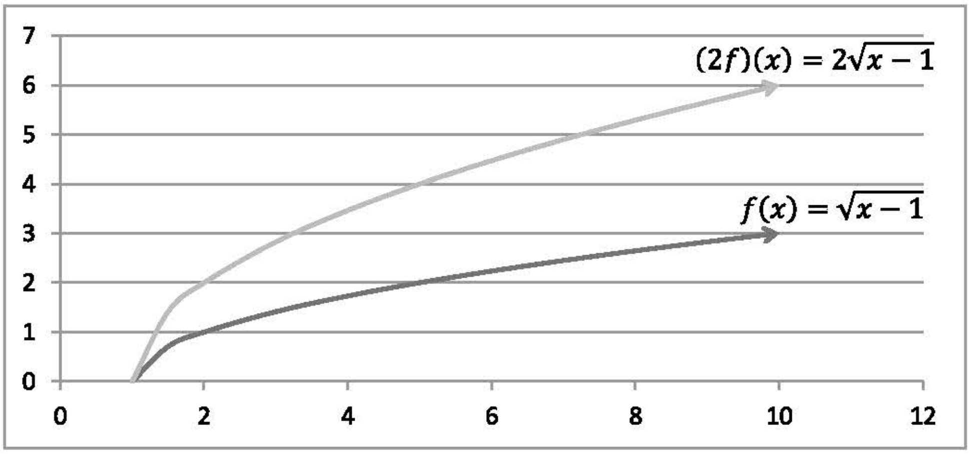


Figura 2.27

2.10. DISCONTINUIDAD EVITABLE E INEVITABLE

Sea $f: I \subset R \to R$ una función real definida en el intervalo abierto I, se dice que la función f es discontinua en $x_0 \in I$, si y solo si f no es continua en x_0; las discontinuidades pueden ser de dos tipos:

i) Discontinuidad Evitable. Cuando f puede hacerse continua definiéndola o redefiniéndola en x_0; el valor de definición o redefinición es $f(x) = \underset{x \to x_0}{Lim} f(x)$.

ii) Discontinuidad Inevitable. Cuando aun definiéndola o redefiniéndola en x_0, esta no se hace continua, la función en este caso da un salto en x_0.

Ejemplo 1. La función $f(x) = x^3 - 3x + 6$ es continua en el intervalo $J = [-3; 3]$ como se muestra en la Figura 2.28:

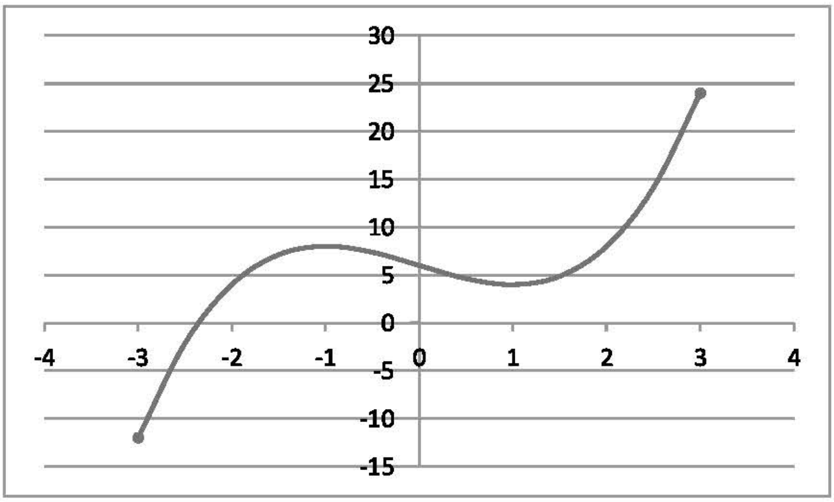


Figura 2.28

Ejemplo 2. La función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ no es continua en $x_0 = 2$, pues $f(2)$ no está definida; sin embargo, se la puede hacer continua definiéndola en $x_0 = 2$ mediante $f(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ $= \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$.

La función hecha continua (en todo R) quedará definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & si\ x \neq 2 \\ 2, si\ x = 2 \end{cases}$.

Ejercicio. Hágase continua a la función $f(x) = \frac{4x^2-2x}{x}$ definiéndola en su punto de discontinuidad.

EJEMPLO DE ***APLICACIÓN***. La población de ciertos peces cambia cuando un contaminante químico cae repentinamente en un lago. Supóngase que la población piscícola P(t) (en miles) en el tiempo t (en días), tanto antes como después del accidente, se modela por

$$P(t) = \begin{cases} 6\left(\frac{t^2+5}{19t+25}\right)^{1/2}, 0 \leq t < 5 \\ 6\left(\frac{t}{t^2+25}\right)^{1/3}, t > 5 \end{cases}$$

Analice la discontinuidad en $t = 5$, cuando ocurrió el derrame. Haga cálculos para $t = 3$, $t = 4$, $t = 6$, $t = 8$, luego compare e interprete.

Solución.

El límite por la izquierda es $\lim_{x\to 5^-} 6\left(\frac{t^2+5}{19t+25}\right)^{1/2} = 3$.

El límite por la derecha es $\lim_{x\to 5^+} 6\left(\frac{t}{t^2+25}\right)^{1/3} = 2{,}785$.

Esto quiere decir que la población de peces decae súbitamente en $t = 5$ días de 3 000 a 2 785; en consecuencia, murieron 215 peces. La gráfica correspondiente se muestra en la Figura 2.29.

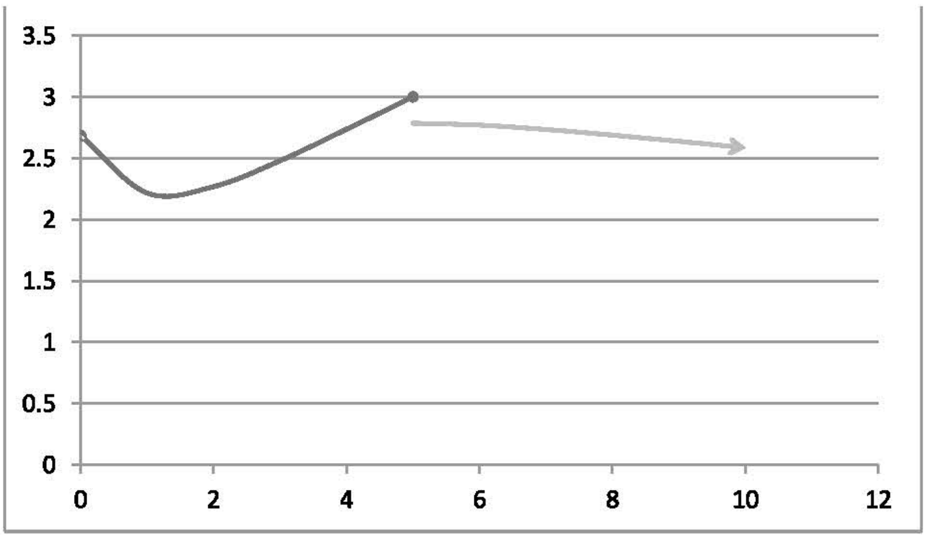


Figura 2.29

En seguida se calcula la cantidad de peces para otros tiempos.

Para $t = 3, P(3) = 2\,479$ | Para $t = 4, P(4) = 2\,735$

Para $t = 5, P(5) = 3000$ | Para $t = 6, P(6) = 2\,769$

Para $t = 8, P(8) = 2\,687$

Observamos que la población venía creciendo hasta cuando $t = 5$, en el que alcanzó los 3 000 peces y luego del accidente, la población empieza a disminuir.

2.11. DOMINIO DE CONTINUIDAD DE UNA **FUNCIÓN** REAL. CONTINUIDAD POR INTERVALOS

CONTINUIDAD POR INTERVALO. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real definida en el intervalo abierto I, la función $f(x)$ es continua sobre el intervalo abierto $I = \langle a; b \rangle$ de números reales, si $f(x)$ es continua en cada punto del intervalo I. La función f es discontinua si ella no es continua en algún valor x de I.

Ejemplo 1. Son modelos de funciones continuas por intervalo los siguientes:

i) Función lineal: $f(x) = mx + b$, continua en todo R.

ii) Función polinómica: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son números reales con $a_n \neq 0$ y "n" es un número entero positivo por el cual el polinomio es de grado n. Es continua en todo R.

iii) Son también continuas en todo R la función constante $f(x) = C$, C =constante; y, la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

Ejemplo 2. Funciones continuas en sus dominios:

i) Si $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3x + 4}$ es continua en $\boldsymbol{Dom(f) = \mathrm{R}}$ y $\boldsymbol{g(x) = |2x - 3|}$ es continua en $\boldsymbol{Dom(g) = \mathrm{R}}$, entonces:

La función suma $\boldsymbol{(f + g)(x) = x^2 - 3x + 4 + |2x - 3|}$ es continua en $\boldsymbol{Dom(f + g) = \mathrm{R} \cap \mathrm{R} = \mathrm{R}}$.

ii) Si $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x - 3}$ es continua en $\boldsymbol{Dom(f) = \mathrm{R}}$ y $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{9 - x^2}}$ es continua en $\boldsymbol{Dom(g) = [-3; 3]}$, entonces:

La función cociente $\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2+2x-3}{\sqrt{9-x^2}}}$ es continua en $\boldsymbol{Dom(f/g) = \mathrm{R} \cap [-3; 3] = [-3; 3]}$.

Ejemplo 3. Hallar el dominio de continuidad de las siguientes funciones:

i) $\boldsymbol{f(x) = x^2 + x - \sqrt{x}}$. La función $\boldsymbol{f}$ tiene dos partes:

Primero, la función polinómica $x^2 + x$ es continua en todo R ; segundo, la función radical $\sqrt{x}$, es continua en el intervalo $[0; +\infty\rangle$; entonces, la función $f(x) = x^2 + x - \sqrt{x}$ es continua en el intervalo intersección $I = Don(f) = \mathrm{R} \cap [0; +\infty\rangle = [0; +\infty\rangle$.

ii) $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x}{x-3} - \sqrt{\frac{x(x+2)}{x-1}}}$. La función $\boldsymbol{f}$ tiene dos partes:

Por un lado, la función racional $\frac{2x}{x-3}$ es continua en todo $R - \{3\}$; por otro, la función radical $\sqrt{\frac{x(x+2)}{x-1}}$ es continua en el intervalo $[-2; 0] \cup \langle 1; +\infty\rangle$, que resulta de la condición $\frac{x(x+2)}{x-1} \geq 0$.

Entonces toda la función $f(x) = \frac{2x}{x-3} - \sqrt{\frac{x(x+2)}{x-1}}$ es continua en el intervalo intersección siguiente: $I = Don(f) = (\mathrm{R} - \{3\}) \cap ([-2; 0] \cup \langle 1; +\infty\rangle)$

$I = [-2; 0] \cup \langle 1; +\infty\rangle - \{3\}$.

CONTINUIDAD EN INTERVALO CERRADO.

Sea $f: I \subset R \to R$ una función real continua sobre el intervalo cerrado $I = [a, b]$ de números reales si $f(x)$ es continua en cada punto de abierto $I = \langle a; b\rangle$ y además:

a) f es continua por la derecha en a, es decir, existe $f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

b) f es continua por la izquierda en b, es decir, existe $f(b) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.

Ejemplo 4. La función $f(x) = x^2 - 2x - \sqrt{x}$ es continua en el intervalo abierto $I = \langle 0; 16\rangle$ y también lo es en el intervalo cerrado $I = [0; 16]$, pues existen los límites laterales como se ven a continuación:

a) f es continua por la derecha en $a = 0$, esto significa que existe $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 2x - \sqrt{x}) = 0$.

b) f es continua por la izquierda en $b = 16$, es decir, existe $f(16) = \lim\limits_{x \to 16^-} f(x)$

$= \lim\limits_{x \to 16^-} (x^2 - 2x - \sqrt{x}) = 220$.

Lo anterior muestra que la función es continua en el intervalo cerrado $I = [0; 16]$. (Ver Figuras 2.30 y 2.31).

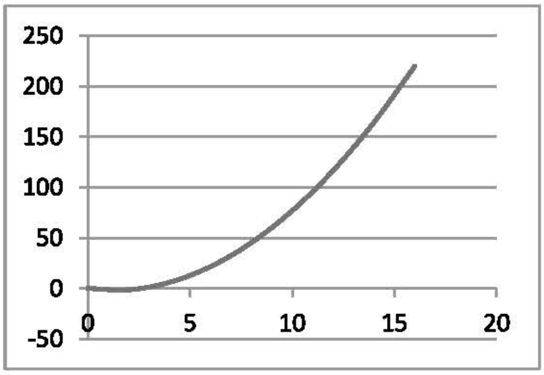


Figura 2.30

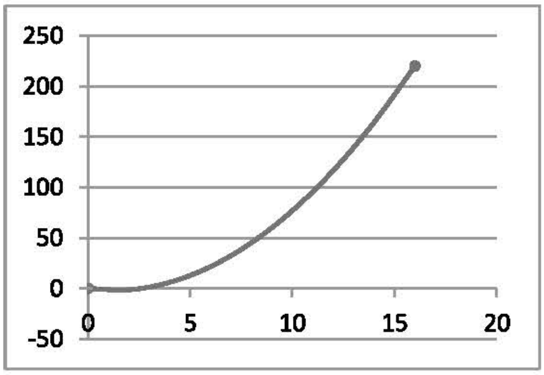


Figura 2.31

TEOREMAS ESPECIALES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS.

LA CONTINUIDAD EN SUB-INTERVALO. Si una función $y = f(x)$ es continua en su dominio teórico $Dom(f)$, entonces formalmente se espera que también sea continua en cualquier subintervalo $J \subset Dom(f)$.

DEFINICIÓN. Sea $f: I \subset R \rightarrow R$ una función real definida en el intervalo abierto I, si f es continua en I y el intervalo $J \subset I$, entonces f es continua en J.

Ejemplo 5. La función $f(x) = \sqrt{2x+6}$ es continua en el intervalo $Dom(f) = [-3; +\infty\rangle$, entonces dicha función será continua en el intervalo $J = \langle 0; 25 \rangle$.

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO. Si $f: I \subset R \rightarrow R$ una función real continua en el intervalo cerrado $I = [a; b]$, si $f(a) < f(b)$ y k es un número real tal que $f(a) < k < f(b)$, entonces existe (al menos) un valor $x_0 \in \langle a; b \rangle$ tal que $k = f(x_0)$.

Ejemplo 6. Considere la altura de una persona. Si un niño mide 150 cm los 13 años y 170 cm al cumplir 14, entonces en algún momento intermedio midió 160 cm. Lo cual parece razonable si pensamos que la persona crece de forma continua sin dar saltos bruscos en el crecimiento.

Ejemplo 7. Sea la función $f(x) = (x-2)^2$ continua en el intervalo $I = [2; 6]$, como $f(2) < f(6)$ sea $k = 4$, encuentre el valor $x_0 \in [2; 6]$ para el cual $f(x_0) = 4$.

Se tiene que $f(x_0) = 4 \ \rightarrow \ (x_0 - 2)^2 = 4 \ \rightarrow \ x_0 - 2 = \pm 2$; sin embargo, como el intervalo dado es $I = [2; 6]$, entonces $x_0 - 2 = 2 \rightarrow x_0 = 4$.

Esto también se observa en la Figura 2.32.

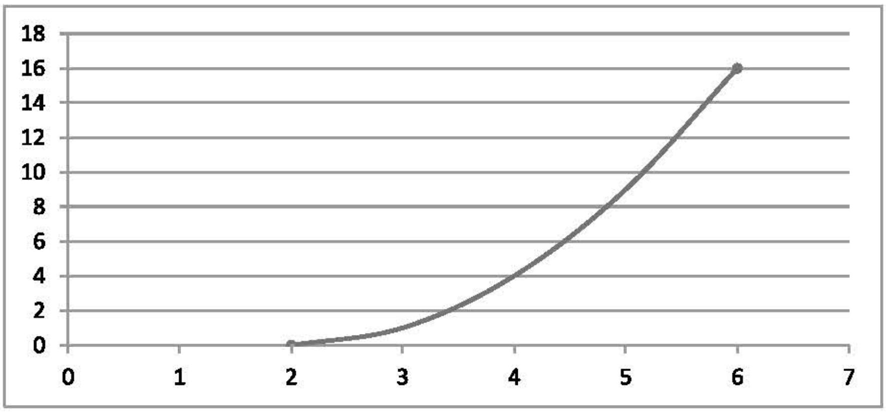


Figura 2.32

TEOREMA DEL CERO. Si $f: I \subset R \rightarrow R$ una función real continua en el intervalo cerrado $I = [a; b]$ y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos; en consecuencia, existe un valor $x_0 \in \langle a; b \rangle$ tal que $f(x_0) = 0$.

Ejemplo 8. La función $f(x) = 4 - x^2$ continua en el intervalo $I = [0; 4]$, como $f(0) = 4 > 0$ y $f(4) = -12 < 0$ tienen signos diferentes, por lo que existe el valor $x_0 \in [0; 4]$ para el cual $f(x_0) = 0$.

En efecto, $4 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$; sin embargo, como el intervalo es $I = [0; 4]$, entonces $x = 2$, para lo cual se cumple $f(2) = 0$. (Ver Figura 2.33).

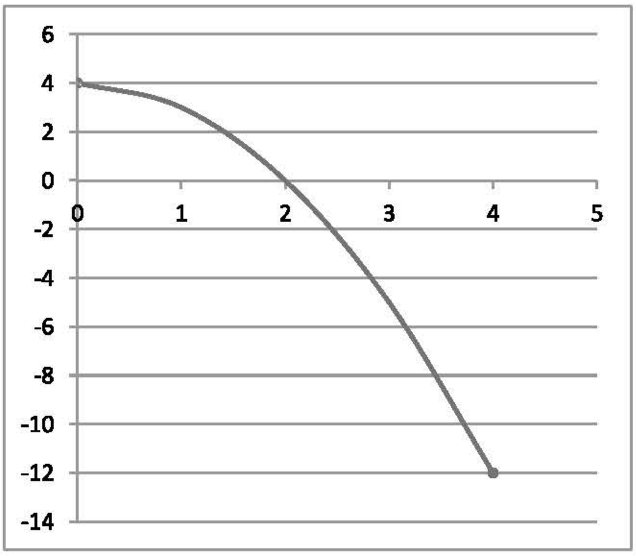


Figura 2.33

TEOREMA DEL VALOR MÍNIMO Y DEL VALOR MÁXIMO.

DEFINICIÓN (MÍNIMO). Si J es un conjunto contenido en el dominio de la función f, $Dom(f)$ entonces se dice que f tiene un valor mínimo sobre J de existir un valor $x_0 \in J$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in J$.

DEFINICIÓN (MÁXIMO). Si J es un conjunto contenido en el dominio de la función f, $Dom(f)$ entonces se dice que f tiene un valor máximo sobre J de existir un valor $x_0 \in J$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in J$.

TEOREMA. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real continua en el intervalo cerrado $I = [a; b]$; en consecuencia, f tiene un valor mínimo y un valor máximo sobre $I = [a; b]$.

Ejemplo 9. La función $(x) = x^3 - 2x + 2$ es continua en el intervalo cerrado $Dom(f) = [-3; 3]$, por lo que dicha función tiene su valor mínimo $m = f(-3) = -19$ y su valor máximo $M = f(3) = 23$. (Ver Figura 2.34).

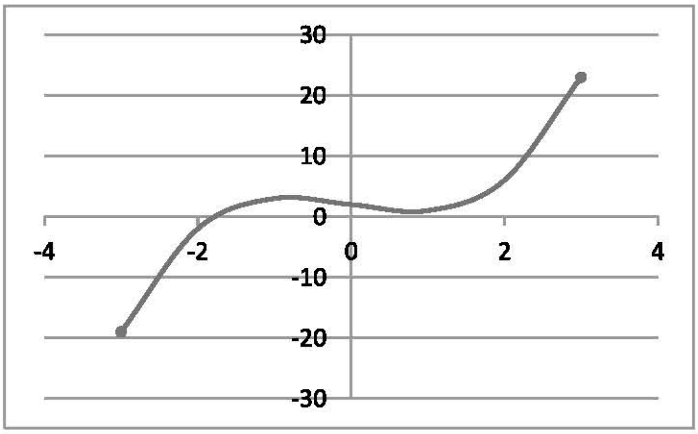


Figura 2.34

Ejemplo 10. La función $(x) = x^2 - x - 2$ es continua en el intervalo cerrado $Dom(f) = [-2; 5]$, por ende, dicha función tiene su valor mínimo $m = f(0{,}5) = -2{,}25$ y su valor máximo $M = f(5) = 18$. Lo que se grafica en la Figura 2.35.

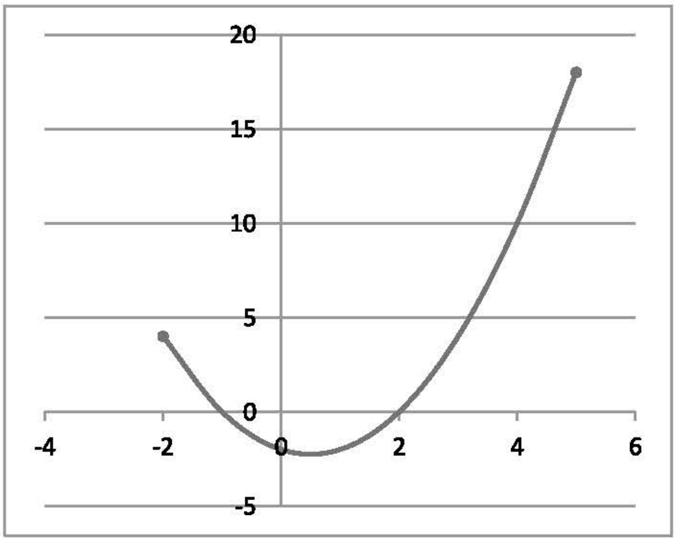


Figura 2.35

FORMAS INDETERMINADAS ESPECIALES.

Ejemplo 1. Siendo $f(x) = 4x - x^2$, calcular $F(x) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Solución.

$$F(x) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lím} \frac{[4(x+h)-(x+h)^2]-[4x-x^2]}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{4x+4h-x^2-2xh-h^2-4x+x^2}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{4h-2xh-h^2}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lím} \frac{h(4-2x-h)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} (4-2x-h) = 4-2x.$$

Ejemplo 2. Siendo $f(x) = x^2 + x$, calcular $F(x) = \underset{\Delta x\to 0}{Lím} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Solución.

$$F(x) = \underset{\Delta x\to 0}{Lím} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \underset{\Delta x\to 0}{Lím} \frac{[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)]-[x^2+x]}{\Delta x} = \underset{\Delta x\to 0}{Lím} \frac{x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2+x+\Delta x-x^2-x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x\to 0}{Lím} \frac{2x(\Delta x)+(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x} = \underset{\Delta x\to 0}{Lím} \frac{\Delta x(2x+\Delta x+1)}{\Delta x} = \underset{\Delta x\to 0}{Lím}(2x+\Delta x+1) = 2x+1.$$

Ejemplo 3. Siendo $f(x) = \frac{5}{x+1}$, calcular $F(x) = \underset{\Delta x\to 0}{Lím} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Solución.

$$F(x) = \underset{\Delta x\to 0}{Lím} = \underset{\Delta x\to 0}{Lím} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{5}{(x+\Delta x)+1} - \frac{5}{x+1}\right] = \underset{\Delta x\to 0}{Lím} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{-5(\Delta x)}{(x+\Delta x+1)(x+1)}\right] = \underset{\Delta x\to 0}{Lím} \frac{-5}{(x+\Delta x+1)(x+1)}$$

$$= \frac{-5}{(x+1)(x+1)} = \frac{-5}{(x+1)^2}$$

Ejemplo 4. Siendo $f(t) = \sqrt{4t+3}$, calcular $F(t) = \underset{\Delta t\to 0}{Lím} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$

Solución.

$$F(t) = \underset{\Delta t\to 0}{Lím} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \underset{\Delta t\to 0}{Lím} \frac{\sqrt{4(t+\Delta t)+3}-\sqrt{4t+3}}{\Delta t} = \underset{\Delta t\to 0}{Lím} \frac{\sqrt{4(t+\Delta t)+3}-\sqrt{4t+3}}{\Delta t} \cdot \frac{\sqrt{4(t+\Delta t)+3}+\sqrt{4t+3}}{\sqrt{4(t+\Delta t)+3}+\sqrt{4t+3}}$$

$$= \underset{\Delta t\to 0}{Lím} \frac{4(t+\Delta t)+3-(4t+3)}{\Delta t(\sqrt{4(t+\Delta t)+3}+\sqrt{4t+3})} = \underset{\Delta t\to 0}{Lím} \frac{4\Delta t}{\Delta t(\sqrt{4(t+\Delta t)+3}+\sqrt{4t+3})} = \underset{\Delta t\to 0}{Lím} \frac{4}{\sqrt{4(t+\Delta t)+3}+\sqrt{4t+3}} = \frac{4}{\sqrt{4t+3}+\sqrt{4t+3}} = \frac{2}{\sqrt{4t+3}}$$

OBSERVACIÓN. Estas formas indeterminadas servirán precisamente para definir la derivada de una función real, tal como se verá más adelante.

2.12. LISTA DE EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIOS DE LÍMITES DE UNA FUNCIÓN REAL.

1. Realice la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2-36}{x-6}$ y calcule $L=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; $L=\lim\limits_{x\to 6} f(x)$; $L=\lim\limits_{x\to 8} f(x)$

2. Calcular los siguientes límites:

a) $L=\lim\limits_{x\to 3}(10)$

b) $L=\lim\limits_{x\to 4}(x^2-4x+15)$

c) $L=\lim\limits_{x\to -3}(x^3+5x-11)$

d) $L=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2)^3(4x-12)^2$

e) $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+4}{x^2+2+3}$

f) $L=\lim\limits_{x\to 7}\sqrt{x^2+15}$

g) $L=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{x^6+25x+9}$

3. Calcular los siguientes límites:

a) $L=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$

b) $L=\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{4-x}-\frac{1}{4}\right)$

c) $L=\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\frac{9x^2-1}{3x+1}$

d) $L=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{x-1}{x^2-2x+1}\right)$

4. Calcular los siguientes límites:

a) $L=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

b) $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

c) $L=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

5. Calcular los siguientes límites:

a) $L=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3-2x-3x^2}{5+x-9x^2}$

b) $L=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^5-2x^3-3x}{5x^5+2x^2-9x}$

c) $L=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3-x-3x^3}{4+3x-9x^2}$

d) $L=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+8}}{5x}$

6. Calcular los siguientes límites:

a) $L=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\frac{4}{x-3}\right)$

b) $L=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\frac{4}{x-3}\right)$

c) $L=\lim\limits_{x\to 4^-}\left[\frac{4}{(x-4)^2}\right]$

d) $L=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{-2}{(x-1)^2}\right]$

EJERCICIOS SOBRE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIóN REAL.

1. Realice la gráfica de las funciones dadas y determine si son continuas en el punto que se indica:

a) $f(x) = |x+2|$, en $x_0 = 2$ b) $f(x) = \sqrt{x+4}$, en $x_0 = 2$.

c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$, en $x_0 = 3$

2. Analice si las funciones dadas son continuas en el punto que se indica:

a) $f(x) = \begin{cases} x^3+1, & x \leq 1 \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$, en $x_0 = 1$. b) $f(x) = \begin{cases} 1+\frac{x}{2}, & x \leq 2 \\ 4-x, & x > 2 \end{cases}$, en $x_0 = 2$.

3. Hallar el dominio de continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 10x - 25$ b) $f(x) = \sqrt{6-x}$ c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

d) $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ e) $f(x) = Ln(4x-2)$ f) $f(x) = Cos(2x)$

g) $f(x) = 2^x$ h) $f(x) = \frac{x^3-27}{x-3}$

4. Hay dos tipos de discontinuidad; de dos ejemplos, uno es de discontinuidad esencial y el otro de discontinuidad evitable. Para este último caso, hacerla continua.

Capítulo III

DERIVADA DE LAS FUNCIONES REALES

CAPÍTULO III

DERIVADA DE LAS FUNCIONES REALES

CONTENIDO

3.1. Génesis de la derivada. Definición de la derivada de una función real.

3.2. Problemas clásicos que requieren derivada. La derivada como razón de cambio.

3.3. Pendiente y recta tangente y recta normal a una curva.

3.4. Obtención de algunas reglas usando la definición de derivada. Reglas de derivación.

3.5. Cálculo de la derivada de diversas funciones reales.

3.6. La regla de la cadena o derivada de funciones compuestas.

3.7. Derivadas de orden superior.

3.8. Derivación implícita.

3.9. Incremento y diferencial de una función real.

3.10. Lista de ejercicios propuestos.

3.1. GÉNESIS DE LA DERIVADA. DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL

GÉNESIS DE LA DERIVADA.

La derivada de una función real $y = f(x)$ es un concepto matemático que surge con el planteamiento de dos problemas clásicos: "la búsqueda de la velocidad de un móvil en cada punto de su recorrido" y "la búsqueda de la tangente a una curva"; en esencia, ambos problemas tienen el mismo objetivo: la búsqueda de la variación de una magnitud con respecto a otra.

La precisión de la idea de límite ayuda en la resolución de los problemas arriba mencionados, introduciendo el concepto de derivada.

La forma en que aquí se presenta a la derivada, es haciendo uso del límite de las funciones reales. Cabe resaltar que la idea de derivada surgió desde las aplicaciones y se la formalizó teóricamente dándole un rigor matemático. Ahora en los textos se trata de retornar al primer proceso, es decir, que se entienda el concepto de la derivada y luego usarla en diversas aplicaciones.

El concepto de derivada tiene diversas interpretaciones, dependiendo del campo específico del conocimiento en el cual se esté empleando. Veamos un ejemplo aplicado al aprendizaje de una persona.

Ejemplo 1. Al dejar caer un objeto, este alcanzará una distancia de $S = 16t^2$ pies en t segundos.

a) Hallar su velocidad promedio al cabo de 3 segundos.

b) Hallar la velocidad instantánea al cabo de 3 segundos.

Solución.

a) La razón de cambio promedio (RCP) se calcula de la fórmula "cociente de la distancia recorrida del tiempo 1 al tiempo 2 entre la diferencia de los tiempos 1 y 2", es decir, $RCP = \frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}$. Veamos:

De 3 a 3,5: $RCP = \frac{S(3,5)-S(3)}{3,5-3} = \frac{52}{0,5} = 104$ pies por segundo.

De 3 a 3,1: $RCP = \frac{S(3,1)-S(3)}{3,1-3} = \frac{9,76}{0,1} = 96,7$ pies por segundo.

De 3 a 3,01: $RCP = \frac{S(3,01)-S(3)}{3,01-3} = \frac{0,9616}{0,01} = 96,16$ pies por segundo.

De 3 a 3,001: $RCP = \frac{S(3,001)-S(3)}{3,001-3} = \frac{0,096016}{0,001} = 96,016$ pies por segundo.

Todas estas son aproximaciones de la velocidad al cabo de tres segundos.

b) La razón de cambio instantáneo (*RCI*) se obtendrá de "llevar al límite el cociente de la distancia recorrida del tiempo 1 al tiempo 2 entre la diferencia de los tiempos 1 y 2". Esto se logra aplicando el concepto de límite a la función que modela este hecho.

La razón de cambio instantáneo es dada por $RCI = \lim_{t \to t_1} \frac{S(t)-S(t_1)}{t-t_1}$, veamos:

$RCI = \lim_{t \to t_1} \frac{S(t)-S(t_1)}{t-t_1} = \lim_{t \to 3} \frac{16t^2-144}{t-3} = \lim_{t \to 3} \frac{16(t-3)(t+3)}{t-3} = \lim_{t \to 3} 16(t+3) = 96$ pies por segundo; que es la velocidad cuando $t = 3$ segundos.

Ejemplo 2. Cierta persona que *aprende a digitar un teclado* tiene una mejora que se modela aproximadamente con la función real $N(t) = 60\left(1 - \frac{2}{t}\right)$, con $3 \leq t \leq 10$; donde $N(t)$ es el número de palabras por minuto y "t" es el tiempo de aprendizaje en semanas.

a) Calcular la razón de cambio promedio (velocidad promedio) del número de palabras por minuto para un cambio en el tiempo de 4 a 6 semanas; de 4 a 5; de 4 a 4,5; de 4 a 4,2; de 4 a 4,1 y así sucesivamente acercándose cada vez más a $t = 4$.

b) Calcular la razón de cambio instantáneo (velocidad instantánea) para cuando $t = 4$ semanas.

Solución.

a) La razón de cambio promedio (RCP) se calcula de la fórmula "cociente de las palabras aprendidas desde el tiempo 1 al tiempo 2 entre la diferencia de los tiempos 1 y 2", es decir, $RCP = \frac{N(t_2)-N(t_1)}{t_2-t_1}$. Veamos:

De 4 a 6: $RCP = \frac{N(6)-N(4)}{6-4} = 5$ palabras por minuto, por semana.

Significa que al pasar de la semana 4 a la 6, la persona aprende a una velocidad de 5 palabras por minuto cada semana, en promedio.

De 4 a 5: $RCP = 6$ palabras por minuto, por semana.

De 4 a 4,5: $RCP = 6{,}66$ palabras por minuto, por semana.

De 4 a 4,2: $RCP = 7{,}14$ palabras por minuto, por semana.

De 4 a 4,1: $RCP = 7{,}32$ palabras por minuto, por semana.

De estos cálculos se deduce que *cuanto más cerca se está* de $t = 4$, la velocidad de aprendizaje se aproxima a 7,5 palabras por minuto, cada semana.

b) La razón de cambio instantáneo (*RCI*) se obtendrá de "llevar al límite el cociente de la diferencia de la cantidad de palabras aprendidas desde el tiempo t hasta el tiempo 1 fijo entre la diferencia del tiempo t y tiempo 1". Esto se logra aplicando el concepto de límite a la función que modela este hecho, el cual se calcula de dos formas:

(i) La razón de cambio instantáneo es dada por $RCI = \underset{t \to t_1}{Lím} \frac{N(t)-N(t_1)}{t-t_1}$, veamos:

$RCI = \underset{t \to t_1}{Lím} \frac{N(t)-N(t_1)}{t-t_1} = \underset{t \to 4}{Lím} \frac{60\left(1-\frac{2}{t}\right)-30}{t-4} = \underset{t \to 4}{Lím} \frac{30}{t} = 7{,}5$ palabras por minuto, por semana; se trat de la velocidad cuando $t = 4$ semanas, exactamente al finalizar la cuarta semana de aprendizaje.

(ii) Una forma equivalente del anterior límite se obtiene haciendo que la diferencia $h = t - t_1$ se oriente a cero en el límite, del modo siguiente:

$$RCI = \underset{h \to 0}{Lím} \frac{N(t_1+h)-N(t_1)}{h} = \underset{h \to 0}{Lím} \frac{60\left(1-\frac{2}{4+h}\right)-60\left(1-\frac{2}{4}\right)}{h} = \underset{h \to 0}{Lím} \frac{1}{h}\left(30 - \frac{120}{4+h}\right)$$

$$= \underset{h \to 0}{Lím} \frac{1}{h}\left(\frac{120+30h-120}{4+h}\right) = \underset{h \to 0}{Lím} \frac{1}{h}\left(\frac{30h}{4+h}\right) = \underset{h \to 0}{Lím} \left(\frac{30}{4+h}\right) = 7{,}5$$

Este último límite, o su equivalente, será precisamente la definición de la derivada de una función real.

DEFINICIÓN DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL. La derivada de una función real de variable real $f: I \subset R \to R$ definida en el intervalo I, en el punto de acumulación $x \in I$ es dada por otra función que se denota por $\frac{df(x)}{dx}$ y es planteada mediante el límite $\frac{df(x)}{dx} = \underset{h \to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, siempre que este límite exista.

El dominio de la función derivada $\frac{df(x)}{dx}$ es el conjunto de valores "x" del $Dom(f)$ para los cuales el límite anterior existe.

OBSERVACIÓN 1. Sobre la derivada de una función real se puede señalar lo siguiente:

i) Otras formas de denotar la derivada son $\frac{df(x)}{dx}$, $D_x f(x)$, $D_x y$, y', $f'(x)$.

Una de las notaciones más usada es $y' = f'(x)$. Es decir, $f'(x) = \underset{h \to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

ii) Una función $f: I \subset R \to R$ se dice derivable en "$x \in I$", cuando existe su derivada en ese $x \in I$.

iii) Cuando la derivada se estima en un valor de x_0, se obtiene un número real $f'(x_0) = \underset{h \to 0}{Lím} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, el cual se interpreta de acuerdo al campo en donde se esté aplicando.

iv) El proceso de hallar la derivada es llamado *derivación*.

v) Se dice que una función $y = f(x)$ es derivable en un intervalo I, si lo es en cada valor $x \in I$.

OBSERVACIÓN 2. Sobre una función y su derivada se puede decir lo siguiente:

i) En las aplicaciones una función real $y = f(x)$ sirve para *describir* un hecho, un suceso o para representar una magnitud.

ii) La derivada de dicha función real $y' = f'(x)$ sirve para describir la *variación* de dicho hecho, suceso o magnitud con respecto a la variable x.

iii) Cuando el valor de la derivada es positivo $(+)$, quiere decir que la magnitud está aumentando, y cuando es negativo $(-)$ significa que la cantidad está disminuyendo.

Ejemplo 1. Aplicando la definición con el límite, hallar la derivada de la función $f(x) = x^2 - 4x$, luego evaluarla en $x_0 = 4$.

Solución. Aplicando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^2-4(x+h)]-[x^2-4x]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-4x-4h-x^2+4x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2-4h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h-4)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h-4) = 2x-4.$$

Es decir, la derivada de la función real $f(x) = x^2 - 4x$ es la función $f'(x) = 2x - 4$.

Al evaluar la derivada para $x_0 = 4$, se obtiene $f'(4) = 2(4) - 4 = 4$.

Ejemplo 2. (PROBLEMA) La función $P(t) = 55t - 0{,}1t^3$ mide la cantidad de toneladas de cobre que una minera produce al cabo de t horas de operación. Calcular e interpretar $P(3)$ y $P'(3)$.

Solución. Siendo $P(t) = 55t - 0{,}1t^3$, entonces la derivada será:

$$P'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{P(t+h)-P(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{55(t+h)-0{,}1(t+h)^3-(55t-0{,}1t^3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{55t+55h-0{,}1(t^3+3t^2h+3th^2+h^3)-55t+0{,}1t^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{55t+55h-0{,}1t^3-0{,}3t^2h-0{,}3th^2-0{,}1h^3-55t+0{,}1t^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{55h-0{,}3t^2h-0{,}3th^2-0{,}1h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(55-0{,}3t^2-0{,}3th-0{,}1h^2)}{h} = 55-0{,}3t^2$$

Esto significa que la derivada resulta $P'(t) = 55 - 0{,}3t^2$.

Luego, $P(3) = 55(3) - 0{,}1(3)^3 = 162{,}3$ toneladas (cantidad producida).

$P'(3) = 55 - 0{,}3(3)^2 = 52{,}3$ toneladas por hora (velocidad de producción).

Lo cual quiere decir que a la tercera hora de operación, se ha producido 162,3 toneladas de cobre y aumenta a una velocidad de 52,3 toneladas por hora.

OBSERVACIÓN. Más adelante se usarán reglas para derivar las funciones reales de forma más rápida, dichas reglas se pueden obtener desde la definición de derivada con límites.

3.2. PROBLEMAS CLÁSICOS QUE REQUIEREN DE LA DERIVADA. LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

INTERPRETACIONES DE LA DERIVADA.

Dependiendo del campo en donde se esté aplicando, la derivada de una función se puede interpretar de diversas formas: Razón de cambio, rapidez, velocidad instantánea, pendiente de una recta tangente, tasa de crecimiento, variación…

PROBLEMAS CLÁSICOS QUE REQUIEREN DE LA DERIVADA.

Problema 1. Pendiente de una recta tangente.

i) Una curva suave es aquella representada por una función real $f: I \subset R \to R$ que admite *derivada continua* en cada punto del intervalo abierto $I = \langle a; b \rangle$.

ii) La pendiente m de la recta tangente L_T en el punto $(x_0; y_0)$ de una curva representada por la función real $y = f(x)$ es dada por la derivada de dicha función evaluada en la abscisa x_0; es decir, $m = \frac{df(x_0)}{dx}$ o $m = f'(x_0)$.

Este hecho se logra al tomar la pendiente de una recta secante $m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ a una curva suave representada por la función real $y = f(x)$ que pasa por los puntos $(x_0; f(x_0))$ y $(x_1; f(x_1))$ y luego aplicar el límite cuando $x_1 \to x_0$, entonces se consigue obtener la pendiente de la recta tangente en el punto $(x_0; f(x_0))$, esto es, $m = f'(x_0)$.

iii) La recta tangente en el punto $(x_0; y_0)$ es dada por la siguiente ecuación: $L_T: y - y_0 = m(x - x_0)$

Ejemplo 1. Hallar la pendiente de la recta tangente en el punto $(2; y_0)$ de la curva representada por la función $f(x) = \sqrt{6-x}$.

Solución. Se debe hallar la derivada de la función $f(x) = \sqrt{6-x}$.

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{\sqrt{6-(x+h)}-\sqrt{6-x}}{h} = Lím \frac{\sqrt{6-(x+h)}-\sqrt{6-x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{6-(x+h)}+\sqrt{6-x}}{\sqrt{6-(x+h)}+\sqrt{6-x}}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lím} \frac{-h}{h\left(\sqrt{6-(x+h)}+\sqrt{6-x}\right)} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{-1}{\sqrt{6-(x+h)}+\sqrt{6-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{6-x}}$$

Es decir, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{6-x}}$

La pendiente solicitada es $m = \frac{df(2)}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{6-2}} = -\frac{1}{4}$

También $f(2) = \sqrt{6-2} = 2$, es decir, $y_0 = 2$

La recta tangente es dada por $L_T: y - y_0 = m(x - x_0)$, siendo $x_0 = 2$, $y_0 = 2$, y $m = -\frac{1}{4}$

$L_T: y - 2 = -\frac{1}{4}(x-2)$ o $L_T: y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$. (Ver Figura 3.1.).

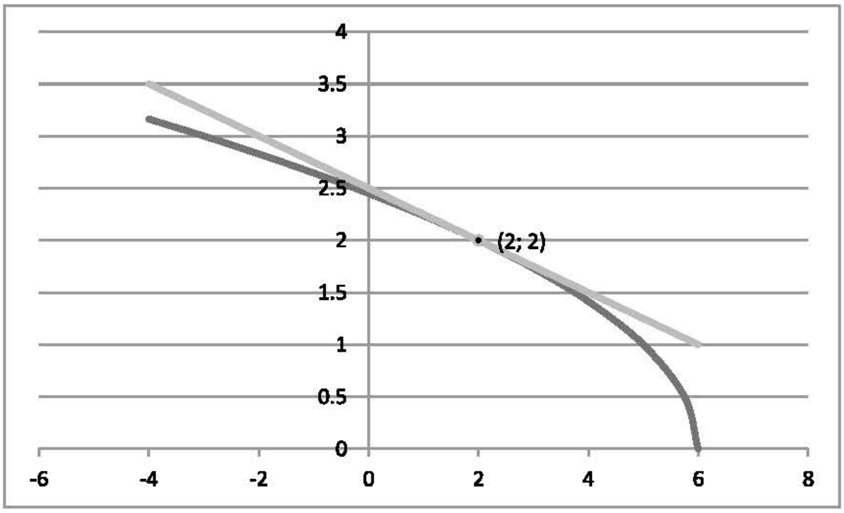


Figura 3.1

Problema 2. Velocidad de un móvil.

Ejemplo 2. (PROBLEMA) La velocidad de un automóvil que arranca del reposo es dada por $V(t) = \frac{100t}{2t+15}$, con V medida en metros por segundo y t el tiempo en segundos. Hallar:

a) Velocidad y aceleración luego de 1 segundo.
b) Velocidad y aceleración a los 5 segundos.
c) Velocidad y aceleración tras 10 segundos.
d) Velocidad y aceleración después de 20 segundos.
e) Calcular e interpretar $V = \lim\limits_{t \to +\infty} V(t)$
f) Calcular e interpretar $A = \lim\limits_{t \to +\infty} A(t)$

Solución.

La aceleración se obtiene como la derivada de la función velocidad: $A(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{1500}{(2t+15)^2}$

a) $V(1) = \frac{100}{17} = 5{,}8823$ m/s. $A(1) = \frac{1500}{(2+15)^2} = \frac{1500}{289} = 5{,}1903$ m/s².

b) $V(5) = \frac{500}{25} = 20$ m/s. $A(5) = \frac{1500}{(10+15)^2} = \frac{1500}{625} = 2{,}4$ m/s².

c) $V(10) = \frac{1000}{35} = 28{,}5714$ m/s. $A(10) = \frac{1500}{(20+15)^2} = \frac{1500}{1225} = 1{,}2244$ m/s².

d) $V(20) = \frac{2000}{55} = 36{,}3636$ m/s. $A(20) = \frac{1500}{(40+15)^2} = \frac{1500}{3025} = 0{,}4958$ m/s².

e) $V = \underset{t\to+\infty}{Lím} \frac{100t}{2t+15} = \underset{t\to+\infty}{Lím}\left(\frac{100}{2+\frac{15}{t}}\right) = 50 \text{ m/s}$.

Significa que a medida que el tiempo crece ilimitadamente, la velocidad aumenta y tiende hasta 50 m/s, como máximo. (Ver Figura 3.2).

f) $A = \underset{t\to+\infty}{Lím}\left(\frac{1500}{(2t+15)^2}\right) = 0 \text{ m/s}^2$.

Lo cual denota que en tanto el tiempo crece ilimitadamente, la aceleración disminuye y tiende a cero. (Ver Figura 3.3.).

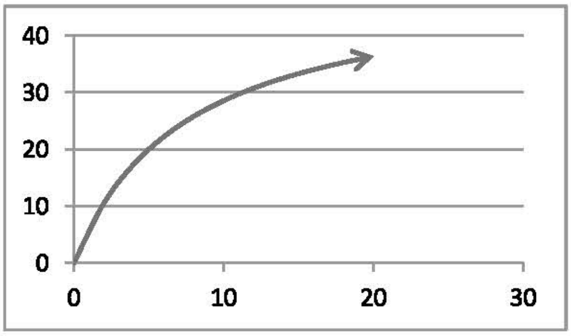


Figura 3.2

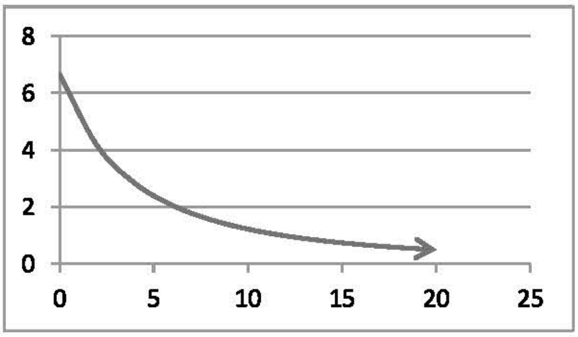


Figura 3.3

LA DERIVADA COMO **RAZÓN** DE CAMBIO INSTANTÁNEO.

Generalmente involucra problemas en donde hay hechos o sucesos que cambian conforme pasa el tiempo.

Para un suceso descrito por la función real $y = f(x)$, sean los instantes x_0 y $x_1 = x_0 + h$, entonces se tiene lo siguiente:

a) La razón de cambio promedio (RCP) del suceso descrito por la función $y = f(x)$, entre los instantes x_0 y x_1 es dada por $RCP = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

b) La razón de cambio instantáneo (RCI) del suceso descrito por la función $y = f(x)$, en cualquier instante x es dada por la derivada de f, así: $RCI = f'(x)$

c) La razón de cambio instantáneo (RCI) del suceso descrito por la función $y = f(x)$, en el instante fijo x_o es dada por la derivada de f evaluada en el punto x_0, así: $RCI = f'(x_0)$

Ejemplo 1. Se mide durante dos horas la concentración de medicamento en la sangre de un paciente, para lo cual se efectúa medidas cada 10 minutos. Las concentraciones son presentadas en la siguiente tabla:

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$C(t)$	0	2	17	37	55	73	89	103	111	113	113	103	68

Donde t es el tiempo en minutos y C es la concentración en miligramos por minuto. Hallar la razón de cambio media de la concentración entre los instantes dados:

a) $t_1 = 10$ y $t_2 = 20$

b) $t_1 = 40$ y $t_2 = 50$

c) $t_1 = 60$ y $t_2 = 70$

d) $t_1 = 110$ y $t_2 = 120$

Solución.

Calculemos la razón de cambio promedio para cada caso que se pide:

a) Para $t_1 = 10$ y $t_2 = 20 \quad \Rightarrow \quad RCP = \frac{C(t_2)-C(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{17-2}{20-10} = 1{,}5$ mg/m.

b) Para $t_1 = 40$ y $t_2 = 50 \quad \Rightarrow \quad RCP = \frac{C(t_2)-C(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{73-55}{50-40} = 1{,}8$ mg/m.

c) Para $t_1 = 60$ y $t_2 = 70 \quad \Rightarrow \quad RCP = \frac{C(t_2)-C(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{103-89}{70-60} = 1{,}4$ mg/m.

d) Para $t_1 = 110$ y $t_2 = 120 \quad \Rightarrow \quad RCP = \frac{C(t_2)-C(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{68-103}{120-110} = -3{,}5$ mg/m.

En los tres primeros resultados observamos que la concentración de medicamento está aumentando (signo +); mientras que en el cuarto resultado la concentración disminuye (signo –).

Ejemplo 2. Un modelo que relaciona aproximadamente el peso de una persona promedio con su altura es $W(t) = 0{,}0005t^3$, donde W es el peso en libras y "t" es la altura en pulgadas.

a) Calcular la razón de cambio promedio del peso W para un cambio de altura de $t_1 = 60$ y $t_2 = 70$ pulgadas.

b) Calcular la razón de cambio instantáneo del peso W con respecto a la altura "t" en $t_0 = 60$ pulgadas.

Solución.

a) Si $t_1 = 60$ pulgadas, entonces $W(t_1) = 0{,}0005(60)^3 = 108$ libras; significa que una persona con 60 pulgadas de talla va a tener un peso de 108 libras.

Si $t_2 = 70$ pulgadas, entonces $W(t_2) = 0{,}0005(70)^3 = 171{,}5$ libras, lo cual implica que una persona con 70 pulgadas de talla va a tener un peso de 171,5 libras.

Entonces la razón de cambio promedio es $RCP = \frac{W(t_2)-W(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{171{,}5-108}{70-60} = 6{,}35$ libras/pulgada. (Ver Figura 3.4).

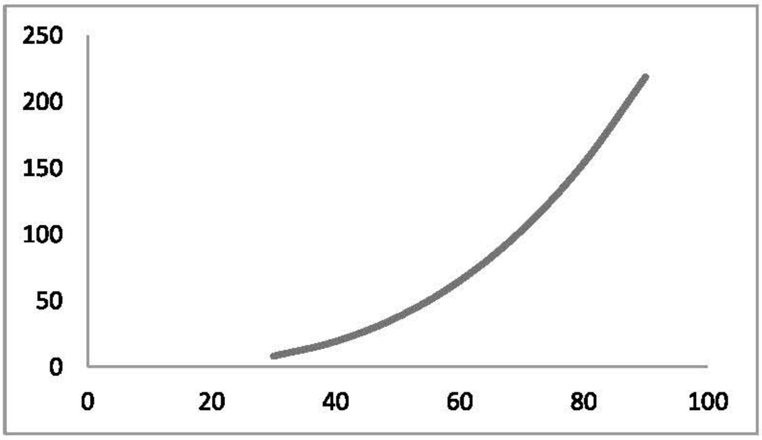


Figura 3.4

b) Con el objetivo de calcular la razón de cambio instantáneo del peso W, necesitamos la derivada de la función W: $W'(t) = 0{,}0015\, t^2$.

Por tanto, la razón de cambio instantáneo para una talla de 60 pulgadas será dada por $W'(60) = 0{,}0015\,(60)^2 = 5{,}4$ libras/pulgada.

Esto implica que si una persona con una talla de 60 pulgadas aumenta su medida en una unidad, entonces su peso se incrementará en 5,4 libras por pulgada. (Ver Figura 3.5).

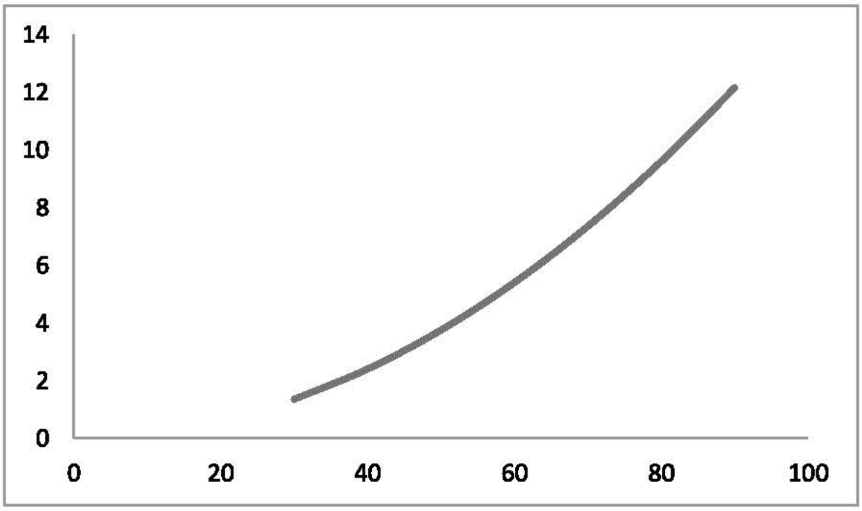


Figura 3.5

Ejemplo 3. Un centro de idiomas encontró que una persona promedio aprende N frases en t horas continuas, calculadas aproximadamente con la fórmula $N(t) = 14t - t^2$, $0 \leq t \leq 7$.

Calcular $N(t)$ y la rapidez $\frac{dN}{dt}$ de aprendizaje en $t = 1$; 2; 3; 4; 5 y 6 horas de aprendizaje. Interprete.

Solución.

Calculamos la derivada de N que representa la rapidez de aprendizaje para cualquier tiempo $0 \leq t \leq 7$: $\quad N'(t) = 14 - 2t$.

Calculamos la rapidez de aprendizaje en los tiempos pedidos:

Si $t = 1$, la persona aprende $N(1) = 13$ frases en una hora con una rapidez de $N'(1) = 12$ palabras por hora.

Si $t = 2$, la persona aprende $N(2) = 24$ frases en dos horas con una rapidez de $N'(2) = 10$ palabras por hora.

Si $t = 3$, la persona aprende $N(3) = 33$ frases en tres horas con una rapidez de $N'(3) = 8$ palabras por hora.

Si $t = 4$, la persona aprende $N(4) = 40$ frases en cuatro horas con una rapidez de $N'(4) = 6$ palabras por hora.

Si $t = 5$, la persona aprende $N(5) = 45$ frases en cinco horas con una rapidez de $N'(5) = 4$ palabras por hora.

Si $t = 6$, la persona aprende $N(6) = 48$ frases en seis horas con una rapidez de $N'(6) = 2$ palabras por hora.

Dando significado al último resultado: *A la sexta hora de aprendizaje la persona aprende 48 frases con una velocidad de 2 frases por hora*, se observa que a medida que el número de horas aumenta, la cantidad de frases aprendidas también se incrementa; sin embargo, disminuye con respecto al tiempo t y la rapidez decae conforme pasa el tiempo.

En la Figura 3.6, se muestra la gráfica del número de frases aprendidas $N(t)$ según el tiempo en horas.

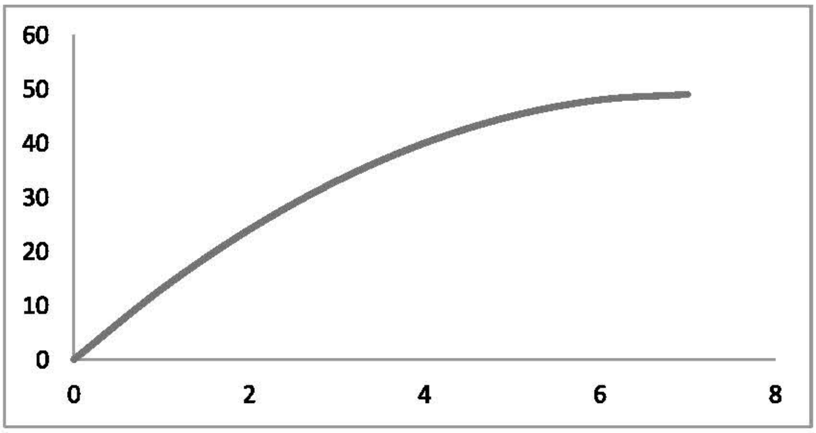


Figura 3.6

Por otro lado, en la Figura 3.7 se muestra la gráfica de la velocidad del número de frases $N'(t)$ según el tiempo en horas.

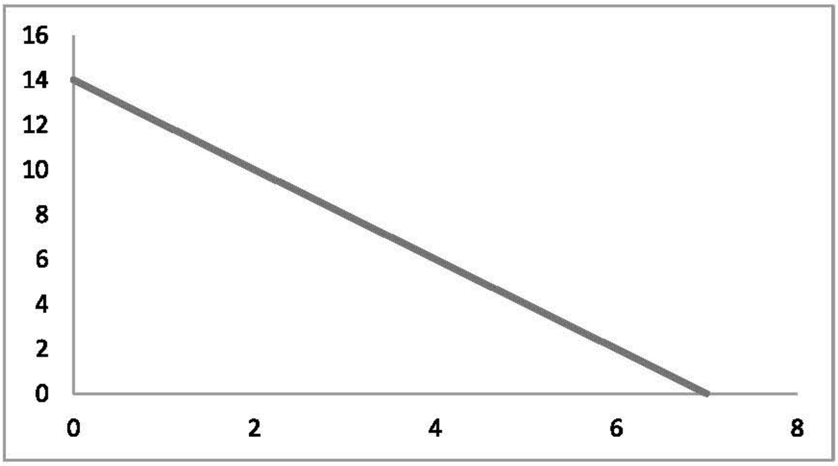


Figura 3.7

3.3. PENDIENTE. RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA

PENDIENTE Y RECTA TANGENTE A LA GRÁFICA DE UNA **FUNCIÓN**. RECTA NORMAL.

Se trata de una aplicación geométrica que consiste en determinar la recta tangente a la gráfica de una curva suave, representada por una función $f: I \subset R \to R$ en cualquier punto x_0 de ella. Esta se determina usando el concepto de derivada de una función real.

DEFINICIÓN 1. La pendiente de la gráfica de una función $y = f(x)$ en el punto x_0 es dada por la derivada de la función f estimada en ese valor x_0. Denotando por m a la pendiente se tendrá que $m = f'(x_0)$.

La pendiente de la recta normal correspondiente al mismo punto x_0 es dada por la inversa negativa de la pendiente de la recta tangente, es decir, $M = -\frac{1}{m}$

DEFINICIÓN 2. La ecuación de *la recta tangente* a la gráfica de una función $y = f(x)$ en el punto $(x_0; y_0)$ con $y_0 = f(x_0)$ es dada por:

$$L_T: y - y_0 = m(x - x_0)$$

DEFINICIÓN 3. La ecuación de *la recta normal* a la gráfica de una función $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0) con $y_0 = f(x_0)$ es dada por

$$L_N: y - y_0 = M(x - x_0)$$

OBSERVACIÓN. Este hecho adquiere relevancia, por ejemplo, en el cálculo de curvas ortogonales, debido a que la recta tangente y la recta normal son asimismo ortogonales.

Ejemplo. Hallar la pendiente de la recta tangente, así como la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ en el punto $x_0 = 1$. Determinar también la pendiente de la recta normal y la ecuación de la recta normal en el mismo punto. Realizar las tres gráficas.

Solución. Siendo $x_0 = 1$, entonces $y_0 = 2$.

La derivada de $f(x) = x^2 + 1$ es $f'(x) = 2x$

La pendiente de la recta tangente es $m = f'(x_0) = f'(1) = 2$

La ecuación de *la recta tangente* obtenida usando $L_T: y - y_0 = m(x - x_0)$ es $L_T: y = 2x$

La pendiente de la recta normal es $M = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$

La ecuación de *la recta norma* obtenida usando $L_N: y - y_0 = M(x - x_0)$ es $L_N: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

La gráfica de la función, de la recta tangente y de la recta normal se muestra en la Figura 3.8.

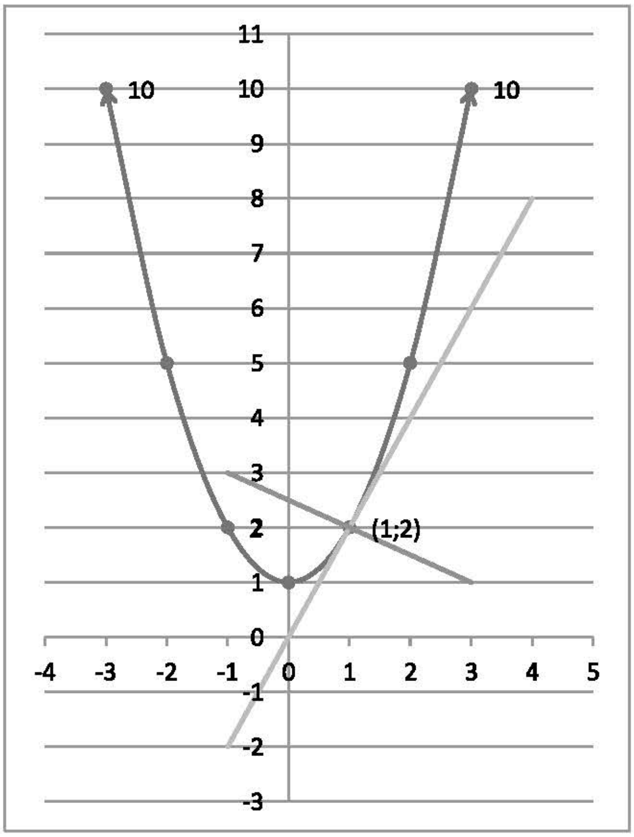


Figura 3.8

3.4. REGLAS DE DERIVACIÓN. OBTENCIÓN DE REGLAS USANDO LA DEFINICIÓN DE DERIVADA

OBSERVACIÓN. En adelante se obtendrán propiedades para calcular en forma directa la derivada de una función real, sin tener que recurrir a la definición dada mediante el límite.

Cada regla puede obtenerse a partir de la definición de derivada de una función real usando cálculos adecuados.

OBTENCIÓN DE ALGUNAS REGLAS DE DERIVACIÓN USANDO LA DEFINICIÓN DE DERIVADA.

Ejemplo 1. Hallar la derivada de la *función constante* $f(x) = C$.

Aplicamos la definición $f'(x) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{C-C}{h} = \underset{h\to 0}{Lím}(0) = 0.$

Por tanto, $f'(x) = 0$

Ejemplo 2. Hallar la derivada de la *función identidad* $f(x) = x$.

Aplicamos la definición $f'(x) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{x+h-x}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} 1 = 1.$

Por tanto, $f'(x) = 1$

Ejemplo 3. Hallar la derivada de la *función cúbica* $f(x) = x^3$.

Aplicamos la definición $f'(x) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

$= \underset{h\to 0}{Lím} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$

$= \underset{h\to 0}{Lím}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$

Por tanto, $f'(x) = 3x^2$

Ejemplo 4. Hallar la derivada de la *suma de funciones* $(f + g)(x)$.

Aplicamos la definición $(f + g)'(x) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$

$= \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}$

$= \underset{h\to 0}{Lím} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \underset{h\to 0}{Lím} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$

Por tanto, $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Ejemplo 5. Hallar la derivada del *producto de dos funciones* $(f \cdot g)(x)$.

Aplicamos la definición $(f \cdot g)'(x) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)[f(x+h).f(x)]+f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h}$

$= \left(\lim_{h\to 0} g(x+h)\right)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \left(\lim_{h\to 0} f(x)\right)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$= g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Por tanto, $(f\cdot g)'(x) = g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Ejemplo 6. Hallar la derivada de la *función exponencial* $f(x) = e^{ax}$.

Aplicamos la definición $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{a(x+h)}-e^{ax}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{ax}e^{ah}-e^{ax}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{ax}(e^{ah}-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{ah}-1}{h}$

Cambio de variable: Sea $e^{ah}-1=t$ entonces $e^{ah}=t+1$, además si $h\to 0 \Rightarrow t\to 0$.

Aplicamos Ln para despejar h:

$Ln(e^{ah}) = Ln\,(t+1) \quad \rightarrow \quad ah(Ln\, e) = Ln\,(t+1) \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{a}Ln\,(t+1)$

En el límite $\lim_{h\to 0}\frac{e^{ah}-1}{h} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{a}Ln(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{a}{\frac{Ln(t+1)}{t}} = \lim_{t\to 0}\frac{a}{Ln(t+1)^{1/t}} = \frac{a}{Ln\left[\lim_{t\to 0}(t+1)^{1/t}\right]} = \frac{a}{Ln\, e} = a.$

Por tanto, $f'(x) = e^{ax}\cdot \lim_{h\to 0}\frac{e^{ah}-1}{h} = e^{ah}(a) = a\cdot e^{ax}$

REGLAS DE **DERIVACIÓN**.

Los anteriores límites pueden formalizarse como reglas para calcular las derivadas de una función, puesto que cada límite abarca una serie de casos especificados por la forma como se exprese.

Todas las reglas de derivación pueden obtenerse a partir de la definición de derivada, tal como se ha mostrado en ejemplos anteriores; no obstante, algunas reglas requieren de algunos artificios adecuados.

Veamos una serie de reglas de derivación que permiten el cálculo de la derivada de las funciones reales, de manera inmediata. Ya se presentarán ejemplos más adelante.

a) Reglas básicas de derivación.

FUNCIÓN	SU DERIVADA
$f(x) = C$, C=Const.	$f'(x) = 0$

$f(x) = x^n, n \in R$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = C\, g(x)$, C=Const.	$f'(x) = C\, g'(x)$
$f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$
$f(x) = g(x) - h(x)$	$f'(x) = g'(x) - h'(x)$
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
$f(x) = g(x) \cdot h(x) \cdot k(x)$	$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) \cdot k(x) + g(x) \cdot h'(x) \cdot k(x) + g(x) \cdot h(x) \cdot k'(x)$
$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$h'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$
$f(x) = [g(x)]^n$	$f'(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$
$f(x) = g[h(x)]$	$f'(x) = g'[h(x)] \cdot h'(x)$

b) Derivada de las funciones exponenciales y logarítmicas.

FUNCIÓN	SU DERIVADA
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x) = a^x$	$f(x) = Ln(a) \cdot a^x$
$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = Ln(a) \cdot a^{g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x) = Ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = Ln[g(x)]$	$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x) = Log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot Log_a(e)$
$f(x) = Log_a[g(x)]$	$h'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot Log_a(e) \cdot g'(x)$

c) Derivada de las funciones trigonométricas.

FUNCIÓN	SU DERIVADA
$f(x) = Sen(x)$	$f'(x) = Cos(x)$

$f(x) = Sen[g(x)]$	$f'(x) = Cos[g(x)]{\cdot}g'(x)$
$f(x) = Cos(x)$	$f'(x) = -Sen(x)$
$f(x) = Cos[g(x)]$	$f'(x) = -Sen[g(x)]{\cdot}g'(x)$
$f(x) = Tan(x)$	$f'(x) = Sec^2(x)$
$f(x) = Tan[g(x)]$	$f'(x) = Sec^2[g(x)]{\cdot}g'(x)$
$f(x) = Cot(x)$	$f'(x) = -Csc(x)$
$f(x) = Cot[g(x)]$	$f'(x) = -Csc[g(x)]{\cdot}g'(x)$
$f(x) = Sec(x)$	$f'(x) = Sec(x) \cdot Tan(x)$
$f(x) = Sec[g(x)]$	$f'(x) = Sec[g(x)]{\cdot}Tan[g(x)]{\cdot}g'(x)$
$f(x) = Csc(x)$	$f'(x) = -Csc(x) \cdot Cot(x)$
$f(x) = Csc[g(x)]$	$f'(x) = -Csc[g(x)]{\cdot}Cot[g(x)]{\cdot}g'(x)$

d) Derivada de las funciones hiperbólicas.

FUNCIÓN	SU DERIVADA
$f(x) = Senh(x)$	$f'(x) = Cosh(x)$
$f(x) = Senh[g(x)]$	$f'(x) = Cosh[g(x)] \cdot g'(x)$
$f(x) = Cosh(x)$	$f(x) = Senh(x)$
$f(x) = Cosh[g(x)]$	$f'(x) = Senh[g(x)] \cdot g'(x)$
$f(x) = Tanh(x)$	$f'(x) = Sech^2(x)$
$f(x) = Tanh[fgx)]$	$f'(x) = Sech^2[g(x)] \cdot g'(x)$

$f(x) = Coth(\text{x})$	$f'(x) = -Csch(x)$
$f(x) = Coth[g(x)]$	$f'(x) = -Csch[g(x)] \cdot g'(x)$
$f(x) = Sech(x)$	$f'(x) = -Sech(x) \cdot Tanh(x)$
$f(x) = Sech[g(x)]$	$f'(x) = -Sech[g(x)] \cdot Tanh[g(x)] \cdot g'(x)$
$f(x) = Csch(x)$	$f'(x) = -Csch(x) \cdot Coth(x)$
$f(x) = Csch[g(x)]$	$f'(x) = -Csch[g(x)] \cdot Coth[g(x)] \cdot g'(x)$

3.5. CÁLCULO DE LA DERIVADA DE DIVERSAS FUNCIONES REALES

Ejemplo 1. Véase la derivada de las siguientes funciones:

Función	Su derivada
a) $f(x) = 3x^2 - 2x^{-2} + x$	$f'(x) = 6x + 4x^{-3} + 1$
b) $g(x) = x^{3/2} + x^{1/3}$	$g'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{1}{3}x^{-2/3}$
c) $h(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 3x^{-2} - 4x^{-1/2}$	$h'(x) = -6x^{-3} + 2x^{-3/2}$
d) $f(x) = Sen\,x - 4x$	$f'(x) = Cosx - 4$
e) $f(x) = x^2 - Ln(x)$	$f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$
f) $g(x) = e^x + x^3 - 2^x$	$g'(x) = e^x + 3x^2 - Ln(2)2^x$
g) $g(x) = x^{-1} + x^{3/2} - \text{Tan}\,(x)$	$g'(x) = -x^{-2} + \frac{3}{2}x^{1/2} - Sec^2 x$

Ejemplo 2. Véase la derivada de las siguientes funciones. Productos:

a) $f(x) = x^2 Ln(x)$

$$f'(x) = [x^2]' Ln(x) + x^2[Ln(x)]' = 2xLn(x) + x^2\frac{1}{x} \quad \Rightarrow f'(x) = 2xLn(x) + x$$

b) $f(x) = e^x Ln(x)$

$f'(x) = [e^x]'Ln(x) + e^x[Ln(x)]' = e^x Ln(x) + e^x \frac{1}{x} \quad \Rightarrow f'(x) = e^x Ln(x) + \frac{e^x}{x}$

c) $f(x) = e^x Sen(x)$

$f'(x) = [e^x]'Sen(x) + e^x[Sen(x)]' = e^x Sen(x) + e^x Cos(x) \Rightarrow f'(x) = e^x[Sen(x) + Cos(x)]$

d) $f(x) = x^3 Tan(x)$

$f'(x) = [x^3]'Tan(x) + x^3[Tan(x)]' = 3x^2 Tan(x) + x^3 Sec^2 x$

$\Rightarrow f'(x) = x^2[3Tan(x) + xSec^2(x)]$

e) $f(x) = x^3 e^x$

$f'(x) = [x^3]'e^x + x^3[e^x]' = 3x^2 e^x + x^3 e^x \quad \Rightarrow f'(x) = x^2 e^x(3 + x)$

f) $f(x) = (x^2 - 3x)e^x$

$f'(x) = [x^2 - 3x]'e^x + (x^2 - 3x)[e^x]' = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x)e^x \Rightarrow f'(x) = e^x(x^2 - x - 3)$

Ejemplo 3. Véase la derivada de las siguientes funciones. Cocientes:

a) $f(x) = \frac{3x-7}{x+3}$

$f'(x) = \frac{(x+3)[3x-7]'-(3x-7)[x+3]'}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)(3)-(3x-7)(1)}{(x+3)^2} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{16}{(x+3)^2}$

b) $f(x) = \frac{x^2+5}{2x-4}$

$f'(x) = \frac{(2x-4)[x^2+5]'-(x^2+5)[2x-4]'}{(2x-4)^2} = \frac{(2x-4)(2x)-(x^2+5)(2)}{(2x-4)^2} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2-8x-10}{(2x-4)^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{(x^2+1)[x^2+x+1]'-(x^2+x+1)[x^2+1]'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)(2x+1)-(x^2+x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

d) $f(x) = \frac{x^2+Sen(x)}{x^2-2x}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-2x)[x^2+Sen(x)]'-(x^2+Sen(x))[x^2-2x]'}{(x^2-2x)^2} = \frac{(x^2-2x)[2x+Cos(x)]-[x^2+Sen(x)](2x-2)}{(x^2-2x)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+xCox(x)[x-2]-2Sen(x)[x-1]}{(x^2-2x)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-2x^2+x(x-2)Cox(x)-2(x-1)Sen(x)}{(x^2-2x)^2}$$

Ejemplo 4. Véase la derivada de las siguientes funciones. Funciones con exponente:

a) $f(x) = (2x-5)^4$

$f'(x) = 4(2x-5)^3[2x-5]' = 4(2x-5)^3(2) \quad \Rightarrow f'(x) = 8(2x-5)^3$

b) $f(x) = (x^2-3)^{-2}$

$f'(x) = -2(x^2-3)^{-3}[x^2-3]' = -2(x^2-3)^{-3}(2x) \quad \Rightarrow f'(x) = -4x(2x-3)^{-3}$

c) $f(x) = \sqrt{2-3x} = (2-3x)^{1/2}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(2-3x)^{-1/2}[2-3x]' = \frac{1}{2}(2-3x)^{-1/2}(-3) = \frac{-3}{2(2-3x)^{1/2}} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$

d) $f(x) = (e^x-x^2)^{3/2}$

$f'(x) = \frac{3}{2}(e^x-x^2)^{1/2}[e^x-x^2]' = \frac{3}{2}(e^x-x^2)^{1/2}(e^x-2x) \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}(e^x-2x)\sqrt{e^x-x^2}$

e) $f(x) = Cos^3x = [Cos\ x]^3$

$f'(x) = 3Cos^2x[Cos\ x]' = 3Cos^2x\,(-Sen\ x) \quad \Rightarrow f'(x) = -3Sen(x)Cos^2x$

g) $f(x) = Ln^4x = [Ln\ x]^4$

$f'(x) = 4\,Ln^3x[Ln\ x]' = 4\,Ln^3x\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{x}Ln^3x$

Ejemplo 5. Véase la derivada de las siguientes funciones. Casos diversos:

a) $f(x) = xSenh(x)$

$f'(x) = [x]'Senh(x) + x[Senh(x)]' = Senh(x) + xCosh(x) \quad \Rightarrow f'(x) = Senh(x) + xCosh(x)$

b) $f(x) = ArcSen(3x)$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}[3x]' = \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}} \qquad \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$

c) $f(x) = ArcTan(x^2)$

$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2)^2}[x^2]' = \frac{2x}{1+x^4} \qquad \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$

d) $f(x) = 3^{1-x^2}$

$f'(x) = Ln(3) \cdot 3^{1-x^2}[1-x^2]' = Ln(3) \cdot 3^{1-x^2}(-2x) \qquad \Rightarrow f'(x) = -Ln(3) \cdot (2x) \cdot 3^{1-x^2}$

d) $f(x) = (Sen\,x)^{1+x^2}$

$f'(x) = (1+x^2)(Sen\,x)^{(1+x^2-1)}[Sen\,x]' + (Sen\,x)^{1+x^2}Ln(Sen\,x)[1+x^2]'$

$f'(x) = (1+x^2)(Sen\,x)^{x^2}Cos(x) + (Sen\,x)^{1+x^2}Ln(Sen\,x)(2x)$

$\Rightarrow f'(x) = (1+x^2)(Sen\,x)^{x^2}Cos(x) + 2x(Sen\,x)^{1+x^2}Ln(Sen\,x)$

Ejemplo 6. (Problema sobre Contaminación) Un pequeño lago de un campo vacacional llegó a contaminarse con bacterias patógenas debido a la filtración excesiva de la fosa séptica. Después de tratar el lago con un bactericida, el departamento de salud pública estimó que la concentración de bacterias (número por cm^3) después de "t" días se calcula mediante la función $C(t) = 500(8-t)^2$, $0 \leq t \leq 7$.

a) Calcular $C'(t)$ usando regla general de potencias.

b) Calcular $C(1)$ con $C'(1)$; $C(3)$ con $C'(3)$ y $C(6)$ con $C'(6)$.

Solución.

a) La variación de la concentración de bacterias es dada por la derivada de la función de concentración $C(t)$: $C'(t) = 1000\,(t-8)$

b) Calculamos lo que se pide:

$C(1) = 24500$ y $C'(1) = -7000$: Se entiende que al finalizar el 1er. día de tratamiento hay 24 500 bacterias, las cuales están disminuyendo cada día a una velocidad de 7 000 bacterias por cm^3.

$C(3) = 12\,500$ y $C'(3) = -5000$: Significa que al finalizar el 3er. día de tratamiento hay 12 500 bacterias, las que están disminuyendo cada día a una velocidad de 5 000 bacterias por cm^3.

$C(6) = 2\,000$ y $C'(6) = -2\,000$: Quiere decir que al finalizar el 6to. día de tratamiento hay 2 000 bacterias y están disminuyendo cada día a una velocidad de 2 000 bacterias por cm^3.

Nota. Se deduce que conforme transcurre el tiempo, la eliminación de bacterias por día decrece, así también lo hace su velocidad.

En la Figura 3.9, se muestra la gráfica de $C(x)$.

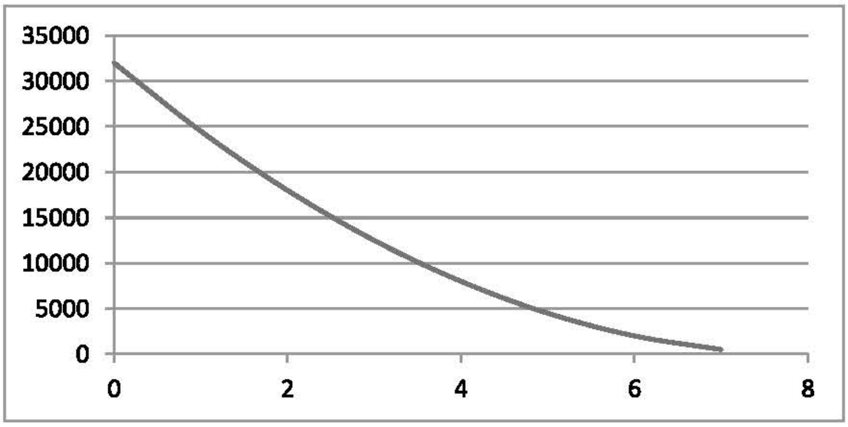


Figura 3.9

Por otro lado, la gráfica de $C'(x)$ aparece en la Figura 3.10.

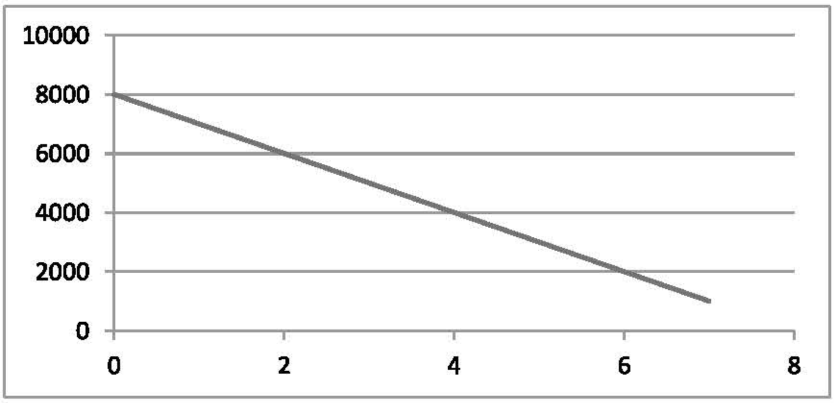


Figura 3.10

3.6. LA REGLA DE LA CADENA O DERIVADA DE FUNCIONES COMPUESTAS

La regla de la cadena para calcular la derivada de las funciones compuestas se establece según las composiciones que se formen:

a) Si $f(x) = (u \ o \ v)(x) = u[v(x)]$, la derivada es $f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)$

b) Si $f(x) = (u \ o \ v \ o \ w)(x) = u\{v[w(x)]\}$, la derivada $f'(x) = u'\{v[w(x)]\} \cdot v'[w(x)] \cdot w'(x)$

c) Sucesivamente se puede tener más composiciones de funciones con su respectiva derivada.

Ejemplo 1. Se tiene la derivada de la composición de dos funciones donde se aplicará la regla $f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)$.

a) $f(x) = Sen(2x-3)$

Su derivada es $f'(x) = Cos(2x-3)[2x-3]' = Cos(2x-3)(2) \quad \Rightarrow f'(x) = 2Cos(2x-3)$

b) $f(x) = Cos(x^2-1)$

Su derivada es $f'(x) = -Sen(x^2-1)[x^2-1]' = -Sen(x^2-1)(2x)$

$\Rightarrow f'(x) = -2xSen(x^2-1)$

c) $f(x) = e^{x^2+4x-1}$

Su derivada es $f'(x) = e^{x^2+4x-1}[x^2+4x-1]' = e^{x^2+4x-1}(2x+4)$

$\Rightarrow f'(x) = (2x+4)e^{x^2+4x-1}$

d) $f(x) = Ln(27-x^3)$

Su derivada es $f'(x) = \frac{1}{27-x^3}[27-x^3]' = \frac{-3x^2}{27-x^3} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{-3x^2}{27-x^3}$

e) $f(x) = Sen(1-x^2)$

Su derivada resulta $f'(x) = Cos(1-x^2) \cdot (1-x^2)' = Cos(1-x^2)(-2x) = -2xCos(1-x^2)$

$\Rightarrow f'(x) = -2xCos(1-x^2)$

f) $f(x) = Ln(3x^2-6x)$

Su derivada resulta $f'(x) = \frac{1}{3x^2-6x}(3x^2-6x)' = \frac{6x-6}{3x^2-6x} = \frac{2x-2}{x^2-2x} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x}$

g) $f(x) = e^{1-4x}$

Su derivada es $f'(x) = e^{1-4x}(1-4x)' = e^{1-4x}(-4) = -4e^{1-4x}$ $\Rightarrow f'(x) = -4e^{1-4x}$

h) $f(x) = Sen\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$

Es su derivada: $f'(x) = Cos\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)' = Cos\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) \cdot \frac{(x-1)(x^2+1)' - (x^2+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$= Cos\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) \cdot \frac{(x-1)(2x)-(x^2+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} Cos\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} Cos\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$

i) $g(t) = \sqrt{8-5t} = (8-5t)^{1/2}$

Su derivada es $g'(t) = \frac{1}{2}(8-5t)^{-\frac{1}{2}}(-5) = -\frac{5}{2}(8-5t)^{-1/2}$ $\Rightarrow$ $g'(t) = -\frac{5}{2}(8-5t)^{-1/2}$

j) $f(x) = Sen(3-2x) + Tan(x^2)$

Es su derivada: $f'(x) = -2Cos(3-2x) + 2x\, Sec^2(x^2)$

k) $g(x) = ln(7x) - 3e^{7x} + 2^x$

Su derivada es: $g'(x) = \frac{1}{x} - 3e^{7x}(7) + (Ln\ 2)\ 2^x = \frac{1}{x} - 21e^{7x} + (Ln\ 2)\ 2^x$

l) $h(x) = Sen(3x) \cdot Sec(x^2)$

La derivada resulta $h'(x) = [Sen(3x)]' \cdot \left(Sec(x^2)\right) + Sen(x) \cdot [Sec(x^2)]'$

$= Cos(3x)[3x]' \cdot (Sec(x^2)) + Sen(3x).[Sec(x^2) \cdot Tan(x^2)] \cdot [x^2]'$

$= Cos(3x)(3) \cdot (Sec(x^2)) + Sen(3x).[Sec(x^2) \cdot Tan(x^2)] \cdot (2x)$

$\Rightarrow f'(x) = 3Cos(3x) \cdot \left(Sec(x^2)\right) + 2x \cdot Sen(3x) \cdot Sec(x^2) \cdot Tan(x^2)$

m) $f(x) = Cosh(x - x^2)$

Su derivada es $h'(x) = Senh(x-x^2)[x-x^2]' = Senh(x-x^2)(1-2x)$

$\Rightarrow f'(x) = (1-2x)Senh(x-x^2)$

Ejemplo 2. Se muestra la derivada de la composición de tres funciones, donde se aplicará la siguiente regla: $f'(x) = u'\{v[w(x)]\} \cdot v'[w(x)] \cdot w'(x)$.

a) $f(x) = Cos^3(x^2)$

Su derivada es $f'(x) = 3Cos^2(x^2) \cdot [Cos\ (x^2)]' = 3\ Cos^2(x^2)(-Sen\ x^2) \cdot [x^2]'$

$= 3\ Cos^2(x^2)(-Sen\ x^2) \cdot (2x) = -6x\ Cos^2(x^2)\ Sen(x^2)$

b) $f(x) = Ln\left[Sen(\sqrt{x})\right]$

Es la derivada: $f'(x) = \frac{1}{Sen(\sqrt{x})}\left[Sen(\sqrt{x})\right]' = \frac{1}{Sen(\sqrt{x})}\left[Cos(\sqrt{x})\right] \cdot (x^{1/2})'$

$= \frac{1}{Sen(\sqrt{x})}\left[Cos(\sqrt{x})\right] \cdot (\frac{1}{2}x^{-1/2}) = \frac{x^{-1/2}}{2\ Sen(\sqrt{x})}\left[Cos(\sqrt{x})\right]$

c) $f(x) = \sqrt{e^{Sen\ x}} = (e^{Sen\ x})^{1/2}$.

Su derivada es $f'(x) = \frac{1}{2}(e^{Sen\ x})^{-1/2}.\ [e^{Sen\ x}]' = \frac{1}{2}(e^{Sen\ x})^{-1/2}.\ (e^{Sen\ x}) \cdot [Sen\ x]'$

$= \frac{1}{2}(e^{Sen\ x})^{-1/2}.\ (e^{Sen\ x})Cos\ x = \frac{1}{2}(e^{Sen\ x})^{1/2}Cos\ x$.

d) $f(x) = Sen^2(x^2 - 2x)$

$f'(x) = 2Sen(x^2 - 2x)[Sen(x^2 - 2x)]' = 2Sen(x^2 - 2x)[Cos(x^2 - 2x)][x^2 - 2x]'$

$= 2Sen(x^2 - 2x)[Cos(x^2 - 2x)](2x - 2)$

$\Rightarrow f'(x) = 4(x - 1)Sen(x^2 - 2x)Cos(x^2 - 2x)$

e) $f(x) = Ln^2(x^2 + 3x)$

$f'(x) = 2Ln(x^2 + 3x)[Ln(x^2 + 3x)]' = 2Ln(x^2 + 3x)\frac{1}{x^2+3x}[x^2 + 3x]'$

$= 2Ln(x^2 + 3x)\frac{1}{x^2+3x}(2x + 3)$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{2(2x+3)}{x^2+3x}Ln(x^2 + 3x)$

f) $h(x) = \sqrt{4 + Cos^3(x)} = [4 + Cos^3 x]^{1/2}$

$h'(x) = \frac{1}{2}(4 + Cos^3x)^{-1/2}[4 + Cos^3x]' = \frac{1}{2}(4 + Cos^3x)^{-1/2}(3\ Cos^2x)[Cos\ x]'$

$= \frac{3}{2}(4 + Cos^3x)^{-1/2}(3\ Cos^2x)(-Sen\ x)$ $\Rightarrow f'(x) = -\frac{3Sen\ x \cdot Cos^2x}{2\sqrt{4+Cos^3x}}$

g) $g(x) = e^{\sqrt{1-Sen\ x}}$

$h'(x) = e^{\sqrt{1-Sen\ x}}[(1 - Sen\ x)^{1/2}]' = e^{\sqrt{1-Sen\ x}}\frac{1}{2}[1 - Sen\ x]^{-1/2}[1 - Sen\ x]'$

$= e^{\sqrt{1-Sen\ x}}\frac{1}{2}[1 - Sen\ x]^{-1/2}(-Cos\ x) =-(Cos\ x)e^{\sqrt{1-Sen\ x}} \cdot \frac{1}{2}[1 - Sen\ x]^{-1/2}$

h) $f(x) = Sen^3(x^2 - x) = [Sen(x^2 - x)]^3$

$f'(x) = 3Sen^2(x^2 - x)[Sen(x^2 - x)]' = 3Sen^2(x^2 - x)Cos(x^2 - x)[x^2 - x]'$

$=3Sen^2(x^2 - x)Cos(x^2 - x)(2x - 1)$

$\Rightarrow f'(x) = 3(2x - 1)Sen^2(x^2 - x)Cos(x^2 - x)$

Ejemplo 3. Véase la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2Tan(x^2 + 1)$

$f'(x) = [x^2]'\,\mathrm{Tan}(x^2 + 1) + x^2[Tan(x^2 + 1)]' = 2x\,\mathrm{Tan}(x^2 + 1) + x^2Sec^2(x^2 + 1)[x^2 + 1]'$

$= 2x\,\mathrm{Tan}(x^2 + 1) + x^2Sec^2(x^2 + 1)(2x) = 2x\,\mathrm{Tan}(x^2 + 1) + 2x^3Sec^2(x^2 + 1)$

$\Rightarrow f'(x) = 2x\,\mathrm{Tan}(x^2 + 1) + 2x^3Sec^2(x^2 + 1)$

b) $f(x) = e^{2x}Ln(x^2 + 3)$

$f'(x) = [e^{2x}]'Ln(x^2 + 3) + e^{2x}[Ln(x^2 + 3)]' = e^{2x}[2x]'Ln(x^2 + 3) + e^{2x}\frac{1}{x^2+3}[x^2 + 3]'$

$= e^{2x}(2)Ln(x^2 + 3) + e^{2x}\frac{1}{x^2+3}(2x) = 2e^{2x}\left[Ln(x^2 + 3) + \frac{x}{x^2+3}\right]$

$\Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}\left[Ln(x^2 + 3) + \frac{x}{x^2+3}\right]$

c) $f(x) = \frac{Sen(x^2+x)}{2x+5}$

$f'(x) = \frac{(2x+5)[Sen(x^2+x)]' - Sen(x^2+x)[2x+5]'}{(2x+5)^2} = \frac{(2x+5)Cos(x^2+x)[x^2+x]' - Sen(x^2+x)(2)}{(2x+5)^2}$

$$= \frac{(2x+5)Cos(x^2+x)(2x+1)-Sen(x^2+x)(2)}{(2x+5)^2} = \frac{(4x^2+12x+5)Cos(x^2+x)-2Sen(x^2+x)}{(2x+5)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(4x^2+12x+5)Cos(x^2+x)-2Sen(x^2+x)}{(2x+5)^2}.$$

d) $f(x) = \frac{Ln(5x)}{2x-3}$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)[Ln(5x)]'-Ln(5x)[2x-3]'}{(2x-3)^2} = \frac{(2x-3)[Ln(5x)]'}{(2x-3)^2} - \frac{Ln(5x)\cdot(2)}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2x-3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{2\,Ln(5x)}{(2x-3)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x(2x-3)} - \frac{2\,Ln(5x)}{(2x-3)^2}$$

3.7. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Dada una función real de variable real $y = f(x)$.

Si $y = f(x)$ es diferenciable en $x \in Dom(f)$, entonces su derivada de orden 1 es $y' = f'(x)$

Si $y' = f'(x)$ es diferenciable en $x \in Dom(f')$, entonces su derivada de orden 2 es $y'' = f''(x)$

Si $y'' = f''(x)$ es diferenciable en $x \in Dom(f'')$, entonces su derivada de orden 3 es $y''' = f'''(x)$

Si $y''' = f'''(x)$ es diferenciable en $x \in Dom(f''')$, entonces su derivada de orden 4 es $y^{(4)} = f^{(4)}(x)$

Así sucesivamente se obtiene la derivada de orden n de una función real, la cual es representada por $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$

A partir de la derivada de orden dos, estas se conocen como derivadas de orden superior (superior a uno).

Ejemplo 1. Se muestra a continuación derivadas de distintos órdenes:

a) Derivada de orden 2 de $f(x) = 4 - 5x + x^2$,

La derivada de orden 1 es $f'(x) = -5 + 2x$

La derivada de orden 2 es $f''(x) = 2$

b) Derivada de orden 2 de $f(x) = (x^2 - 7)^3$

La derivada de orden 1 es $f'(x) = 3(x^2-7)^2 \cdot [x^2-7]' = 3(x^2-7)^2(2x) = 6x(x^2-7)^2$

La derivada de orden 2 es $f''(x) = [6x]' \cdot (x^2-7)^2 + (6x) \cdot [(x^2-7)^2]'$

$= 6(x^2-7)^2 + (6x)2(x^2-7)[x^2-7]' = 6(x^2-7)^2 + (6x)2(x^2-7)(2x)$

$\Rightarrow f''(x) = 6(x^2-7)(5x^2-7)$.

c) Derivada de orden 2 de $f(x) = x^3e^x$.

La derivada de orden 1 es $f'(x) = [x^3]' \cdot (e^x) + (x^3) \cdot [e^x]' = 3x^2e^x + x^3e^x = (3x^2+x^3)e^x$

La derivada de orden 2 es $f''(x) = [3x^2+x^3]' \cdot (e^x) + (3x^2+x^3) \cdot [e^x]'$

$= (6x+3x^2)e^x + (3x^2+x^3)e^x = (6x+6x^2+x^3)e^x$

d) Derivada de orden 4 de $f(x) = Ln\, x$

La derivada de orden 1 es $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

La derivada de orden 2 es $f''(x) = -x^{-2}$

La derivada de orden 3 es $f'''(x) = 2x^{-3}$

La derivada de orden 4 es $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$

Ejemplo 2. Hallar la derivada hasta el orden que se indica en cada caso.

a) Hallar la derivada de orden 3 de la función $f(x) = 2x^3 - Sen(x)$.

Solución.

Derivada de orden 1: $f'(x) = 6x^2 - Cos(x)$

Derivada de orden 2: $f''(x) = 12x + Sen(x)$

Derivada de orden 3: $f'''(x) = 12 + Cos(x)$.

b) Hallar la derivada de orden 2 de la función $g(x) = x^3\, Lnx$.

Solución. Aplicamos reiteradamente la regla del producto a la función dada:

Derivada de orden 1: $g'(x) = [x^3]'(Lnx) + (x^3)[Ln\, x]' = 3x^2Ln\, x + (x^3)\frac{1}{x} = 3x^2Ln\, x + x^2$

Derivada de orden 2: $g''(x) = [3x^2]'(Lnx) + (3x^2)[Ln\,x]' + 2x = 6x\,Ln\,x + (3x^2)\frac{1}{x} + 2x$

$= 6x\,Ln\,x + 3x + 2x = 6x\,Ln\,x + 5x$.

c) Hallar la derivada de orden 4 de la función $h(x) = 16(x - 1)^{1/2}$.

Solución. Aplicamos regla general de potencias, repetidas veces:

Derivada de orden 1: $h'(x) = 8(x-1)^{-1/2}$

Derivada de orden 2: $h''(x) = -4(x-1)^{-3/2}$

Derivada de orden 3: $h'''(x) = 6(x-1)^{-5/2}$

Derivada de orden 4: $h^{(4)}(x) = -15(x-1)^{-7/2}$

d) Hallar la derivada de orden 2 de la función $f(s) = \frac{s}{s^2-1}$

Solución. Aplicamos regla del cociente dos veces:

Derivada de orden 1: $f'(s) = -\frac{(s^2+1)}{(s^2-1)^2}$

Derivada de orden 2: $f''(s) = \frac{2s(s^2+3)}{(s^2-1)^3}$

Ejemplo 3. Halle según se pide:

a) Siendo $y = x^3$, hallar $y'' - 3y' + 2$.

Solución. Se necesita $y' = 3x^2$; $y'' = 6x$.

Entonces, $y'' - 3y' + 2 = 6x - 3(3x^2) + 2 = 2 + 6x - 9x^2$.

b) Siendo $y = e^{-x}$, hallar $xy'' + x^2y' - x^3y$.

Solución. Se necesita $y' = -e^{-x}$; $y'' = e^{-x}$,

Entonces: $xy'' + x^2y' - x^3 = x(e^{-x}) + x^2(-e^{-x}) - x^3(e^{-x}) = xe^{-x}(1 - x - x^2)$

c) Siendo $y = Ln(x)$, hallar $y'' - (y')^2 + 2y$.

Solución. Se necesita $y' = \frac{1}{x}$; $y'' = \frac{-1}{x^2}$, Entonces, $y'' - (y')^2 + 2y = \frac{-1}{x^2} - \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2Ln(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + 2Ln(x) = 2Ln(x) - \frac{2}{x^2}$.

Ejemplo 4. El Polinomio de Taylor. Dada la función real de variable $y = f(x)$ que acepta derivada de orden n en una vecindad del punto x_0, se puede encontrar el Polinomio de Taylor con la forma siguiente:

$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(n)}(x)(x-x_0)^n}{n!}$, siendo $f^{(n)}(x)$ la derivada de orden n de la función real $f(x)$.

a) Hallar el polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$ para la función $f(x) = e^x$.

$$f(x) = e^x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$, para todo $x \epsilon R$

b) Hallar el polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$ para la función $f(x) = Ln(1 + x)$.

$$f(x) = Ln\,(1 + x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

$f(x) = Ln\,(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \ldots$, con $-1 < x \leq 1$

c) Hallar el polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$ para la función $f(x) = Cos(x)$.

$$f(x) = Cos\,x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

$f(x) = Cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$, para todo $x \epsilon R$

3.8. DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Una *función explicita* es la que tiene despejada la variable dependiente $y = f(x)$. Las mismas que hasta ahora se han venido trabajando.

Una *función implícita* es aquella que no tiene despejada la variable dependiente $y = f(x)$, la cual es dada con la forma de una ecuación en las variables x e y. Esta puede expresarse en la forma $F(x; y) = 0$.

Sin embargo, no siempre la ecuación de $F(x; y) = 0$ representa una función implícita de $y = f(x)$.

Por ejemplo, la ecuación $y + 2x - 5 = 0$ representa implícitamente a la función $y = 5 - 2x$. Mientras que la ecuación $x^2 + y^2 - 9 = 0$ representa simultáneamente a las funciones implícitas $y = +\sqrt{9 - x^2}$ y a $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

Ejemplo 1. Son funciones explicitas:

a) $f(x) = Sen\, x + Cos\, x$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 7x - 1}$ c) $f(x) = x^2 + xe^x$

d) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ e) $y = x^2 + 3x - 6$ f) $y = Ln(7 - x^2)$

Ejemplo 2. En las siguientes ecuaciones se da funciones implícitas representadas a través de la variable "y":

a) $xy + \sqrt{xy} = x^2 + y^2$ b) $x^2 + y^2 = x\, Sen\,(xy)$ c) $x^{1/2} + y^{1/2} = Ln(xy)$

d) $e^{xy} + x + y = xe^y + ye^x$ e) $x\, Sen\, y = Cos\,(xy)$ f) $\sqrt{x^2 + y^2} = xy$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN IMPLÍCITA.

Para calcular la derivada de una función implícita se puede elegir dos formas:

FORMA 1. Derivando ambos lados de la ecuación $F(x; y) = 0$, tomando en cuenta que y es una función, y haciendo uso de la regla de la cadena.

FORMA 2. Usando la siguiente proposición: si y es proporcionada mediante la ecuación $F(x; y) = 0$, la derivada con respecto a x es dada por $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF(x;y)}{dx}}{\frac{dF(x;y)}{dy}}$.

Ejemplo 1. Derivar implícitamente:

a) Forma 1: $xy = x^2 + y^2$, sabiendo que y depende de x.

Derivamos ambos lados con respecto a x: $\frac{d}{dx}[xy] = \frac{d}{dx}[x^2 + y^2]$

Tenemos: $x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$ o $x\frac{dy}{dx} + y = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$

Despejando $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx}(x - 2y) = 2x - y$

Se tiene la derivada pedida: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y}$.

b) Forma 2: $x^2 + y^2 = x\, Sen\,(y)$, sabiendo que y depende de x.

Escribimos la expresión dada en la forma $F(x; y) = 0$: $x^2 + y^2 - x\, Sen\,(y) = 0$

Aplicamos la fórmula $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF(x;y)}{dx}}{\frac{dF(x;y)}{dy}}$ $\rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}(x^2+y^2-x\,Sen\,(y))}{\frac{d}{dy}(x^2+y^2-x\,Sen\,(y))}$

De donde, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x-Sen\,y}{2y-xCos\,(y)}$.

Obsérvese que ambas formas conducen a obtener la derivada que se solicita; así también, en un mismo ejercicio, ambas arriban a idéntico resultado.

c) $x^{1/2} + y^{1/2} = Ln(xy)$, sabiendo que y depende de x.

Derivamos ambos lados con respecto a x: $\frac{d}{dx}[x^{1/2}+y^{1/2}] = \frac{d}{dx}Ln(xy)$

Tenemos: $\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}(y + x\frac{dy}{dx})$ o $\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$

o $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\frac{dy}{dx}$

Despejando $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{2}{y}\right) = \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

Se tiene la derivada requerida: $\frac{dy}{dx} = \frac{y(2-\sqrt{x})}{x(\sqrt{y}-2)}$.

Ejemplo 2. Aplicando derivación implícita, resuelva según se solicite.

a) Hallar la derivada de "y" si es dada mediante la ecuación $xy + Sen(y) - 7 = 0$.

Solución.

Derivando ambos lados con respecto a "x" se tiene $x\frac{dy}{dx} + y + Cos(y)\frac{dy}{dx} = 0$.

Despejando $\frac{dy}{dx}$ se consigue finalmente $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x+Cos\,y}$

b) Hallar la derivada de "y" si aparece formando parte de la ecuación $e^{xy} + y\,Cos(x) = \pi$

Solución.

Derivando ambos lados respecto a "x", se tiene $e^{xy}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) - y\,Sen(x) + \frac{dy}{dx}Cos(x) = 0$.

Despejando $\frac{dy}{dx}$ se logra $\frac{dy}{dx} = \frac{y\,Sen\,x - e^{xy}}{xe^{xy} + Cos\,x}$

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva C representada por "y", en el punto (3; 1), la cual es dada implícitamente por la ecuación $y^3 + 2xy^2 - 3x - 10 = 0$.

Solución.

Derivando ambos lados respecto a "x", se tiene $3y^2\frac{dy}{dx}+4xy\frac{dy}{dx}+2y^2-3=0$.

Despejando $\frac{dy}{dx}$ se consigue $\frac{dy}{dx}=\frac{3-2y^2}{3y^2+4xy}$

Evaluando $(3;1)$ en $\frac{dy}{dx}$ se tendrá la pendiente $m=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(3;1)}=\frac{3-2(1)^2}{3(1)^2+4(3)(1)}=\frac{1}{15}$

Y la recta tangente quedará expresada por $L_T: y-1=\frac{1}{15}(x-3)$ o $y=\frac{1}{15}x+\frac{4}{5}$

Ejemplo 4. Hallar la segunda derivada de "y" que es dada implícitamente por la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Solución.

Derivando ambos lados respecto a "x", se tiene $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$

Despejando $\frac{dy}{dx}$ se llega a $\frac{dy}{dx}=\frac{-b^2}{a^2}\frac{x}{y}$

Derivando por segunda vez respecto a "x", $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-b^4}{a^2}\frac{1}{y^3}$

Ejemplo 5. (PROBLEMA) Supóngase que una estación de radar está siguiendo el rastro de un objeto volador no identificado (OVNI). Considere que "S" representa la distancia en el tiempo "t" para $t>0$ del OVNI a un punto fijo. Tome en cuenta que "S" satisface la ecuación $S^2+t^2S=t^3+1$. ¿Con cuánta rapidez se está moviendo el objeto en el instante t?

Solución.

Recordemos que S depende de t, $S=S(t)$. Se deriva ambos lados de $S^2+t^2S=t^3+1$ con respecto a t: $\frac{d}{dt}(s^2+t^2S)=\frac{d}{dt}(t^3+1)$

Entonces se tiene $2S\frac{dS}{dt}+t^2\frac{dS}{dt}+2tS=3t^2$

Despejando se llega a la rapidez respecto a t : $\frac{dS}{dt}=\frac{3t^2-2tS}{2S+t}$.

3.9. INCREMENTO Y DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN REAL

INCREMENTO DE UNA FUNCIÓN REAL.

Dada una función real para la cual su variable independiente $\boldsymbol{x}$ sufre un incremento de $\boldsymbol{x_0}$ a $\boldsymbol{x_0} + \Delta\boldsymbol{x}$, entonces la función real $\boldsymbol{f}$ sufrirá un incremento de $\boldsymbol{f(x_0)}$ a $\boldsymbol{f(x_0 + \Delta x)}$.

Nótese que el incremento de una función real es la diferencia exacta de dicho incremento correspondiente al que se alcanza desde $\boldsymbol{x_0}$ hasta $\boldsymbol{x_0} + \Delta\boldsymbol{x}$. (Ver Figura 3.11).

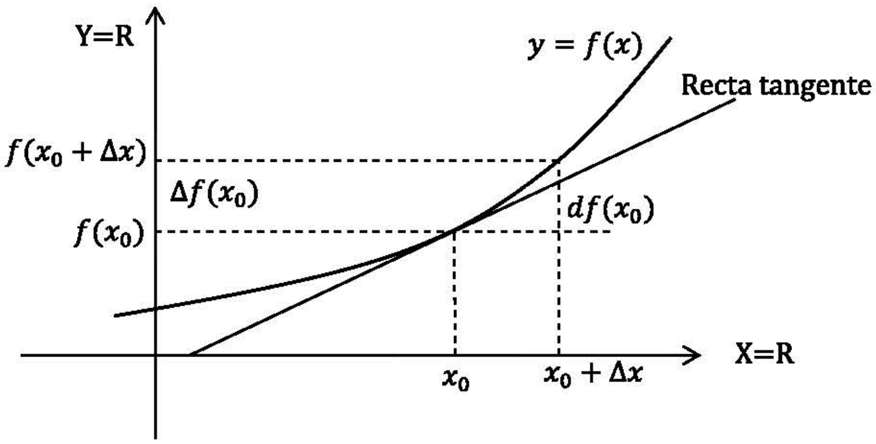


Figura 3.11

DEFINICIÓN. Sea $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ una función real definida en el intervalo I, sea $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{I}$, entonces el incremento de $\boldsymbol{f}$ hasta $\Delta\boldsymbol{f}$correspondiente al incremento de $\Delta\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{x_0}$ es dado por:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Ejemplo 1. (Para ver incremento) Sea la función real $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ que representa la cantidad de desperdicios que una curtiembre arroja a un río, cuya cantidad se modela por la regla $\boldsymbol{f(x) = 0{,}2x^2 + 1{,}8x}$ toneladas a la semana.

a) Determinar el incremento de la función al pasar de la quinta a la sexta semana.

b) Realizar el mismo ejercicio para el tránsito de la décima a la decimoprimera semana.

Solución.

a) Para el punto $\boldsymbol{x_0 = 5}$, el incremento será $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{1}$.

El incremento se calcula de $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Veamos: $\Delta f(5) = f(5+1) - f(5) = f(6) - f(5) = [0{,}2(6)^2 + 1{,}8(6)] - [0{,}2(5)^2 + 1{,}8(5)] = 18 - 14 = 4$ toneladas.

Lo cual significa que estando en la quinta semana $\boldsymbol{x_0 = 5}$, al pasar a la próxima, el incremento correspondiente en cuanto a la cantidad de desperdicios arrojados al río es de 4 toneladas.

b) Para el $\boldsymbol{x_0 = 10}$, el incremento será $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{1}$.

El incremento se calcula de $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Veamos: $\Delta f(10) = f(10+1) - f(10) = f(11) - f(10)$

$=[0,2(11)^2 + 1,8(11)] - [0,2(11)^2 + 1,8(10)] = 44 - 38 = 6$ toneladas.

Esto quiere decir que estando en la décima semana $x_0 = 10$, el incremento correspondiente al pasar a la siguiente semana, en cuanto a la cantidad de desperdicios arrojados al río, es de 6 toneladas.

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN REAL.

Dada una función real donde su variable independiente x sufre un incremento desde x_0 hasta $x_0 + \Delta x$, entonces la función real f sufrirá un incremento de $f(x_0)$ a $f(x_0 + \Delta x)$, el cual puede ser aproximado por el diferencial de la función en ese punto x_0.

DEFINICIÓN. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real definida en el intervalo I, sea $x_0 \in I$, entonces el diferencial de f en x, $df(x)$ correspondiente al incremento dx en x_0 es dado por:

$$df(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} \cdot dx$$

Nótese que el diferencial de una función real es la diferencia aproximada de dicho incremento correspondiente al que se da desde x_0 hasta $x_0 + \Delta x$.

Ejemplo 1. (Para ver diferencial) Sea la función real $f: I \subset R \to R$ que representa la cantidad de desperdicios que una curtiembre arroja a un río, cuya cantidad se modela por la regla $f(x) = 0,2x^2 + 1,8x$ toneladas a la semana.

a) Determinar el diferencial de la función al pasar de la quinta a la sexta semana.

b) Realizar el mismo ejercicio para el tránsito de la décima a la decimoprimera semana.

Solución.

Se necesita la derivada de la función $f(x) = 0,2x^2 + 1,8x$; la cual es $\frac{df(x)}{dx} = 0,4x + 1,8$.

a) Para el punto $x_0 = 5$, el diferencial será $dx = 1$.

El diferencial se calcula de $df(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} \cdot dx$

Veamos: $df(5) = \frac{df(5)}{dx} \cdot (1) = [0,4(5) + 1,8](1) = 3,8$ toneladas.

Esto significa que estando en la quinta semana $x_0 = 5$, el diferencial correspondiente en la cantidad de desperdicios arrojados al río es aproximadamente de 3,8 toneladas.

b) Para el punto $x_0 = 10$, el diferencial será $dx = 1$.

El diferencial se calcula de $\boldsymbol{df(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} \cdot dx}$

Veamos: $\boldsymbol{df(10) = \frac{df(10)}{dx}(1) = [0,4(10) + 1,8](1) = 5,8}$ toneladas.

Lo cual denota que estando en la décima semana $\boldsymbol{x_0 = 10}$, al pasar a la siguiente, el diferencial correspondiente en cuanto a la cantidad de desperdicios arrojados al río es de aproximadamente 5,8 toneladas.

Ejemplo 2. Se desea confeccionar un recipiente semiesférico de 25 cm de radio interior.

a) Usando incrementos, hallar la cantidad de material empleado en la confección de dicho recipiente si el espesor debe ser de 0,5 cm.

b) Haciendo uso de diferenciales, aproximar la cantidad de material empleado en la confección de dicho recipiente si el espesor debe ser de 0,5 cm.

c) Comparar ambos resultados.

Solución.

La función para hallar el volumen del recipiente mencionado será $\boldsymbol{V(r) = \frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{2\pi}{3}r^3}$; el valor $\boldsymbol{r_0 = 25}$; y el incremento, $\boldsymbol{\Delta r = 0,5}$.

(a) El incremento se calcula de $\boldsymbol{\Delta V(r_0) = V(r_0 + \Delta r) - V(r_0)}$

$\boldsymbol{\Delta V(25) = V(25 + 0,5) - V(25)}$ $\boldsymbol{=V(25,5) - V(25)}$ $\boldsymbol{=\frac{2\pi}{3}(25,5)^3 - \frac{2\pi}{3}(25)^3}$ $\boldsymbol{=2003,027\ cm^3}$.

En consecuencia, para confeccionar el recipiente se necesita $\boldsymbol{2003,027\ cm^3}$ de material.

b) La derivada del volumen será $\boldsymbol{\frac{dV(r)}{dr} = 2\pi r^2}$.

El diferencial se calcula de $\boldsymbol{dV(r_0) = \frac{dV(r_0)}{dr} \cdot dr = 2\pi(25)^2 dr}$

$\boldsymbol{dV(25) = \frac{dV(25)}{dr} \cdot dr = 2\pi(25)^2(0,5) = 1963,49\ cm^3}$.

Es decir, para confeccionar el recipiente se necesita aproximadamente $\boldsymbol{1963,49\ cm^3}$ de material.

c) Comparando ambos resultados, existe un error de $\boldsymbol{39,537\ cm^3}$.

Ejemplo 3. Con una capa de pintura de un milímetro de espesor, se desea pintar el exterior de una cisterna que tiene forma cuadrada con 3 metros de arista externa. Dicha cisterna posee tapa. Haciendo uso de incrementos, hallar la cantidad de pintura a emplear. Asimismo, utilizando diferenciales, aproximar la cantidad de pintura que se empleará.

Solución.

Siendo $\boldsymbol{x}$ la longitud de la arista externa, la función para hallar el volumen de la cisterna será $\boldsymbol{V(x) = x^3}$; el valor de $\boldsymbol{x_0 = 3}$; y el incremento, $\boldsymbol{\Delta x = 0,002}$.

(a) El incremento se calcula de $\boldsymbol{\Delta V(x_0) = V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}$

$$\boldsymbol{\Delta V(3) = V(3 + 0,002) - V(3) = V(3,002) - V(3) = (3,002)^3 - (3)^3 = 0,054036\, m^3}.$$

Esto significa que para pintar la cisterna se necesita $\boldsymbol{0,054036\, m^3}$ de pintura.

(b) La derivada del volumen será $\boldsymbol{\frac{dV(x)}{dx} = 3x^2}$.

El diferencial se calcula de $\boldsymbol{dV(x_0) = \frac{dV(x_0)}{dx} dx}$.

$$\boldsymbol{dV(3) = \frac{dV(3)}{dr} \cdot dr = 3(3)^2(0,002) = 0,054\, cm^3}$$

Entonces, para pintar la cisterna se necesita aproximadamente $\boldsymbol{0,054\, cm^3}$ de pintura.

Notamos que, en este caso, los dos resultados son bastante cercanos.

Ejemplo 4. Se sabe que con el aumento de temperatura en el funcionamiento del procesador en determinadas placas cuadradas para circuitos impresos, se produce una dilatación lineal de sus lados, del 0,4 %. El lado de cada placa mide 7 mm. Calcular aproximadamente el aumento en su área.

Solución.

Siendo $\boldsymbol{x}$ el lado de la placa, la función que modela su área será $\boldsymbol{A(x) = x^2}$.

El incremento de cada lado resulta el 4% de 7 mm: $\boldsymbol{\Delta x = dx = 0,028\, mm}$.

Aproximando el incremento: $\boldsymbol{dA(x) = 2x}$.

Con los datos $\boldsymbol{dA(7) = 2(7)(0,028) = 0,392\, mm^2}$.

Siendo el área $\boldsymbol{A(7) = 49\, mm^2 = 100\ \%}$ y al área aumentada de $\boldsymbol{0,392}$, entonces el aumento será $\boldsymbol{y = \frac{(0,392)(100)}{49}\ \% = 0,8\ \%}$. Es decir, el área aumenta aproximadamente un $\boldsymbol{0,8\ \%}$.

3.10. LISTADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIOS SOBRE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL.

1. DERIVAR LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

a) $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}$

b) $g(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{3}$

c) $h(x) = \frac{x}{n} + \frac{n}{x} + \frac{x^2}{m^2} - \frac{m^2}{x^2}$

d) $f(t) = \frac{1}{10t^{2/3}} - \frac{5,2}{t^{1,4}} + \frac{2,5}{\sqrt[3]{t}}$

e) $g(x) = \frac{t^2-5t-1}{t^3}$, y hallar $g'(1/2)$

f) $f(x) = (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^2)$

g) $h(x) = 4 - 5x + 2x^3 - x^{-3}$, y mostrar que $f'(a)$ es igual a $f'(-a)$.

h) $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$

i) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$

j) $y = \frac{x+1}{x-1}$

k) $y = \frac{x^2+1}{3(x^2-1)}$

l) $y = \frac{2t-3}{t^2-3t+6}$

m) $y = \frac{1}{t^2+t+1}$

n) $f(t) = \frac{3}{5-t} + \frac{t-5}{3}$, y hallar $f'(0)$ y $f'(2)$

o) $g(t) = (3x^2 - 4x^{-1} + 6)^3$

p) $y = \left(\frac{1}{2x-3}\right)^3$

q) $y = \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

r) $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2+1}}$

2. DERIVAR LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

a) $y = Log(x - Cos\, x)$

b) $g(t) = e^{Cos\, t} Sen\, t$

c) $h(t) = Sen(2t) \cdot Sen\,(t/2)$

d) $T(t) = 3\, Cos^2 t - \frac{1}{Cos^2 t}$

e) $y = Arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

f) $y = \frac{2Sen\, x}{Cos(2x)} - \frac{Cos\, x}{Sen(2x)}$

g) $y = \frac{1}{x}\left(Tan\left(\frac{x}{2}\right) + Cot(x/2)\right)$

h) $y = t \cdot Arctan(\sqrt{t})$

i) $y = x \cdot Arcsen(Ln\, x)$

j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-Sen^2 x}}$

k) $g(x) = \frac{Ln(Sen\, x)}{Ln(Cos\, x)}$

l) $h(x) = 2^{\left(\frac{x}{Ln\, x}\right)}$

m) $g(x) = 10^{x \cdot tan\, x}$

n) $y = Ln[e^x Cos\, x]$

EJERCICIOS SOBRE DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR.

1. DERIVAR LAS SIGUIENTES FUNCIONES PARA HALLAR LO QUE SE PIDE:

a) y'', si $y = (1 - 3x^2)^2$

b) $f''(2)$, si $f(t) = (t + 10)^2$

c) $y^{(4)}$, si $y = x^2 \text{Ln}\, x$

d) $f'(1)$, si $f(x) = Arctan\, x$

e) y'', si $y = x^2 e^x$

f) y'', si $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

g) y'', si $y = Arcsen[a + Sen\ x]$

h) $y^{(n)}$, si $y = e^{-x}$

i) $y^{(n)}$, si $y = x\ Lnx$

j) y'', si $y^3 + x^2 = ax^2y$

k) y'', si $e^{x+y} = x^2y^2$

l) $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, siendo: (i) $x = at^2, y = bt^3$ (ii) $x = aCos(t), y = bSen(t)$

(iii) $x = ArcSen(t), y = Ln(1 - t^2)$

EJERCICIOS SOBRE DERIVADA IMPLÍCITA.

1. Hallar la derivada de y, la cual es dada en forma implícita.

a) $x^{1/2} + y^{1/2} = 1$

b) $xy + Ln(xy) = x + y$

c) $x^2 + y^3 + axy = 0$

d) $y^2Cos\ x = xSen(3y)$

e) $Sen(xy) + Cos(xy) = Ln(x + y)$

f) $y = 1 - xe^y$

g) $y\ Sen\ x - Cos(x - y) = x - y$

h) $y - x = Arsen(x) - Arccos(y)$

i) $x^y - y^x = 10$

j) $y = x^{\ln x}$

k) $xy^2 = [Ln\ x]^y$

2. Hallar la derivada de y con respecto a x: $\frac{dy}{dx}$.

a) $x = aCos(t), y = aSen(t)$.

b) $x = 1 - t^2, y = t - t^3$.

c) $= t[1 - Sen(t)]\ , y = t[Cos(t)]$.

EJERCICIOS SOBRE INCREMENTO Y DIFERENCIAL DE UNA **FUNCIÓN**.

1. Encuentre el incremento de y, Δy. Luego determine el diferencial de y, dy para la función $y = f(x)$, siendo:

a) $f(x) = x^3 + 1$, cuando x cambia de 2 a 2,01.

b) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, cuando x cambia de 3 a 2,9.

c) $f(x) = \sqrt{4 - x}$, cuando $x_0 = 2$ e $\Delta x = 0{,}2$.

2. ¿Cuál es el volumen aproximado de hule que se usa para manufacturar una pelota con diámetro de 4 centímetros, si el grueso del hule es de 1milímetro?

3. Los lados de una caja cúbica hueca de metal tienen un espesor de $\frac{1}{3}$ de milímetro. Si el volumen interior de la caja es de 125 centímetros cúbicos, ¿cuál es el volumen aproximado del metal que se emplea en la construcción de la caja?

4. Supongamos que explotara x libras de cierto material de fisión, con una fuerza equivalente a $500x$ toneladas de TNT. ¿Cuál es el error permisible en la medición de 2 libras del material si el error en la explosión resultante no debe sobrepasar el equivalente de una tonelada de TNT?

5. Hallar la diferencial de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1 + 5x - x^2$

b) $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

c) $f(x) = (x - x^2)^2$

d) $f(x) = e^{2-x}$

e) $f(x) = Ln(4 - x^2)$

f) $f(x) = Sen(1 + \ln x)$

Capítulo IV

APLICACIONES DE LA DERIVADA

CAPÍTULO IV

APLICACIONES DE LA DERIVADA

CONTENIDO

4.1. Velocidad y aceleración usando derivadas.

4.2. La regla de L'Hopital.

4.3. Razones de cambio relacionadas.

4.4. Primera derivada y monotonía de las funciones reales.

4.5. Valores extremos de las funciones reales.

4.6. Segunda derivada y concavidad de la gráfica de una función real.

4.7. Bosquejo de curvas polinomiales y racionales.

4.8. Segunda derivada y valores extremos relativos.

4.9. Diferenciales y cálculo de errores relativos y errores porcentuales.

4.10. Listado de ejercicios propuestos.

4.1. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN USANDO DERIVADAS

En las aplicaciones de la derivada se tiene diversas interpretaciones, dependiendo del campo donde se esté empleando; algunas de estas son:

Razón de cambio de un suceso, tasa de crecimiento/decrecimiento de una población, índice de consumo, velocidad de un móvil, rapidez de un suceso, pendiente de una curva en un punto, entre otras más.

VELOCIDAD DE UN MÓVIL.

PROBLEMA 1. Un automóvil que corre por un camino recto viaja a una distancia modelada por $S(t) = t^2 + 4t$ millas en t horas, ¿cuál es su velocidad instantánea a las 3 horas? ¿Cuánta es su aceleración en ese mismo tiempo?

Solución.

Siendo la función distancia recorrida $S(t) = t^2 + 4t$

Su velocidad será $v(t) = S'(t) = 2t + 4$, siendo $v(3) = 2(3) + 4 = 10$ millas por hora.

Su aceleración ha de ser $a(t) = S''(t) = 2$, siendo $a(2) = 2$ millas por hora, en cada hora.

PROBLEMA 2. Supongamos que una partícula se mueve por una línea recta a razón de $S(t) = 3t + 9t^2 + t^3$pies en t segundos. ¿Cuáles serán su velocidad instantánea y su aceleración al final de 5 segundos?

Solución.

Siendo la función que rige la distancia recorrida $S(t) = 3t + 9t^2 + t^3$

Su velocidad será $v(t) = S'(t) = 3 + 18t + 3t^2$.

En $t = 5$ segundos: $v(5) = 3 + 18(5) + 3(5)^2 = 168$ pies por segundo.

Su aceleración habrá de ser $a(t) = S''(t) = 18 + 6t$.

En $t = 5$ segundos: $a(5) = 18 + 6(5) = 48$ pies por segundo en cada segundo.

PROBLEMA 3. (Efecto Doppler) La sirena de un coche de bomberos es percibida por un observador con una frecuencia calculada mediante $F(v) = \frac{132400}{331 \pm v}$, donde $\pm v$ representa la velocidad del vehículo. Hallar la razón de cambio de F respecto a v cuando:

a) El coche se está aproximando a 30 metros por segundo [Usar "$-v$"].

b) El coche se está alejando a 30 metros por segundo [Usar "$+v$"].

Solución.

La razón de cambio de "F" respecto a "v" es dada por la derivada de "F", es decir, por $F'(v) = \frac{-132400}{(331\pm v)^2}$.

Calculamos $F'(-30) = -1{,}4613$; lo cual denota que al acercarse el coche de bomberos a 30 metros por segundo, el observador percibe la sirena con una razón de cambio en la frecuencia de 1,4613.

Ahora $F'(30) = -1{,}01595$; esto significa que al alejarse el coche de bomberos a 30 metros por segundo, el observador percibe la sirena con una razón de cambio en la frecuencia de 1,01595.

4.2. LA REGLA DE L'HOPITAL

Los siguientes casos de formas indeterminadas: $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ pueden ser resueltos mediante las reglas de L'Hopital que se enuncian a continuación.

TEOREMA 1. Caso $\left(\frac{0}{0}\right)$ Si $\underset{x\to x_0}{Lím}\ f(x) = 0$, $\underset{x\to x_0}{Lím}\ g(x) = 0$ y existe $\underset{x\to x_0}{Lím}\ \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces se cumple que $\underset{x\to x_0}{Lím}\ \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to x_0}{Lím}\ \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Donde x_0 puede ser un n° real, $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 1. Al sustituir el x_0 en la función, se obtendrá una forma indeterminada; la cual será resuelta al aplicar la regla de L'Hopital.

a) Al calcular $\underset{x\to 0}{Lím}\frac{1-Cos\,x}{x^2} = \frac{0}{0}$, obtenemos una forma indeterminada, aplicamos entonces regla de L'Hopital, derivando numerados y denominador: $\underset{x\to 0}{Lím}\frac{1-Cos\,x}{x^2} = \underset{x\to 0}{Lím}\frac{Sen\,x}{2x} = \frac{0}{0}$; nuevamente resulta una forma indeterminada, por lo que volvemos a aplicar L'Hopital:

$$\underset{x\to 0}{Lím}\frac{Sen\,x}{2x} = \underset{x\to 0}{Lím}\frac{Cos\,x}{2} = \frac{1}{2}$$

b) Al calcular $\underset{x\to 0}{Lím}\ \frac{2x^3}{x-Sen\,x} = \frac{0}{0}$, aplicamos L'Hopital: derivando numerados y denominador.

$\underset{x\to 0}{Lím}\ \frac{2x^3}{x-Sen\,x} = \underset{x\to 0}{Lím}\ \frac{6x^2}{1-Cos\,x} = \frac{0}{0}$. En base a esta respuesta, volvemos a aplicar L'Hopital:

$\underset{x\to 0}{Lím}\ \frac{12x}{Sen\,x} = \frac{0}{0}$, una vez más volvemos a aplicar L'Hopital:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{12}{Cos\,x} = \frac{12}{1} = 12.$

TEOREMA 2. Caso $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$: Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ y existe $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces se cumple que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Donde x_0 puede ser un n° real, $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 2. Del mismo modo, al sustituir el x_0 en la función se obtendrá una forma indeterminada, la cual será resuelta al aplicar la regla de L'Hopital.

a) Al calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{Ln\,x}{x^2+2} = \frac{+\infty}{+\infty}$, aplicamos L'Hopital: derivando numerados y denominador.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

b) Al calcular $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{Sen\,x}\right] = +\infty - \infty$, transformamos a forma indeterminada $\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{Sen\,x - x}{x\,xen\,x} = \frac{0}{0}$, aplicamos L'Hopital: derivando numerados y denominador.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{Cos\,x-1}{Sen\,x + x\,Cos\,x} = \frac{0}{0}$, volvemos a aplicar regla de L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{-Sen\,x}{Cos\,x+Cos\,x-x\,Sen\,x} = \frac{0}{2} = 0$$

c) Al calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}[Ln(x+1) - Ln\,x] = +\infty - \infty$, aplicamos propiedades de logaritmos.

$$\lim_{x\to+\infty}[Ln(x+1) - Ln\,x] = \lim_{x\to+\infty} Ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} Ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = Ln\,1 = 0$$

d) Al calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\,Ln\,x) = 0(+\infty)$, aplicamos $f\cdot g = \frac{f}{1/g}$ o $f\cdot g = \frac{g}{1/f}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} (x\,Ln\,x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{Ln\,x}{1/x} = \frac{+\infty}{+\infty}$, aplicamos L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

e) Al calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2Cos\,x)^{\frac{1}{Cos\,x}} = 1^{+\infty}$, usando logaritmo neperiano transformamos:

$A = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 2Cos\, x)^{\frac{1}{Cos\, x}} \quad \rightarrow \quad Ln\, A = Ln\left[\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 2Cos\, x)^{\frac{1}{Cos\, x}}\right]$

$Ln\, A = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} Ln(1 + 2Cos\, x)^{\frac{1}{Cos\, x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{Cos\, x}\right) \cdot Ln(1 + 2Cos\, x)$

Al calcular $Ln\, A = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{Ln(1+2Cos\, x)}{Cos\, x} = \frac{0}{0}$, aplicamos regla de L'Hopital.

$Ln\, A = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{-2\, Sen\, x}{1+2\, Cos\, x}}{-Sen\, x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2}{1+2Cos\, x} = 2 \quad \rightarrow \quad Ln\, A = 2 \Leftrightarrow A = e^2$

De donde, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 2Cos\, x)^{\frac{1}{Cos\, x}} = e^2$.

f) Al calcular $\lim_{x \to 0^+} (x)^x = 0^0$, usando logaritmo neperiano transformamos:

$A = \lim_{x \to 0^+} (x)^x \rightarrow \quad Ln\, A = Ln[\lim_{x \to 0^+} (x)^x] \rightarrow \quad Ln\, A = \lim_{x \to 0^+} Ln(x)^x$

$Ln\, A = \lim_{x \to 0^+} x\, Ln\, x = 0(+\infty)$, empleamos $f \cdot g = \frac{f}{1/g}$ o $f \cdot g = \frac{g}{1/f}$

Al calcular $Ln\, A = \lim_{x \to 0^+} \frac{Ln\, x}{1/x} = \frac{+\infty}{+\infty}$, aplicamos regla de L'Hopital.

$Ln\, A = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \quad \rightarrow \quad Ln\, A = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$

$Ln\, A = 0 \Leftrightarrow A = e^0 = 1$

De donde, $\lim_{x \to 0^+} (x)^x = 1$.

g) Al calcular $\lim_{x \to 0^+} (\frac{1}{x^2})^{Tan\, x} = (+\infty)^0$, usando logaritmo neperiano transformamos:

$A = \lim_{x \to 0^+} (\frac{1}{x^2})^{Tan\, x} \quad \rightarrow \quad Ln\, A = Ln\left[\lim_{x \to 0^+} (\frac{1}{x^2})^{Tan\, x}\right]$

$Ln\, A = \left[\lim_{x \to 0^+} Ln(\frac{1}{x^2})^{Tan\, x}\right] \rightarrow \quad Ln\, A = \lim_{x \to 0^+} (Tan\, x) Ln(\frac{1}{x^2})$

$Ln\, A = \lim_{x \to 0^+} (Tan\, x)(Ln\, 1 - \ln x^2) \rightarrow \quad Ln\, A = \lim_{x \to 0^+} (Tan\, x)(-2Ln\, x)$

$Ln\, A = -2 \lim_{x \to 0^+} (Tan\, x)(Ln\, x) = 0(+\infty)$, empleamos $f \cdot g = \frac{f}{1/g}$ o $f \cdot g = \frac{g}{1/f}$

$Ln\, A = -2 \lim_{x \to 0^+} \frac{Ln\, x}{\frac{1}{Tan\, x}} = \frac{+\infty}{+\infty}$, aplicamos regla de L'Hopital.

$Ln\, A = -2 \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/Sen^2 x} = 2 \lim_{x \to 0^+} \frac{Sen^2 x}{x} = \frac{0}{0}$ aplicamos regla de L'Hopital.

$Ln\, A = 2 \lim_{x \to 0^+} \frac{2Sen\, x\, Cos\, x}{1} = 2(0) = 0.$

Luego, $Ln\, A = 0 \Leftrightarrow A = e^0 = 1$

De donde, $\lim_{x \to 0^+} (\frac{1}{x^2})^{Tan\, x} = 1$.

4.3. RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

Esta es una aplicación de la derivación implícita y la regla de la cadena. Consiste en plantear y resolver problemas donde se calcula razones de cambio de dos o más variables relacionadas entre sí, generalmente con respecto a otra variable, alguna de las cuales puede ser el tiempo t. Estos problemas corresponden a sucesos que se presentan en momentos fijos o particulares; es como tomar una foto del suceso en el instante, por tanto, se plantea y resuelve el problema para ese momento fijo, tal como se verá en adelante.

PROBLEMA 1. Un barco S está viajando cerca de la costa con una velocidad y una aceleración desconocidas. En un faro L un observador toma medidas de la distancia "r" entre él y el barco, y el ángulo θ de la visual del barco con la línea de la costa. En un determinado momento t_0, encuentra que $r = 6, \frac{dr}{dt} = 3, \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{d\theta}{dt} = -3$. Encuentre $\frac{dy}{dt}$, es decir, la razón en que aumenta la distancia desde el barco hacia la costa, en el instante t_0.

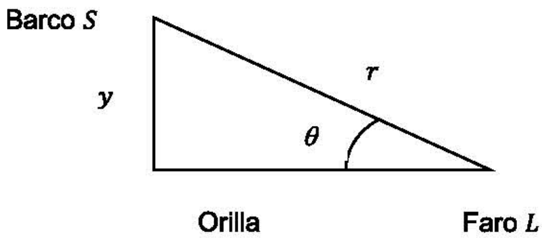


Figura 4.1

Según la Figura 4.1, $y = r\, Sen(\theta)$, donde y representa la distancia del barco a la orilla; "y", "r" y "θ" dependen del tiempo "t".

Derivando "y" respecto al tiempo se tendrá $\frac{dy}{dt} = r\, Cos\, \theta \frac{d\theta}{dt} + Sen\, \theta \frac{dr}{dt}$

Remplazando los datos para el tiempo t_0 dados se tiene $\frac{dy}{dt} = (6)Cos(\pi/3)(-3) + Sen(\pi/3)(3) =-6{,}4$.
Esto simboliza la razón en que aumenta la distancia del barco a la costa, en el instante t_0.

PROBLEMA 2. Una escalera de 13 m de largo se apoya contra una pared vertical muy alta. En el instante t_0, el extremo inferior a cinco metros de la pared está resbalando hacia fuera a una velocidad de 2 metros por segundo.

a) ¿A qué velocidad se está deslizando hacia abajo el extremo superior de la escalera en el instante t_0?

b) Una persona se encuentra sobre la escalera a 8 metros sobre el suelo, en el instante t_0. ¿A qué velocidad se está aproximando al suelo?

Solución.

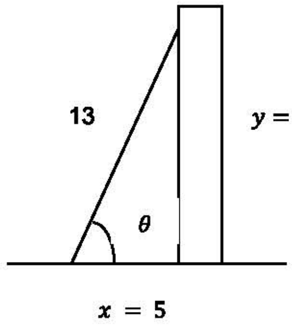


Figura 4.2

De la figura 4.2, se desprende $y = 13\ Sen(\theta)$, $x = 13\ Cos(\theta)$.

(a) Derivando ambos lados de "y" y "x" con respecto al tiempo "t"

$\frac{dy}{dt} = 13Cos\ \theta \frac{d\theta}{dt}$ y $\frac{dx}{dt} = -13Sen\ \theta \frac{d\theta}{dt}$ y como $\frac{dx}{dt} = 2$, entonces $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-2}{13\ Sen\ \theta}$

Por otro lado, reemplazando en $\frac{dy}{dt}$ se tiene $\frac{dy}{dt} = 13Cos\ \theta \frac{-2}{13Sen\ \theta} = -2Cot\ \theta = \frac{-2x}{y}$
Y como en el instante t_0, $x = 5$, $y = 12$, se tendrá que $\frac{dy}{dt} = -\frac{5}{6}$

Esto significa que en el instante t_0 el extremo superior de la escalera está deslizándose hacia abajo con una velocidad de 5/6 metros por segundo.

(b) Tomando como z la altura en que se encuentre la persona, por semejanza de triángulos:

$\frac{z}{y} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \rightarrow \quad z = \frac{2y}{3} \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$

De donde, $\frac{dz}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$; y en el instante t_0 se tiene $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{3}\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{9}$

En consecuencia, la persona está cayendo al piso con una velocidad de 5/9 metros por segundo.

PROBLEMA 3. Supongamos que cierta población de pájaros $B(t)$ y otra de mosquitos $M(t)$ se encuentran en equilibrio cuando se satisface el modelo $13B^2 + 12MB = M^2$. Determinar la rapidez con la que aumenta la población de pájaros $\frac{dB}{dt}$ cuando $B = 200$, $M = 2600$ y $\frac{dM}{dt} = 1000$ por año.

Solución.

Tanto B como M dependen del tiempo "t" en el modelo $13B^2 + 12MB = M^2$, derivemos ambos lados con respecto a "t": $13B\,\frac{dB}{dt} + 6M\frac{dB}{dt} + 6B\frac{dM}{dt} = M\frac{dM}{dt}$ o $\frac{dB}{dt} = \frac{\frac{dM}{dt}(M-6B)}{13B+6M}$

Reemplazando los datos dados se obtiene que $\frac{dB}{dt} = 76{,}92$, es decir, la rapidez con la cual aumenta la población de pájaros es de 76,92 por año.

PROBLEMA 4. Un recipiente tiene la forma del cono de la Figura 4.3, y el agua está fluyendo hacia su interior a razón de 2 cm³ por minuto. ¿A qué velocidad se está elevando el nivel del agua cuando el recipiente se llena hasta una altura de h cm?

Solución.

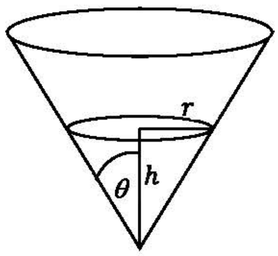


Figura 4.3

De la Figura 4.3, se obtiene la siguiente relación: $\mathrm{Tan}\,\theta = \frac{r}{h}$.
De donde, $r = h\,Tan\,\theta$, siendo que r y h dependen del tiempo t y θ es constante
El volumen es dado por $V = \frac{1}{3}\pi\,(h\,Tan\,\theta)^2 h = \frac{\pi}{3}h^3 Tan^2\theta$
Derivando V con respecto al tiempo: $\frac{dV}{dt} = \pi\,(Tan^2\theta)h^2\frac{dh}{dt}$ y como $\frac{dV}{dt} = 2$
Finalmente, $\frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi\,Tan^2\theta\,h^2}$ resulta la velocidad con que se eleva el nivel del agua.

PROBLEMA 5. Un émbolo S se desplaza hacia arriba y hacia abajo en un cilindro. En cualquier instante, su posición S (en milímetros) arriba del centro ($S = 0$) está relacionada con su velocidad V (en milímetros por segundo) por la ecuación $S^2 + V^2 = 16$. Hallar la aceleración de este pistón en el momento que se encuentra a 2 milímetros arriba del centro. (Ver Figura 4.4).

Solución.

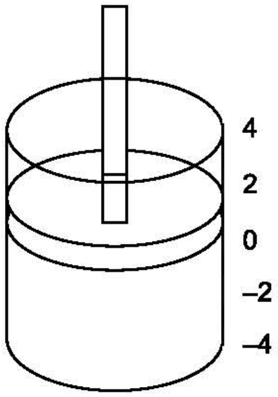


Figura 4.4

Recordemos que la aceleración es dada por $a(t) = \frac{dV}{dt}$ y por regla de la cadena $a(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}$

Derivando ambos lados de $S^2 + V^2 = 16$ con respecto a t, se tiene $\frac{dV}{dt} = -\frac{S}{V}$

Entonces $a(t)$ será $a(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = -\frac{S}{V} \cdot V = -S$

Calculando para $S = 2$ milímetros, $V = \pm\sqrt{16 - 2^2} = \pm\sqrt{12}$

De donde $a(2) = -2$ milímetros por segundo por segundo.

Esto significa que el émbolo se desacelera (velocidad decreciente) cuando se encuentra a dos milímetros por encima de la posición central.

PROBLEMA 6. Un ciclista y un tren se están aproximando a una intersección a lo largo de trayectorias perpendiculares. En el momento en se encuentran equidistantes de la intersección, el ciclista estima que la distancia entre él y el tren está disminuyendo a 40 millas por hora. Si la rapidez en que se mueve el ciclista es de 15 millas por hora, ¿con cuánta velocidad se está moviendo el tren?

Solución.

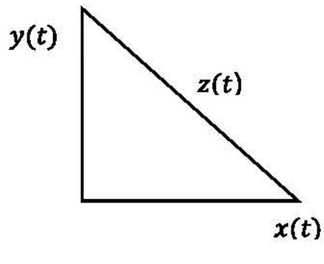


Figura 4.5

En la Figura 4.5, $x(t)$ es la distancia de la bicicleta respecto a la intersección en el tiempo "t"; $y(t)$, la del tren a la intersección en el tiempo "t"; $z(t)$ es la distancia entre el tren y la bicicleta en el tiempo "t". La distancia es en millas y estas se encuentran relacionadas por la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$.

Para hallar la velocidad del tren $\frac{dy}{dt}$, se deriva ambos lados de la ecuación con respecto a "t" y se obtiene $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$.
Donde la velocidad es dada por $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y}\left(z\frac{dz}{dt} - x\frac{dx}{dt}\right)$

En el momento en que el ciclista y el tren se encuentran equidistantes de la intersección, $x = y$ se tiene que $z = \sqrt{2}y$

Con los siguientes datos: $\frac{dx}{dt} = -15$, $x = y$, $\frac{dz}{dt} = -40$ sustituimos en $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y}\left(z\frac{dz}{dt} - x\frac{dx}{dt}\right)$ y se tiene $\frac{dy}{dt} = -41{,}57$

Esto significa que se están aproximando (signo negativo) a 41,57 millas por hora.

4.4. PRIMERA DERIVADA Y MONOTONÍA DE LAS FUNCIONES REALES

FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE.

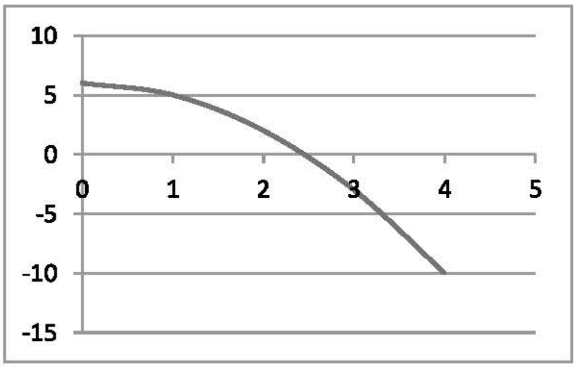
DEFINICIÓN. Sea $f: I\subset R \to R$ una función real definida en el intervalo $I\subset R$, se dice que:

a) La función f es no creciente sobre el intervalo I si para cada par de valores x_1 y x_2 de I se cumple si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. (Ver Figura 4.6).

b) La función f es estrictamente decreciente sobre el intervalo I si para cada par de valores x_1 y x_2 de I se cumple si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. (Ver Figura 4.7).

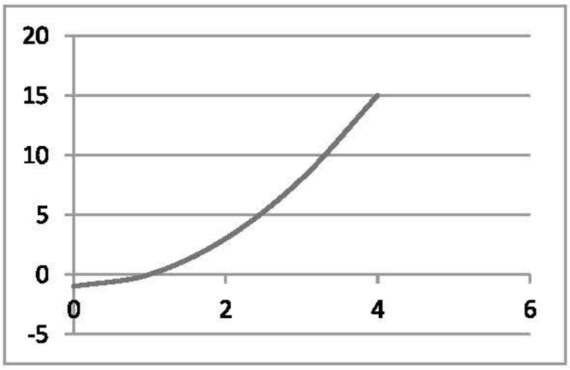
c) La función f es no decreciente sobre el intervalo I si para cada par de valores x_1 y x_2 de I se cumple si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

d) La función f es estrictamente creciente sobre el intervalo I si para cada par de valores x_1 y x_2 de I se cumple si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.



La función f es no creciente.

Figura 4.6



La función f es no decreciente.

Figura 4.7

PRIMERA DERIVADA Y MONOTONÍA (**FUNCIÓN** CRECIENTE/DECRECIENTE) .

TEOREMA. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real continua definida en el intervalo $I \subset R$ y derivable en el interior de I,

a) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \epsilon I$, entonces f es creciente en I.

b) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \epsilon I$, entonces f es decreciente en I.

c) Si $f'(x) = 0$ para todo $x \epsilon I$, entonces f es constante en I.

Ejemplo 1. Sea la función $f(x) = x^2 - 6x + 12$, determina r en que intervalo es creciente y en cuál es decreciente.

Solución. Calculamos primero la derivada de $f(x) = x^2 - 6x + 12$. Esta es $f'(x) = 2x - 6$.

Buscamos donde f es creciente y/o decreciente.

Es creciente en $f'(x) > 0 \to 2x - 6 > 0 \to x > 3$, es decir, en $J = \langle 3;\ +\infty \rangle$.

Es decreciente en $f'(x) < 0 \to 2x - 6 < 0 \to x < 3$, es decir, en $K = \langle -\infty; 3 \rangle$. (Ver Figura 4.8).

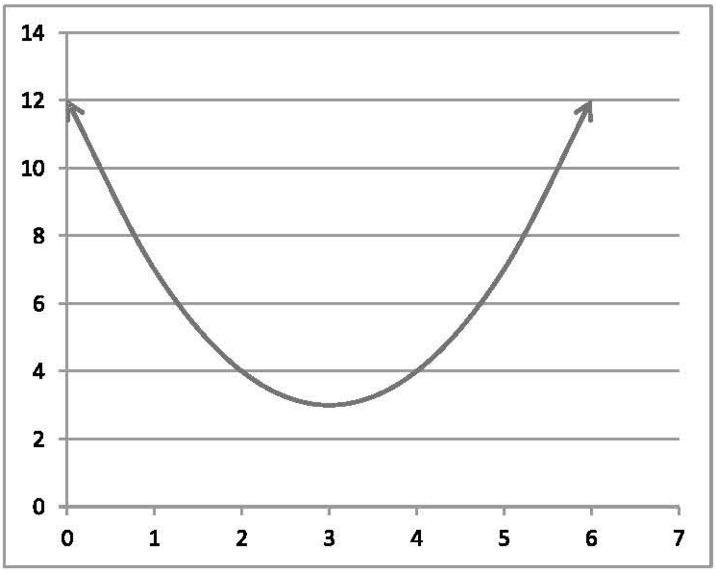


Figura 4.8

Ejemplo 2. Para la función $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 7$, determinar los intervalos donde f es creciente y donde es decreciente.

Solución. La derivada de $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 7$ es $f'(x) = -6x^2 + 12x + 12$.

Buscamos donde f es creciente: $f'(x) > 0 \rightarrow -6x^2 + 12x + 12 > 0$

Es decir, f es creciente en el intervalo $J = \langle -1;\ 2 \rangle$.

Buscamos donde f es decreciente: $f'(x) < 0 \rightarrow -6x^2 + 12x + 12 < 0$

Es decir, f es decreciente en el intervalo $K = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle$. (Ver Figura 4.9).

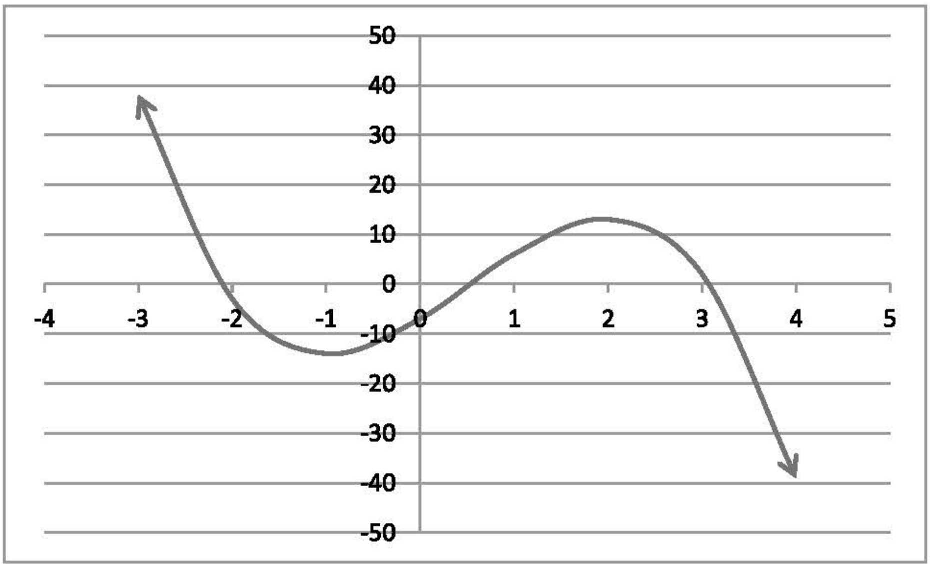


Figura 4.9

PUNTO DE INFLEXIÓN.

DEFINICIÓN. Sea $f: I \subset R \rightarrow R$ una función real continua en el punto x_0. Decimos que el punto $(x_0; f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de la función f, si f es cóncava hacia arriba a un lado de x_0 y cóncava hacia abajo al otro lado.

Los puntos —de existir— concurren en los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$ o cuando $f''(x)$ no existe.

Ejemplo 1. Encuentre los puntos de inflexión de la curva representada por la función $f(x) = x^3 - 12x$.

Solución. La derivada de orden uno: $f'(x) = 3x^2 - 12$.

La derivada de orden dos es $f''(x) = 6x$.

Los puntos de inflexión se encuentran de $f''(x) = 0 \ \rightarrow \ 6x = 0 \rightarrow \ x = 0$.

El punto de inflexión es $(x_0; f(x_0))$ =(0; 0). (Ve Figura 4.10).

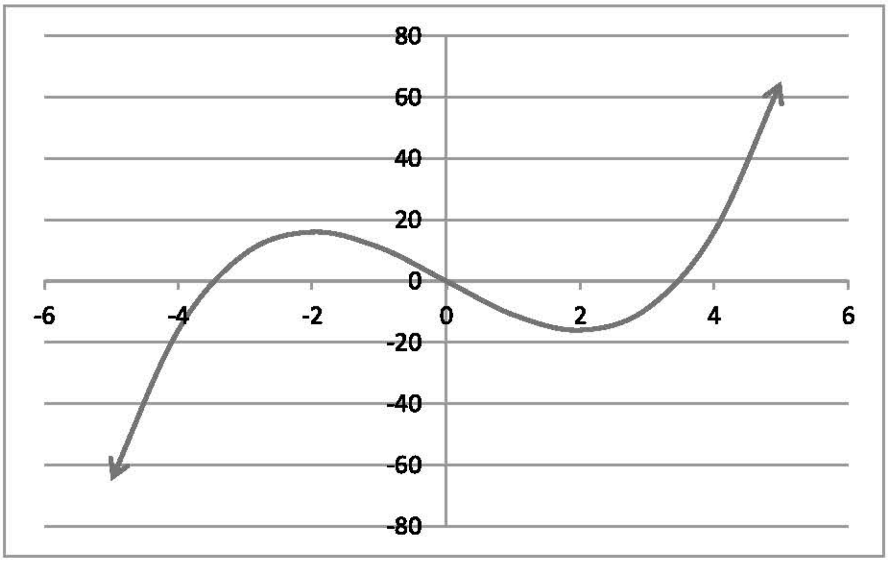


Figura 4.10

4.5. VALORES EXTREMOS DE LAS FUNCIONES REALES

EXTREMOS DE UNA FUNCIóN REAL : VALORES MÍNIMO Y MÁXIMO DE UNA FUNCIóN REAL

INTRODUCCIÓN. Observemos la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ para $-1 \leq x \leq 2{,}5$.

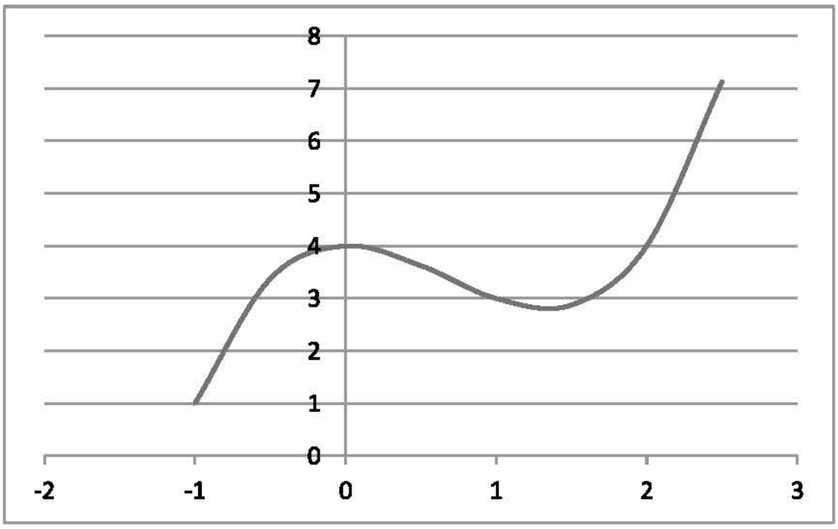


Figura 4.11

En la Figura 4.11, se observa lo siguiente:

a) El valor más grande de la función se da en $x = 2{,}5$, este es llamado máximo absoluto y el valor máximo es $f(2{,}5) = 7{,}25$. El valor más pequeño de la función se da en $x = -1$ y es denominado mínimo absoluto y el valor mínimo es $f(-1) = 1$.

b) En el valor $x = 0$ se da un máximo, al que se nombra máximo relativo (ocurre en un subintervalo del dominio); y, en el valor $x = 1{,}5$ se da un mínimo que es llamado mínimo relativo (ocurre en otro subintervalo del dominio).

DEFINICIÓN 1 (MÍNIMO Y MÁXIMO ABSOLUTO). Sea $f: I \subset R \to R$ una función real de variable real y sea x_0 un punto de $I = [a; b]$, entonces:

a) $m = f(x_0)$ es el mínimo (o mínimo absoluto) de f en I si y solo si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.

b) $M = f(x_0)$ es el máximo (o máximo absoluto) de f en I si y solo si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$.

TEOREMA. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real de variable real, continua en el intervalo cerrado I, entonces f tiene máximo absoluto y mínimo absoluto en I.

DEFINICIÓN 2 (MÍNIMO Y MÁXIMO RELATIVOS). Sea $f: I \subset R \to R$ una función real de variable real definida en el intervalo I, sea el intervalo $J \subset I$ un intervalo abierto y sea $x_0 \in J$, entonces:

a) Si f tiene un mínimo en J, $f(x_0)$ llamado mínimo relativo.

b) Si f tiene un máximo en J, $f(x_0)$ denominado máximo relativo.

Nota. A los valores mínimos o máximos también se les llama valores extremos de la función f.

DEFINICIÓN 3 (PUNTO CRÍTICO). Sea $f: I \subset R \to R$ una función real de variable real continua definida en el intervalo I. Un valor x_0 de I es llamado punto crítico de f si cumple:

a) $f'(x_0) = 0$, o b) $f'(x)$ no existe, o c) x_0 es un extremo del intervalo I.

OBSERVACIÓN. Los valores extremos solo ocurren en puntos críticos.

EXTREMOS DE UNA **FUNCIÓN** DEFINIDA EN INTERVALO CERRADO.

Si $f: I \subset R \to R$ es una función real de variable real, continua en el intervalo cerrado I, sus valores extremos se hallan siguiendo estos pasos:

a) Se halla los puntos críticos de f en I.

b) Se evalúa cada punto crítico en la función f.

c) El menor de tales valores es el mínimo absoluto y el mayor, el máximo absoluto.

Ejemplo 1. Hallar los valores extremos de la función $f(x) = 2 + 2x - x^2$ para $x \in [-0{,}6;\ 2]$.

Solución.

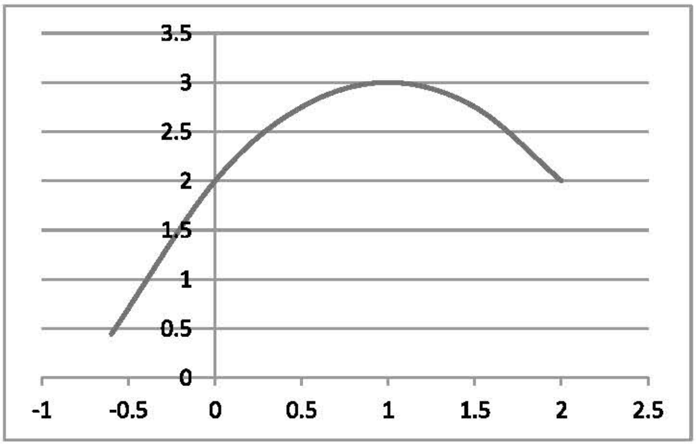


Figura 4.12

a) Hallamos los puntos críticos (existe tres formas de obtenerlos):

i) $f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2 - 2x = 0$, entonces: $x = 1$.

ii) $f'(x)$ siempre existe, aquí no hay $P.C$.

iii) Los extremos del intervalo son $x = -0{,}6$, $x = 2$. Entonces $P.C. = \{-0{,}6;\ 1;\ 2\}$

b) Evaluamos $f(-0{,}6) = 0{,}44$, $\qquad f(1) = 3 \qquad f(2) = 2$.

c) El mínimo absoluto es $f(-0{,}6) = 0{,}44$; y, el máximo absoluto es $f(1) = 3$. (Ver Figura 4.12).

Ejemplo 2. Hallar los valores extremos de la función $g(x) = 2x - 3x^{2/3}$ para $0 \leq x \leq 8$, cuya gráfica se muestra a continuación.

Solución.

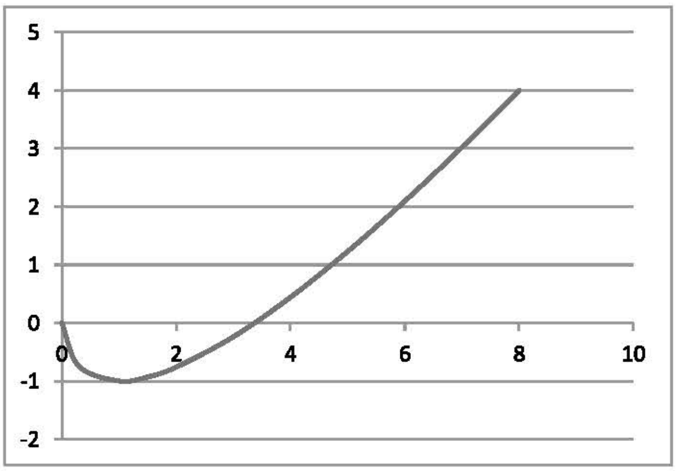


Figura 4.13

a) Hallamos los puntos críticos (con las tres formas de obtenerlos):

i) $g'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2 - 2x^{-1/3} = 0$, entonces $x = 1$.

ii) $g'(x) = 2 - 2x^{-1/3}$, no existe si $x = 0$.

iii) Los extremos del intervalo son: $x = 0$, $x = 8$. Entonces los puntos críticos son $PC = \{0;\ 1;\ 8\}$

b) Evaluamos $f(0) = 0 \qquad f(1) = -1 \qquad f(8) = 4$.

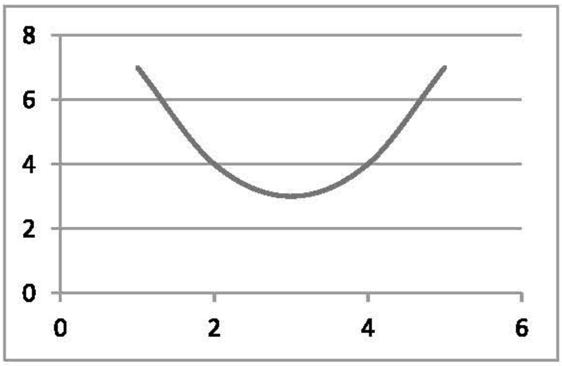
c) El mínimo absoluto es $f(1) = -1$; y, el máximo absoluto es $f(8) = 4$. (Ver Figura 4.13).

4.6. SEGUNDA DERIVADA Y CONCAVIDAD DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN REAL

TEOREMA. Sea $f: I\subset R \rightarrow R$ una función real que admite derivada de segundo orden en el intervalo abierto $I\subset R$.

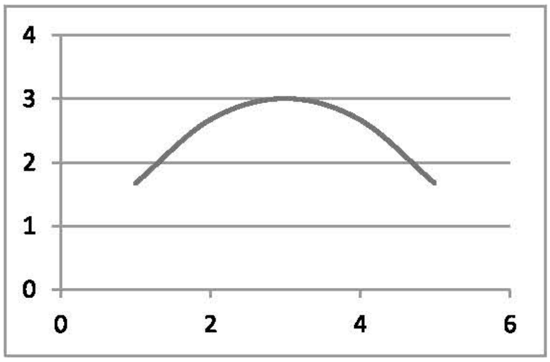
a) Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava hacia arriba en I. (Ver Figura 4.14).

b) Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava hacia abajo en I. (Ve Figura 4.15).



La función f es cóncava hacia arriba.

Figura 4.14



La función f es cóncava hacia abajo.

Figura 4.15

Ejemplo 1. Sea la función $f(x) = 4 - 2x - x^2$ hallar donde f es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

Solución. La derivada de orden uno es $f'(x) = -2 - 2x$.

a) La función f es creciente si $f'(x) > 0 \rightarrow -2 - 2x > 0 \rightarrow x < -\frac{1}{2}$.

Es creciente en $x \in \left\langle -\infty; -\frac{1}{2} \right\rangle$

b) La función f es decreciente si $f'(x) < 0 \rightarrow -2 - 2x < 0 \rightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Es decreciente en $x \in \left\langle -\frac{1}{2}; +\infty \right\rangle$

c) La derivada de orden dos es $f''(x) = -2$.

La función f es cóncava hacia abajo en todo R, pues $f''(x) = -2 < 0$. (Ve Figura 4.16).

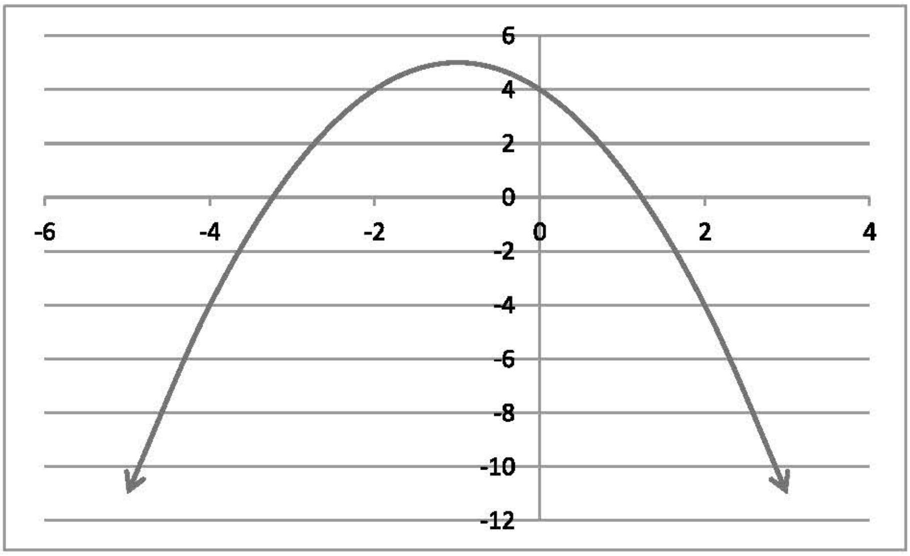


Figura 4.16

Ejemplo 2. Determine en qué intervalos del dominio, la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

Solución. La derivada de orden uno es $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$.

La derivada de orden dos es $f''(x) = 60x^3 - 30x$.

a) La función f es creciente si $f'(x) > 0 \rightarrow 15x^4 - 15x^2 > 0 \rightarrow x \in (\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle)$.

Es creciente en el intervalo $J = \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$.

b) La función f es decreciente si $f'(x) < 0 \rightarrow 15x^4 - 15x^2 < 0 \rightarrow x \in (\langle -1; 0\rangle \cup \langle 0; 1\rangle)$.

Es creciente en el intervalo $K = \langle -1; 0\rangle \cup \langle 0; 1\rangle$.

c) La función f es cóncava hacia arriba si $f''(x) > 0 \rightarrow 60x^3 - 30x > 0$.

Es cóncava hacia arriba en el intervalo $J = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right\rangle$.

d) La función f es cóncava hacia abajo si $f''(x) < 0 \rightarrow 60x^3 - 30x < 0$.

Es cóncava hacia arriba en el intervalo $K = \left\langle -\infty; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle \cup \langle 0; \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$. (Ver figura 4.17).

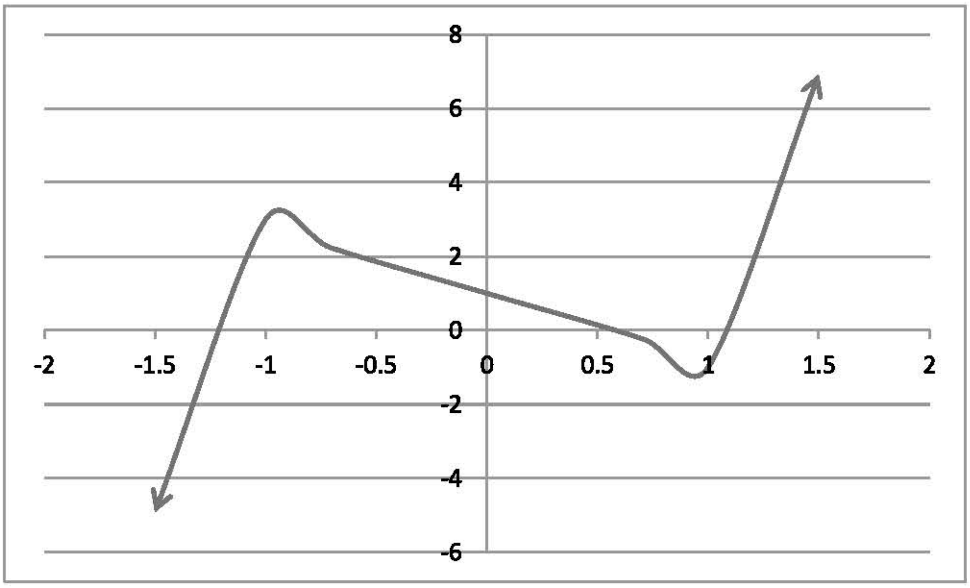


Figura 4.17

4.7. BOSQUEJO DE CURVAS POLINOMIALES Y RACIONALES

Ejemplo 1. Usando derivadas, graficar la función $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 40$ y mostrar sus elementos más importantes.

Solución.

1) El dominio de la función es todo el conjunto de los números reales $Dom(f) = R$.

2) Hallamos las derivadas de orden 1 y de orden 2:

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$ y $f''(x) = 6x - 12$

3) Hallamos los puntos críticos de la función, igualamos a cero de derivada de orden 1:

$3x^2 - 12x - 15 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-5)(x+1) = 0$

$\rightarrow \quad PC = \{-1; 5\}$

4) Buscamos donde f es creciente o decreciente:

Es creciente si $f'(x) > 0$: $3(x-5)(x+1) > 0 \rightarrow x\epsilon\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 5; +\infty\rangle$

Es decreciente si $f'(x) < 0$: $3(x-5)(x+1) < 0 \rightarrow x\epsilon\langle -1; 5\rangle$

Obsérvese aquí lo siguiente: $\underbrace{\langle -\infty; -1\rangle}_{crece} \cup \underbrace{\langle -1; 5\rangle}_{decrece} \cup \underbrace{\langle 5; +\infty\rangle}_{crece}$, entonces en $x = -1$ ocurre un máximo y en $x = 5$ ocurre un mínimo.

5) Buscamos los puntos de inflexión (puntos de cambio de concavidad), igualamos a cero la derivada de orden 2: $f''(x) = 0$

$6x - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$, siendo $y = 6 \quad \rightarrow \quad PI = \{(2; 6)\}$

6) Buscamos las concavidades de la función:

Si $f''(x) > 0$, f es cóncava hacia arriba: $6x - 12 > 0 \rightarrow x\epsilon\langle -\infty; 2\rangle$

Si $f''(x) < 0$, f es cóncava hacia abajo: $6x - 12 < 0 \rightarrow x\epsilon\langle 2; +\infty\rangle$

7) Ubicamos los puntos principales de f con los PC y los PI; y al ordenarlos, son $(-1; 48)$, $(2;\ 6)$, $(5; -60)$

8) Buscamos la intersección con los ejes coordenados.

La intersección de f con el eje Y: se hace $x = 0$ en $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 40$, queda $y = 40$, entonces corta en $y = 40$.

La intersección de f con el eje X: se hace $y = 0$ en $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 40$, entonces corta en $x = -3{,}1$; $x = 1{,}8$; y $x = 7{,}3$.

9) Se ubica en el plano cartesiano los puntos críticos PC y sus ordenadas, el punto de inflexión PI y los puntos de intersección con los ejes coordenados y se traza la curva que se muestra en la figura a continuación.

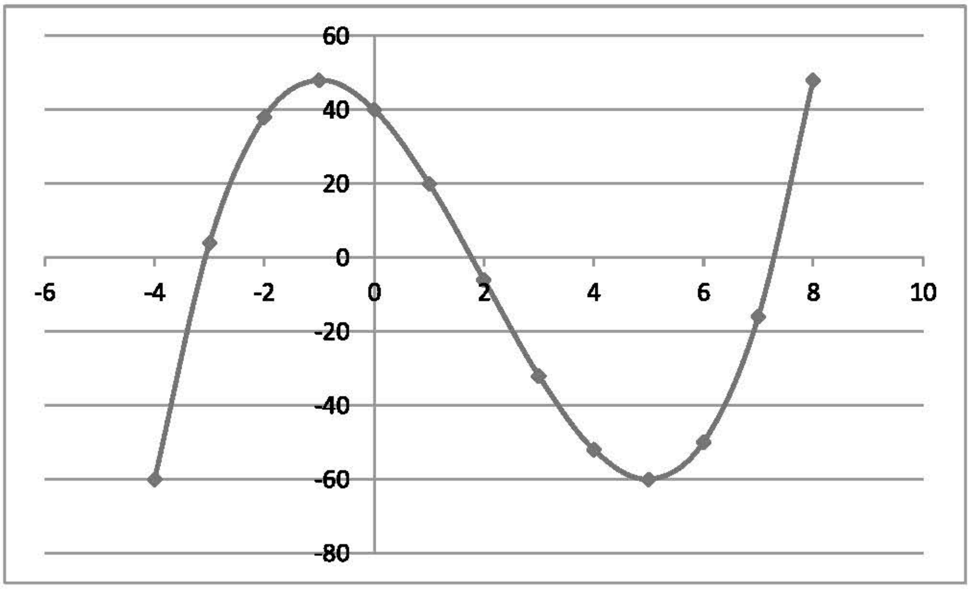


Figura 4.18

Ejemplo 2. Usando derivadas, graficar la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y mostrar sus elementos más importantes.

Solución.

1) El dominio de la función es todo el conjunto de los números reales $Dom(f) = R$.

2) Hallamos las derivadas de orden 1 y de orden 2: $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ y $f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$

3) Hallamos los puntos críticos de la función, igualamos a cero la derivada de orden 1:

$\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \to \quad -2x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad PC = \{0\}$

4) Buscamos donde f es creciente o decreciente:

Es creciente si $f'(x) > 0$: $\frac{-2x}{(1+x^2)^2} > 0 \ \to \ x\epsilon\langle-\infty; 0\rangle$

Es decreciente si $f'(x) < 0$: $\frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0 \ \to \ x\epsilon\langle 0; +\infty\rangle$

Obsérvese aquí lo siguiente: $\underbrace{\langle-\infty; 0\rangle}_{crece} \cup \underbrace{\langle 0;\ +\infty\rangle}_{decrece}$, entonces en $x = 0$ ocurre un máximo. Su ordenada respectiva es $y = 1$

5) Buscamos los puntos de inflexión (puntos de cambio de concavidad), igualamos a cero la derivada de orden 2: $f''(x) = 0$

$\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} = 0 \quad \to \quad 2(3x^2-1) = 0 \quad \to \quad 3x^2 - 1 = 0 \quad \to \quad x^2 = \frac{1}{3}$

$\to \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, siendo para ambos $y = \frac{3}{4} \quad \to \quad PI = \{\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}\right)\}$

6) Buscamos las concavidades de la función:

Si $f''(x) > 0$, f es cóncava hacia arriba: $\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} > 0 \to x\epsilon \left\langle-\infty; \frac{-\sqrt{3}}{3}\right\rangle \cup \left\langle\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right\rangle$

Si $f''(x) < 0$, f es cóncava hacia abajo: $\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} < 0 \to x\epsilon \left\langle\frac{-\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$

7) Ubicamos los puntos principales de f con los PC y los PI; al ordenarlos, son $(0; 1)$, $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}\right)$ o lo que es lo mismo: $(0; 1)$, $(-0{,}58 ; 0{,}75)$, $(0{,}58 ; 0{,}75)$

8) Buscamos la intersección con los ejes coordenados.

La intersección de f con el eje Y: se hace $x = 0$ en $y = \frac{1}{1+x^2}$, entonces corta en $y = 1$.

La intersección de f con el eje X: se hace $y = 0$ en $y = \frac{1}{1+x^2}$; lo cual resulta absurdo, entonces no corta al eje X.

9) Se ubica en el plano cartesiano los puntos críticos PC y sus ordenadas, el punto de inflexión PI y los puntos de intersección con los ejes coordenados y se traza la curva que se muestra en la figura a continuación.

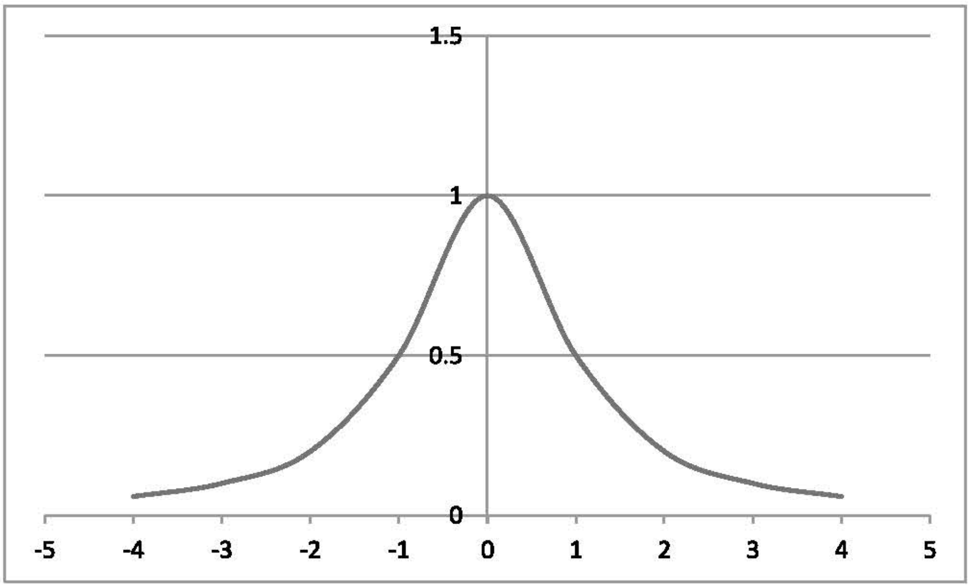


Figura 4.19

Ejemplo 3. Usando derivadas, graficar la función $f(x) = 3x^4 + 4x^3$, así también, mostrar sus elementos más importantes.

Solución.

1) El dominio de la función es todo el conjunto de los números reales $Dom(f) = R$.

2) Hallamos las derivadas de orden 1 y de orden 2:

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$ y $f''(x) = 36x^2 + 24x$

3) Hallamos los puntos críticos de la función, igualamos a cero la derivada de orden 1:

$12x^3 + 12x^2 = 0 \quad \rightarrow 12x^2(x+1) = 0 \quad \rightarrow x^2(x+1) = 0 \quad \rightarrow x = 0$ o $x = -1$

$\rightarrow \quad PC = \{-1; 0\}$

4) Buscamos donde f es creciente o decreciente:

Es creciente si $f'(x) > 0$: $12x^3 + 12x^2 > 0 \rightarrow x^2(x+1) > 0 \rightarrow x\epsilon\langle -1; 0\rangle \cup \langle 0; +\infty\rangle$

Es decreciente si $f'(x) < 0$: $12x^3 + 12x^2 < 0 \rightarrow x^2(x+1) > 0 \rightarrow x\epsilon\langle -\infty; -1\rangle$

Obsérvese aquí lo siguiente: $\underbrace{\langle -\infty; -1\rangle}_{decrece} \cup \underbrace{\langle -1; 0\rangle}_{crece} \cup \underbrace{\langle 0; +\infty\rangle}_{crece}$, entonces en $x = -1$ ocurre un mínimo local.

5) Buscamos los puntos de inflexión (puntos de cambio de concavidad), igualamos a cero la derivada de orden 2: $f''(x) = 0$

$6x - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$, siendo $y = 6 \quad \rightarrow \quad PI = \{(2; 6)\}$

6) Buscamos las concavidades de la función:

Si $f''(x) > 0$, f es cóncava hacia arriba: $36x^2 + 24x > 0 \rightarrow 6x(6x + 4) > 0 \rightarrow x(6x + 4) > 0$

$\rightarrow x = 0$ o $x = \frac{-2}{3} \rightarrow x\epsilon \langle -\infty; \frac{-2}{3} \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$

Si $f''(x) < 0$, f es cóncava hacia abajo: $36x^2 + 24x < 0 \rightarrow 6x(6x + 4) < 0 \rightarrow x(6x + 4) < 0$

$\rightarrow x = 0$ o $x = \frac{-2}{3} \rightarrow x\epsilon \langle \frac{-2}{3}; 0 \rangle$

7) Ubicamos los puntos principales de f con los puntos críticos PC $(-1; -1)$, $(0;\ 0)$ y el punto de inflexión PI $(2; 6)$.

8) Buscamos la intersección con los ejes coordenados.

La intersección de f con el eje Y: se hace $x = 0$ en $y = 3x^4 + 4x^3$, queda $y = 0$, entonces corta en $y = 0$.

La intersección de f con el eje X: se hace $y = 0$ en $y = 3x^4 + 4x^3$, entonces corta en $x = 0$ y en $x = -\frac{4}{3}$

9) Se ubica en el plano cartesiano los puntos críticos PC y sus ordenadas, el punto de inflexión PI, los puntos de intersección con los ejes coordenados y se traza la curva que se muestra a continuación en la Figura 4.20.

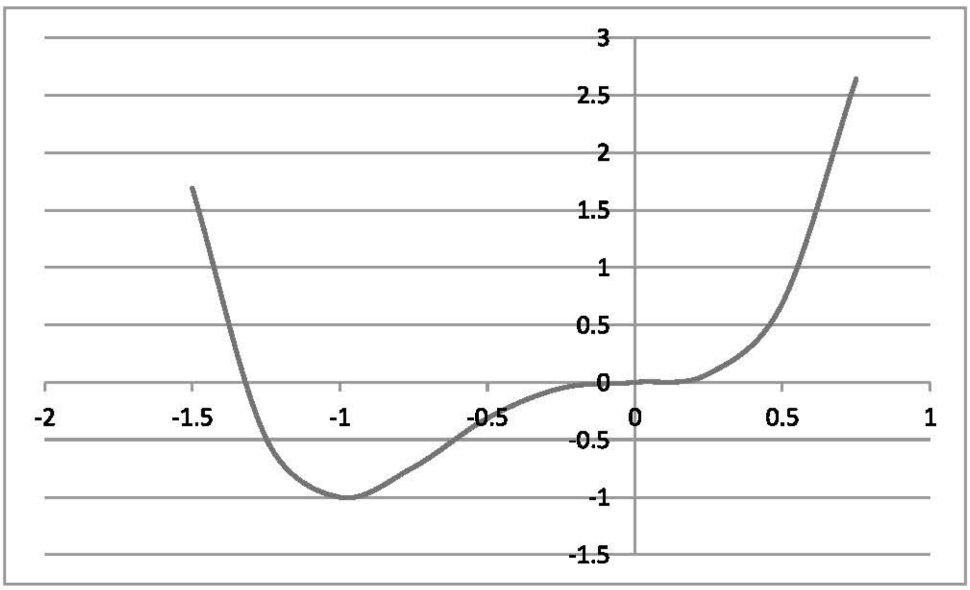


Figura 4.20

4.8. SEGUNDA DERIVADA Y VALORES EXTREMOS RELATIVOS

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA HALLAR VALORES EXTREMOS.

TEOREMA. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real de variable real tal que $f'(x) = 0$ y tal que la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a x_0, entonces:

a) Si $f''(x) > 0$, $f(x_0)$ es un mínimo relativo. (El máximo relativo es $f(x_0)$).

b) Si $f''(x) < 0$, $f(x_0)$ es un máximo relativo.(El máximo relativo es $f(x_0)$).

c) Si $f''(x) = 0$, el criterio no es aplicable (usar otro criterio).

Ejemplo 1. Hallar los valores extremos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ para $x \in R$.

Solución.

a) Hallamos los PC: $f'(x) = 0$, $3x^2 - 6x = 0$, entonces $x = 0$ y $x = 2$.

b) Hallamos $f''(x) = 6x - 6$.

c) Evaluamos cada PC en la segunda derivada y aplicamos el teorema:

$f''(0) = -6 < 0$, entonces $f(0) = 0$ es un máximo absoluto.

$f''(2) = 6 > 0$, entonces $f(2) = -4$ es un mínimo relativo. (Ver Figura 4.21).

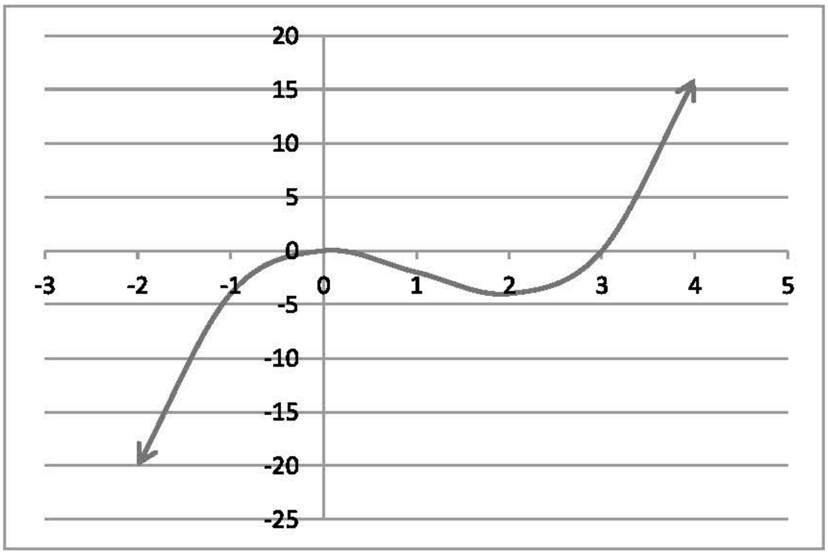


Figura 4.21

Ejemplo 2. Hallar los valores extremos de la función $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 1$ para $x \in R$.

Solución.

a) Hallamos los PC: $f'(x) = 0$, $4x^3 + 3x^2 - 6x = 0$, entonces $x = 0$; $x = 0{,}9$; $x = -1{,}65$.

b) Hallamos la segunda derivada: $f''(x) = 12x^2 + 6x - 6$.

c) Evaluamos cada PC en la segunda derivada y aplicamos el teorema:

$f''(0) = -6 < 0$, entonces $f(0) = 1$ es el máximo relativo.

$f''(0{,}9) = 9{,}12 > 0$, entonces $f(0{,}9) = -0{,}45$ es un mínimo relativo.

$f''(-1{,}65) = 15{,}12 > 0$, entonces $f(-1{,}65) = -4{,}22$ es un mínimo relativo.

(Ver Figura 4.22).

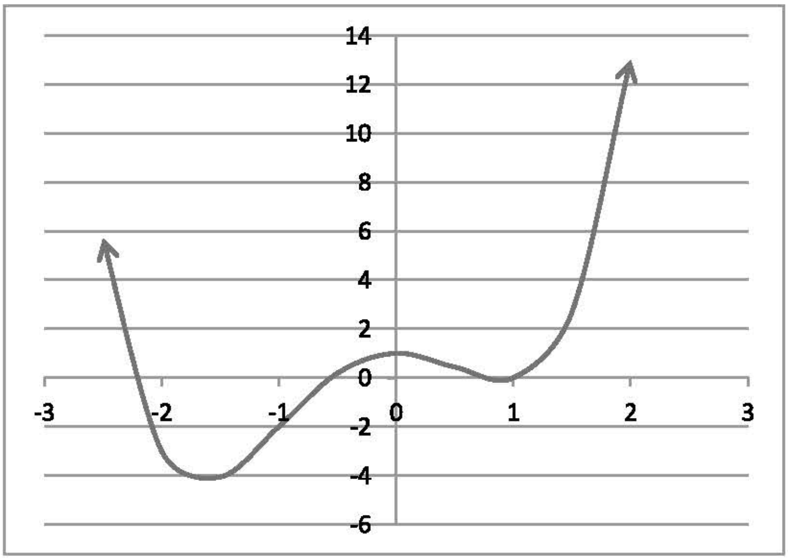


Figura 4.22

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN – APLICACIONES DE LOS VALORES EXTREMOS.

Son problemas de aplicación que consisten en hallar mínimos o máximos específicos como, por ejemplo, los siguientes: máximo beneficio, mínimo costo, máximo beneficio, máxima intensidad, distancia máxima...

Proceso de resolución.

a) Asignar símbolos o letras a todas las cantidades dadas o por determinar. De ser posible elaborar un esquema del problema.

b) Escribir una ecuación primaria para la magnitud que se desea optimizar (hacer mínima o máxima).

c) Reducir o transformar la ecuación primaria en otra que tenga una sola variable independiente. Para esto se puede exigir el uso de ecuaciones secundarias que relacionen las variables independientes de la ecuación primaria.

d) Determinar el dominio de la ecuación primaria, es decir, los valores para los cuales el problema tenga sentido.

e) Hallar el máximo o mínimo por medio de las técnicas ya estudiadas.

PROBLEMA 1. Un ranchero tiene 20 Km de alambrada para delimitar un terreno rectangular a lo largo de un río. Si no fuera necesario que existiese alambrada a la orilla del río, ¿cuál sería el perímetro que produciría el área máxima? ¿Cuál es el área máxima?

Solución.

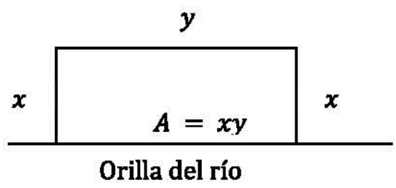


Figura 4.23

a) De la Figura 4.23, sea $x =$ ancho, y $=$ largo, $A =$ área, $p =$ perímetro.

b) Se desea maximizar el área (Ecuación primaria): $A = xy$.

c) Como se tiene 20 km de alambrada (perímetro), tiene (ecuación secundaria):

$$p = 2x + y; \quad \text{o} \quad 20 = 2x + y; \quad \text{o} \quad y = 20 - 2x.$$

Reemplazando en la ecuación primaria: $A = xy = x(20 - 2x)$; o $A = 20x - 2x^2$.

d) El dominio. Puesto que A, x e y son dimensiones, deben ser cantidades positivas: $A > 0$, $x > 0$, $y > 0$, de esta última $20 - 2x > 0$, de donde $x < 10$, junto con $x > 0$ se tendrá finalmente $Dom(A) = \langle 0;\ 10\rangle$.

La función área con su dominio serán $A(x) = 20 - 2x, x \in \langle 0;\ 10\rangle$.

e) Hallando área máxima.

Encontramos los PC con los tres criterios:

i) $A'(x) = 0$, entonces ii) $PC = \{5\}$ iii) No hay PC.

f) Aplicamos criterio de la segunda derivada: $A''(x) = -2$, y $A''(5) = -2$ entonces se produce máximo. Las dimensiones del terreno que dan el área máxima serán $x = 5$, $y = 20 - 2(5) = 10$.

El área máxima será $A(5) = 20(5) - 2(5)^2 = 50$.

Nota. Otras dimensiones producirán un terreno de menor área.

PROBLEMA 2. Se desea construir una caja abierta de base cuadrada empleando 108 cm² de material. ¿Qué dimensiones tiene una caja de máximo volumen?

Solución.

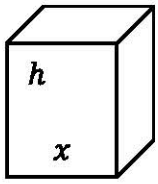


Figura 4.24

a) De la Figura 4.24, sean x = lado de la base, h = altura, S = área del material y V = volumen de la caja.

b) Se desea maximizar el volumen V (ecuación primaria): $V = x^2h$.

c) La cantidad de material disponible es $S =$ 108 cm2 (ecuación secundaria):

$S =$ (Área de la base)+(Área lateral)

$S = x^2 + 4xh$ o $108 = x^2 + 4xh$ o $h = \frac{108-x^2}{4x}$

Reemplazando en la ecuación primaria se tendrá $V = 27x - \frac{x^3}{4}$

d) Se trata de dimensiones de una caja, por lo tanto, $V > 0, x > 0, h > 0$. De estas dos últimas condiciones, se obtiene que $x \in \langle 0; \sqrt{108} \rangle$. La función volumen con su dominio serán $V = 27x - \frac{x^3}{4}$ con $x \in \langle 0; \sqrt{108} \rangle$.

e) Hallando el volumen máximo.

f) Encontramos los PC con los tres criterios:

i) $V'(x) = 0$, entonces $PC = \{6\}$ ii) No hay PC. iii) No hay PC.

g) Aplicamos criterio de la segunda derivada: $V''(x) = -\frac{3}{2}x$, $V''(6) = -9$, entonces se produce máximo. Las dimensiones de la caja que producen el volumen máximo serán $x = 6$, $h = \frac{108-6^2}{4(6)} = 3$.

El volumen máximo será $V(6) = 27(6) - \frac{6^3}{4} = 108 = 108$ cm³.

Nota. Una caja con otras dimensiones producirá una caja de menor volumen.

PROBLEMA 3. Tanto los biólogos como los psicólogos estudian las respuestas a diversos estímulos. En ciertos animales la respuesta al estímulo se mide por la contracción del iris después de exponer el ojo a una luz brillante. Supóngase que la respuesta se modela por

$S(t) = \begin{cases} t^2, & si\ 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{8}{t}, & si\ t > 2 \end{cases}$, donde "$t$" es el tiempo en segundos después que se concentra la luz en el ojo. ¿En qué instante se presenta la respuesta máxima?

Solución.

El cambio en la definición de $S(t)$ en $t = 2$ hace ver la posibilidad de una discontinuidad por salto o una esquina en $t = 2$.

Como $\underset{t\to 2^-}{Lím}(t^2) = 4$, $\underset{t\to 2^+}{Lím}\left(\frac{8}{t}\right) = 4$, y $S(2) = 4$, se ve que $S(t)$ es continua en $t = 2$.

La posibilidad de una esquina en $t = 2$ se investiga al analizar la derivada (a través de la pendiente) a cada lado de $t = 2$, en efecto, $S'(t) = \begin{cases} 2t, & si\ 0 < t < 2 \\ \frac{-8}{t^2}, & si\ t > 2 \end{cases}$

En $t = 2$: $\underset{t\to 2^-}{Lím}(2t) = 4$, $\underset{t\to 2^+}{Lím}\left(\frac{-8}{t^2}\right) = -2$, lo cual indica que la gráfica de $S(t)$ tiene una esquina en $t = 2$,;esto quiere decir que la derivada no existe en $t = 2$. Además, debemos observar que se pasa de $(+)$ a $(-)$, es decir, ocurrirá un máximo aquí.

a) Hallando puntos críticos con los tres criterios:

i) $S'(t) = 0$, no hay PC.

ii) $S'(t)$ no existe si $t = 2$

iii) En el (intervalo) dominio tiene el extremo t=0.

b) La respuesta máxima se da cuando $t = 2$. (Ver Figura 4.25).

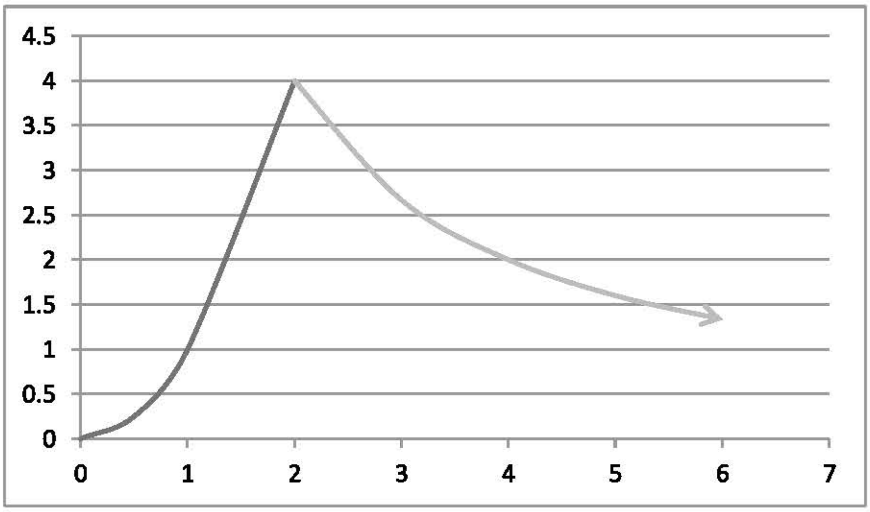


Figura 4.25

4.9. DIFERENCIALES Y CÁLCULO DE ERRORES RELATIVOS Y ERRORES PORCENTUALES

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN REAL.

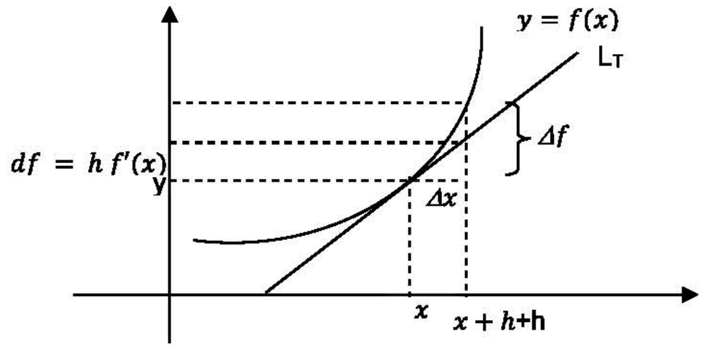


Figura 4.26

DEFINICIÓN. Sea $f: I\subset R\to R$ una función diferenciable y sean x y $x+h$ valores del $Dom(f)$, entonces apoyándose en la Figura 4.26:

a) Al número $\Delta x = (x+h) - x = h$, se le llama incremento de x.

b) Al número $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$, se le denomina incremento de f en x y además $f(x+h) = f(x) + \Delta f(x)$.

c) La expresión $h \cdot f'(x)$ se denomina diferencial de f en x, el cual se denota por $df = h \cdot f'(x)$.

El incremento de f en x puede ser aproximado mediante la diferenciable f en x, es decir:

$$\Delta f(x) \approx h \cdot f'(x) = \Delta x \cdot f'(x) = f'(x)\,dx$$

De donde, $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\,dx$.

Como $f(x+h)$ puede ser aproximado mediante diferenciales, entonces podemos hallar valores aproximados de la función $y = f(x)$ en las aplicaciones. Además, como $\Delta x = h = dx$, se tiene $df(x) = f'(x)\,dx$.

La diferencial de una función se calcula usando las mismas reglas de derivación de las funciones reales.

Ejemplo 1. Calcular el diferencial de las siguientes funciones:

a) Si $f(x) = Sen(x^2+8)$, entonces su diferencial es $df(x) = Cos(x^2+8)\,2x\,dx$.

b) Si $h(x) = u(x)\cdot v(x)$, entonces su diferencial es $df(x) = u\cdot dv + v \cdot du$.

c) Si $y = u^{3/2}$, entonces su diferencial es $dy = \frac{3}{2}\,u^{1/2}\,du$

d) Si $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, entonces su diferencial es $dh(x) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

e) Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, entonces su diferencial es $df(x) = \frac{dx}{2\sqrt{x^2-4}}$.

Ejemplo 2. Calcule el valor aproximado de $\sqrt{145}$ y compare con el valor exacto.

Solución.

La función será $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x+h) = \sqrt{x+h}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Si $x = 144$, $h = 1$.

Entonces $f(144) = \sqrt{144} = 12$, $f(144+1) = \sqrt{144+1} = \sqrt{145}$, $f'(x) = \frac{1}{24}$ =0,0416666

Luego, $f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x)$.

Aproximando: $f(144+1)$=, $f(144) + (1) \cdot f'(144)$ =, $12 + 0{,}0416666 = 12.0416666$

El valor exacto es $\sqrt{145} = 12{,}0415945$

Se muestra un error de 0,000072021, es bastante aproximado.

Ejemplo 3. Se mide el radio de un círculo y se obtiene una medida aproximada de 30 pulgadas, con un error probable de 0,0025 pulgadas. Al medir el área del círculo, determinar lo siguiente: El error absoluto, el error relativo, el error porcentual y el perímetro del círculo.

Solución.

El radio es $r = 30$ pulgadas y el error en la medida es $dr = \pm 0{,}0025$ pulgadas.

La función que permite hallar el área es $A(r) = \pi r^2$, y su derivada es $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$.

a) El diferencial del área será $dA(r) = 2\pi r\, dr$.

Reemplazando los datos $dA(30) = 2\pi(30)(\pm 0{,}0025) = \pm 0{,}15\pi$ pulgadas cuadradas.

Por tanto, el error absoluto es $dA(30) = \pm 0{,}15\pi$ pulgadas cuadradas.

Lo cual denota que el error total cometido al medir el área del círculo es de $\pm 0{,}15\pi$ pulgadas cuadradas.

b) El error relativo se obtiene de $ER = \frac{dA}{A}$

Reemplazando los datos se obtiene $ER = \frac{\pm 0{,}15\pi}{\pi(30)^2} = \pm 0{,}00017$.

Esto significa que por cada pulgada cuadrada que se mida en el círculo, se está cometiendo un error de $\pm 0{,}00017$.

c) El error porcentual se obtiene de $EP = ER(100)\%$

Reemplazando los datos se llega a $EP = \pm 0{,}00017(100)\% = \pm 0{,}017\ \%$

Se entiende que por cada 100 pulgadas cuadradas que se mida en el área del círculo, se estará cometiendo un error aproximado de $\pm 0{,}017\ \%$.

d) El perímetro del círculo se obtiene de $P = 2\pi r$

Reemplazando los datos se llega a $P = 2\pi(30) = 188{,}495$ pulgadas.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

RESOLVER LOS SIGUIENTES PROBLEMAS:

PROBLEMA 1. (*Cantidad de productos en función del gasto en publicidad*) Utilizando datos registrados se estima que una empresa venderá N unidades de un producto después de gastar $\$x$ miles en publicidad, calculadas mediante la función $N(x) = 60x - x^2$ con $5 \leq x \leq 30$.

a) Determinar $N'(x)$, es decir, la razón de cambio de las ventas por unidad de cambio en dinero gastado en publicidad al nivel de $\$x$ millares.

b) Encontrar $N(10)$ con $N'(10)$, luego $N(20)$ con $N'(20)$ e interpretar.

Solución.

a) Calculamos la derivada de $N(x)$: $\quad N'(x) = 60 - 2x$.

b) Calculamos $N(10) = 500$, lo cual significa que "al gastar 10000 dólares en publicidad, la empresa venderá 500 unidades de su producto".

Y $N'(10) = 40$, es decir que "a un nivel de gastos de 10000 dólares en publicidad, podría haber un incremento de 40 unidades en las ventas al desear incrementar la publicidad en 1000 dólares".

$N(20) = 800$, se entiende que "al gastar 20000 dólares en publicidad, la empresa venderá 800 unidades de su producto".

Y $N'(20) = 20$, significa que "al nivel de gastos de 20000 dólares en publicidad, podría haber un incremento de 20 unidades en las ventas al desear incrementar la publicidad en 1000 dólares".

En la Figura 4.27, se muestra la gráfica de la función $N(x)$.

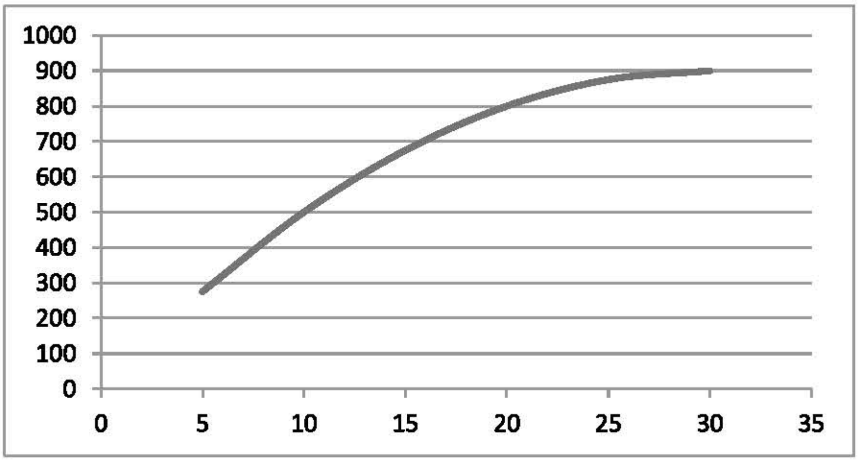


Figura 4.27

Se presenta a continuación la gráfica de la función $N'(x)$ en la Figura 4.28.

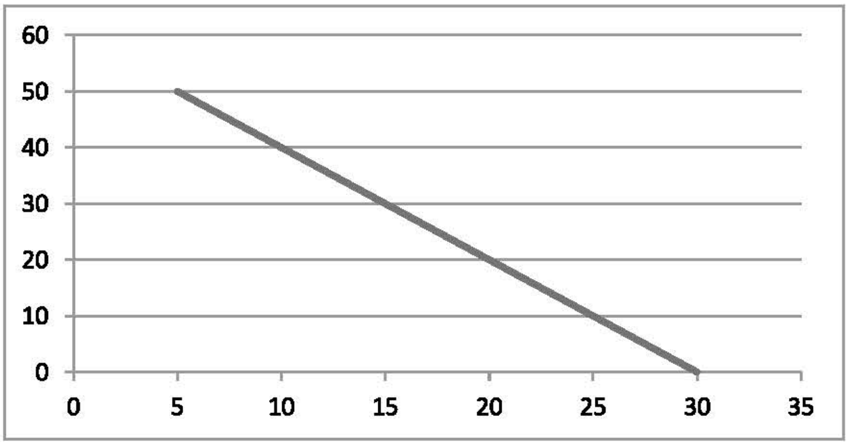


Figura 4.28

PROBLEMA 2. (*Concentración de dióxido de azufre en función de la distancia en millas*) Una planta que genera energía eléctrica mediante la combustión de carbón libera dióxido de azufre al aire circundante. La concentración C en partes por millón se calcula aproximadamente con la fórmula $C(x) = \frac{0,1}{x^2}$, donde "x" es la distancia desde la planta en millas. Calcular la razón de cambio instantánea de la concentración cuando la distancia es de $x = 1$ milla, $x = 1,5$ y $x = 2$ millas.

Solución.

La razón de cambio es dada por la derivada de la función $C(x)$: $\quad C'(x) = -0,2x^{-3}$.

A una milla de distancia, la concentración será de $C(1) = 0,1$ partes por millón y la razón de cambio será de $C'(1) = -0,2$, lo cual da a entender que "a una milla de distancia de la planta, hay una concentración de 0,1 partes por millón de dióxido de azufre y está disminuyendo con una rapidez de 0,2 partes por millón cada milla de distancia".

A una milla y media, la concentración será de $C(1{,}5) = 0{,}044$ partes por millón y la razón de cambio será de $C'(1.5) = -0{,}059$, es decir, "a una milla y media de distancia de la planta, hay una concentración de 0,044 partes por millón de dióxido de azufre y está disminuyendo con una rapidez de 0,059 partes por millón cada milla de distancia".

A dos millas, la concentración será de $C(2) = 0{,}025$ partes por millón y la razón de cambio será de $C'(2) = -0{,}025$, esto significa que "a dos millas de distancia de la planta, hay una concentración de 0,025 partes por millón de dióxido de azufre y está disminuyendo con una rapidez de 0,025 partes por millón cada milla de distancia".

Nota. También podemos observar que cuanto más nos alejamos de la planta, la concentración de dióxido de azufre y su rapidez disminuyen. (Ver Figura 4.29).

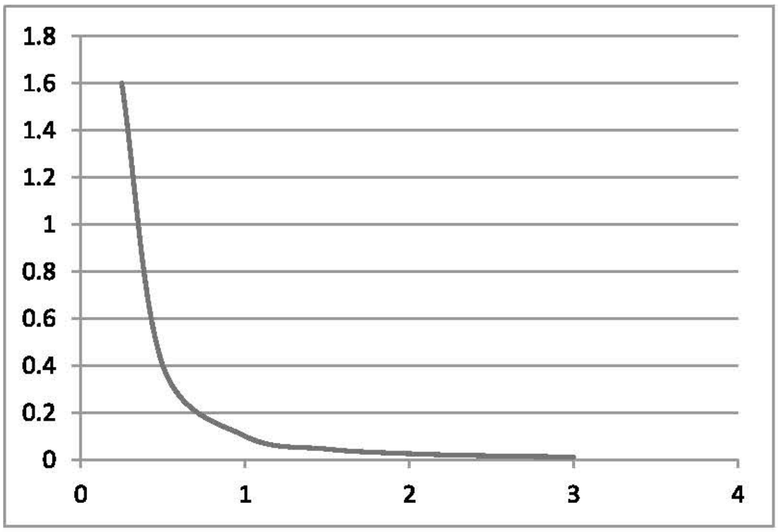


Figura 4.29

PROBLEMA 3. (*Porcentaje del nivel normal de oxígeno en función del tiempo*) La función $f(t) = \frac{t^2-t+1}{t^2+1}$ mide el "porcentaje del nivel normal de oxígeno" que hay en un estanque, donde "t" es el tiempo en semanas, cuantificado desde que el desecho orgánico se arroja en él. Hallar la razón de cambio de "f" respecto a "t", cuando $t = 0{,}5$; $t = 2$ y $t = 8$ semanas.

Solución. La razón de cambio del porcentaje del nivel normal de oxígeno es dada por la derivada de la función $f(t)$, es decir, por $f'(x) = \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}$.

Calculemos lo que piden:

El porcentaje del nivel normal de oxígeno en el estanque para $t = 0{,}5$ es de $f(0{,}5) = 0{,}6$ y la razón de cambio es de $f'(0{,}5) = -0{,}48$. *Significa que a la media semana, la cantidad de oxigeno es del 60 % y está disminuyendo a razón del 48 %.*

El porcentaje del nivel normal de oxígeno en el estanque para $t = 2$ es de $f(2) = 0{,}8$ y la razón de cambio es $f'(2) = -0{,}12$. *Se entiende que a las dos semanas, la cantidad de oxigeno es del 80 % y está disminuyendo a razón del 12 %.*

El porcentaje del nivel normal de oxígeno en el estanque para $t = 8$ es de $f(8) = 0{,}969$ y la razón de cambio es $f'(8) = -0{,}014$. *Significa que a las ocho semanas, la cantidad de oxigeno es del 96,9 % y está disminuyendo a razón del 1,4 %.*

Nota: A medida que el tiempo pasa, el nivel normal de oxígeno tiende a ser del 100%. La velocidad de esa recuperación de oxigeno va disminuyendo.

PROBLEMA 4. (*Temperatura corporal en función de la cantidad de medicamento aplicado*) Una hora después de haberle aplicado a una persona "x" miligramos de cierto medicamento, el cambio en la temperatura corporal T en grados Fahrenheit se calcula aproximadamente con la función $T(x) = x^2\left(1 - \frac{x}{9}\right)$ con $0 \leq x \leq 6$.

La razón con que "t" cambia, respecto a la magnitud de la dosis "x", es $T'(x)$ y se llama sensibilidad del cuerpo a la dosis x.

a) Calcular $T'(x)$ usando regla del producto.

b) Calcular también, $T(1)$ con $T'(1)$; $T'(3)$ con $T'(3)$ y $T(6)$ con $T'(6)$.

Solución.

a) La sensibilidad del cuerpo a la dosis es dada por la derivada de $T(x)$, es decir, por $T'(x) = 2x - \frac{x^2}{3}$.

b) Calculamos lo que piden:

$T(1) = \frac{8}{9}$ y $T'(1) = \frac{5}{3}$, lo cual significa que "cuando se aplica un miligramo del medicamento ,el cambio en la temperatura corporal es de $T(1) = \frac{8}{9} = 0{,}88$ grados Fahrenheit con una razón de cambio de $T'^{(1)} = \frac{5}{3} = 1{,}66$ grados Fahrenheit".

$T(3) = 6$ y $T'(3) = 3$, es decir, "cuando se aplica tres miligramos del medicamento el cambio en la temperatura corporal es de $T(3) = 6$ grados Fahrenheit con una razón de cambio de $T'(3) = 3$ grados Fahrenheit".

$T(6) = 12$ y $T'(6) = 0$, se entiende que "cuando se aplica seis miligramos del medicamento el cambio en la temperatura corporal es de $T(6) = 12$ grados Fahrenheit con una razón de cambio de $T'(6) = 0$ grados Fahrenheit".

En la Figura 3.30, mostramos las gráficas de $T(x)$.

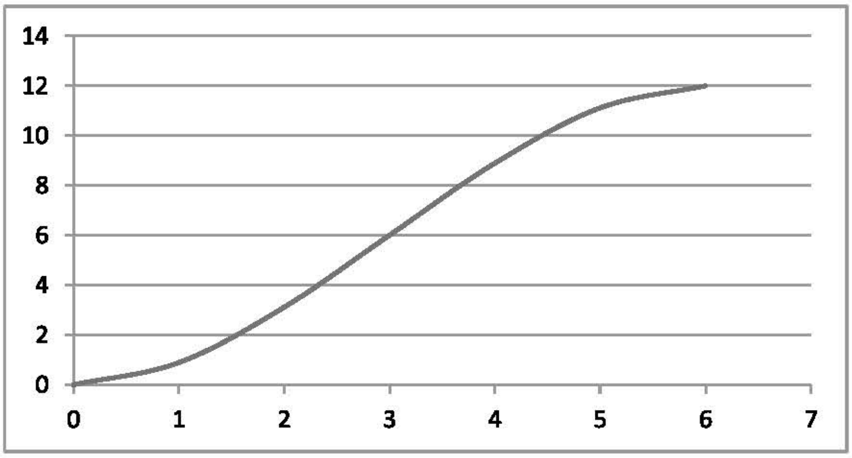


Figura 4.30

A continuación presentamos las gráficas de $T'(x)$ en la Figura 4.31.

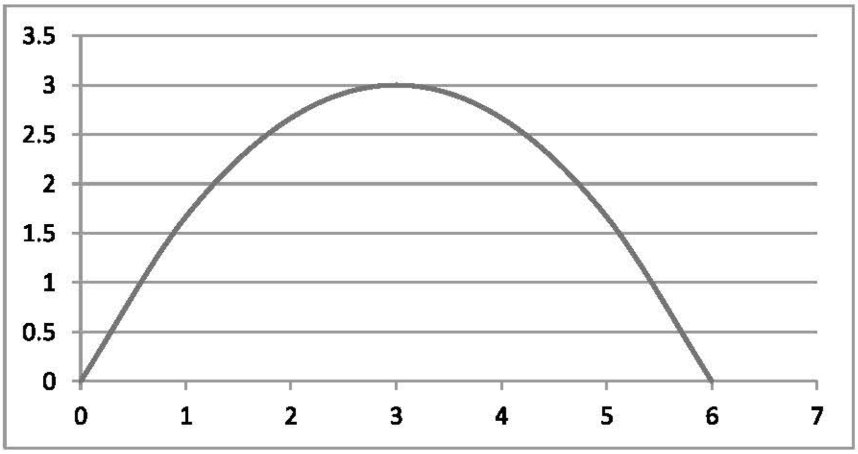


Figura 4.31

4.10. LISTADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

A. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN USANDO DERIVADAS.

1. Una partícula se mueve por sobre una línea recta a razón de $t^3 + 8t^2 + 5t$ pies en t segundos. Hallar su velocidad instantánea al finalizar 5 segundos.

2. Un objeto se mueve a lo largo de una recta de modo que su posición en el tiempo t es modelada por $P(t) = 2t^3 - 4t^2 + 2t + 3$. ¿Cuál es la posición inicial? ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración iniciales? ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración en t=3 segundos?

3. La altura (en pies) en que se encuentra un objeto por encima del piso en el tiempo t (en segundos) es modelada por $S(t) = 192 + 160t - 16t^2$. Determinar las funciones de velocidad y aceleración. ¿Cuáles son la velocidad y aceleración iniciales del objeto? ¿Hasta qué altura llegará? ¿Cuándo choca contra el piso y qué tan rápido va?

B. LA REGLA DE L'HOPITAL.

1. Hallar los siguientes límites:

a) $\underset{x\to 0}{Lím} \frac{\ln(x)}{Cot(x)}$ b) $\underset{x\to +\infty}{Lím} \frac{2x+4}{5x+7}$ c) $\underset{x\to 1}{Lím} \frac{3Sen(\pi x)-Sen(3\pi x)}{x^3}$

d) $\underset{x\to 3}{Lím} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6}\right)$ e) $\underset{x\to 0}{Lím}\, x^3 e^{-3x}$ f) $\underset{x\to +\infty}{Lím}\, x^{(1/x)}$

C. RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS.

1. Considera un depósito de agua en forma de un cono invertido. Cuando el depósito se descarga su volumen disminuye a razón de 50π metros cúbicos por minuto. Si la altura del cono es el triple del radio de su base. Hallar la rapidez con la cual varía el nivel del agua cuando está a 5 metros del fondo del depósito.

Respuesta: El nivel del agua disminuye a razón de 18 metros por minuto.

2. Considera un triángulo rectángulo de catetos a y b. Si el cateto a decrece a razón de 0,5 centímetros por minuto y el cateto b crece a razón de 2 centímetros por minuto, determine la variación del área del triángulo cuando a mide 16 centímetros y b, 12 centímetros.

Respuesta: El área del triángulo aumenta a una velocidad de 13 cm² por segundo.

3. Se vierte arena en el suelo a razón de 0,4 metros cúbicos por segundo. La arena forma en el suelo una pila con la forma de un cono cuya altura es igual al radio de la base. Hallar la velocidad con que aumenta la altura de la pila 10 segundos después de que se empezó a verter la arena.

Respuesta: La altura de la pila cónica aumenta a una velocidad de 0,0521 metros por segundo.

4. Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre los ejes coordenados en dirección positiva y su vértice, que es opuesto al origen, está sobre la curva de ecuación $y = 2^x$. En este último vértice la coordenada y aumenta a razón de una unidad por segundo. Hallar la variación del área del triángulo cuando $x = 2$ unidades.

Respuesta: El área del rectángulo aumenta a una velocidad de 3,443 unidades cuadradas por segundo.

5. El radio r y la altura h de un cilindro circular recto se relacionan con su volumen mediante la fórmula $V = \pi r^2 h$.

a) ¿Cómo se relaciona $\frac{dV}{dt}$ con $\frac{dh}{dt}$ si r es constante?

b) ¿Cómo se relaciona $\frac{dV}{dt}$ con $\frac{dr}{dt}$ si h es constante?

c) ¿Cómo se relaciona $\frac{dV}{dt}$ con $\frac{dr}{dt}$ y $\frac{dh}{dt}$ si ni r ni h son constantes?

d) En cierto instante la altura es de 6 centímetros y se incrementa en un centímetro por segundo, mientras que el radio es de 10 centímetros y disminuye a razón de un centímetro por segundo; ¿con qué rapidez cambia el volumen en ese instante? ¿El volumen aumenta o disminuye en ese instante?

6. En un muelle, una persona tira de un bote a razón de 15 metros por segundo, ayudándose de una soga amarrada al bote, la cual se encuentra al nivel del agua. Si las manos de la persona se hallan a 4,8 metros por encima del nivel del agua, hallar la rapidez con que el bote se aproxima al muelle cuando la cantidad de cuerda suelta es de 6 metros.

D. PRIMERA DERIVADA Y MONOTONÍA DE LAS FUNCIONES REALES.

1. Hallar el intervalo donde f es creciente; así también donde f es decreciente para las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3 - 2x - x^2$ b) $f(x) = -x^3 + 6x + 15x + 4$ c) $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2$

d) $f(x) = -(x-1)^2$ d) $f(x) = 2x + 3x^2 - x^4$

2. Imaginemos que durante un año una función de utilidad se modela por $P(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, con $0 \leq t \leq 12$, donde t es el tiempo en meses. Determinar cuándo crecen y decrecen las utilidades. Trazar la gráfica de $P(t)$.

3. Un objeto se mueve en línea recta según el modelo $S(t) = 80t - 16t^2$, hallar el intervalo donde S es creciente y donde es creciente para $0 \leq t \leq 4$.

E. VALORES EXTREMOS DE LAS FUNCIONES REALES.

1. Hallar los puntos críticos, así como los máximos y mínimos locales de las funciones que se dan a continuación:

a) $f(x) = x^2 + 4x - 5$ b) $f(x) = x^3 + 3x$ c) $f(x) = x^4 - 2x^2$

2. Hallar los puntos críticos, asimismo los máximos y mínimos absolutos de las funciones que se dan a continuación:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$, con $-1 \leq x \leq 4$ b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$, con $0 \leq x \leq 5$

3. Una persona estima que su riqueza en el tiempo t (en años) con $0 \leq t \leq 30$, queda modelada por $S(t) = t^3 - 5t^2 - 3t + 100$. ¿Cuándo será máxima esa riqueza y cuándo mínima?

4. Supongamos que los astrónomos emplean la función $S(t) = t^3 - 48t + 200$, con $t \geq 0$, para modelar la distancia (en miles de millas) de un meteorito a la Tierra en el tiempo t en meses. Determinar el tiempo en el que dicho meteorito se encuentra más cercano a nuestro planeta y cuán cerca llega.

F. SEGUNDA DERIVADA Y CONCAVIDAD DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN REAL.

1. Hallar los posibles puntos de inflexión y determinar los intervalos y tipo de concavidad de la gráfica de las funciones que se dan:

a) $f(x) = -x^3$ b) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 10$ c) $f(x) = x^{2/3}$

G. BOSQUEJO DE CURVAS POLINOMIALES Y RACIONALES.

1. Usando derivadas, graficar la función f mostrando sus elementos más importantes.

a) $f(x) = x^2 - x - 6$ b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

2. Usando derivadas, graficar la función f, mostrando sus elementos más importantes.

a) $f(x) = \frac{3x-12}{x+2}$ b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

H. PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

1. Una caja con base y tapa cuadrada tiene un área superficial de 10 pies cuadrados. Determinar las dimensiones que maximizan el volumen de la caja.

2. Hallar las dimensiones de un techo rectangular que tenga un área de 196 pies cuadrados y perímetro mínimo.

3. Se tiene 120 pies de hojalata para usarlos en la construcción de la parte lateral de dos depósitos, uno circular y otro cuadrado. Determine las dimensiones de cada depósito para que el área total sea máxima.

4. La producción diaria de una mina de cobre que puede operar hasta 14 horas diarias es $56t - 0{,}09t^3$ toneladas pasadas t horas. ¿Cuántas horas diarias debe trabajar la mina para una producción máxima?

5. Un cono de papel para beber agua debe contener 10 centímetros cúbicos de líquido. Encontrar la altura y el radio del cono que requeriría la menor cantidad de papel.

6. ¿En qué lugar de la curva (punto) $y = \frac{1}{1+x^2}$ tiene la tangente con mayor valor de su pendiente?

I. DIFERENCIALES Y CÁLCULO DE ERRORES RELATIVOS Y ERRORES PORCENTUALES.

1. Al medir el radio de un tronco de madera, se obtiene 28 centímetros con un margen de error de 0,25 centímetros. Usando diferenciales, aproximar el máximo error posible cometido al calcular el área de la sección del tronco.

2. Tras calcular el radio de un círculo, se obtiene una medida aproximada de 15 pies, con un error probable de 0,002 pies. Al medir el área del círculo, determinar lo siguiente: El error absoluto, el error relativo, el error porcentual y el perímetro del círculo.

3. Al medir el radio de una esfera, se obtiene el valor aproximado de 7,5 centímetros, con un error probable del 0,25 % del valor obtenido. Mida el volumen de la esfera y determine lo siguiente: El error absoluto, el error relativo, el error porcentual y el área de superficie de la esfera.

Capítulo V

LA ANTIDERIVADA Y LA INTEGRAL INDEFINIDA

CAPÍTULO V

LA ANTIDERIVADA Y LA INTEGRAL INDEFINIDA

CONTENIDO

5.1. La antiderivada.

5.2. La integral indefinida.

5.3. Tabla básica de integración.

5.4. Integración por cambio simple de variable. Sustitución simple.

5.5. Integración por artificios: Desarrollo, simplificación, sumar y restar

5.6. Integración por método de sustitución o cambio de variable.

5.7. Integración por completación de cuadrados en el denominador.

5.8. Método de integración por partes.

5.9. Integración por sustitución trigonométrica.

5.10. Integrales que contienen funciones trigonométricas.

5.11. Integración por fracciones parciales.

5.12. Problemas de aplicación de la integral indefinida.

5.13. Aplicaciones que involucran funciones exponenciales o logarítmicas.

5.14. Listado de ejercicios propuestos.

5.1 LA ANTIDERIVADA

INTRODUCCIÓN El ejercicio de hallar la derivada de una función $y = F(x)$ es llamado *proceso de derivación*, donde se obtiene la función derivada $y' = F'(x)$.

Mediante un proceso "inverso", a partir de la derivada se puede hallar la función original (o primitiva) $y = F(x)$; a esto se denomina *antiderivación*. No obstante, esta función se va a diferenciar de la original en un valor constante, como veremos en los ejemplos.

Ejemplo 1. La función $F(x) = x^4$ tiene por derivada a la función $F'(x) = 4x^3$.

Si a partir de $F'(x) = 4x^3$ se pretende hallar la función original o primitiva se obtendrá más de una, veamos:

$F(x) = x^4 + 3$ o $F(x) = x^4 - 5$, o ... $F(x) = x^4 + C$

Nota. Hallar la antiderivada o primitiva consiste en determinar la función original $y = F(x)$ de la cual proviene la derivada $y' = F'(x)$.

La constante C es un valor real y siempre se adiciona, puesto que en el proceso de derivación es anulada, si nos muestran la derivada de antemano no se sabe si la función original ha tenido o no una constante C. Esto hace que la antiderivada sea en realidad una familia de funciones, una para cada valor de la constante C.

En base a lo anterior es que se define la antiderivada de una función real.

DEFINICIÓN .- Si $y = F(x)$ es una función real, siendo $y' = F'(x)$ su derivada, entonces decimos que $y = F(x)$ es una antiderivada de $y' = F'(x)$.

ALGUNAS **FORMULAS** DE **ANTIDERIVACIÓN** .

Si $F'(x) = k$, entonces $F(x) = kx + C$.

Si $F'(x) = kx^n$, entonces $F(x) = \frac{k}{n+1}x^{n+1} + C, n \neq -1$

Si $F'(x) = k[G(x)]^n \cdot G'(x)$, entonces $F(x) = \frac{k}{n+1}[G(x)]^{n+1} + C$

Si $F'(x) = Sen(x)$, entonces $F(x) = -Cos(x) + C$

Si $F'(x) = Cos(x)$, entonces $F(x) = Sen\ (x) + C$

Si $F'(x) = kSen[G(x)]. G'(x)$, entonces $F(x) = -kCos[G(x)] + C$

Si $F'(x) = kCos[G(x)]. G'(x)$, entonces $F(x) = kSen[G(x)] + C$

Si $F'(x) = k[G(x)]'$, entonces $F(x) = kG(x) + C$

Si $F'(x) = kG'(x) + rH'(x)$, entonces $F(x) = kG(x) + rH(x) + C$

Nota. Con esto se pretende mostrar que el proceso de antiderivación se puede realizar mediante la ayuda de fórmulas; las cuales, por supuesto, se consigue demostrar recurriendo al formalismo matemático.

Ejemplo 2. Se muestra la antiderivada de las siguientes funciones:

1. $F'(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 6x + C$

2. $F'(x) = (6x - 1)^2$.

Dando forma para aplicar la fórmula 2: $\quad F'(x) = \frac{1}{6}(6x-1)^2(6)$

Entonces, $F(x) = \frac{1}{6}\frac{1}{3}(6x-1)^3 + C \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{18}(6x-1)^3 + C$

3. Si $F'(x) = Sen(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = -Cos(x) + C$

4. Si $F'(x) = kCos[G(x)].G'(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = kSen[G(x)] + C$

5. Si $F'(x) = 2\sqrt[3]{t} \to F'(x) = 2t^{1/3} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{2t^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{2}t^{4/3} + C$

5.2. LA INTEGRAL INDEFINIDA

DEFINICIÓN. La integral indefinida de una función real $y = f(x)$, que se denota por "$\int f(x)\,dx$" es la antiderivada de $y = f(x)$; es decir, si $y = F(x)$ es la antiderivada de $y = f(x)$ entonces siendo $C \in R$ (C una constante real), $\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x)$

5.3. TABLA BÁSICA DE INTEGRACIÓN

Enseguida se da un listado de fórmulas que permiten calcular, de forma inmediata, integrales de diversas funciones reales. Cada una de estas fórmulas puede ser comprobada haciendo uso de las reglas de derivación que se han estudiado.

OBSERVACIÓN. Las reglas que tienen variable x son de aplicación directa para resolver una integral indefinida; mientras que las reglas que tienen variable u que depende de x se consiguen a través de un cambio de variable o sustitución. C será siempre un número real, denominado constante de integración.

Por otro lado, cada integral indefinida será una familia de funciones reales $y = F(x) + C$, una por cada valor de la constante de integración C.

1. $F(x) = \int dx = x + C$

2. $F(x) = \int k \cdot dx = kx + C$

3. $F(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

4. $F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

5. $F(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

6. $F(x) = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \in R, n \neq -1$

7. $F(x) = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \in R, n \neq -1$, siendo u una función de x.

8. $F(x) = \int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

9. $F(x) = \int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

10. $F(x) = \int [f(x) - g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$

11. $F(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = Ln\,|x| + C$

12. $F(x) = \int \frac{1}{u}\, du = Ln|u| + C$

13. $F(x) = \int e^x\, dx = e^x + C$

14. $F(x) = \int e^u\, du = e^u + C$

15. $F(x) = \int a^x\, dx = \frac{a^x}{Ln\, a} + C$

16. $F(x) = \int a^u\, du = \frac{a^u}{Ln\, a} + C$

17. $F(x) = \int Sen\, x\, dx = -Cos\, x + C$

18. $F(x) = \int Sen\, u\, du = -Cos\, u + C$

19. $F(x) = \int Cos\, x\, dx = Sen\, x + C$

20. $F(x) = \int Cos\, u\, du = Sen\, u + C$

21. $F(x) = \int Tan\, x\, dx = Ln(Sec\, x) + C$

22. $F(x) = \int Tan\, u\, du = Ln(Sec\, u) + C$

23. $F(x) = \int Cot\, x\, dx = Ln(Sen\, x) + C$

24. $F(x) = \int Cot\, u\, du = Ln(Sen\, u) + C$

25. $F(x) = \int Sec\, x\, dx = Ln(Sec\, x + Tan\, x) + C$

26. $F(x) = \int Sec\, u\, du = Ln(Sec\, u + Tan\, u) + C$

27. $F(x) = \int Csc\, x\, dx = Ln(Csc\, x - Cot\, x) + C$

28. $F(x) = \int Csc\, u\, du = Ln(Csc\, u - Cot\, u) + C$

29. $F(x) = \int Sec\, x\, Tan\, x\, dx = Sec\, x + C$

30. $F(x) = \int Sec\, u\, Tan\, u\, du = Sec\, u + C$

31. $F(x) = \int Csc\, x\, Cot\, x\, dx = -Csc\, x + C$

32. $F(x) = \int Csc\, u\, Cot\, u\, du = -Csc\, u + C$

33. $F(x) = \int Sen^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{Sen\, 2x}{4} + C$

34. $F(x) = \int Sen^2 u\, du = \frac{u}{2} - \frac{Sen\, 2u}{4} + C$

35. $F(x) = \int Cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{Sen\, 2x}{4} + C$

36. $F(x) = \int Cos^2 u\, du = \frac{u}{2} + \frac{Sen\, 2u}{4} + C$

37. $F(x) = \int Tan^2 x\, dx = Tan\, x - x + C$

38. $F(x) = \int Tan^2 u\, du = Tan\, u - u + C$

39. $F(x) = \int Cot^2 x\, dx = -Cot\, x + C$

40. $F(x) = \int Cot^2 u\, du = -Cot\, u + C$

41. $F(x) = \int Sec^2 x\, dx = Tan\, x + C$

42. $F(x) = \int Sec^2 u\, du = Tan\, u + C$

43. $F(x) = \int Csc^2 x\, dx = -Cot\, x + C$

44. $F(x) = \int Csc^2 u\, du = -Cot\, u + C$

45. $F(x) = \int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a} Tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

46. $F(x) = \int \frac{1}{u^2+a^2}\, du = \frac{1}{a} Tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

47. $F(x) = \int \frac{1}{x^2-a^2}\, dx = \frac{1}{2a} Ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$

48. $F(x) = \int \frac{1}{u^2-a^2}\, du = \frac{1}{2a} Ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + C$

$49. F(x) = \int \frac{1}{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2a} Ln \left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$ $\quad 50. F(x) = \int \frac{1}{a^2-u^2}\, du = \frac{1}{2a} Ln \left(\frac{a+u}{a-u}\right) + C$

$51. F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = Ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$

$52. F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\, du = Ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$

$53. F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = Ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C$

$54. F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\, du = Ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + C$

$55. F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = Sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

$56. F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\, du = Sen^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

$57. F(x) = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} Ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$

$58. F(x) = \int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u\sqrt{u^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} Ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$

$59. F(x) = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} Ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C$

$60. F(x) = \int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u\sqrt{u^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} Ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + C$

$61. F(x) = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} Sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

$62. F(x) = \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{2} + \frac{a^2}{2} Sen^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

$63. F(x) = \int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} Ln\, |ax + b| + C$

$64. F(x) = \int x\, Sen\, ax\, dx = \frac{Sen\, ax}{a^2} - \frac{x\, Cos\, ax}{a} + C$

$65. F(x) = \int x\, Cos\, ax\, dx = \frac{Cos\, ax}{a^2} + \frac{x\, Sen\, ax}{a} + C$

$66. F(x) = \int e^{ax}\, Sen\, bx\, dx = \frac{e^{ax}[a\, Sen\, bx - b\, Cos\, bx]}{a^2+b^2} + C$

$67. F(x) = \int e^{ax}\, Cos\, bx\, dx = \frac{e^{ax}[a\, Cos\, bx + b\, Sen\, bx]}{a^2+b^2} + C$

$68. F(x) = \int Sen^m ax\, Cos\, ax\, dx = \frac{Sen^{m+1} ax}{(m+1)a} + C, m \neq -1$

$69. F(x) = \int Cos^m ax\, Sen\, ax\, dx = -\frac{Cos^{m+1} ax}{(m+1)a} + C, m \neq -1$

$70. F(x) = \int Sen\, ax\, Cos\, ax\, dx = \frac{Sen^2 ax}{2a} + C$

71. $F(x) = \int Sen\ ax\ Cos\ bx\ dx = -\frac{Cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{Cos(a+b)x}{2(p+q)} + C$

71. $F(x) = \int Sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\ Sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2} + C$

72. $F(x) = \int Cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\ Cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2} + C$

73. $F(x) = \int Tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\ Tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{2}Ln(x^2 + a^2) + C$

74. $F(x) = \int Cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\ Cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a}{2}Ln(x^2 + a^2) + C$

75. $F(x) = \int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$

76. $F(x) = \int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C$

77. $F(x) = \int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + C$

78. $F(x) = \int Ln\ x\ dx = x\ Ln\ x - x + C$

79. $F(x) = \int x\ Ln\ x\ dx = \frac{x^2}{2}\left(Ln\ x - \frac{1}{2}\right) + C$

80. $F(x) = \int x^m\ Ln\ x\ dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(Ln\ x - \frac{1}{m+1}\right) + C, m \neq -1$

81. $F(x) = \int \frac{Ln\ x}{x}\ dx = \frac{1}{2}Ln^2x + C$

82. $F(x) = \int \frac{Ln\ x}{x^2}\ dx = -\frac{Ln\ x}{x} - \frac{1}{x} + C$

83. $F(x) = \int Sec\ x\ Tan\ x\ dx = Sec\ x + C$

84. $F(x) = \int Ln^2x\ dx = x\ Ln^2x - 2x\ Ln\ x + 2x + C$

85. $F(x) = \int Sen^2(ax)\ dx = \frac{x}{2} - \frac{Sen\ (2ax)}{4a} + C$

86. $F(x) = \int Cos^2(ax)\ dx = \frac{x}{2} - \frac{Sen\ (2ax)}{4a} + C$

87. $F(x) = \int Tan^2(ax)\ dx = \frac{Tan(ax)}{a} - x + C$

88. $F(x) = \int Cot^2(ax)\ dx = -\frac{Cot\ (ax)}{a} - x + C$

89. $F(x) = \int Sec^2(ax)\ dx = \frac{Tan(ax)}{a} + C$

90. $F(x) = \int Csc^2(ax)\ dx = -\frac{Cot(ax)}{a} + C$

OBSERVACIÓN. Los ejemplos que se exponen a continuación obedecen a métodos de solución que tienen la intención de acercarlos a la tabla básica de integrales; pueden clasificarse, entre otros, del modo siguiente:

a) Integración por tabla directa.

b) Cambio de variable simple para dar forma a integrales de tabla.

c) Método de artificios: Desarrollo, simplificación, sumar y restar, otros artificios algebraicos.

d) Método de sustitución o cambio de variable.

e) Completar cuadrados en el denominador.

f) Método de integración por partes.

g) Sustitución trigonométrica

h) Integración por fracciones parciales.

INTEGRACIÓN POR TABLAS BÁSICA DE INTEGRALES

En la solución de las integrales, aparecen algunos pasos adicionales para un mejor entendimiento de los lectores, sobre todo de los estudiantes.

Ejemplo 1. Se muestra integrales resueltas *usando la tabla básica.*

a) $F(x) = \int (x^2 + x - 1)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C$

b) $F(x) = \int (4x^3 - 2x + 6)dx = \frac{4x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} + 6x + C = x^4 - x^2 + 6x + C$

c) $F(x) = \int (2x^{-3} - x^{-2})dx = \frac{2x^{-2}}{-2} - \frac{x^{-1}}{-1} + C = -x^{-2} + x^{-1} + C = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} + C$

d) $F(x) = \int \left(\frac{1}{x} - e^x\right) dx = Ln\,|x| - e^x + C$

e) $F(x) = \int (3x^2 - Cos\,x)dx = \frac{3x^3}{3} - Sen\,x + C = x^3 - Sen\,x + C$

f) $F(x) = \int (x^{-2} - x^{-1})dx = \int \left(x^{-2} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^{-1}}{-1} - Ln\,|x| + C = -\frac{1}{x} - Ln\,|x| + C$

g) $F(x) = \int \left(x^{1/2} + x^{-1/2}\right)dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$

h) $F(x) = \int xe^x dx = e^x(x - 1) + C$

i) $F(x) = \int x^2 e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}\right) + C$

j) $F(x) = \int (Cos^2x - 2^x)dx = \frac{x}{2} + \frac{Sen(2x)}{4} - \frac{2}{\ln 2} + C$

k) $F(x) = \int (Tan\, x - Sec\, x \tan x)dx = Ln\, |Sec\, x| - Sec\, x + C$

l) $F(x) = \int x\, Sen(3x)dx = \frac{Sen(3x)}{9} - \frac{x\, Cos(3x)}{3} + C$

m) $F(x) = \int \frac{1}{3x-5}dx = \frac{1}{3}Ln|3x-5| + C$

n) $F(x) = \int \frac{1}{x^2-9}dx = \int \frac{1}{x^2-3^2}dx = \frac{1}{2(3)}Ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C = \frac{1}{6}Ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$

o) $F(x) = \int \frac{1}{16-x^2}dx = \int \frac{1}{4^2-x^2}dx = \frac{1}{2(4)}Ln\left|\frac{4+x}{4-x}\right| + C = \frac{1}{8}Ln\left|\frac{4+x}{4-x}\right| + C$

p) $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+5^2}}dx = Ln\left|x + \sqrt{x^2+5^2}\right| + C$

q) $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{5^2-x^2}}dx = Sen^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + C$

r) $F(x) = \int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} - 5x\right) dx = \int (2x^{-3} + 3x^{-2} - 5x)dx = \frac{2x^{-2}}{-2} + \frac{3x^{-1}}{-1} - \frac{5x^2}{2} + C$

Luego, $F(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - \frac{5}{2}x^2 + C.$

s) $F(x) = \int \left(\sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{2x}}\right) dx = \sqrt{2}\int x^{1/2}dx - \frac{1}{\sqrt{2}}\int x^{-1/2}dx = \sqrt{2}\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(2)x^{\frac{1}{2}} + C$

Luego, $F(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \sqrt{2}x^{1/2} + C.$

t) $F(x) = \int \frac{2+Ln\, x}{x}\, dx = 2\int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{Ln\, x}{x}dx = 2\, Ln\, x + \frac{1}{2}Ln^2x + C$

u) $F(x) = \int (e^{5x} + 2^{5x})dx = \frac{1}{5}e^{5x} + \frac{2^{5x}}{Ln\, 2} + C$

v) $F(x) = \int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{(3e)^{5x}}{Ln(3e)} + C$

w) $F(x) = \int Sen^2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{Sen(2x)}{4} + C$

5.4. INTEGRACIÓN POR CAMBIO SIMPLE DE VARIABLE. SUSTITUCIÓN SIMPLE

Consiste en hacer un cambio de variable simple con la intención de transformar la integral dada en otra integral equivalente que se encuentre en la tabla básica de integrales, luego de integrar se regresa a la variable original devolviendo el cambio de variable. Aquí se usa la nueva variable, generalmente u y su diferencial du. Puede emplearse otras variables.

Ejemplo 1. Se presenta integrales resueltas *usando cambio de variable simple para dar forma a integral de la tabla básica.*

Nota: Observe cuidadosamente los arreglos que se hacen en cada ejercicio.

a) $F(x) = \int x\, Sen(x^2)dx = \int Sen(x^2)(x\, dx)$. CV: $u = x^2 \to du = 2x\, dx \to x\, dx = \frac{du}{2}$

$\Rightarrow F = \int Sen(x^2)\, x\, dx = \int Sen\, u\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int Sen\, u\, du = \frac{1}{2}(-Cos\, u) + C = -\frac{1}{2}Cos\, u + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = -\frac{1}{2}Cos(x^2) + C$

b) $F(x) = \int Cos(4x+9)\, dx$. VC: $u = 4x + 9 \to du = 4\, dx \to dx = \frac{du}{4}$

$\Rightarrow F = \int Cos(4x+9)\, dx = \int Cos(u)\, \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int Cos(u)du = \frac{1}{4}Sen(u) + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{1}{4}Sen(4x+9) + C$

c) $F(x) = \int xe^{x^2-3}dx = \int e^{x^2-3}\,(x\, dx)$ CV: $u = x^2 - 3 \to du = 2x\, dx \to x\, dx = \frac{du}{2}$

$\Rightarrow F = \int e^{x^2-3}\, x\, dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-3} + C$

d) $F(x) = \int 2x(x^2+4)^4 dx = \int (x^2+4)^4\,(2x\, dx)$ CV: $u = x^2 + 4 \to du = 2x\, dx$

$\Rightarrow F = \int (x^2+4)^4\,(2x\, dx) = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{(x^2+4)^5}{5} + C$

e) $F(x) = \int \frac{x}{4-x^2}dx = \int \frac{1}{4-x^2}x\, dx$ CV: $u = 4 - x^2 \to du = -2x\, dx \to x\, dx = -\frac{du}{2}$

$\Rightarrow F = \int \frac{1}{4-x^2}\, x\, dx = \int \frac{1}{u}\left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = -\frac{1}{2}Ln\, |u| + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = -\frac{1}{2}Ln|4 - x^2| + C$

f) $F(x) = \int \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{1}{x^2+2x+3}(x+1)dx$

CV: $u = x^2 + 2x + 3 \to du = (2x+2)dx \to (x+1)dx = \frac{du}{2}$

$\Rightarrow F = \int \frac{1}{x^2+2x+3}(x+1)dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}Ln\,|u| + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{1}{2}Ln|x^2 + 2x + 3| + C$

g) $F(x) = \int 5x\sqrt[3]{(9-4x^2)^2}dx = 5\int (9-4x^2)^{2/3}\, xdx$

CV: $u = 9 - 4x^2 \to du = -8x\,dx \to x\,dx = -\frac{du}{8}$

$\Rightarrow\ F = 5\int (9-4x^2)^{2/3}\, xdx = 5\int u^{2/3}\left(-\frac{du}{8}\right) = -\frac{5}{8}\int u^{2/3}\ du = -\frac{5}{8}\frac{3}{5}u^{5/3} + C = -\frac{3}{8}u^{5/3} + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = -\frac{3}{8}(9-4x^2)^{5/3} + C$

i) $F(x) = \int 2x(x^2+2)^3dx = \int (x^2+2)^3(2x\,dx)$ CV: $u = x^2 + 2 \to du = 2x\,dx$

$\Rightarrow F = \int (x^2+2)^3(2x\,dx) = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{(x^2+2)^4}{4} + C$

j) $F(x) = \int \sqrt{x^2+2x}(x+1)dx$

CV: $u = x^2 + 2x \to du = (2x+2)\,dx \to du = 2(x+1)\,dx \to (x+1)dx = \frac{du}{2}$

$\Rightarrow F = \int \sqrt{x^2+2x}(x+1)dx = \int \sqrt{u}\left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}u^{3/2} + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+2x)^{3/2} + C$

k) $F(x) = \int \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\,\frac{dx}{x^2}$

CV: $u = 1 + \frac{1}{2x} \to u = 1 + \frac{1}{2}x^{-1} \to du = \frac{1}{2}(-x^{-2}dx) \to \frac{dx}{x^2} = -2du$

$\Rightarrow F = \int \sqrt{1+\frac{1}{2x}}\,\frac{dx}{x^2} = \int \sqrt{u}\,(-2du) = -2\int u^{1/2}du = -2\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{4}{3}u^{3/2} + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = -\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3/2} + C$

l) $F(x) = \int \frac{x}{a+bx^2}dx = \int \frac{1}{a+bx^2}x\,dx$ CV: $u = a+bx^2 \rightarrow du = 2bx\,dx \rightarrow x\,dx = \frac{du}{2b}$

$\Rightarrow F = \int \frac{1}{a+bx^2}x\,dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{2b} = \frac{1}{2b}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2b}Ln\,u + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{1}{2b}Ln(a+bx^2) + C$

m) $F(x) = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{1}{(e^x)^2+1^2}e^x dx$ CV: $u = e^x \rightarrow du = e^x dx$

$\Rightarrow F = \int \frac{1}{(e^x)^2+1^2}e^x dx = \int \frac{1}{u^2+1^2}du = Arctan(u) + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = Arctan(e^x) + C$

n) $F(x) = \int \frac{1}{4+9x^2}dx = \int \frac{1}{2^2+(3x)^2}dx$ CV: $u = 3x \rightarrow du = 3\,dx$

$\Rightarrow F = \int \frac{1}{2^2+(3x)^2}dx = \int \frac{1}{2^2+u^2}du = \frac{1}{2}Arctan\left(\frac{u}{2}\right) + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{1}{2}\,Arctan\left(\frac{3x}{2}\right) + C$

o) $F(x) = \int \frac{7x^2}{5-x^6}dx = 7\int \frac{1}{\sqrt{5}^2-(x^3)^2}x^2 dx$ CV: $u = x^3 \rightarrow du = 3x^2dx \rightarrow x^2dx = \frac{du}{3}$

$\Rightarrow F = 7\int \frac{1}{\sqrt{5}^2-(x^3)^2}x^2dx = 7\int \frac{1}{\sqrt{5}^2-u^2}\frac{du}{3} = \frac{7}{3}\int \frac{1}{\sqrt{5}^2-u^2}du = \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}Ln\left(\frac{\sqrt{5}+u}{\sqrt{5}-u}\right) + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{7}{6\sqrt{5}}\,Ln\left(\frac{\sqrt{5}+x^3}{\sqrt{5}-x^3}\right) + C$

5.5. INTEGRACIÓN POR ARTIFICIOS: DESARROLLO, SIMPLIFICACIÓN, SUMAR Y RESTAR

ARTIFICIOS DE DESARROLLO. Este proceso consiste en desarrollar la integral dada para transformarla en otra equivalente que se encuentre en la tabla básica de integrales. Se usa propiedades algebraicas.

Nota: Observe cuidadosamente los arreglos que se hacen en cada ejercicio.

Ejemplo 1. Se da a conocer integrales resueltas *usando método de artificios*: *Desarrollo.*

a) $F(x) = \int (x-3)^2 dx = \int (x^2 - 6x + 9)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 9x + C$

Luego, $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + C$

b) $F(x) = \int (4+2x)^3 dx = \int [64 + 3(16)(2x) + 3(4)(4x^2) + 8x^3]dx$

$= \int (64 + 96x + 48x^2 + 8x^3)dx = 64x + \frac{96x^2}{2} + \frac{48x^3}{3} + \frac{8x^4}{4} + C$

Luego, $F(x) = 64x + 48x^2 + 16x^3 + 2x^4 + C$

c) $F(x) = \int (x-2)(2x+1)dx = \int (2x^2 - 3x - 2)dx$

Luego, $F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 2x + C$

d) $F(x) = \int (x^{1,5} + 2x^{0,5})^2 dx = \int (x^3 + 4x^2 + 4x)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + C$

Luego, $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$

e) $F(x) = \int \left(x + \sqrt{x} - 1\right)^2 dx = \int [x^2 + x + 1 + 2x\sqrt{x} - 2(x)(1) - 2\sqrt{x}(1)]dx$

$= \int [x^2 - x + 1 + 2x^{3/2} - 2x^{1/2}]dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{2x^{5/2}}{5/2} - \frac{2x^{3/2}}{3/2} + C$

Luego, $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{4x^{5/2}}{5} - \frac{4x^{3/2}}{3} + C$

f) $F(x) = \int (e^x - x)^2 dx = \int (e^{2x} - 2xe^x + x^2)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - 2\left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{x^3}{3} + C$

$= \frac{1}{2}e^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{x^3}{3} + C$

Luego, $F(x) = e^{2x} - xe^{2x} + \frac{x^3}{3} + C$

ARTIFICIOS DE **SIMPLIFICACIÓN**. Se centra en simplificar la integral dada para transformarla en otra equivalente que se encuentre en la tabla básica de integrales. Generalmente se factoriza, se simplifica y se integra.

Nota: Observe cuidadosamente los arreglos que se hacen en cada ejercicio.

Ejemplo 2. Aparecen integrales resueltas *usando método de artificios*: *Simplificación*.

a) $F(x) = \int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2} dx = \int (x - 2 + 2x^{-2}) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{2x^{-1}}{-1} + C$

Luego, $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + C$

b) $F(x) = \int \frac{x^2+2x-4}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{1,5} + 2x^{0,5} - 4x^{-0,5}) dx = \frac{x^{2,5}}{2,5} + \frac{2x^{1,5}}{1,5} - \frac{4x^{0,5}}{0,5} + C$

Luego, $F(x) = \frac{2x^{2,5}}{5} + \frac{4x^{1,5}}{3} - 8x^{0,5} + C$

c) $F(x) = \int \frac{x^2-4}{x-2} dx = \int \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} dx = \int (x+2) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C$

Luego, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + C$

d) $F(x) = \int \frac{2x+3}{4x^2-9} dx = \int \frac{2x+3}{(2x+3)(2x-3)} dx = \int \frac{1}{2x-3} dx = \frac{1}{2} Ln|2x-3| + C$

Luego, $F(x) = \frac{1}{2} Ln|2x-3| + C$

e) $F(x) = \int \frac{x^3+27}{x+3} dx = \int \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3} dx = \int (x^2 - 3x + 9) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x + C$

Luego, $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x + C$

f) $F(x) = \int \frac{x-3}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{x-3}{(x-2)(x-3)} dx = \int \frac{1}{x-2} dx = Ln|x-2| - C$

Luego, $F(x) = Ln|x-2| - C$

g) $F(x)=\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}dx=\int \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}dx=\int (x^{0,5}+2)dx=\frac{x^{1,5}}{1,5}+2x+C$

Luego, $F(x)=\frac{2x^{1,5}}{3}+2x+C$

h) $F(x)=\int \frac{x^2+4x+16}{x^3-64}dx=\int \frac{x^2+4x+16}{(x-4)(x^2+4x+16)}dx=\int \frac{1}{x-4}dx=Ln|x-4|+C$

Luego, $F(x)=Ln|x-4|+C$

i) $F(x)=\int \frac{x-1}{x^2-5x+4}dx=\int \frac{x-1}{(x-1)(x-4)}dx=\int \frac{1}{x-4}dx=Ln|x-4|+C$

Luego, $F(x)=Ln|x-4|+C$

ARTIFICIOS DE SUMAR Y RESTAR. Estos procesos consisten —como su nombre indica— en sumar y restar un número o una expresión algebraica, apropiadamente, en la integral dada, con el objetivo de transformarla en otra equivalente que se encuentre en la tabla básica de integrales.

Nota: Observe cuidadosamente los arreglos que se hacen en cada ejercicio.

Ejemplo 3. Se da integrales resueltas *usando método de artificios*: *Sumar y restar*.

a) $F(x)=\int \frac{x}{x+5}dx=\int \frac{x+5-5}{x+5}dx=\int \left(\frac{x+5}{x+5}-\frac{5}{x+5}\right)dx=\int \left(1-\frac{5}{x+5}\right)dx=x-5Ln|x+5|+C$

Luego, $F(x)=x-5Ln|x+5|+C$

b) $F(x)=\int \frac{2x}{x-3}dx=2\int \frac{x-3+3}{x-3}dx=2\int \left(\frac{x-3}{x-3}+\frac{3}{x-3}\right)dx=2\int \left(1+\frac{3}{x-3}\right)dx$

$=2[x+3Ln|x-3|]+C$

Luego, $F(x)=2[x+3Ln|x-3|]+C$

c) $F(x)=\int \frac{x}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x-1+1}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int \left(\frac{2x-1}{2x-1}+\frac{1}{2x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\int \left(1+\frac{1}{2x-1}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}Ln|2x-1|\right]+C$

Luego, $F(x) = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}Ln|2x-1|\right] + C$

d) $F(x) = \int \frac{x+2}{x+6}dx = \int \frac{x+2+4-4}{x+6}dx = \int \frac{x+6-4}{x+6}dx = \int \left(\frac{x+6}{x+6} - \frac{4}{x+6}\right)dx = \int \left(1 - \frac{4}{x+6}\right)dx$

$= x - 4Ln|x+6| + C$

Luego, $F(x) = x - 4Ln|x+6| + C$

e) $F(x) = \int \frac{1}{x(x+1)}dx = \int \frac{x+1-x}{x(x+1)}dx = \int \left(\frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= Ln\,|x| - Ln|x+1| + C$

Luego, $F(x) = Ln\,|x| - Ln|x+1| + C$

f) $F(x) = \int \frac{x+1}{x-3}dx = \int \frac{x+1-4+4}{x-3}dx = \int \frac{x-3+4}{x-3}dx = \int \left(\frac{x-3}{x-3} + \frac{4}{x-3}\right)dx = \int \left(1 + \frac{4}{x-3}\right)dx$

$= x + 4Ln|x-3| + C$

Luego, $F(x) = x + 4Ln|x-3| + C$

g) $F(x) = \int \frac{x+4}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+8}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+3+5}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x+3}{2x+3} + \frac{5}{2x+3}\right)dx = \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{5}{2x+3}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{2x+3}dx = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\frac{1}{2}Ln|2x+3| + C = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}Ln|2x+3| + C$

Luego, $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}Ln|2x+3| + C$

h) $F(x) = \int \frac{x^2}{x^2+9}dx = \int \frac{x^2+9-9}{x^2+9}dx = \int \left(\frac{x^2+9}{x^2+9} - \frac{9}{x^2+9}\right)dx = \int \left(1 - \frac{9}{x^2+9}\right)dx = \int dx - 9\int \frac{1}{x^2+3^2}dx$

$= x - 9\frac{1}{3}ArcTan\left(\frac{x}{3}\right) + C$

Luego, $F(x) = x - 3\,ArcTan\left(\frac{x}{3}\right) + C.$

5.6. INTEGRACIÓN POR MÉTODO DE SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE

Se trata de hacer un cambio de variable para transformar la integral dada en otra integral equivalente que se encuentre en la tabla básica de integrales, luego de integrar se regresa a la variable original devolviendo el cambio de variable. Aquí se usa una nueva variable, generalmente u y su diferencial du.

El cambio de variable se realiza en cada factor que aparece en el integrando. Puede ser necesaria la combinación con otros métodos de integración.

Nota: Observe cuidadosamente los arreglos que se hacen en cada ejercicio.

Ejemplo 1. Se presenta integrales resueltas *usando método de Cambio de variable.*

a) $F(x) = \int x\sqrt{x+3}\,dx$ CV: $u = \sqrt{x+3} \to u^2 = x+3 \to x = u^2 - 3 \to dx = 2u\,du$

Reemplazando en $F = \int (u^2-3)u(2u\,du) = 2\int (u^4 - 3u^2)\,du = 2\left(\frac{u^5}{5} - \frac{3u^3}{3}\right) + C$

$= \frac{2u^5}{5} - 2u^2 + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{2\sqrt{x+3}^5}{5} - 2\sqrt{x+3}^3 + C$

b) $F(x) = \int \frac{\sqrt{x-4}}{x}\,dx$ CV: $u = \sqrt{x-4} \to u^2 = x-4 \to x = u^2+4 \to dx = 2u\,du$

Reemplazando en $F = \int \frac{u}{u^2+4}(2u\,du) = 2\int \frac{u^2}{u^2+4}du = 2\int \frac{u^2+4-4}{u^2+4}du = 2\int \left(\frac{u^2+4}{u^2+4} - \frac{4}{u^2+4}\right)du$

$= 2\int \left(1 - \frac{4}{u^2+4}\right)du = 2\int du - 8\int \frac{1}{u^2+2^2}du = 2u + 8\frac{1}{2}Arctan\left(\frac{u}{2}\right) + C = 2u + 4\,ArcTan\left(\frac{u}{2}\right) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = 2\sqrt{x-4} + 4ArcTan\left(\frac{\sqrt{x-4}}{2}\right) + C$

c) $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x-5}}\,dx$ CV: $u = \sqrt{x-5} \to u^2 = x-5 \to x = u^2+5 \to dx = 2u\,du$

Reemplazando en $F = \int \frac{u^2+5}{u}(2u\,du) = 2\int (u^2+5)du = 2\left(\frac{u^3}{3} + 5u\right) + C = \frac{2u^3}{3} + 10u + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x-5}^3 + 10\sqrt{x-5} + C$

d) $F(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{x-2}}\,dx$ CV: $u = \sqrt{x-2} \to u^2 = x-2 \to x = u^2+2 \to dx = 2u\,du$

Reemplazando en $F = \int \frac{(u^2+2)^2}{u}(2u\,du) = 2\int(u^4+4u^2+4)du = 2\left(\frac{u^5}{5}+\frac{4u^3}{3}+4u\right)+C$

$= \frac{2}{5}u^5 + \frac{8}{3}u^3 + 8u + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{x-2}^5 + \frac{8}{3}\sqrt{x-2}^3 + 8\sqrt{x-2} + C$

e) $F(x) = \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ CV: $u = \sqrt[3]{x} \to u^3 = x \to x = u^3 \to dx = 3u^2du$

Reemplazando en $F = \int \frac{u^3+1}{u}(3u^2du) = 3\int(u^4+u)du) = 3\left(\frac{u^5}{5}+\frac{u^2}{2}\right)+C$

$=\frac{3}{5}u^5 + \frac{3}{2}u^2 + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x}^5 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x}^2 + C$

f) $F(x) = \int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ CV: $u = \sqrt[3]{x} \to u^3 = x \to x = u^3 \to dx = 3u^2du$ y $\sqrt{x} = u^{3/2}$

Reemplazando en $F = \int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1+u^{3/2}}{u}\,(3u^2du) = 3\int\left(u+u^{5/2}\right)du = 3\left(\frac{u^2}{2}+\frac{u^{7/2}}{7/2}\right)+C$

$= \frac{3}{2}u^2 + \frac{6}{7}u^{7/2} + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x}^2 + \frac{6}{7}\sqrt[3]{x}^{7/2} + C$

g) $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx$ CV: $u = \sqrt[3]{2x+1} \to u^3 = 2x+1 \to x = \frac{u^3-1}{2} \to dx = \frac{3}{2}u^2du$

Reemplazando en $F = \int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx = \int \frac{u^3-1}{2\,u}\,\frac{3}{2}u^2du = \frac{3}{4}\int(u^4-u)du = \frac{3}{4}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^2}{2}\right)+C$

$= \frac{3}{20}u^5 - \frac{3}{8}u^2 + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{2x+1}^5 - \frac{3}{8}\sqrt[3]{2x+1}^2 + C$

h) $F(x) = \int \sqrt{1+x}\,x^2dx$ CV: $u = 1+x \to x = u-1 \to dx = du$

Reemplazando en $F = \int \sqrt{u}(u-1)^2\,du = \int u^{0,5}(u^2-2u+1)du$

$= 3\int (u^{2,5} - 2u^{1,5} + u^{0,5})du = \frac{u^{3,5}}{3,5} - 2\frac{u^{2,5}}{2,5} + \frac{u^{1,5}}{1,5} + C = \frac{2}{7}u^{3,5} - \frac{4}{5}u^{2,5} + \frac{2}{3}u^{1,5} + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{2}{7}\sqrt{1+x}^{3,5} - \frac{4}{5}\sqrt{1+x}^{2,5} + \frac{2}{3}\sqrt{1+x}^{1,5} + C$

i) $F(x) = \int \frac{Arcsen^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ CV: $u = Arcsen\,x \to x = Sen\,u \to \quad dx = Cos\,u\,du$

Reemplazando en $F = \int \frac{u^2}{\sqrt{1-Sen^2 u}} Cos\,u\,du = \int \frac{u^2}{\sqrt{Cos^2 u}} Cos\,u\,du = \int \frac{u^2}{Cos\,u} Cos\,u\,du$

$= \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}u^3 + C$

Volviendo a variable original $F(x) = \frac{1}{3}Arcsen^3 x + C$

Ejercicios. Calcular las siguientes integrales:

a) $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x+3}}\,dx$ b) $F(x) = \int x\sqrt{x-1}\,dx$

c) $F(x) = \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$ d) $F(x) = \int \frac{Cos\,x}{\sqrt{1+Sen^2 x}}\,dx$

e) $F(x) = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$ f) $F(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx; x = \frac{1}{t}$

5.7. MÉTODO DE COMPLETAR CUADRADOS EN EL DENOMINADOR

Este método centra su interés en completar cuadrados en el denominador del integrando con la finalidad de transformar la integral dada en otra integral equivalente que se encuentre en la tabla básica de integrales, en las que aparecen los términos u^2 y a^2; luego de integrar se regresa a la variable original devolviendo el cambio de variable. También se usa la nueva variable u, su diferencial du y una constante a. Este método se combina con cambio de variable simple.

Nota: Observe cuidadosamente los arreglos que se hacen en cada ejercicio.

Ejemplo 1. Se muestra integrales resueltas *usando método Completar cuadrados en el denominador*.

a) $F(x) = \int \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1^2}dx$ CV: $u = x+2 \to du = dx$

Luego, $F = \int \frac{1}{(x+2)^2+1^2}dx = \int \frac{1}{u^2+1^2}du = Arctan(u) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = Arctan(x+2) + C$

b) $F(x) = \int \frac{1}{x^2-6x+5}dx = \int \frac{1}{x^2-6x+9-4}dx = \int \frac{1}{(x-3)^2-2^2}dx$ CV: $u = x-3 \rightarrow du = dx$

Luego, $F = \int \frac{1}{(x-3)^2-2^2}dx = \int \frac{1}{u^2-2^2}du = \frac{1}{2(2)}Ln\left(\frac{u-2}{u+2}\right) + C = \frac{1}{4}Ln\left(\frac{u-2}{u+2}\right) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{1}{4}Ln\left(\frac{x-3-2}{x-3+2}\right) + C = \frac{1}{4}Ln\left(\frac{x-5}{x-1}\right) + C$

c) $F(x) = \int \frac{1}{4x^2+4x+10}dx = \int \frac{1}{4x^2+4x+1+9}dx = \int \frac{1}{(2x+1)^2+3^2}dx$

CV: $u = 2x+1 \rightarrow du = 2dx \rightarrow dx = \frac{du}{2}$

Luego, $F = \int \frac{1}{(2x+1)^2+3^2}dx = \int \frac{1}{u^2+3^2}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+3^2}du = \frac{1}{2}\frac{1}{3}Arctan\left(\frac{u}{3}\right) + C = \frac{1}{6}Arctan\left(\frac{u}{3}\right) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{1}{6}Arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C$

d) $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-8x+25}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-8x+16+9}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2+3^2}}dx$ CV: $u = x-4 \rightarrow du = dx$

Luego, $F = \int \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2+3^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^2+3^2}}du = Ln\left(u + \sqrt{u^2+3^2}\right) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = Ln\left(x-4+\sqrt{x^2-8x+25}\right) + C$

e) $F(x) = \int \frac{1}{2x-x^2-10}dx = -\int \frac{1}{x^2-2x+1+9}dx = -\int \frac{1}{(x-1)^2+3^2}dx$ CV: $u = x-1 \rightarrow du = dx$

Luego, $F = -\int \frac{1}{(x-1)^2+3^2}dx = -\int \frac{1}{u^2+3^2}du = -\frac{1}{3}Arctan\left(\frac{u}{3}\right) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = -\frac{1}{3}Arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$

f) $F(x) = \int \frac{1}{3+4x-4x^2}dx = \int \frac{1}{4-1+4x-4x^2}dx = \int \frac{1}{2^2-(1-2x)^2}dx$

CV: $u = 1-2x \rightarrow du = -2dx \rightarrow dx = -\frac{du}{2}$

Luego, $F = \int \frac{1}{2^2-(1-2x)^2} dx = \int \frac{1}{2^2-u^2}\left(-\frac{du}{2}\right) =-\frac{1}{2}\int \frac{1}{2^2-u^2} du = -\frac{1}{2}\frac{1}{2(2)} Ln\left(\frac{2+u}{2-u}\right) + C$

$= -\frac{1}{8} Ln\left(\frac{2+u}{2-u}\right) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = -\frac{1}{8} Ln\left(\frac{2+1-2x}{2-1+2x}\right) + C = -\frac{1}{8} Ln\left(\frac{3-2x}{1+2x}\right) + C$

g) $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-1+4x-4x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-(1-2x)^2}} dx$

CV: $u = 1-2x \rightarrow du = -2dx \rightarrow dx = -\frac{du}{2}$

Luego, $F = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-(1-2x)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-u^2}}\left(-\frac{du}{2}\right) =-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{2^2-u^2}} du = -\frac{1}{2} Arcsen\left(\frac{u}{2}\right) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = -\frac{1}{2} Arcsen\left(\frac{1-2x}{2}\right) + C$

5.8. MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Se aplica la denominada fórmula de integración por parte (FIPP): $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Dicha fórmula se obtiene tras aplicar el diferencial al producto de dos funciones y luego, la integración adecuada. En efecto:

Diferenciando: $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$

Despejando: $u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$

Integrando: $\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du$

Finalmente: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

OBSERVACIÓN. Este método se usa cuando en el integrando hay factores indicados, funciones trigonométricas inversas o logaritmos.

En la separación de factores, el dv tiene que contener el diferencial de la integral dada y debe ser el más complicado pero factible de ser integrado.

PROCESO. Consiste en partir de la integral dada, dos factores identificados a manera de un cambio de variable con u y dv (diferencial de v). Inmediatamente al integrar se halla v, así como el diferencial de u, du; luego se procede a usar la FIPP.

Ejemplo 1. Se presenta integrales resueltas *usando el método de integración por partes.*

a) $F(x) = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{8x}\, dx}_{dv}$ CV: (i) $u = x \to du = dx$.

(ii) $dv = e^{8x}dx \to \int dv = \int e^{8x}dx \to v = \frac{1}{8}e^{8x}$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{8x}\, dx}_{dv} = (x)\left(\frac{1}{8}e^{8x}\right) - \int \frac{1}{8}e^{8x}dx = \frac{1}{8}xe^{8x} - \frac{1}{8}\int e^{8x}dx = \frac{1}{8}xe^{8x} - \frac{1}{8}\frac{1}{8}e^{8x} + C$

Es decir, $F(x) = \frac{1}{8}xe^{8x} - \frac{1}{64}e^{8x} + C$

b) $F(x) = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{Cos(2x)\, dx}_{dv}$ CV: (i) $u = x \to du = dx$.

(ii) $dv = Cos(2x)dx \to \int dv = \int Cos(2x)dx \to v = \frac{1}{2}Sen(2x)$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{Cos(2x)\, dx}_{dv} = (x)\left(\frac{1}{2}Sen(2x)\right) - \int \frac{1}{2}Sen(2x)dx = \frac{1}{2}x\, Sen(2x) - \frac{1}{2}\int Sen(2x)dx$

$= \frac{1}{2}x\, Sen(2x) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}Cos(2x)\right) + C = \frac{1}{2}x\, Sen(2x) + \frac{1}{4}Cos(2x) + C$

Es decir, $F(x) = \frac{1}{2}x\, Sen(2x) + \frac{1}{4}Cos(2x) + C$

c) $F(x) = \int \underbrace{Ln\, x}_{u}\ \underbrace{dx}_{dv}$ CV: (i) $u = Ln\, x \to du = \frac{1}{x}dx$.

(ii) $dv = dx \to v = x$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{Ln\, x}_{u}\ \underbrace{dx}_{dv} = x\, Ln\, x - \int x\frac{1}{x}dx = x\, Ln\, x - \int dx = x\, Ln\, x - x + C$

Es decir, $F(x) = x\, Ln\, x - x + C$

d) $F(x) = \int \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{Sec\, x \cdot \operatorname{Tan} x\, dx}_{dv}$ CV:(i) $u = x \to du = dx$.

(ii) $dv = Sec\, x \cdot \tan x\, dx \to v = Sec\, x$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{Sec\, x \cdot Tan\, x\, dx}_{dv} = x\, Sec\, x - \int Sec\, x\, dx = x\, Sec\, x - Ln[Sec\, x + \operatorname{Tan} x] + C$

Es decir, $F(x) = x\, Sec\, x - Ln[Sec\, x + \operatorname{Tan} x] + C$

e) $F(x) = \int \underbrace{x^2}_{u}\ \underbrace{e^{-2x}dx}_{dv}$ CV: (i) $u = x^2 \to du = 2x\,dx$.

(ii) $dv = e^{-2x}dx \quad \to \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{x^2}_{u}\ \underbrace{e^{-2x}dx}_{dv} = -x^2\ \frac{1}{2}e^{-2x} - \int \frac{-1}{2}e^{-2x}\, 2x\, dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}\, dx$

$F(x) = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{e^{-2x}dx}_{dv}$ CV: (i) $u = x \to du = dx$.

(ii) $dv = e^{-2x}dx \quad \to \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{e^{-2x}dx}_{dv} = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + x\cdot\frac{-1}{2}e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx$

$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}x\, e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}x\, e^{-2x} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}e^{-2x} + C$

Es decir, $F(x) = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}x\, e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$

f) $F(x) = \int \underbrace{e^x}_{u}\ \underbrace{Cos\, x\, dx}_{dv}$ CV: (i) $u = e^x \to du = e^x dx$.

(ii) $dv = Cos\, x\, dx \to v = Sen\, x$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{e^x}_{u}\ \underbrace{Cos\, x\, dx}_{dv} = e^x\, Sen\, x - \int Sen\, x\, (e^x dx) = e^x\, Sen\, x - \int e^x Sen\, x\, dx$

$\Rightarrow F(x) = e^x\, Sen\, x - \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{Sen\, x\, dx}_{dv}$ CV: (i)$u = e^x \to du = e^x dx$.

(ii) $dv = Sen\, x\, dx \to v = -Cos\, x$

$\Rightarrow F(x) = e^x\, Sen\, x - \int \underbrace{e^x}_{u}\ \underbrace{Sen\, x\, dx}_{dv} = e^x\, Sen\, x - e^x(-Cos\, x) + \int (-Cos\, x)e^x dx$

Es decir, $\int e^x Cos\, x\, dx = e^x\, Sen\, x + e^x Cos\, x - \int e^x Cos\, x\, dx$

De donde, $2\int e^x Cos\, x\, dx = e^x\, Sen\, x + e^x Cos\, x$

Finalmente, $\int e^x Cos\, x\, dx = \frac{e^x}{2}(Sen\, x + Cos\, x) + C$

g) $F(x) = \int \underbrace{Arctan\, x}_{u}\ \underbrace{dx}_{dv}$ CV: (i) $u = Arctan\, x \to du = \frac{1}{1+x^2}dx$.

(ii) $dv = dx \to v = x$

$$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{Arctan\, x}_{u}\ \underbrace{dx}_{dv} = x\, Arctan\, x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx = x\, Arctan\, x - \int \frac{1}{1+x^2} x\, dx$$

CV: $u = 1 + x^2 \rightarrow du = 2x\, dx \rightarrow x\, dx = \frac{du}{2}$

$$F = x\, Arctan\, x - \int \frac{1}{1+x^2} x\, dx = x\, Arctan\, x - \int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = x\, Arctan\, x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du$$

$$= x\, Arctan\, x - \frac{1}{2} Ln\, u + C$$

Volviendo a la variable original: $F(x) = x\, Arctan\, x - \frac{1}{2} Ln\,(1 + x^2) + C$

h) $F(x) = \int \frac{Ln\,(x+1)}{\sqrt{x+1}} = \int \underbrace{Ln(x+1)}_{u}\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+1}} dx}_{dv}$

CV: (i) $u = Ln(x+1) \rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx$.

(ii) $dv = \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = (x+1)^{-1/2} dx \rightarrow v = 2\sqrt{x+1}$

$$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{Ln(x+1)}_{u}\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+1}} dx}_{dv} = Ln(x+1) 2\sqrt{x+1} - \int 2\sqrt{x+1} \frac{1}{x+1} dx$$

$$= 2\sqrt{x+1}\, Ln(x+1) - 2\int (x+1)^{-1/2} dx$$

$$= 2\sqrt{x+1}\, Ln(x+1) - 2(2)\sqrt{x+1} + C$$

Es decir, $F(x) = 2\sqrt{x+1}\, Ln(x+1) - 4\sqrt{x+1} + C$

i) $F(x) = \int Ln^2 x\ dx = \int \underbrace{Ln\, x}_{u}\ \underbrace{Ln\, x\, dx}_{dv}$ CV: (i) $u = Ln\, x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$.

(ii) $dv = Ln\, x\, dx \rightarrow v = x\, Ln\, x - x$

$$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{Ln\, x}_{u}\ \underbrace{Ln\, x\, dx}_{dv} = Ln\, x(x\, Ln\, x - x) - \int (x\, Ln\, x - x)\frac{1}{x} dx$$

$$= Ln\, x(x\, Ln\, x - x) - \int (Ln\, x - 1)\, dx = Ln\, x(x\, Ln\, x - x) - x\, Lnx + x + x + C$$

Es decir, $F(x) = x\, Ln^2 x - 2x\, Ln\, x + 2x + C$

EJERCICIO. Resuelva la integral $F(x) = \int e^{ax} Sen(bx) dx$

5.9. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Este proceso centra su interés en sustituir en el integrando de una integral dada, factores de la forma $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ o $\sqrt{a^2+x^2}$ por funciones trigonométricas mediante un cambio de variable, con el objetivo de transformarlo en otra equivalente que se encuentre en la tabla básica de integrales.

Si aparece $\sqrt{x^2+a^2}$ el cambio de CV: $x = a\,Tan\,t$ resulta ser $\sqrt{x^2+a^2} = a\,Sec\,t$

Si aparece $\sqrt{x^2-a^2}$ el cambio de CV: $x = a\,Sec\,t$ resulta ser $\sqrt{x^2+a^2} = a\,tan\,t$

Si aparece $\sqrt{a^2-x^2}$ el cambio de CV: $x = Sen\,t$ resulta ser $\sqrt{a^2-x^2} = a\,Cos\,t$

Nota: Observe cuidadosamente los arreglos que se hacen en cada ejercicio.

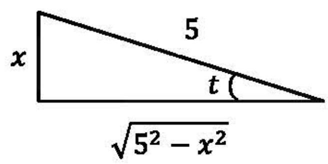
Ejemplo 1. Se da a conocer integrales resueltas *usando Sustitución trigonométrica.*

a) $F(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{25-x^2}}dx = \int \frac{1}{x\sqrt{5^2-x^2}}dx$

El CV: $x = 5\,Sen\,t \rightarrow dx = 5\,Cos\,t\,dt \rightarrow \sqrt{5^2-x^2} = 5\,Cos\,t$

$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{5^2-x^2}}dx = \int \frac{5\,Cos\,t\,dt}{(5\,Sen\,t)(5Cos\,t)} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{Sen\,t}dt = \frac{1}{5}\int Csc\,t\,dt = \frac{1}{5}Ln[Csc\,t - Cot\,t] + C$

Volviendo a la variable original: $Sen\,t = \frac{x}{5}$; $\quad Csc\,t = \frac{5}{x} \qquad Cot\,t = \frac{\sqrt{5^2-x^2}}{x}$



Finalmente, $F(x) = \frac{1}{5}Ln\left(\frac{5}{x} - \frac{\sqrt{5^2-x^2}}{x}\right) + C$

b) $F(x) = \int \frac{x^3}{(x^2+4)^{3/2}}dx = \int \frac{x^3}{\left(\sqrt{x^2+2^2}\right)^3}dx$

El CV: $x = 2\,Tan\,t \rightarrow dx = 2\,Sec^2t\,dt \rightarrow \sqrt{x^2+2^2} = 2\,Sec\,t$

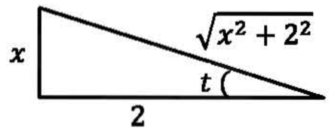
$\Rightarrow F = \int \frac{x^3}{\left(\sqrt{x^2+2^2}\right)^3}dx = \int \frac{(2\,Tan\,t)^3}{(2\,Sec\,t)^3}(2\,Sec^2t\,dt) = \int \frac{8Tan^3t}{8\,Sec^3t}(2\,Sec^2t\,dt) = 2\int \frac{Tan^3t}{Sec\,t}dt$

$= 2\int (Tan^2t \tan t\,Cos\,t)dt = 2\int (Sec^2t - 1)\frac{Sen\,t}{Cos\,t}Cos\,t\,dt = 2\int (Sec^2t\,Sen\,t - Sen\,t)\,dt$

$= 2\int(\frac{1}{Cos^2t}Sen\,t - Sen\,t)\,dt = 2\int(Sec\,t\,Tan\,t)dt - 2\int Sen\,t\,dt$

Luego, $F = 2\,Sec\,t + 2\,Cos\,t + C$

Volviendo a la variable original: $Tan\,t = \frac{x}{5};\quad Sec\,t = \frac{\sqrt{x^2+2^2}}{2}\;Cos\,t = \frac{2}{\sqrt{x^2+2^2}}$



$\Rightarrow F = 2Sec\,t + 2\,Cost + C = F(x) = 2\frac{\sqrt{x^2+2^2}}{2} + 2\frac{2}{\sqrt{x^2+2^2}} + C$

Finalmente, $F(x) = \sqrt{x^2+2^2} + \frac{4}{\sqrt{x^2+2^2}}$

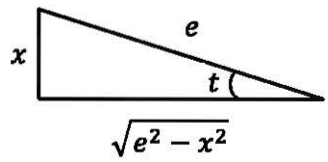
c) $F(x) = \int\frac{1}{(e^2-x^2)^{3/2}}dx = \int\frac{1}{\left(\sqrt{e^2-x^2}\right)^3}dx$

El CV: $x = e\,Sen\,t \rightarrow dx = e\,Cos\,t\,dt \rightarrow \sqrt{e^2-x^2} = e\,Cos\,t$

$\Rightarrow F = \int\frac{1}{(e\,Cos\,t)^3}(e\,Cos\,t\,dt) = \int\frac{1}{(e\,Cos\,t)^3}(e\,Cos\,t\,dt) = \frac{1}{e^2}\int\frac{1}{Cos^2t}dt = \frac{1}{e^2}\int Sec^2t\,dt$

$= F = \frac{1}{e^2}Tan\,t + C$

Volviendo a la variable original: $Sen\,t = \frac{x}{e};\quad Tan\,t = \frac{x}{\sqrt{e^2-x^2}}$



Finalmente, $F(x) = \frac{1}{e^2}\frac{x}{\sqrt{e^2-x^2}} + C$

Ejercicios. Resolver las siguientes integrales:

a) $F(x) = \int\frac{1}{(x^2+2^2)^{3/2}}dx$

b) $F(x) = \int\frac{1}{x^2\sqrt{5-x^2}}dx$

c) $F(x) = \int\frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx$

5.10. INTEGRALES QUE CONTIENEN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejemplo 1. Se muestra integrales resueltas *usando identidades trigonométricas.*

a) $F(x) = \int \frac{1}{1+Cos\,x} dx = \int \frac{1}{2\,Cos^2(x/2)} dx = \frac{1}{2} \int Sec^2(x/2)\,dx$

CV: $u = \frac{x}{2} \rightarrow du = \frac{1}{2} dx \rightarrow dx = 2\,du$

$\Rightarrow F = \frac{1}{2} \int Sec^2(x/2)\,dx = Tan\,u + C$

Volviendo a la variable original: $F(x) = Tan\,(x/2) + C$

b) $F(x) = \int \frac{Sen\,x}{1+Cos\,x} dx$ CV: $u = 1 + Cos\,x \rightarrow du = -Sen\,x\,dx \rightarrow -du = Sen\,x\,dx$

$\Rightarrow F = \int \frac{1}{u}(-du) = -\int \frac{1}{u} du = -Ln\,u + C$

Volviendo a la variable original: $F(x) = -Ln(1 + Cos\,x) + C$.

c) $F(x) = \int \frac{Sen(2x)}{Cos\,x} dx = \int \frac{2Sen(x)\,Cos(x)}{Cos(x)} dx = 2 \int Sen\,x\,dx = -2\,Cos\,x + C$

POTENCIAS PARES DE SENO O COSENO. Se aplica el seno o coseno del ángulo mitad.

a) $Sen^2 x = \frac{1-Cos(2x)}{2}$ b) $Cos^2 x = \frac{1+Cos(2x)}{2}$

Ejemplo 2. Véase la solución de las integrales:

a) $F(x) = \int Cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{Cos(2x)}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int (1 + Cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2} Sen(2x)\right) + C$

Es decir, $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}Sen(2x) + C$

b) $F(x) = \int Sen^4 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{Cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1-2\,Cos(2x)+Cos^2(2x)}{4} dx$

$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int 2Cos(2x)dx + \frac{1}{4} \int Cos^2(2x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}Sen(2x) + \frac{1}{4} \int \frac{1+Cos(4x)}{2} dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}Sen(2x) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}Sen(4x)\right) + C = = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}Sen(2x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}Sen(4x) + C$

Es decir, $F(x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}Sen(2x) + \frac{1}{32}Sen(4x) + C$

POTENCIAS IMPARES DE SENO O COSENO. Se busca usar la fórmula $Sen^2x + Cos^2x = 1$

Ejemplo 3. Véase la solución de las integrales:

a) $F(x) = \int Sen^3x\, dx = \int Sen^2x\, Sen\, x\, dx = \int (1 - Cos^2x)\, Sen\, x\, dx$

$= \int Sen\, x\, dx - \int Cos^2x\, Sen\, x\, dx$ CV: $u = Cos\, x \rightarrow du = -Sen\, x\, dx$

$= -Cos\, x - \int u^2(-du) = -Cos\, x + \int u^2 du = -Cos\, x + \frac{1}{3}u^3 + C$

Es decir, $F(x) = -Cos\, x + \frac{1}{3}Cos^3x + C$

b) $F(x) = \int Cos^3x\, dx = \int Cos^2x\, Cos\, x\, dx = \int (1 - Sen^2x)\, Cos\, x\, dx$

$= \int Cos\, x\, dx - \int Sen^2x\, Cos\, x\, dx$ CV: $u = Sen\, x \rightarrow du = Cos\, x\, dx$

$= Sen\, x - \int u^2 du = Sen\, x - \frac{1}{3}u^3 + C$

Es decir, $F(x) = Sen\, x - \frac{1}{3}Sen^3x + C$

c) $F(x) = \int Cos^5x\, dx = \int Cos^4x\, Cos\, x\, dx = \int (1 - Sen^2x)^2\, Cos\, x\, dx$

$= \int (1 - 2\, Sen^2x + Sen^4x)^2\, Cos\, x\, dx$

$= \int Cos\, x\, dx - 2\int Sen^2x\, Cos\, x\, dx + \int Sen^4x\, Cos\, x\, dx$

CV: $u = Sen\, x \rightarrow du = Cos\, x\, dx$

$= Sen\, x - 2\int u^2 du + \int u^4 du = Sen\, x - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$

Es decir, $F(x) = Sen\, x - \frac{2}{3}Sen^3x + \frac{1}{5}Sen^5x + C$

SENO Y COSENO CON EXPONENTE PAR E IMPAR O VICEVERSA

El exponente impar se transforma en uno par y otro impar, luego se resuelve. En algunos casos puede hacerse esto con cambio de variable para seno o para coseno.

Ejemplo 4. Véase la solución de las siguientes integrales:

a) $F(x) = \int Sen^4x\, Cos\, x\, dx$

CV: $u = Sen\, x \rightarrow du = Cos\, x\, dx$

$F(x) = \int Sen^4x\, Cos\, x\, dx = \int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + C$

Es decir, $F(x) = \frac{1}{5}Sen^5x + C$

b) $F(x) = \int Cos^2x\, Sen^3x\, dx = \int Cos^2x\, Sen^2x\, Sen\, x\, dx = \int Cos^2x\, (1 - Cos^2x)Sen\, x\, dx$

$= \int Cos^2x\, Senx\, dx - \int Cos^4x\, Senx\, dx$

CV: $u = Cos\, x \rightarrow\ du = -Sen\, x\, dx \rightarrow\ -du = Sen\, x\, dx$

$= \int u^2(-du) - \int u^4(-du) = -\int u^2du + \int u^4du = -\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$

Es decir, $F(x) = -\frac{1}{3}Cos^3x + \frac{1}{5}Cos^5x + C$

c) $F(x) = \int \frac{Sen^3x}{Cos\, x}dx = \int \frac{Sen^2x\, Sen\, x}{Cos\, x}dx = \int \frac{(1-Cos^2x)}{Cos\, x}Sen\, x\, dx$

CV: $u = Cos\, x \rightarrow\ du = -Sen\, x\, dx = -du = Sen\, x\, dx$

$= \int \frac{(1-Cos^2x)}{Cos\, x}Sen\, x\, dx = \int \frac{(1-u^2)}{u}(-du) = -\int \frac{1}{u}du + \int u\, du = -Ln(u) + \frac{1}{2}u^2 + C$

Es decir, $F(x) = -Ln(Cos\, x) + \frac{1}{2}Cos^2x + C$

d) $F(x) = \int Sen^5x\, Cos^2x\, dx = \int Sen\, x\, Sen^4x\, Cos^2x\, dx = \int (1 - Cos^2x)^2\, Cos^2x\, Sen\, x\, dx$

$= \int (1 - 2Cos^2x + Cos^4x)\, Cos^2x\, Sen\, x\, dx$

$=\int Cos^2x\, Sen\, x\, dx - 2\int Cos^4x\, Sen\, x\, dx + \int Cos^6x\, Sen\, x\, dx$

CV: $u = Cos\, x \rightarrow\ du = -Sen\, x\, dx \rightarrow\ -du = Sen\, x\, dx$

$= \int u^2(-du) - 2\int u^4(-du) + \int u^6(-du) = -\int u^2du + 2\int u^4du - \int u^6du$

$= -\frac{1}{3}u^3 + \frac{2}{5}u^5 - \frac{1}{7}u^7 + C$

Es decir, $F(x) = -\frac{1}{3}Cos^3x + \frac{2}{5}Cos^5x - \frac{1}{7}Cos^7x + C$

PRODUCTOS DEL TIPO: $Sen(ax) \cdot Cos(bx)$ CON a, b números enteros

Se busca usar las siguientes identidades:

$Sen\,A \cdot Cos\,B = \frac{1}{2}[Sen(A+B) + Sen(A-B)]$

$Cos\,A \cdot Sen\,B = \frac{1}{2}[Sen(A+B) - Sen(A-B)]$

$Cos\,A \cdot Cos\,B = \frac{1}{2}[Cos(A+B) + Cos(A-B)]$

$Sen\,A \cdot Sen\,B = -\frac{1}{2}[Cos(A+B) - Cos(A-B)]$

Ejemplo 5. Véase la solución de las siguientes integrales:

a) $F(x) = \int Sen(5x)\,Cos(3x)\,dx = \frac{1}{2}\int [Sen(8x) + Cos(2x)]\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}Cos(8x) - \frac{1}{2}Cos(2x)\right) + C$

Es decir, $F(x) = -\frac{1}{16}Cos(8x) - \frac{1}{4}Cos(2x) + C$

b) $F(x) = \int Cos(3x)\,Sen(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int [Sen(5x) - Sen\,x]\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}Cos(5x) + Cos\,x\right) + C$

Es decir, $F(x) = -\frac{1}{10}Cos(5x) + \frac{1}{2}Cos\,x + C$

c) $F(x) = \int Cos(6x)\,Cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int [Cos(8x) + Cos(4x)]\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}Sen(8x) + \frac{1}{4}Sen(4x)\right) + C$

Es decir, $F(x) = \frac{1}{16}Sen(8x) + \frac{1}{8}Sen(4x) + C$

d) $F(x) = \int Sen(9x)\,Sen(5x)\,dx = -\frac{1}{2}\int [Cos(14x) - Cos(4x)]\,dx$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{14}Sen(14x) - \frac{1}{4}Sen(4x)\right) + C$

Es decir, $F(x) = -\frac{1}{28}Sen(14x) + \frac{1}{8}Sen(4x) + C$

5.11. INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

OBSERVACIÓN. Cuando se tiene que integrar una fracción racional, es decir, un cociente de dos polinomios de la forma $r(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, debe tomarse en cuenta lo siguiente:

a) Si en el cociente, el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, entonces dicha fracción se divide hasta que el grado del numerador sea inmediatamente menor que el del denominador. Se usa la división mixta.

b) Si en el cociente, el grado del numerador es menor que el grado del denominador entonces la integral se resuelve usando alguno de los cuatro casos de separación en fracciones simples que se mostrarán en este texto.

CASO 0. Cuando el integrando se tiene que dividir, es decir, cuando el numerador es mayor o igual que el denominador.

Ejemplo 1. Se muestra integrales resueltas *cuando se tiene que dividir*, Caso 0.

a) $F(x) = \int \frac{x^2}{x+1} dx$ Dividiendo se tiene $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow F(x) = \int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \int (x-1)dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + Ln(x+1) + C$

Luego, $F(x) = \frac{x^2}{2} - x + Ln(x+1) + C$

b) $F(x) = \int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2} dx$ Dividiendo se tiene $\frac{x^3-x+3}{x^2+x-2} = x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x-2}$

$\Rightarrow F(x) = \int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2} dx = \int \left(x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x-2}\right) dx = \int (x-1)dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx$

$= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx$ CV: $u = x^2 + x - 2 \rightarrow du = (2x+1)dx$

$F = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{u} du = \frac{x^2}{2} - x + Ln(u) + C$

Volviendo a la variable original: $F(x) = \frac{x^2}{2} - x + Ln(x^2 + x - 2) + C$

c) $F(x) = \int \frac{x^2-x}{x^2+x+1} dx$ Dividiendo se tiene $\frac{x^2-x}{x^2+x+1} = 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

$\Rightarrow F(x) = \int \frac{x^2-x}{x^2+x+1} dx = \int \left(1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right) dx = \int dx - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = x - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

CV: $u = x^2 + x + 1 \rightarrow du = (2x+1)dx$

$F = x - \int \frac{1}{u} du = x + Ln(u) + C$

Volviendo a la variable original: $F(x) = x - Ln(x^2 + x + 1) + C$

d) $F(x) = \int \frac{x^4}{(x-1)^3} dx$ Dividiendo se tiene $\frac{x^4}{(x-1)^3} = x + 3 + \frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3}$. Se resolverá más adelante en el caso 2.

CASO 1. Cuando el denominador contiene factores de primer grado en el que ninguno se repite.

Proceso. Se factoriza el denominador y se separa en fracciones simples del modo siguiente:

a) $\frac{p(x)}{x(x-b)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-b}$ b) $\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$

c) $\frac{p(x)}{x(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$ d) $\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$

y así sucesivamente.

Ejemplo 2. Se presenta integrales resueltas *usando Fracciones parciales*, Caso 1.

a) $F(x) = \int \frac{5x-3}{x^2+x} dx = \int \frac{5x-3}{x(x+1)} dx$ Caso 1

A fracciones simples: $\frac{5x-3}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \end{cases}$

Luego, $F(x) = \int \frac{5x-3}{x(x+1)} dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1}\right) dx = 3\int \frac{1}{x} dx + 2\int \frac{1}{x+1} dx = 3\, Ln\, x - 2Ln(x+1) + C$

Es decir, $F(x) = 3\, Ln\, x - 2Ln(x+1) + C$

b) $F(x) = \int \frac{2x-19}{6x^2+7x-3} dx = \int \frac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)} dx$ Caso 1

A fracciones simples: $\frac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{3x-1} = \frac{A(3x-1)+B(2x+3)}{(2x+3)(3x-1)} = \frac{(3A+2B)x+(3B-A)}{(2x+3)(3x-1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -5 \end{cases}$

Luego, $F(x) = \int \frac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)} dx = \int \left(\frac{4}{2x+3} + \frac{-5}{3x-1}\right) dx = 4\int \frac{1}{2x+3} dx - 5\int \frac{1}{3x-1} dx$

$= 4\frac{1}{2}\, Ln(2x+3) - 5\frac{1}{3} Ln(3x-1) + C$

Es decir, $F(x) = 2\, Ln(2x+3) - \frac{5}{3} Ln(3x-1) + C$

c) $F(x) = \int \frac{8x^2-13x-1}{x(x-1)(x+1)}dx$ Caso 1

A fracciones simples: $\frac{8x^2-13x-1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \\ C = 10 \end{cases}$

Luego, $F(x) = \int \frac{8x^2-13x-1}{x(x-1)(x+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{10}{x+1}\right)dx = \int \frac{1}{x}dx - 3\int \frac{1}{x-1}dx + 10\int \frac{1}{x+1}dx$

$= Ln\, x - 3Ln(x-1) + 10Ln(x+1) + C$

Es decir, $F(x) = Ln\, x - 3Ln(x-1) + 10Ln(x+1) + C$

d) $F(x) = \int \frac{5x^2-3}{x^3-x}dx$ Caso 1.

A fracciones simples: $\frac{5x^2-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$

Luego, $F(x) = \int \frac{5x^2-3}{x(x-1)(x+1)}dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)dx = 3\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx$

$= 3Ln\, x + Ln(x-1) + Ln(x+1) + C$

Es decir, $F(x) = 3Ln\, x + Ln(x-1) + Ln(x+1) + C$

CASO 2. Cuando el denominador contiene factores de primer grado en el que alguno se repite.

Proceso: Se factoriza el denominador y se separa en fracciones simples del modo siguiente:

a) $\frac{p(x)}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^2}$

b) $\frac{p(x)}{x^2(x-b)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-b}$

c) $\frac{p(x)}{x(x-b)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2}$

d) $\frac{p(x)}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}$

e) $\frac{p(x)}{x(x-b)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{D}{(x-b)^3}$

y así sucesivamente.

Ejemplo 3. Se da integrales resueltas *usando Fracciones parciales*, Caso 2.

a) $F(x) = \int \frac{2x+1}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{2x+1}{(x-1)^2}dx$ Caso 2

A fracciones simples: $\frac{2x+1}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}=\frac{Ax+(B-A)}{(x-1)^2}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=3\end{cases}$

Luego, $F(x)=\int\frac{2x+1}{(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}\right)dx=2\int\frac{1}{x-1}dx+3\int(x-1)^{-2}dx$

$=\ 2\,Ln(x-1)+3\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C=2\,Ln(x-1)-\frac{3}{x-1}+C$

Es decir, $F(x)=2\,Ln(x-1)-\frac{3}{x-1}+C$

b) $F(x)=\int\frac{14x+9}{(2x+1)^2}dx$ Caso 2

A fracciones simples: $\frac{14x+9}{(2x+1)^2}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{(2x+1)^2}=\frac{A(2x+1)+B}{(2x+1)^2}=\frac{2Ax+(A+B)}{(x+1)^2}\Rightarrow\begin{cases}A=7\\B=2\end{cases}$

Luego, $F(x)=\int\frac{14x+9}{(2x+1)^2}dx=F(x)=\int\left(\frac{7}{2x+1}+\frac{2}{(2x+1)^2}\right)dx=7\int\frac{1}{2x+1}dx+2\int(2x+1)^{-2}dx$

$=(7)\frac{1}{2}Ln(2x+1)+(2)\frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{-1}}{-1}+C=\frac{7}{2}Ln(2x+1)-\frac{1}{2x+1}+C\,.$

c) $F(x)=\int\frac{x+1}{x(x-1)^2}dx$ Caso 2

A fracciones simples: $\frac{x+1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=2\end{cases}$

Luego, $F(x)=\int\frac{x+1}{x(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x-1}dx+2\int(x-1)^{-2}dx$

$=\ Ln\,x-Ln(x-1)+2\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C=Ln\,x-Ln(x-1)-\frac{2}{x-1}+C$

Es decir, $F(x)=Ln\,x-Ln(x-1)-\frac{2}{x-1}+C$

d) $F(x)=\int\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}dx$ Caso 2

A fracciones simples: $\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=1\\C=1\end{cases}$

Luego, $F(x)=\int\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$

$=2\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{x+1}dx+\int(x+1)^{-2}dx$

$= 2Ln(x-1) + Ln(x+1) + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = 2Ln(x-1) + Ln(x+1) - \frac{1}{x-1} + C$

Es decir, $F(x) = 2Ln(x-1) + Ln(x+1) - \frac{1}{x-1} + C$

e) $F(x) = \int \frac{x^4}{(x-1)^3}dx$ Caso 2.

Dividiendo se tiene $\frac{x^4}{(x-1)^3} = x + 3 + \frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3}$

$\Rightarrow F(x) = \int \frac{x^4}{(x-1)^3}dx = \int \left(x + 3 + \frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3}\right)dx = \int (x+3)dx + \int \frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3}dx$

A fracciones simples: $\frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \Rightarrow \begin{cases} A = 6 \\ B = 4 \\ C = 1 \end{cases}$

Luego, $F(x) = \int (x+3)dx + \int \frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3}dx$

$= \frac{x^2}{2} + 3x + \int \left(\frac{6}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}\right)dx$

$= \frac{x^2}{2} + 3x + 6\int \frac{1}{x-1}dx + 4\int (x-1)^{-2}dx + \int (x-1)^{-3}dx$

$= \frac{x^2}{2} + 3x + 6Ln(x-1) + \frac{4(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C$

$= \frac{x^2}{2} + 3x + 6Ln(x-1) - \frac{4}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$

Es decir, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + 6Ln(x-1) - \frac{4}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$

CASO 3. Cuando el denominador contiene factores de segundo grado en el que ninguno se repite.

Proceso: Se factoriza el denominador y se separa en fracciones simples del modo siguiente:

a) $\frac{p(x)}{x(x^2+a)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+a}, a > 0$

b) $\frac{p(x)}{(x-a)(x^2+b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+b}, b > 0$

c) $\frac{p(x)}{(x^2+a)(x^2+b)} = \frac{Ax+B}{x^2+a} + \frac{Cx+D}{x^2+b}, a > 0, b > 0$

y así sucesivamente.

Ejemplo 4. Se muestra integrales resueltas *usando Fracciones parciales*, Caso 3.

a) Demostrar que $F(x)=\int \frac{1}{x^3+8}dx=\frac{1}{24}Ln\left(\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{12}Arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

A fracciones simples: $\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}=\frac{A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}\Rightarrow$

$$\begin{cases} A=1/12 \\ B=-1/12 \\ C=3 \end{cases}$$

Luego, $F(x)=\int \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}dx=\int \frac{1/12}{x+2}dx+\int \frac{-\frac{x}{12}+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}dx$

$$=\frac{1}{12}\int \frac{1}{x+2}dx+\frac{1}{12}\int\left(\frac{x-4}{x^2-2x+4}\right)dx$$

$$=\frac{1}{12}\int \frac{1}{x+2}dx+\frac{1}{12}\left[\int\left(\frac{x-1}{x^2-2x+4}\right)dx-\int\frac{3}{x^2-2x+4}dx\right]$$

$$=\frac{1}{12}\int \frac{1}{x+2}dx+\frac{1}{12}\left[\frac{1}{2}\int\left(\frac{2(x-1)}{x^2-2x+4}\right)dx-\int\frac{3}{x^2-2x+4}dx\right]$$

$$=\frac{1}{24}Ln\left(\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{12}Arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Es decir, $F(x)=\int \frac{1}{x^3+8}dx=\frac{1}{24}Ln\left(\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{12}Arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

CASO 4. Cuando el denominador contiene factores de segundo grado en el que alguno se repite.

Proceso: Se factoriza el denominador y se separa en fracciones simples del modo siguiente:

a) $\frac{p(x)}{x(x^2+a)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+a}+\frac{Dx+E}{(x^2+a)^2}, a>0$

b) $\frac{p(x)}{(x-a)(x^2+b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{x^2+b}+\frac{Dx+E}{(x^2+b)^2}, b>0$

c) $\frac{p(x)}{(x^2+a)^2(x^2+b)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+a}+\frac{Cx+D}{(x^2+a)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+b}+\frac{Gx+H}{(x^2+b)^2}, a>0, b>0$

y así sucesivamente.

Ejemplo 5. Se da a conocer integrales resueltas *usando Fracciones parciales*, Caso 4.

a) $F(x)=\int \frac{x^3+3x}{(x^2+1)^2}dx$

A fracciones simples: $\frac{x^3+3x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D}{(x^2-1)^2}\Rightarrow\begin{cases} A=3 & B=0 \\ C=2 & D=0 \end{cases}$

Luego, $F(x)=\int \frac{x^3+3x}{(x^2+1)^2}dx=\int\left(\frac{1x+0}{x^2+1}+\frac{2x+0}{(x^2+1)^2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int(x^2+1)^{-2}\,(2x\,dx)=\frac{1}{2}Ln(x^2+1)+\frac{(x\ +1)}{-1}+C$

$=\frac{1}{2}Ln(x^2+1)-\frac{1}{x^2+1}+C$

Ejercicios. Resolver:

a) $F(x)=\int\frac{4x+3}{4x^3+8x^2+3x}dx$ b) $F(x)=\int\frac{x^3-2}{x^3-x^2}dx$

c) $(x)=\int\frac{x^2+x+10}{(2x-3)(x^2+4)}dx$ d) $(x)=\int\frac{x^5}{(x^2+4)^2}dx$

5.12. PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

En ciertos hechos o sucesos de la realidad, resulta más simple determinar su razón de cambio; con lo cual aparecen modelos como los siguientes: Rapidez de crecimiento de una población, rapidez con la que se desarrolla un comercio, rapidez con que cicatriza una herida, razón de cambio con la que se desarrolla una epidemia, etc.

Si en una función se conoce la rapidez o la razón de cambio (es decir se conoce la derivada) $y=f(x)$ y asimismo se tiene conocimiento del valor de la variable dependiente para cierto valor fijo de la variable independiente $f(x_0)=y_0$, entonces a menudo se puede encontrar la función original usando la integración. Esto será expuesto por medio de ejemplos directos:

Ejemplo 1. (FUNCIÓN DE UTILIDAD) Si la utilidad marginal por producir "x" unidades de un producto se calcula mediante el modelo $P'(x)=50-0{,}04x$ con $P(0)=0$; donde $P(x)$ es la utilidad en dólares. Encuentre la función de utilidad $P(x)$ y luego, la utilidad sobre la producción de 100 unidades.

Recordemos que la utilidad marginal *es la derivada de la función de utilidad*, y que la utilidad de vender cero unidades reporta cero dólares; por lo tanto el problema consiste en encontrar la función $P(x)$ sabiendo que $P'(x)=50-0{,}04x$ con $P(0)=0$

Iniciamos la integración: $P'(x)=50-0{,}04x$

Equivalentemente: $\frac{dP(x)}{dx}=50-0{,}04x \quad\rightarrow\quad dP(x)=(50-0{,}04x)dx$

Integrando ambos lados: $\int dP(x)=\int(50-0{,}04x)dx$

De donde, $P(x)=50x-0{,}02x^2+C$

Usando la condición $P(0)=0$ para hallar el valor de C: $P(0)=C\rightarrow C=0$

Es decir, la función de utilidad queda expresada por $P(x) = 50x - 0{,}02x^2$

Ahora podemos calcular la utilidad P para cualquier valor de la variable independiente "x". Nos piden $P(100) = 50(100) - 0{,}02(100)^2 = 4800$.

Esto significa que para una venta (producción) de 100 unidades del producto, se espera recibir 4800 dólares de utilidad.

Ejemplo 2. (HERIDA QUE CICATRIZA) Si el área de una herida que cicatriza cambia con una rapidez que se calcula usando el modelo $A'(t) = -4t^{-3}$ con $1 \leq t \leq 10$; donde t es el tiempo dado en días y $A(1) = 2$ en centímetros cuadrados. ¿Cuál será el área de la herida después de 2; 6 y 10 días?

Solución.

La herida cicatriza con una rapidez dada por la derivada del área A; el área para el primer día $t = 1$ será de 2 cm²; por ende, el problema consiste en encontrar la función $A(t)$ sabiendo que $A'(t) = -4t^{-3}$ con $A(1) = 2$

Iniciamos la integración desde $A'(t) = -4t^{-3}$

Equivalentemente: $\frac{dA}{dt} = -4t^{-3} \quad \rightarrow \quad dA = -4t^{-3}dt$

Integrando ambos lados: $\int dA = -\int 4t^{-3}dt \rightarrow A(t) = -4\frac{t^{-2}}{-2} + C \rightarrow A(t) = 2t^{-2} + C$

Usando la condición $A(1) = 2$ para hallar el valor de C: $A(1) = 2 + C \rightarrow C = 0$

Es decir, la función de utilidad queda expresada por $A(t) = 2t^{-2}$

Ahora se puede calcular la utilidad P para cualquier valor de la variable independiente "t". Nos piden:

$A(2) = 2(2)^{-2} = 0{,}5$ cm² $\quad A(6) = 2(6)^{-2} = 0{,}05$ cm² $\quad A(10) = 2(10)^{-2} = 0{,}02$ cm²

Esto significa que en tanto transcurren los días, el área de la herida disminuye.

Ejemplo 3. (CONTAMINACIÓN) Un barco tanque se encuentra encallado en un arrecife dejando escapar aceite, el cual produce una mancha que se extiende con una rapidez cuantificada mediante la fórmula $\frac{dR}{dt} = \frac{60}{\sqrt{t+9}}$ con $t \geq 0$.

Donde R es el radio en pies de la mancha circular después de t minutos. Calcule el radio de la mancha luego de 7, 10 y 15 minutos, teniendo en cuenta que el radio es cero para cuando el tiempo es cero.

Solución.

La rapidez de crecimiento del radio de la mancha está dada por la derivada de la función radio $R'(t)$, asimismo, el radio es cero para cuando t=0; en consecuencia, el problema consiste en encontrar la función $R(t)$ sabiendo que $\frac{dR}{dt}=\frac{60}{\sqrt{t+9}}$

Iniciamos la integración: $\frac{dR}{dt}=\frac{60}{\sqrt{t+9}}$

Equivalentemente: $dR=60(t+9)^{-1/2}dt$

Integrando ambos lados: $\int dR=\int 60(t+9)^{-1/2}dt \quad \rightarrow \quad R(t)=\frac{60}{1/2}(t+9)^{1/2}+C$

Usando la condición $R(0)=0$ para hallar el valor de C: $R(0)=120(3)+C \rightarrow C=-360$

Es decir, la función de utilidad queda expresada por $R(t)=120(t+9)^{1/2}-360$

Ahora se puede calcular el radio R para cualquier tiempo "t" transcurrido. Particularmente piden:

$R(7)=120(7+9)^{1/2}-360$=120 pies de radio.

$R(10)=120(10+9)^{1/2}-360=163{,}067$ pies de radio.

$R(15)=120(15+9)^{1/2}-360=240$ pies de radio.

Esto significa que el radio de la mancha de aceite va creciendo a medida que el tiempo pasa.

Ejemplo 4. (GEOMÉTRICO) Encuentre la ecuación de la curva que pasa por el punto $(2;5)$ si la pendiente para cualquier valor de x se obtiene de $\frac{dy}{dx}=2x$.

Solución.

Interesa encontrar la función $y=f(x)$ tal que $\frac{dy}{dx}=2x$, y que $y=5$ cuando $x=2$

Reescribiendo la pendiente dada: $\frac{dy}{dx}=2x \quad \rightarrow \quad dy=2x\,dx$

Integrando ambos lados: $\int dy=\int 2x\,dx \quad \rightarrow \quad y=\frac{2x^2}{2}+C$

De donde se obtiene $y=x^2+C$ o $\rightarrow$ $f(x)=x^2+C$

Usando la condición $y=5$ para $x=2$ (o que $f(2)=5$) se halla el valor de C:

$$f(2)=5 \quad \rightarrow \quad (2)^2+C=5 \quad \rightarrow \quad C=1.$$

Entonces la función finalmente es $f(x)=x^2+1$

Cuya gráfica resulta de este modo:

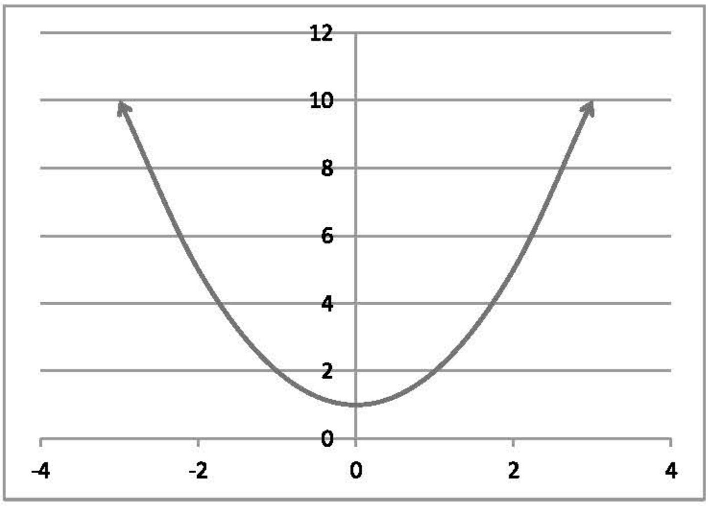


Figura 5.1

Ejemplo 5. (FUNCIÓN DE INGRESO PARA DOS ARTÍCULOS) Una compañía editorial vende un libro de cálculo a 20 dólares y cierta novela a 4. Después de "t" meses, las ventas del primero están aumentando con una rapidez que se calcula mediante $C'(t) = e^t$ (en libros por mes) y las de la novela, con una rapidez de $N'(t) = t^{1/2}$ (en libros por mes). Inicialmente, el ingreso combinado proveniente de las ventas de ambos libros es de \$6 000. Halle el ingreso total por la venta de estos libros a los "t" meses, específicamente para $t = 4$ meses y para $t = 9$ meses.

Solución.

El ingreso total será planteado por $R(t) = 20C(t) + 4N(t)$, siendo $C(t)$ la función que dará los ingresos por la venta de los libros de cálculo y $N(t)$, por la venta de las novelas, en el tiempo "t".

De aquí se obtiene que $R'(t) = 20\, C'(t) + 4N'(t) = 20\, e^t + 4\, t^{1/2}$.

También $\frac{dR}{dt} = 20\, e^t + 4\, t^{1/2} \;\rightarrow\qquad dR = (20\, e^t + 4\, t^{1/2})dt$

Integrando: $\qquad \int dR = \int (20\, e^t + 4\, t^{1/2})dt \quad\rightarrow\qquad R(t) = 20\, e^t + \frac{8}{3}\, t^{3/2} + C$

Usamos la siguiente condición: por la venta combinada se obtiene \$6 000 para cuando el tiempo es cero (puesto que este es el momento en que se comienza el estudio), es decir, $R(0) = 6000$.

$R(0) = 20\, e^0 + \frac{8}{3}\,(0)^{3/2} + C = 20 + C \qquad\rightarrow\qquad 6000 = 20 + C \qquad\rightarrow\qquad C = 5980$

Finalmente, la función de ingreso es dada por $R(t) = 20\, e^t + \frac{8}{3}\, t^{3/2} + 5980$

Específicamente, se pide $R(4) = 20\, e^4 + \frac{8}{3}\,(4)^{3/2} + 5980 = 7093{,}29$ dólares.

Lo cual significa que a los cuatro meses, la editorial tiene un ingreso de 7093,296 dólares.

También piden $R(9) = 20\,e^{9} + \frac{8}{3}\,(9)^{3/2} + 5980 = 168113{,}68$ dólares.

Se entiende que a los nueve meses, la editorial tiene ingresos de 168113,678 dólares.

OBSERVACIÓN. Este tipo de ejercicios de aplicación puede darse para otros métodos de integración, los que exponemos a continuación.

5.13. APLICACIONES QUE INVOLUCRAN FUNCIONES EXPONENCIALES O LOGARÍTMICAS

INTERÉS COMPUESTO CONTINUO.

Siendo A =Cantidad en el tiempo t; P=Capital inicial; r =Tasa anual; t = Tiempo en años; entonces:

a) El interés simple se calcula a partir de la fórmula $A = P + Prt$

b) El interés compuesto será dado por $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

c) El interés compuesto continuo será $A(t) = Pe^{rt}$

Ejemplo 1. Se invierte \$100 a un interés de 6%, que se compone en forma continua. ¿Qué cantidad habrá en la cuenta luego de 2 años?

Solución. Como es interés compuesto continuo, se emplea $A(t) = Pe^{rt}$

Siendo $P = 100$; $r = 0{,}06$; $t = 2$, se tiene $A(2) = 100e^{(0{,}06)(2)} = 112{,}7497$ dólares.

Significa que al cabo de 2 años habrá 112,7497 dólares en la cuenta.

LEY DEL CRECIMIENTO EXPONENCIAL.

En general, si una cantidad Q cambia a una razón proporcional a la cantidad que presente en un tiempo "t" y $Q(0) = Q_0$, se llega al modelo descrito a través de $\frac{dQ}{dt} = rQ$, con $Q(0) = Q_0$; luego, integrando, se obtiene como solución $Q(t) = Q_0e^{rt}$.

En efecto, $\frac{dQ}{dt} = rQ \;\rightarrow\; \frac{1}{Q}dQ = rdt$

Integrando: $\int \frac{1}{Q}dQ = \int rdt \;\rightarrow\; Ln\,Q = rt + Ln\,C \;\rightarrow\; Ln\,Q - LnC = rt \;\rightarrow Ln\left(\frac{Q}{C}\right) = rt$

$\rightarrow e^{Ln(Q/C)} = e^{rt} \rightarrow \frac{Q}{C} = e^{rt} \rightarrow Q(t) = Ce^{rt}$

Usando la condición $Q(0) = Q_0$ para hallar C: $Q(0) = C \rightarrow Q_0 = C$

Finalmente, $Q(t) = Q_0 e^{rt}$

Aquí Q_0 es la cantidad inicial (cuando $t = 0$).

r = Constante de proporcionalidad.

t = Tiempo.

Q = Cantidad en el tiempo "t".

CRECIMIENTO DE **POBLACIÓN**. La población mundial se incrementa a una razón siempre creciente. Lo que puede ser aproximado en ciertos periodos mediante la ley de crecimiento exponencial. Los datos calculados sirven para ciertos periodos, los cuales pueden modificarse mediante políticas a fin de evitar problemas como, por ejemplo, la superpoblación. Son estimaciones que obedecen a datos tomados para realizar los estudios.

Ejemplo 2. La India tenía una población de 500 millones de habitantes en 1966 ($t = 0$) y un índice de natalidad de 3% por año (se supone que se compone de forma continua). Si Q es la población en millones "t" años después de 1966, y continúa el mismo índice de natalidad, entonces: Si $\frac{dQ}{dt} = 0{,}03Q$, con $Q(0) = 500$, estime la población de la India para los años 1986 ($t = 20$), 1996 ($t = 30$) y 2006 ($t = 40$).

Solución.

En primer lugar, debemos hallar $Q = Q(t)$ por integración:

Reescribiendo $\frac{dQ}{dt} = 0{,}03Q \rightarrow \frac{1}{Q} dQ = 0{,}03\, dt$

Integrando ambos lados: $\int \frac{1}{Q} dQ = \int 0{,}03\, dt \rightarrow Ln\, Q = 0{,}03t + Ln\, C$

$\rightarrow Ln\, Q - LnC = 0{,}03t \rightarrow Ln\left(\frac{Q}{C}\right) = 0{,}03t \rightarrow e^{Ln(Q/C)} = e^{0{,}03t} \rightarrow \frac{Q}{C} = e^{0{,}03t}$

$\rightarrow Q(t) = Ce^{0{,}03t}$

Usamos la condición inicial $Q(0) = Q_0$para hallar el valor de C: $Q(0) = Q_0 = C$, de donde se tiene $Q(t) = Q_0\, e^{0{,}03t}$.

Usando esta Ley de crecimiento exponencial, se obtiene la función que permitirá calcular las diferentes poblaciones pedidas: $Q(t) = 500\, e^{0{,}03t}$

Para 1986 se tiene $t = 20$: $Q(20) = 500\, e^{0{,}03(20)} = 911$ millones de habitantes.

Para 1996 se tiene $t = 30$: $Q(30) = 500\ e^{0,03(30)} = 1229{,}8$ millones de habitantes.

Para 2006 se tiene $t = 40$: $Q(40) = 500\ e^{0,03(40)} = 1660$ millones de habitantes.

DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA Y CARBONO 14.

COMENTARIO. Willard Libby (Premio Nobel en 1946) descubrió que mientras vive una planta o un animal, el carbono 14 radiactivo se mantiene a un nivel constante en sus tejidos. Sin embargo, una vez que muere, este disminuye por desintegración a una razón proporcional a la cantidad presente. Por cuanto se tiene la siguiente relación: $\frac{dQ}{dt} = rQ$, con $Q(0) = Q_0$; con ello se obtiene otro ejemplo de crecimiento exponencial. La rapidez de desintegración del carbono 14 radiactivo es de 0,0001238; lo cual significa que $r = -0{,}0001238$, puesto que la desintegración es un crecimiento negativo.

Ejemplo 3. En un sitio arqueológico de África, se encontró un fragmento de hueso humano. Se estima que hay un 10 % de la cantidad original de carbono 14 radiactivo; calcule la edad del hueso.

Solución.

Con los datos presentados, se tendrá $\frac{dQ}{dt} = -0{,}0001238Q$, con $Q(0) = Q_0$

En forma similar al ejercicio anterior, al integrar se tendrá la función $Q(t) = Q_0\ e^{-0,0001238t}$

Piden lo siguiente: cuánto vale t si $Q(t) = 0{,}1\ Q_0$ de la cantidad inicial, entonces, $0{,}1\ Q_0 = Q_0\ e^{-0,0001238t}$

Despejando t: $t = \frac{Ln(0{,}1)}{-0{,}0001238} = 18599{,}23 \approx 18600$ años de antigüedad.

MODELO DE APRENDIZAJE

En ciertas habilidades de aprendizaje, como digitar un teclado o nadar, con frecuencia se utiliza un modelo matemático que supone la existencia de una habilidad máxima alcanzable, digamos M, y la rapidez de mejoramiento en la que dicha habilidad es proporcional a la diferencia entre ese mejoramiento "y" y el valor alcanzable "M". En términos matemáticos:
$\frac{dy}{dt} = k(M - y)$, con $y(0) = 0$.

Este problema se resuelve de forma similar a como se calculó la ley de crecimiento exponencial, obteniéndose $y = M(1 - e^{-kt})$

En efecto, $\frac{dy}{dt} = k(M - y) \ \rightarrow\ \frac{1}{y-M} dy = -k\ dt$

Integrando: $\int \frac{1}{y-M}dy = -\int kdt \rightarrow \ Ln(y-M) = -kt + Ln\,C \ \rightarrow \ Ln(y-M) - Ln\,C = -kt$
$\rightarrow Ln\left(\frac{y-M}{C}\right) = -kt$

$\rightarrow e^{Ln[\frac{y-M}{C}]} = e^{-kt} \ \rightarrow \frac{y-M}{C} = e^{-kt} \ \rightarrow y - M = Ce^{-kt} \ \rightarrow y(t) = M + Ce^{-kt}$

Usando la condición $y(0) = 0$ para obtener la constante C:

$y(0) = M + C \rightarrow \ 0 = M + C \rightarrow \ C = -M$

La solución final será $y(t) = M - Me^{-kt}$ o $y(t) = M(1 - e^{-kt})$

Nota. Se ha obtenido la función $y = y(t)$ por integración; no obstante, para calcular la rapidez, también puede derivarse dicha función.

Ejemplo 4. La distancia "y" (en pies) que un joven aprendiz de natación es capaz de nadar en un minuto, después de "t" horas de práctica, se determina aproximadamente con la fórmula $y(t) = 50(1 - e^{-0,04t})$. Calcular la rapidez de mejoramiento después de 10, 25 y 40 horas de práctica.

Solución.

Para hallar la rapidez, derivamos con respecto a t: $y(t) = 50(1 - e^{-0,04t})$.

La rapidez es $y'(t) = 2e^{-0,04t}$.

Piden lo siguiente:

$y'(10) = 2e^{-0,04(10)}$ =1,34 pies de nado por hora de práctica.

$y'(25) = 2e^{-0,04(25)}$ =0,73 pies de nado por hora de práctica.

$y'(40) = 2e^{-0,04(40)}$ =0,4 pies de nado por hora de práctica.

Observemos: A medida que el tiempo pasa, la rapidez de aprendizaje disminuye.

EXPOSICIÓN DE LOS FENÓMENOS DE CRECIMIENTO EXPONENCIAL.

A continuación, se expone varios modelos de crecimiento bastante frecuentes en las aplicaciones en diversos campos de la ciencia, estos se dividen básicamente en dos grupos: crecimiento limitado y crecimiento ilimitado.

a. MODELO DE CRECIMIENTO ILIMITADO.

Descripción: Una cantidad "y" cambia (aumenta) con una razón proporcional a la cantidad presente en un instante t.

La rapidez es dado por el modelo $\frac{dy}{dt} = ay, a > 0, t > 0$

La condición inicial es $y(0) = C$

Integrando se obtiene la función de *crecimiento ilimitado*: $y(t) = Ce^{at}$

Usos: Crecimiento de población a corto plazo, crecimiento de dinero, consumo de recursos a corto plazo, curvas de precio – demanda.

La gráfica del modelo $y(t) = 50e^{0,5\,t}$ es como sigue:

Figura 5.2

b. MODELO DE DESINTEGRACIÓN .

Descripción: Una cantidad "y" cambia (disminuye) con una razón proporcional a la cantidad presente en un instante t.

La rapidez es dada por el modelo $\frac{dy}{dt} = -ay, a > 0, t > 0$

La condición es dada por: $y(0) = C$

Integrando, se obtiene la función de *desintegración* $y(t) = Ce^{-at}$

Usos: Desintegración radiactiva, absorción de la luz en el agua, presión atmosférica, curvas de precio – demanda.

La gráfica del modelo: $y(t) = 100e^{-a0,5}$ aparece en la Figura 5.3.

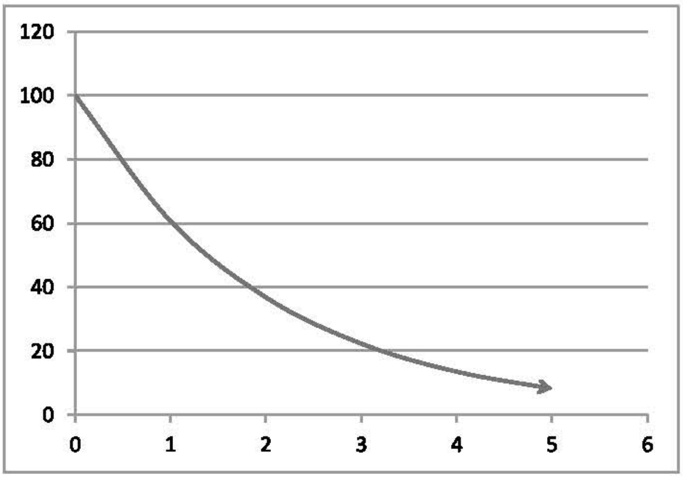


Figura 5.3

c. MODELO DE CRECIMIENTO LIMITADO.

Descripción: Se tiene una habilidad máxima alcanzable M y la rapidez de mejoramiento en la habilidad es proporcional a la diferencia entre ese mejoramiento "y" y el valor alcanzable M.

La rapidez es dado por el modelo $\frac{dy}{dx} = a(M - y), t > 0$

La condición inicial es $y(0) = 0$

Integrando, se obtiene la función de *crecimiento limitado* $y(t) = M(1 - e^{-at})$

Usos: Aprendizaje, venta de productos de moda pasajera, depreciación de vehículos y equipos.

A continuación se gráfica del modelo $y(t) = 100(1 - e^{-0,6t})$.

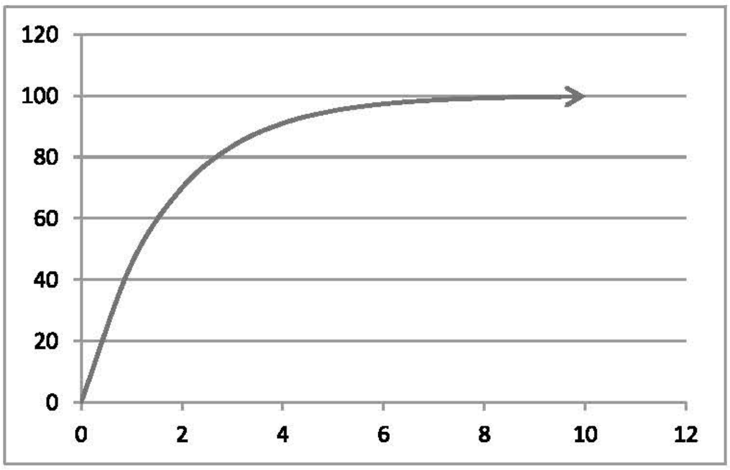


Figura 5.4

d. CRECIMIENTO LIMITADO – CURVA LOGÍSTICA.

La rapidez es dada por el modelo $\frac{dy}{dt} = aky(M - y), t > 0$.

La condición inicial es $y(0) = M$

Integrando, se obtiene la función de *crecimiento limitado* $y(t) = \frac{M}{1+Ce^{-at}}$

Usos: Aprendizaje, crecimiento de población a largo plazo, epidemias, venta de nuevos productos.

La gráfica del modelo $y(t) = \frac{100}{1+80e^{-0,4\,t}}$ es así:

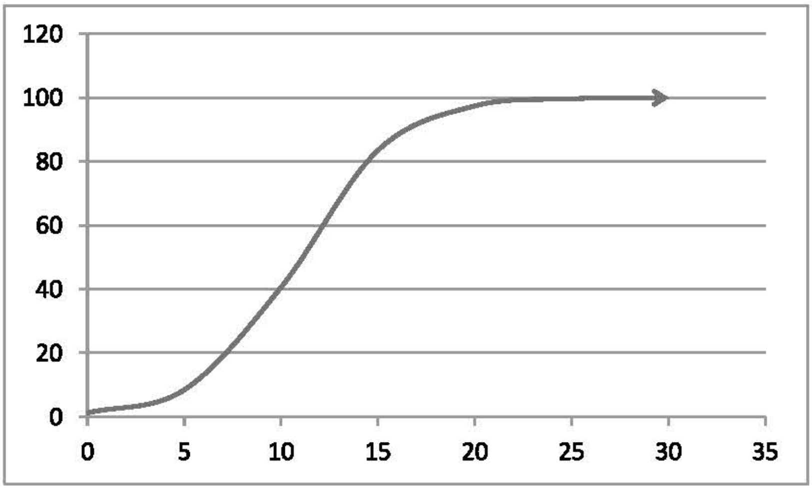


Figura 5.5

5.14. LISTADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resuélvase por el método de sustitución:

a) $F(x) = \int x^3\sqrt{(3x^2+1)^3}\,dx$ b) $F(x) = \int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

c) $F(x) = \int \frac{xe^{\sqrt{x^2+3}}}{\sqrt{x^2+3}}dx$ d) $F(x) = \int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}dx$

e) $F(x) = \int (x+1)\sqrt{2-x}\,dx$ f) $F(x) = \int \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \frac{dx}{x^2}$

d) Problema. La distancia S (en kilómetros) entre dos automóviles en el instante "t" (en horas) varía con una rapidez dada por $\frac{dS}{dt} = 50\left(\frac{1-e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\right)$. Calcular la distancia $S(t)$ entre los automóviles, después de media hora, si inicialmente se encuentran en el mismo punto.

2. Resuélvase usando integración por partes:

a) $F(x) = \int (2x-3)^5(7-4x)dx$ b) $F(x) = \int xe^{5x}dx$

c) $F(x) = \int x2^x dx$ d) $F(x) = \int x\, Sen\, x\, dx$

e) $F(x) = \int Arccos\, x\, dx$ f) $F(x) = \int e^{3x} Sen(2x)\, dx$

g) $F(x) = \int \frac{1}{x\, Ln\, x}dx$

h) Problema. La función $P(t)$ modela el porcentaje de la población que ha probado un producto nuevo en los "t" primeros meses después de que se lanzó al mercado. La función $P(t)$ para cierto alimento dietético varía con una rapidez que se calcula de $\frac{dP}{dt} = 100\frac{Ln(t+1)}{(t+1)^2}$ con $t \geq 0$. Suponiendo que $P(0) = 0$, hallar el porcentaje de la población que consumió el producto durante su primer mes en el mercado; luego, en los seis primeros meses; y, finalmente, en el primer año.

3. Calcúlese la integral indefinida por sustitución trigonométrica:

a) $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{(25-x^2)^3}}dx$ b) $F(x) = \int \sqrt{16-4x^2}dx$

c) $F(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+9}}dx$ d) $F(x) = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx$

e) $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^5}}dx$ f) $F(x) = \int x^2\sqrt{x^2-4}\,dx$

4. Calcúlese cada integral indefinida por fracciones simples:

a) $F(x) = \int \frac{3}{x^2+x-2}dx$ b) $F(x) = \int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}dx$ c) $F(x) = \int \frac{2x^2+x+8}{(x^2+4)^2}dx$

d) $F(x) = \int \frac{x}{16x^4-1}dx$ e) $F(x) = \int \frac{x^4+4x^3-x^2+5x+1}{x^5+x^4+x^3-x^2-2}dx$

5. Calcúlese las siguientes integrales. Use el método que más se adecúe.

a) $F(x) = \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$ b) $F(x) = \int \frac{e^x}{1-Tan(e^x)}dx$

c) $F(x) = \int Sen^2(2x)dx$ d) $F(x) = \int Cos^3(\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}}$

e) $F(x) = \int \frac{Cos\, x}{1+Sen^2 x}dx$ f) $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^4-6x^2+5}}dx$

6. PROBLEMAS DE APLICACIÓN. Resolver los siguientes problemas:

a) (CRECIMIENTO POBLACIONAL) Encuentre el tiempo en que se duplica la población de cierta ciudad si crece en forma continua a razón de 3,2% por año (se entiende que se compone de forma continua).

b) Calcule la edad de un hueso que se encontró en un lugar arqueológico si aún posee el 50% de la cantidad original de carbono 14 radiactivo.

c) (ECOLOGÍA) Para masas de agua relativamente limpias, la intensidad de la luz se reduce según la fórmula $\frac{dL}{dx} = -kL$ con $L(0) = L_0$, donde L es la intensidad de la luz a "x" pies por debajo de la superficie del agua. Para el mar de los Sargazos de las Indias Occidentales, $k = 0{,}00942$. Calcule L en términos de "x", así como la profundidad a la cual se reduce la luz a la mitad, respecto a la superficie.

d) (INSCRIPCIÓN ESCOLAR) La rapidez de incremento proyectada en la inscripción de una nueva universidad se estima mediante la fórmula $\frac{dE}{dx} = 5000(t+1)^{-1/2}$ con $t > 0$, donde $E(t)$ es la inscripción proyectada en "t" años. Si cuando $t = 0$ la inscripción es de 2 000, calcular la inscripción que debe proyectarse para 10, 15 y 20 años en adelante.

e) (LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON) Representamos por "y" la temperatura (en grados) de un objeto en una habitación cuya temperatura se mantiene constante a 60°. Si se enfría el objeto de 100° a 90° en 10 minutos, ¿cuánto tiempo más tardará en descender su temperatura a 80°? Respuesta. 24,09 minutos.

f) La presión atmosférica P (medida en milímetros de mercurio) disminuye exponencialmente cuando la altura "x" (medida en metros) aumenta. Si la presión es de 760 milímetros de mercurio al nivel del mar ($x = 0$) y 672,71 milímetros de mercurio a una altitud de 1 000 metros, calcular la presión a una altura de 2 000, 3 000 y 5 000 metros.

Capítulo VI

LA INTEGRAL DEFINIDA DE FUNCIONES REALES

CAPÍTULO VI

LA INTEGRAL DEFINIDA DE FUNCIONES REALES

CONTENIDO

6.1. Génesis de la integral definida. La integral definida.

6.2. Teoremas fundamentales del cálculo.

6.3. Propiedades de la integral definida.

6.4. Integral definida y área de regiones bajo una curva.

6.5. Integral definida y área entre curvas.

6.6. Integral definida y el volumen por secciones planas conocidas.

6.7. Integral definida y el volumen de sólidos de revolución.

6.8. Integral definida y la longitud de arco de una curva.

6.9. Integral definida y centro de gravedad de una región plana.

6.10. Integral definida y el área de superficies de revolución.

6.11. Integral definida y el valor medio de una función real.

6.12. Integral definida y el trabajo realizado por una fuerza.

6.13. Integral definida en otras aplicaciones.

6.14. Lista de ejercicios propuestos.

6.1. GÉNESIS DE LA INTEGRAL DEFINIDA. LA INTEGRAL DEFINIDA

Recordar que la *integral indefinida* da como resultado, en general, una familia de funciones de la forma $y = F(x) + C$ (cada constante de integración C corresponde a una función particular).

La *integral definida* dará como resultado un valor real; el cual se obtiene evaluando en la primitiva los valores límites de integración, tal como será sustentado por el segundo teorema fundamental del cálculo integral.

Antes de dar la definición exacta, a manera de introducción, veamos un problema para calcular el área bajo una curva.

a) Primero de forma aproximada, haciendo particiones en el intervalo dominio.

b) Luego de forma exacta, afinando la partición y aplicando límites.

PROBLEMA. Hallar el área comprendida entre la curva dada por la función real $y = x^2$, la recta $x = 3$ y el eje X.

a) Solución aproximada.

i) Dividimos el intervalo $I = [0; 3]$ en seis subintervalos de tamaño $\frac{1}{2}$ unidad de longitud.

ii) Sobre cada intervalo de base $\frac{1}{2}$ se construye un rectángulo de altura, dada por la ordenada de $y = x^2$ tomada en el punto medio de la base. (Ver Figura 6.1).

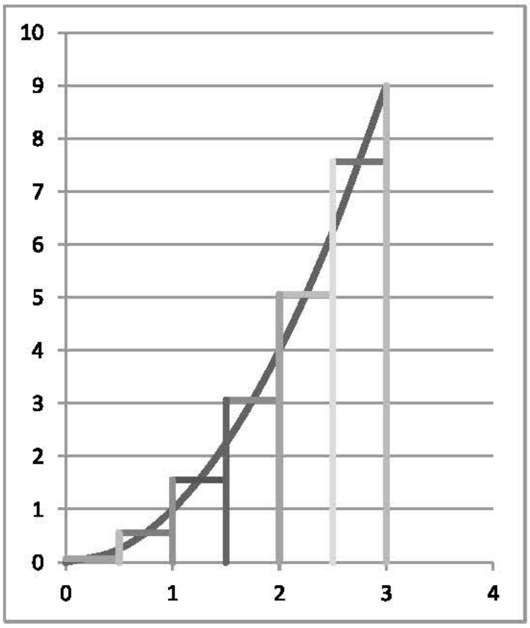


Figura 6.1

iii) El área de los seis rectángulos que *aproxima el área de la región* será la siguiente:

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{7}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{11}{4}\right)^2=\frac{286}{32}=\frac{143}{16}=8{,}9375\ unid^2.$$

b) Solución exacta.

i) Dividimos el intervalo $I=[0;3]$ en n intervalos más pequeños, haciendo una partición que será dada por el conjunto de puntos $P=\{0=x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{i-1},x_i,\dots x_{n-1},x_n=3\}$

ii) Los n intervalos serán $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, ... , $[x_{i-1},x_i]$, ... , $[x_{n-1},x_n]$

iii) Elegimos un intervalo típico que será identificado por $[x_{i-1},x_i]$

iv) Las sumas que se presentan en seguida se conocen como las sumas de Riemann.

El área *sobreestimada* (área con exceso) o suma superior será la siguiente:

$$\bar{A}_n=(x_1-x_0)x_1^2+(x_2-x_1)x_2^2+\cdots+(x_i-x_{i-1})x_i^2+\cdots+(x_n-x_{n-1})x_n^2\,.$$

$$\bar{A}_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(x_i)\,.$$

El área *subestimada* (área con déficit) o suma inferior será como sigue:

$$\underline{A}_n=(x_1-x_0)x_0^2+(x_2-x_1)x_1^2+\cdots+(x_i-x_{i-1})x_{i-1}^2+\cdots+(x_n-x_{n-1})x_{n-1}^2\,.$$

$$\underline{A}_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(x_{i-1})\,.$$

v) Considerando el intervalo $I=[0;b]$ y dividiéndolo en n subintervalos de igual magnitud, cada uno mide $\frac{b-0}{n}=\frac{b}{n}$, luego $(x_1-x_0)=(x_2-x_1)=\ldots=(x_n-x_{n-1})=\frac{b}{n}$

Los puntos de subdivisión serán $x_0=0,\ x_1=\frac{b}{n},\ x_2=\frac{2b}{n},\ x_3=\frac{3b}{n},\ \ldots,\ x_i=\frac{ib}{n},\ \ldots,\ x_n=b$

Al hacer uso de los puntos de subdivisión, el área *sobreestimada* se transforma en

$$\bar{A}_n=\frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^2+\frac{b}{n}\left(\frac{2b}{n}\right)^2+\frac{b}{n}\left(\frac{3b}{n}\right)^2+\ldots+\frac{b}{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^2+\ldots+\frac{b}{n}(b)^2$$

$$\bar{A}_n=\frac{b^3}{n^3}+\frac{4b^3}{n^3}+\frac{9b^3}{n^3}+\ldots+\frac{i^3b^3}{n^3}+\ldots+\frac{b^3}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2}=\frac{b^3}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+i^2+\cdots+n^2)$$

$$\bar{A}_n=\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{b^3}{n^3}\cdot\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)=\frac{b^3}{3}+\frac{b^3}{2n}+\frac{b^3}{6n^2}$$

$$\bar{A}_n=\frac{b^3}{3}+\frac{b^3}{2n}+\frac{b^3}{6n^2}.$$

Usando los puntos de subdivisión, el área *subestimada* se transforma en

$$\underline{A}_n=\frac{b}{n}(0)^2+\frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^2+\frac{b}{n}\left(\frac{2b}{n}\right)^2+\ldots+\frac{b}{n}\left(\frac{(i-1)b}{n}\right)^2+\ldots+\frac{b}{n}\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^2$$

$$\underline{A}_n=\frac{b^3}{n^3}+\frac{4b^3}{n^3}+\frac{9b^3}{n^3}+\ldots+\frac{(i-1)^3b^3}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2b^3}{n}=\frac{b^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+(i-1)^2+\cdots+(n-1)^2)$$

$$\underline{A}_n = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{b^3}{n^3}\cdot\left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) = \frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2}$$

$$\underline{A}_n = \frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2}.$$

Aplicando límite cuando $n \to \infty$ al área subestimada, se obtiene el área verdadera:

$$A = \operatorname*{Lím}_{n\to\infty} \underline{A}_n = \operatorname*{Lím}_{n\to\infty}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2}\right) = \frac{b^3}{3}$$

Al aplicar el límite cuando $n \to \infty$ al área sobreestimada, se obtiene el área verdadera:

$$A = \operatorname*{Lím}_{n\to\infty} \bar{A}_n = \operatorname*{Lím}_{n\to\infty}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2}\right) = \frac{b^3}{3}$$

Es decir, ambos límites coinciden y dan como resultado la misma área verdadera: $A = \frac{b^3}{3}$

En el problema planteado $b = 3$, entonces el área exacta es $A = \frac{b^3}{3} = \frac{3^3}{3} = 9\ unid^2$.

OBSERVACIÓN. En el problema anterior observamos que aplicando límite cuando $n \to \infty$ a las sumas de Riemann, se obtiene el verdadero valor del área de la región dada.

Calcular integrales definidas mediante este proceso es un trabajo tedioso para funciones más sofisticadas; no obstante, se puede realizar. Antes bien, sin pérdida de la generalidad, este hecho permite plantear la definición de la integral definida.

DEFINICIÓN. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real y continua en un intervalo $I = [a; b]$, entonces la INTEGRAL DEFINIDA de f desde "a" hasta "b" (o desde $x = a$, hasta $x = b$) que se denota por $\int_a^b f(x)dx$, se define como el límite siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{A_n} = \lim_{n\to\infty} \underline{A_n}$$

Donde $\overline{A_n}$ y $\underline{A_n}$ son en general las sumas de Riemann superior e inferior, respectivamente, para un intervalo $I = [a; b]$ cualquiera. El valor "a" es llamado límite inferior de integración y el valor "b", límite superior de integración.

Nota. En realidad la integral definida es una suma infinita de allí el símbolo $S \to \int$.

CONTINUIDAD – INTEGRABILIDAD.

TEOREMA. Si $f: I \subset R \to R$ es una función real y continua en un intervalo cerrado $I = [a; b]$, entonces f es integrable en I.

6.2. TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Este teorema muestra la forma de derivar una función, la cual está definida mediante una integral.

TEOREMA. Sea G una función definida por $G(x) = \int_a^x f(t)dt$. Si $f: [a; b] \to R$ es continua sobre un intervalo $I = [a; b]$ que contiene al valor "c", entonces G es diferenciable en I y la derivada es dada por $G'(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\int_c^x f(t)dt\right] = f(x)$.

Ejemplo 1. Se presenta a continuación, derivadas de funciones definidas mediante integrales:

a) $G(x) = \int_a^x Sen\, t\, dt$

La derivada es $G'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x Sen\, t\, dt\right] = Sen\, x$.

b) $G(x) = \int_x^2 (u^2 - Ln(u) + 4)\, du = -\int_2^x (u^2 - Ln(u) + 4)\, du$

La derivada es $G'(x) = \frac{d}{dx}\left[-\int_2^x (u^2 - Ln(u) + 4)\, du\right] = -(x^2 - Ln(x) + 4)$

OBSERVACIÓN. Son consecuencia del primer teorema fundamental del cálculo integral, cuando alguno o ambos límites de integración resultan funciones.

a) Si $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f[g(x)] \cdot g'(x)$

b) Si $G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f[g(x)] \cdot g'(x) - f[h(x)] \cdot h'(x)$

Ejemplo 2. Se muestra derivadas de funciones definidas por integrales:

a) $G(x) = \int_a^{\sqrt{x}} Cos\, t\, dt$

La derivada es $G'(x) = Cos(\sqrt{x}) \cdot [\sqrt{x}]' = Cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} Cos(\sqrt{x})$

b) $G(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sqrt{1 - t^2}\, dt$

La derivada es $G'(x) = \sqrt{1 - (x^3)^2} \cdot [x^3]' - \sqrt{1 - (x^2)^2} \cdot [x^2]'$

$= \sqrt{1 - x^6} \cdot (3x^2) - \sqrt{1 - x^4} \cdot (2x) = 3x^2\sqrt{1 - x^6} - 2x\sqrt{1 - x^4}$

c) $G(x) = \int_{1-x^2}^{1+x^2} \left(\frac{1}{t}\right) dt$

La derivada es: $G'(x) = \frac{1}{1+x^2}[1+x^2]' - \frac{1}{1-x^2}[1-x^2]'$

$= \frac{1}{1+x^2}(2x) - \frac{1}{1-x^2}(-2x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1-x^2} = \frac{4x}{1-x^4}$

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Este teorema muestra la forma de evaluar una integral en sus límites de integración. Este teorema es conocido como la regla de Barrow.

TEOREMA. Sea $f: [a; b] \to R$ una función real continua en el intervalo $I = [a; b]$. Si F es diferenciable en I y si $F'(x) = f(x)$ en I, entonces se tiene que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Siendo $y = F(x)$ la antiderivada de $y = f(x)$.

OBSERVACIÓN. Primero se calcula la primitiva o integral indefinida para luego evaluar y hallar el valor de la integral definida.

Ejemplo 3. Se da a conocer ejemplos de integrales definidas:

a) $N = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$

b) $N = \int_1^2 (3x^3 - 9x + 7)dx = \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 7x\right]_1^2$

$= \frac{3(2)^4}{4} - \frac{9(2)^2}{3} + 7(2) - \frac{3(1)^4}{4} + \frac{9(1)^2}{3} - 7(1) = 4,75$

6.3. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

a) $\int_a^b C\, dx = C(b-a)$

b) $\int_a^b C\, f(x)dx = C \int_a^b f(x)dx$

c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx, \qquad c \in [a, b]$

d) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

e) $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

f) Si $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a;b] \Rightarrow \int_a f(x)dx \leq \int_a g(x)dx$

g) Si $f(x) \geq 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

h) $\int_a^a f(x)dx = 0$

i) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

j) Si f es una función par $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

k) Si f es una función impar $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 0$

OBSERVACIÓN. Las propiedades anteriores son útiles en el cálculo de integrales porque permiten reducir el proceso de integración o porque facilitan el cálculo en ejercicios y problemas de integración. Se las usará en integrales del cálculo más avanzados como, por ejemplo, en integrales de línea, en series de Fourier o en integrales dobles.

Ejemplo 1. Se da diversos ejemplos de integral definida.

a) $N = \int_2^7 4dx = 4(7-2) = 20$

b) $N = \int_0^2 25e^{5x}dx = 25\int_0^2 e^{5x}dx = \frac{25}{5}[e^{5x}]_0^2 = 5(e^{10}-1)$

c) Véase que $N = \int_{-3}^6 \sqrt{x+3}d\,x = \int_{-3}^1 \sqrt{x+3}\,dx + \int_1^6 \sqrt{x+3}\,dx$

En efecto, en el lado izquierdo de la integral:

$$\text{CV: } u = \sqrt{x+3} \to u^2 = x+3 \to x = u^2-3 \to dx = 2u\,du$$

$$\text{Si } x = -3 \Rightarrow u = 0 \qquad \text{si } x = 6 \Rightarrow u = 3$$

$$N = \int_{-3}^6 \sqrt{x+3}\,dx = \int_0^3 u\,(2u\,du) = 2\int_0^3 u^2du = 2\left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^3 = 2\left[\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(0)^3\right] = 18$$

En el lado derecho de la integral:

$$\text{CV: } u = \sqrt{x+3} \to u^2 = x+3 \to x = u^2-3 \to dx = 2u\,du$$

$$\text{Si } x = -3 \Rightarrow u = 0 \qquad \text{si } x = 1 \Rightarrow u = 2$$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow u = 2 \qquad \text{si } x = 6 \Rightarrow u = 3$$

$$N = \int_{-3}^1 \sqrt{x+3}\,dx + \int_1^6 \sqrt{x+3}\,dx = \int_0^2 u\,(2u\,du) + \int_2^3 u\,(2u\,du) = 2\int_0^2 u^2\,du) + 2\int_2^3 u^2\,du)$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^2 + 2\left[\frac{1}{3}u^3\right]_2^3 = 2\left[\frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{3}(0)^3\right] + 2\left[\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(2)^3\right] = 2\frac{8}{3} + 2\left(9 - \frac{8}{3}\right) = 18$$

d) $N = \int_{-3}^{3}(x^2 + 2x - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right]_{-3}^{3} = \frac{3^3}{3} + 3^2 - 3 - \left[\frac{(-3)^3}{3} + (-3)^2 - (-3)\right]$

$= 9 + 9 - 3 - (-9 + 9 + 3) = 15 - 3 = 12$

e) $N = \int_{6}^{6}(2x + 1)\, dx = [x^2 + x]_6^6 = 6^2 + 6 - 6^2 - 6 = 0$

f) Se muestra que $\int_0^{\pi} Sen\, x\, dx = -\int_{\pi}^{0} Sen\, x\, dx$

En efecto, $\int_0^{\pi} Sen\, x\, dx = [-Cos\, x]_0^{\pi} = -Cos(\pi) + Cos(0) = -(-1) + 1 = 1+1 = 2$

$$-\int_{\pi}^{0} Sen\, x\, dx = -[-Cos\, x]_{\pi}^{0} = Cos(0) - Cos(\pi) = 1 - (-1) = 1+1 = 2$$

g) $N = \int_{-4}^{4}(x^4 - x^2)dx = 2\int_0^4(x^4 - x^2)dx = 2\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = 2\left[\frac{1024}{5} - \frac{64}{3}\right] = \frac{5504}{15}$.

Aquí la función $f(x) = x^4 - x^2$ es par.

h) $N = \int_{-\pi}^{\pi} Sen(x)\, dx = 0$. Porque aquí la función $f(x) = Sen(x)$ es impar.

i) $N = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Cos(x)\, dx = 2\int_0^{\pi/2} Cos(x)\, dx = 2[Sen(\pi/2) - Sen(0)] = 2[1 - 0] = 2$. Puesto que aquí la función $f(x) = Cos(x)$ es par.

OBSERVACIÓN. Cuando una integral definida se consigue haciendo un cambio de variable, puede resolverse de dos formas, como veremos, ambas darán el mismo resultado.

Primera forma. Desarrollando la integral indefinida y regresando a la variable original, colocar los límites de integración iniciales, evaluar y hallar el resultado.

Segunda forma. Desarrollando la integral definida incluyendo el cambio de variable en los límites de integración, evaluar y hallar el resultado.

Ejemplo 2. Se muestra las dos formas de hallar una integral definida.

a) $N = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$ CV: $u = 2x - 1 \rightarrow x = \frac{u+1}{2} \rightarrow dx = \frac{du}{2}$

Primera forma. Desarrollando la integral indefinida y volviendo a la variable original para evaluar.

$N = \int \frac{(u+1)}{2}\frac{1}{u^{1/2}}\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int\left(u^{1/2} + u^{-1/2}\right)du = \frac{1}{6}u^{3/2} + \frac{1}{2}u^{1/2}$

Volviendo a la variable original y evaluando:

$N = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx = \left[\frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} + \frac{1}{2}(2x-1)^{1/2}\right]_1^5 = \frac{17}{3}$

Segunda forma. Incluir cambio de variable en los límites de integración.

$N = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx$ CV: $u = 2x - 1 \rightarrow x = \frac{u+1}{2} \rightarrow dx = \frac{du}{2}$

Si $x = 1 \rightarrow u = 1$; si $x = 5 \rightarrow u = 9$

$$\Rightarrow N = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx = \int_1^9 \frac{(u+1)}{2} \frac{1}{u^{1/2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{4} \int_1^9 (u^{1/2} + u^{-1/2}) dx = \left[\frac{1}{6} u^{3/2} + \frac{1}{2} u^{1/2}\right]_1^9 = \frac{17}{3}$$

6.4. INTEGRAL DEFINIDA Y ÁREA DE REGIONES BAJO UNA CURVA

TEOREMA. Si $f: I \rightarrow R$ es una función real continua y no negativa en el intervalo $I = [a; b]$, entonces el área de la región limitada por $y = f(x)$, el eje real X y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ (Ver Figura 6.2) son dados por $A(D) = \int_a^b f(x) dx$

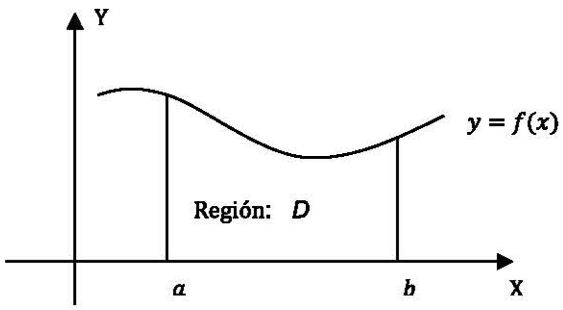


Figura 6.2

Ejemplo 1. Se presenta ejemplos del cálculo de áreas de regiones planas. En algunos casos se emplean las propiedades de la integral definida.

a) Se da el área de la región encerrada por la función $y = \sqrt{1-x}$, desde $x = -8$ hasta $x = 0$, que está por sobre el eje X.

Solución. En la Figura 6.3, se grafica la región D.

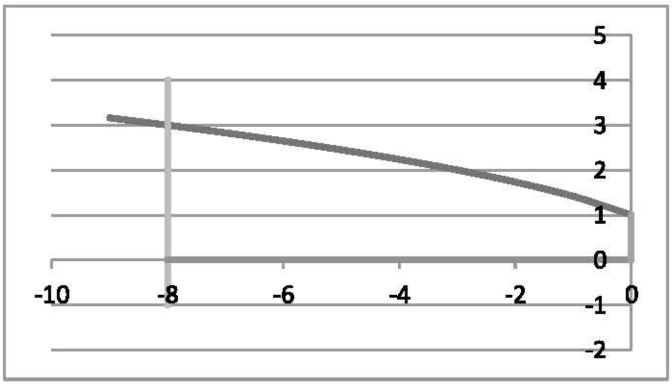


Figura 6.3

El área será dada por $A(D) = \int_a^b f(x)dx = \int_{-8}^0 \sqrt{1-x}\,dx$

CV: $u = \sqrt{1-x} \rightarrow u^2 = 1-x \rightarrow x = 1-u^2 \rightarrow dx = -2u\,du$

Si $x = -8 \Rightarrow u = 3$ si $x = 0 \Rightarrow u = 1$

$\Rightarrow (D) = \int_{-8}^0 \sqrt{1-x}\,dx = \int_3^1 u(-2u\,du) = -2\int_3^1 u^2\,du) = -2\left[\frac{u^3}{3}\right]_3^1 = -2\left(\frac{1}{3}-\frac{3^3}{3}\right) = \frac{52}{3}\ unid^2.$

b) Área de la región D limitada por la curva $y = x^2$, el eje X y las rectas $x = -3, x = 3$.

$A(D) = \int_{-3}^3 x^2\,dx$, como $y = x^2$ es una función PAR,

$A(D) = \int_{-3}^3 x^2\,dx = 2\int_0^3 x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{2}{3}(3^3 - 0^3) = 18\ unid^2.$

Es decir, el área es de 18 unidades cuadradas. (Ver Figura 6.4).

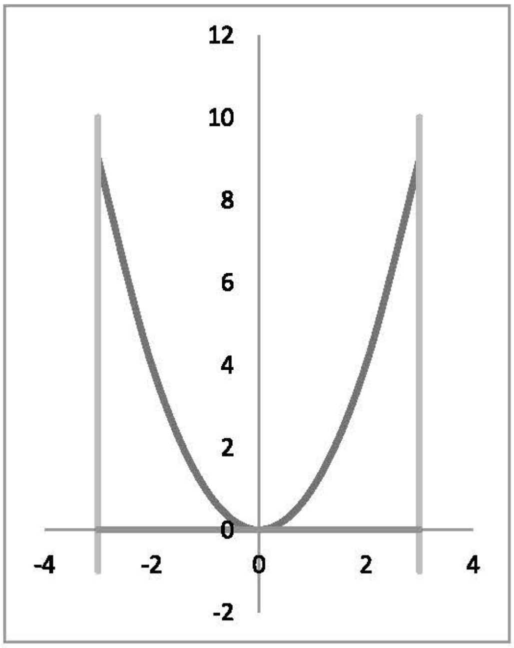


Figura 6.4

OBSERVACIÓN. Cuando la función tiene alguna parte negativa entre ella y el eje X, entonces a esta parte del área se la toma con signo cambiado.

Es decir, si se desea determinar el área de la región $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ representada en la Figura 6.5, entonces esta será dada por $A(D) = A(D_1) - A(D_2) + A(D_3)$.

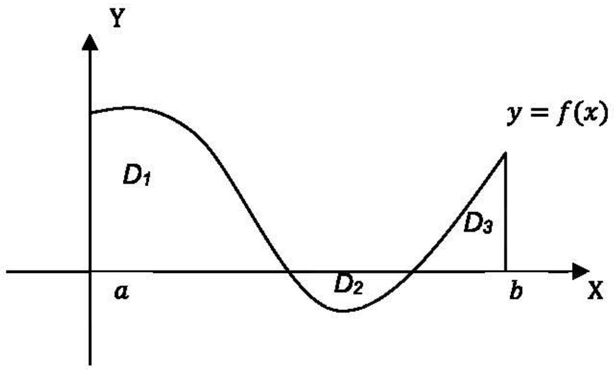


Figura 6.5

Ejemplo 2. Región D limitada por la curva $y = \sqrt[3]{x}$, el eje de la "x" y las rectas $x = -8$, $x = 8$.

Solución.

Al observar la gráfica se descubre que tiene parte de la región de integración por debajo del eje X, por cuanto el área se calcula de la siguiente manera:

$A(D) = -A(D_1) + A(D_2)$.

$A(D) = -\int_{-8}^{0} \sqrt[3]{x}\, dx + \int_{0}^{8} \sqrt[3]{x}\, dx = -\int_{-8}^{0} x^{1/3}\, dx + \int_{0}^{8} x^{1/3}\, dx = -\left[\frac{3x^{4/3}}{4}\right]_{-8}^{0} + \left[\frac{3x^{4/3}}{4}\right]_{0}^{8} = 24.$

En consecuencia, el área es de 24 unidades cuadradas. (Ver Figura 6.6).

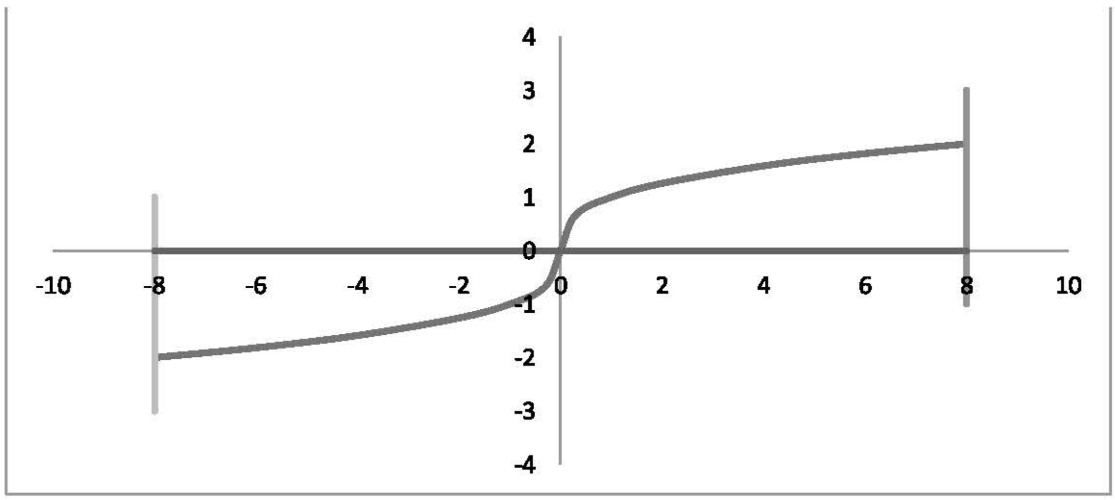


Figura 6.6

6.5. INTEGRAL DEFINIDA Y ÁREA ENTRE DOS CURVAS

DEFINICIÓN 1 (ÁREA RESPECTO AL EJE X). Sea D la región limitada por las gráficas de dos funciones continuas $y = f(x)$, $y = g(x)$, tales que para todo $x \in [a, b]$, $f(x) \geq g(x)$ y las rectas $x = a, x = b$, (Ver Figura 6.7) entonces:

$$A(D) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

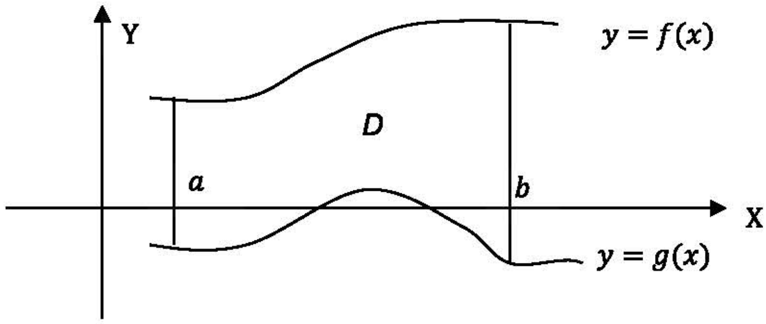


Figura 6.7

DEFINICIÓN 2 (ÁREA RESPECTO AL EJE Y). Sea D la región limitada por las gráficas de dos funciones continuas $x = F(y)$, $x = G(y)$, tales que para todo $y \in [c; d]$, $F(y) \geq G(y)$ y las rectas $y = c, y = d$, (Ver Figura 6.8) entonces:

$$A(D) = \int_c^d [F(y) - G(y)]dy.$$

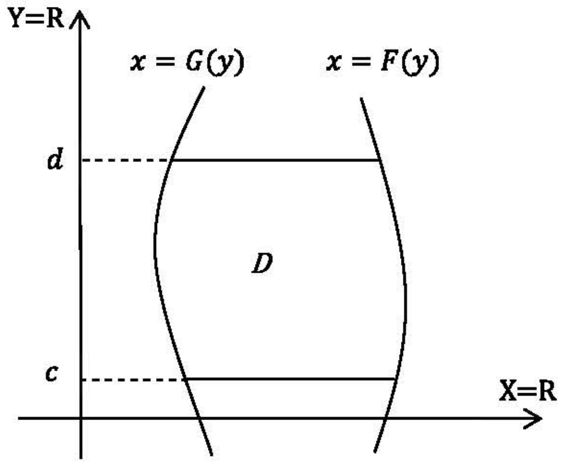


Figura 6.8

Ejemplo 1. Se muestra ejemplos donde se halla el área entre dos curvas.

a) Región D limitada por $x = 3y - y^2, x + y = 3$. (Ve Figura 6.9).

Aquí, $F(y) = 3y - y^2, G(y) = 3 - y$.

El área será $A(D) = \int_c^d [F(y) - G(y)]dy = \int_1^3 [3y - y^2 - 3 + y]dy = \int_1^3 [4y - y^2 - 3]dy$

$= \left[2y^2 - \frac{y^3}{3} - 3y\right]_1^3 = \frac{4}{3} unid^2.$

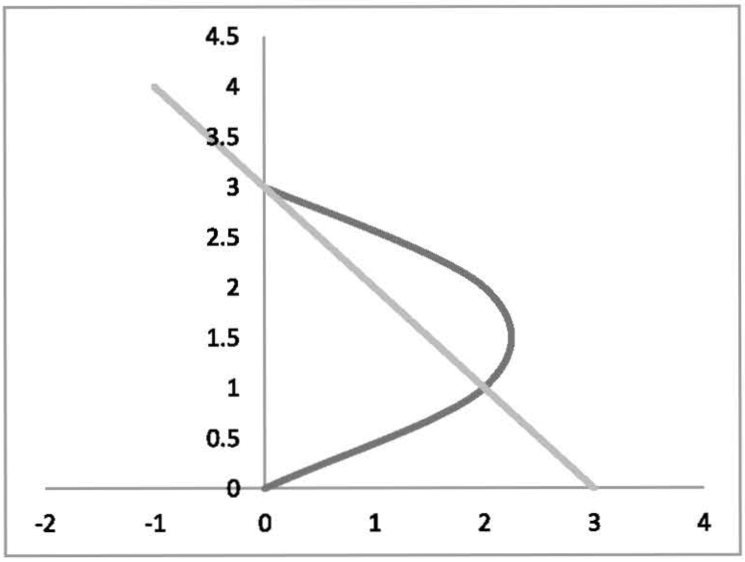


Figura 6.9

b) Región limitada por $y = e^x$ y las rectas $y = 1 + x, x = 2$. (Ver Figura 6.10).

El área será $A(D) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^2 [e^x - 1 - x]dx$

$= \left[e^x - x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = e^2 - 5 = 2{,}398\ unid^2.$

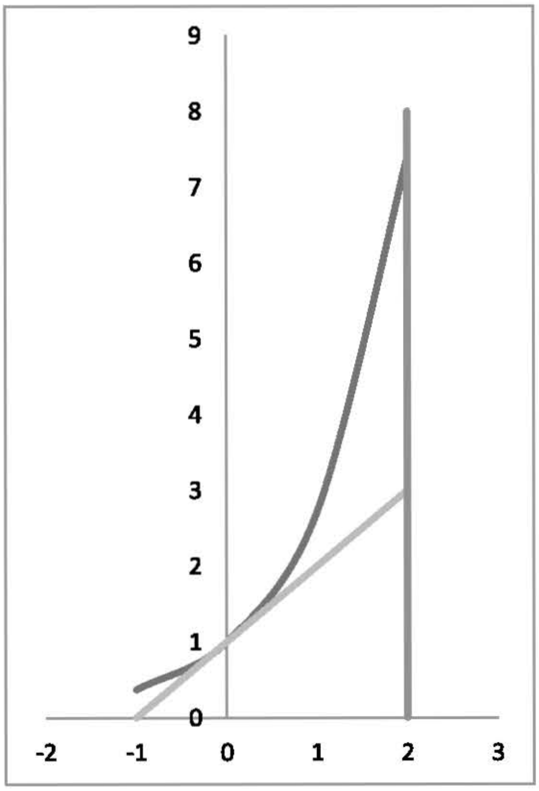


Figura 6.10

6.6. INTEGRAL DEFINIDA Y EL VOLUMEN POR SECCIONES PLANAS CONOCIDAS

EL VOLUMEN CON SECCIONES PLANAS $A(x)$. (Ver Figura 6.11).

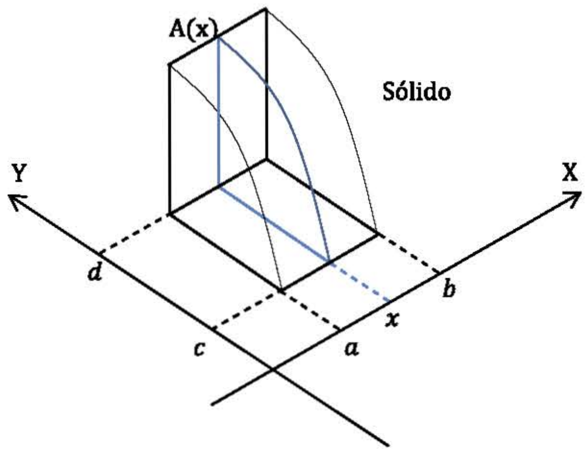


Figura 6.11

Sólido: S

Eje de proyección: X

Sección transversal: $A(x)$

Posición de $A(x)$: x

Proyección ortogonal del sólido S sobre el eje X: $[a; b]$

El volumen del sólido S es dado por $V(S) = \int_a^b A(x)dx$

EL VOLUMEN CON SECCIONES PLANAS $A(y)$. (Ver Figura 6.12).

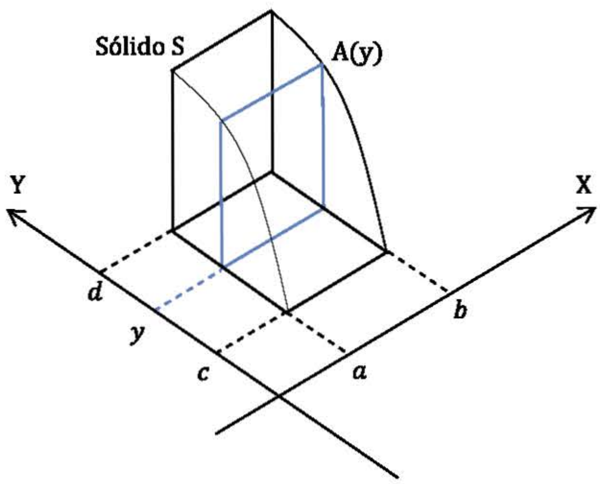


Figura 6.12

Sólido: S

Eje de proyección: Y

Sección transversal: $A(y)$

Posición de $A(y)$: y

Proyección ortogonal del sólido S sobre el eje X: $[c;d]$

El volumen del sólido S es dado por $V(S) = \int_c^d A(y)dy$

Ejemplo 1. Hallar el volumen de un tetraedro de tres caras ortogonales y tres aristas ortogonales entre sí, cuyas longitudes son a, b y c.

Solución.

La sección $A(y)$ es el área de un triángulo. La base del tetraedro es $B = \frac{ab}{2}$

Usando proporciones $\frac{A(y)}{B} = \frac{(c-y)^2}{c^2}$, donde $A(y) = \frac{ab}{2c^2}(c-y)^2$

Observemos la Figura 6.13 a fin de precisar detalles.

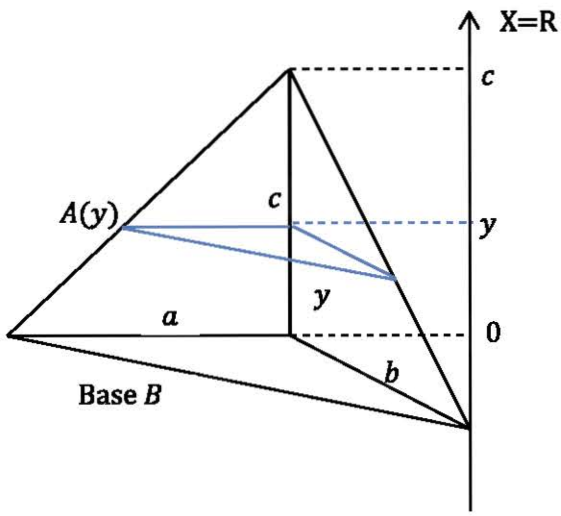


Figura 6.13

El volumen será dado por $V(S) = \int_0^c A(y)dy = \int_0^c \frac{ab}{2c^2}(c-y)^2 dy = \frac{ab}{2c^2}\int_0^c (y-c)^2 dy$

$= \left[\frac{ab}{2c^2}\frac{(y-c)^3}{3}\right]_0^c = \frac{ab}{2c^2}\frac{(c-c)^3}{3} - \frac{ab}{2c^2}\frac{(0-c)^3}{3} = -\frac{ab}{2c^2}\frac{(-c)^3}{3} = \frac{abc}{6}$

Por lo tanto, $V(S) = \frac{abc}{6}\ unid^3$.

Ejemplo 2. La base de un sólido es la región limitada por una circunferencia que tiene un radio de 7 cm. Encuentre el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos equiláteros.

Solución.

Las figuras que se muestran a continuación permiten ubicar los detalles del desarrollo.

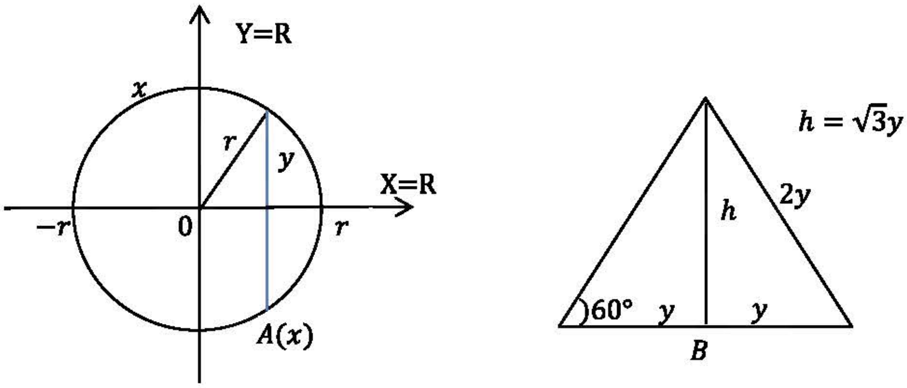


Figura 6.14

Siendo el radio $r = 7 \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 49 = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow y = \sqrt{49 - x^2}$

La altura $h = \sqrt{4y^2 - y^2} \rightarrow h = \sqrt{3y^2} \rightarrow h = \sqrt{3}y$

Luego, $A(x) = \frac{Bh}{2} = \frac{(2y)\sqrt{3}y}{2} = \sqrt{3}y^2 = \sqrt{3}(\sqrt{49 - x^2})^2 = \sqrt{3}(49 - x^2)$. (Ver Figura 6.15).

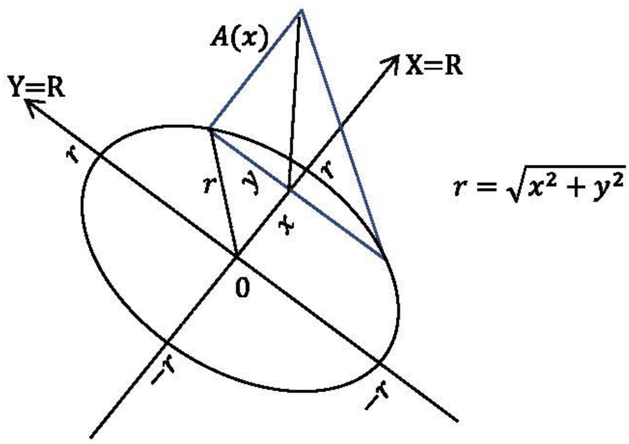


Figura 6.15

El volumen será $V(S) = \int_a^b A(x)dx = \int_{-7}^{7} \sqrt{3}(49 - x^2)dx = 2\sqrt{3}\int_0^7 (49 - x^2)dx$

$= 2\sqrt{3}\left[49x - \frac{x^3}{3}\right]_0^7 = 2\sqrt{3}\left[49(7) - \frac{7^3}{3}\right] - 2\sqrt{3}\left[49(0) - \frac{0^3}{3}\right] = 2\sqrt{3}\left[49(7) - \frac{7^3}{3}\right] = \frac{1372\sqrt{3}}{3}$

Finalmente, $V(S) = \frac{1372\sqrt{3}}{3}\ unid^3$

Ejemplo 3. La base de un sólido es un triángulo equilátero de lado "a", con un vértice situado en el origen de coordenadas y una de las alturas en el eje X. Todas las secciones planas del sólido perpendiculares al eje X son cuadrados con un lado en la base del sólido. Hállese el volumen del cuerpo así generado. (Ver Figura 6.16).

Solución.

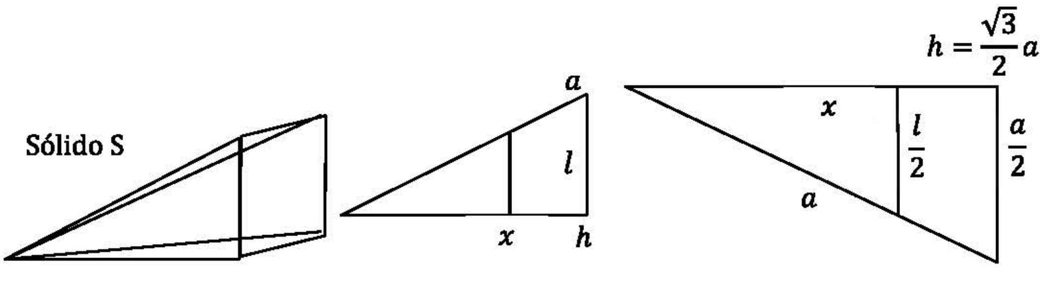


Figura 6.16

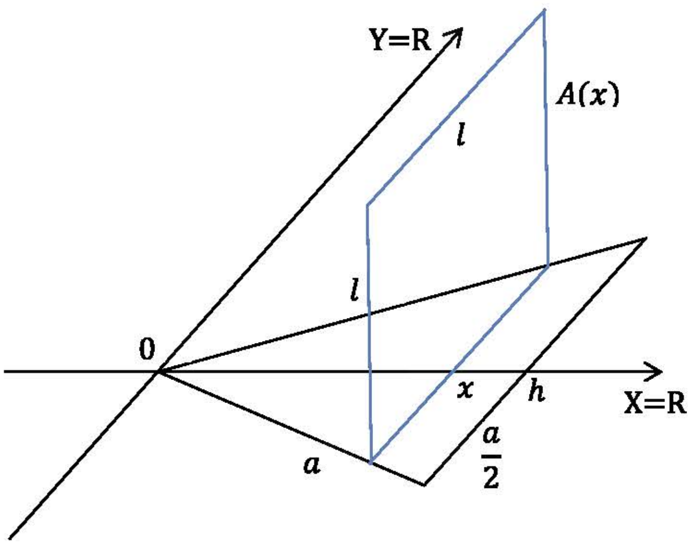


Figura 6.17

Usando proporciones: $\frac{x}{h} = \frac{l/2}{a/2} \to \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{l}{a} \to x = \frac{\sqrt{3}}{2}l = \to l = \frac{2}{\sqrt{3}}x$

La sección plana $A(x) = l^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2 \to A(x) = \frac{4}{3}x^2$. (Ver Figura 6.17).

El volumen es dado por $V(S) = \int_a^b A(x)dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(\frac{4}{3}x^2\right) dx = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} x^2 dx = \frac{4}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$

$= \frac{4}{3}\left[\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^3}{3}\right] - \frac{4}{3}\left[\frac{0^3}{3}\right] = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3\ unid^3.$

Ejemplo 4. La base de un sólido es la región limitada por una circunferencia de radio "r". Todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos isósceles rectos con un cateto en el plano de la base.

Solución.

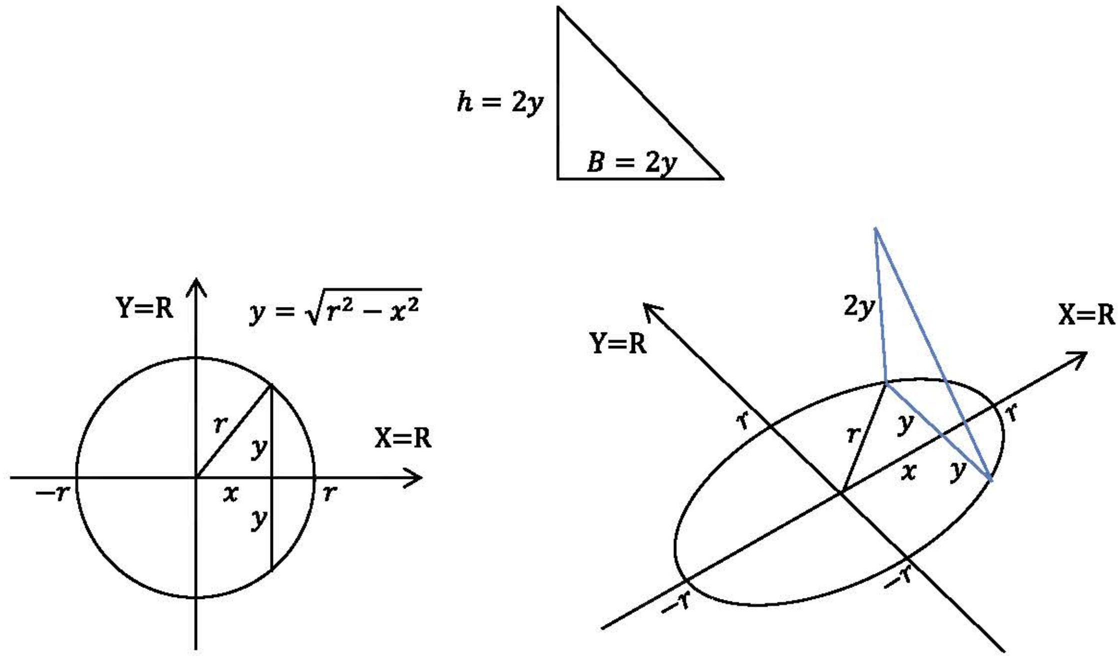


Figura 6.18

La sección plana: $A(x) = \frac{Bh}{2} = \frac{(2y)(2y)}{2} = 2y^2 = 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2(r^2 - x^2)$. (Observar la Figura 6.18).

El volumen será dado por $V(S) = \int_a^b A(x)dx = \int_{-r}^{r} 2(r^2 - x^2)dx = 4\int_0^r (r^2 - x^2)dx$

$= 4\left[r^2x - \frac{r^3}{3}\right]_0^r = 4\left[r^2r - \frac{r^3}{3}\right] - 4\left[r^2(0) - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{8}{3}r^3\ unid^3$

Ejemplo 5. Una cuña se corta de un sólido con forma de cilindro circular recto con un radio de "r"cm, con un plano que pasa por un diámetro de la base y tiene una inclinación de 45° respecto al plano de la base. Hallar el volumen de la cuña. (Ver Figura 6.19).

Solución.

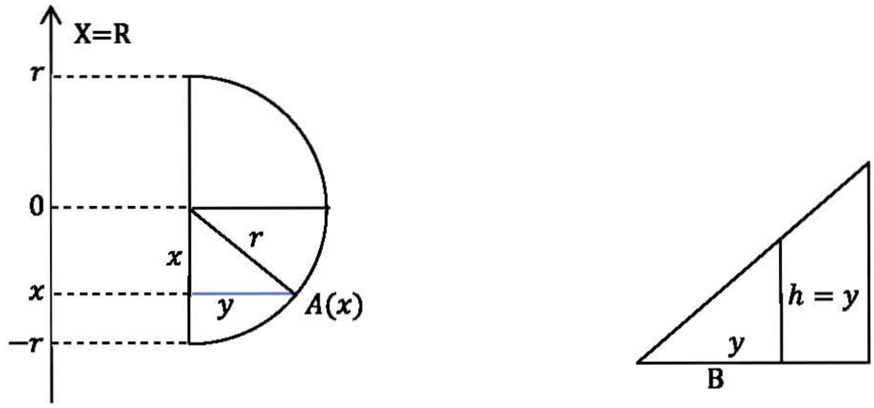


Figura 6.19

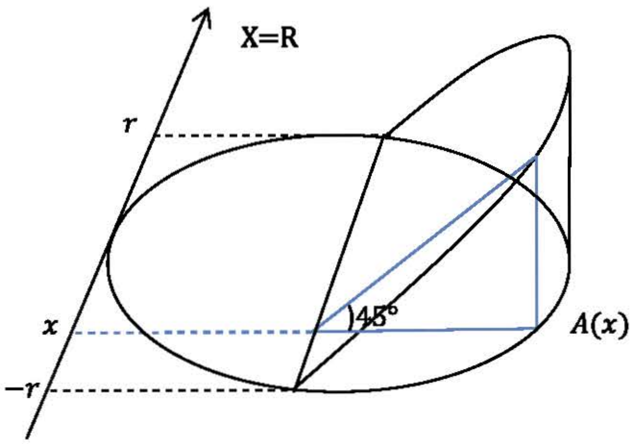


Figura 6.20

La sección $A(x)=\frac{bh}{2}=\frac{y\cdot y}{2}=\frac{y^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2=\frac{1}{2}(r^2-x^2)$. (Ir a Figura 6.20).

El volumen será dado por $V(S)=\int_a^b A(x)dx=\int_{-r}^{r}\frac{1}{2}(r^2-x^2)dx=2\int_0^r\frac{1}{2}(r^2-x^2)dx$

$=\int_0^r(r^2-x^2)dx=\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\left[r^2r-\frac{r^3}{3}\right]-\left[r^2(0)r-\frac{0^3}{3}\right]=\frac{2}{3}r^3\ unid^3$.

Ejemplo 6. Encuentre el volumen de una esfera de radio "r".

Solución.

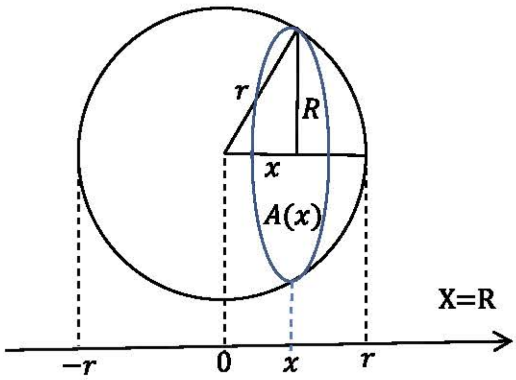


Figura 6.21

El radio es $R = \sqrt{r^2 - x^2}$

La sección $A(x) = \pi R^2 = \pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 = \pi(r^2 - x^2)$. (Ver Figura 6.21).

El volumen será dado por $V(S) = \int_a^b A(x)dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)dx$

$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi \left[r^2 r - \frac{r^3}{3}\right] - 2\pi \left[r^2(0)r - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{4\pi}{3} r^3 \; unid^3.$

Ejemplo 7. Se taladra una bola de billar de radio "a" haciendo pasar el eje del taladro por el centro de la esfera hasta atravesarla completamente (Ver Figura 6.22). ¿Qué volumen de la esfera habrá quedado si el diámetro del hueco que se hizo es "a"?

Solución.

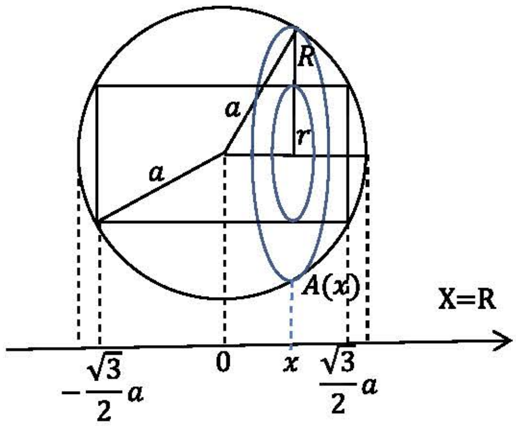


Figura 6.22

El radio mayor es $R = y = \sqrt{a^2 - x^2}$

El radio menor es $r = \frac{a}{2}$

Por otro lado, $l = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

La sección $A(x) = \pi(R^2 - r^2) = \pi\left[\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right] = \pi\left(a^2 - x^2 - \frac{a^2}{4}\right) = \pi\left(\frac{3}{4}a^2 - x^2\right)$

El volumen será dado por $V(S) = \int_a^b A(x)dx = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \pi\left(\frac{3}{4}a^2 - x^2\right)dx$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\frac{3}{4}a^2 - x^2\right)dx = 2\pi\left[\frac{3}{4}a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

$$= 2\pi\left[\frac{3}{4}a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3\right] - 2\pi\left[\frac{3}{4}a^2(0) - \frac{1}{3}(0)^3\right] = 2\pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)a^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3\ unid^3.$$

Ejemplo 8. Un vaso para agua es un cilindro circular recto de radio "a" y altura "h". Se voltea hasta que el nivel del agua biseque la base y toque el borde. Hallar el volumen del agua que queda en el vaso.

Solución.

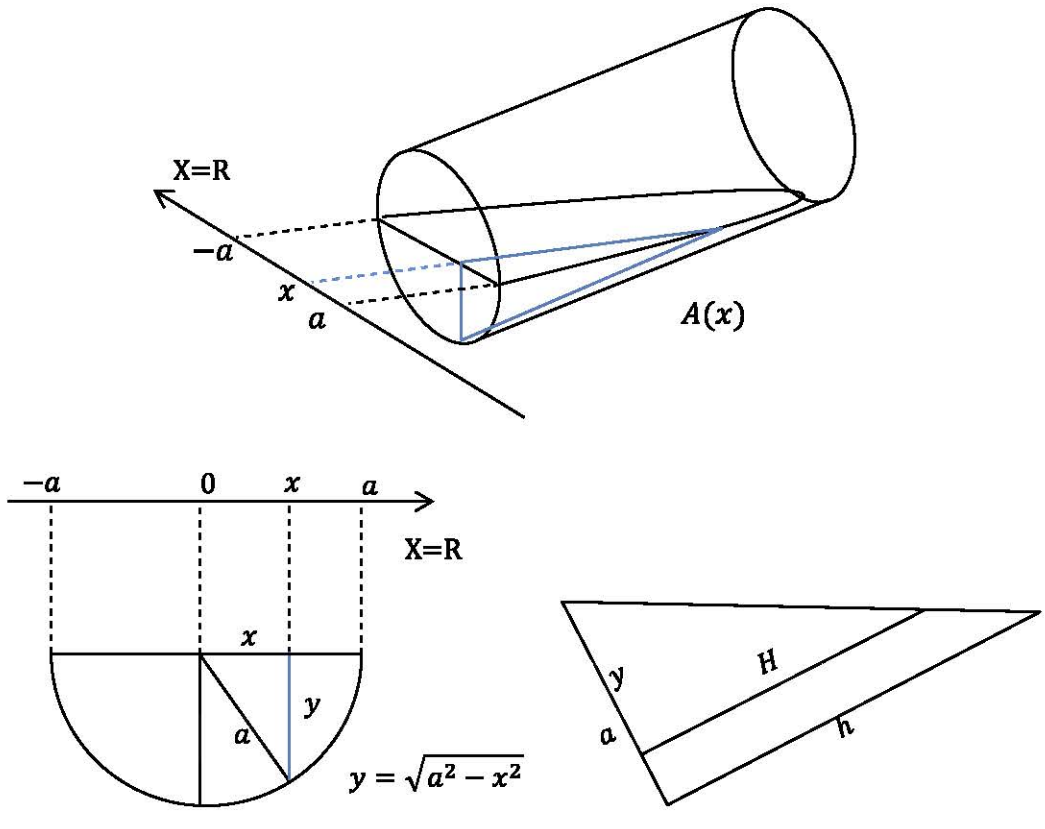


Figura 6.23

Usando proporciones $\frac{H}{h} = \frac{y}{a} \rightarrow H = \frac{h\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

La sección plana: $A(x) = \frac{Bh}{2} = \frac{yh\sqrt{a^2-x^2})}{2a} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}h\sqrt{a^2-x^2})}{2a} = \frac{h}{2a}(a^2 - x^2)$. (Observar la Figura 6.23).

El volumen será dado por $V(S) = \int_a^b A(x)dx = \int_{-a}^{a}\frac{h}{2a}(a^2 - x^2)dx = 2\frac{h}{2a}\int_0^a(a^2 - x^2)dx$

$$=\frac{h}{a}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{h}{a}\left[a^2a-\frac{a^3}{3}\right]-\frac{h}{a}\left[a^2(0)-\frac{0^3}{3}\right]=\frac{h}{a}\left(\frac{2}{3}a^3\right)=\frac{2}{3}ha^2\ unid^3 .$$

6.7. INTEGRAL DEFINIDA Y EL VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN (MÉTODO DE DISCOS)

VOLUMEN GENERADO POR UNA FUNCIóN CONTINUA (CURVA)

a) QUE GIRA ALREDEDOR DEL EJE "X":

$$V(S)=\int_a^b \pi r^2 dx=\int_a^b \pi[y]^2 dx=\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

La Figura 6.24 que se adjunta describe el caso.

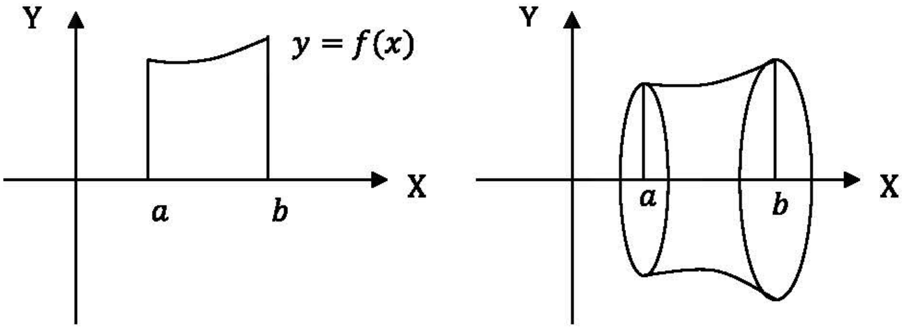


Figura 6.24

b) QUE GIRA ALREDEDOR DEL EJE "Y".

$$V(S)=\int_c^d \pi r^2 dy=\int_c^d \pi[x]^2 dy=\int_c^d \pi[F(y)]^2 dy$$

La Figura 6.25 que se adjunta describe el caso.

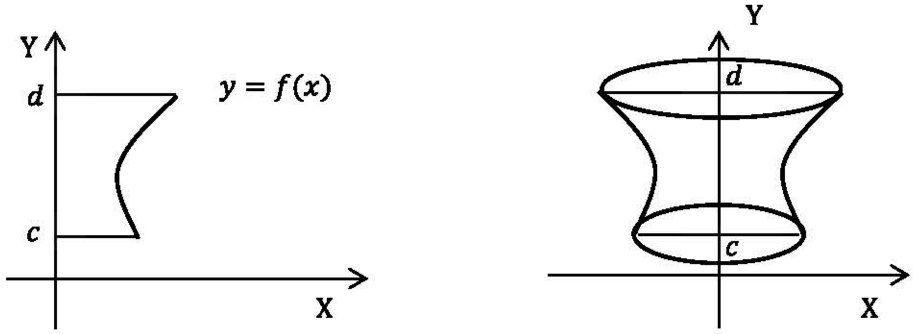


Figura 6.25

VOLUMEN GENERADO POR DOS FUNCIONES QUE ROTAN ALREDEDOR DE UN EJE:

a) VOLUMEN DE UN CILINDRO CIRCULAR RECTO HUECO.

El radio mayor es R y el radio menor es r de modo que el volumen del cilindro hueco (Volumen del cilindro mayor menos el volumen del cilindro menor) es dado por:

$$V(S) = \pi R^2 h - \pi r^2 h \rightarrow V(S) = \pi h(R^2 - r^2)$$

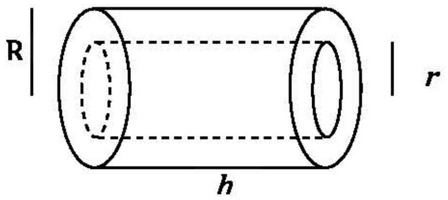


Figura 6.26

b) SI LAS DOS FUNCIONES GIRAN ALREDEDOR DEL EJE "X"

El radio mayor es dado por la función que está por arriba: $y = f_2(x)$ y el radio menor, por la función que está por debajo: $y = f_1(x)$; de modo que el volumen del "cilindro hueco" (volumen del cilindro mayor menos el volumen del cilindro menor) es dado por:

$$\begin{cases} R = f_2(x) \\ r = f_1(x) \end{cases} \rightarrow V(S) = \int_a^b \pi\{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\}dx$$

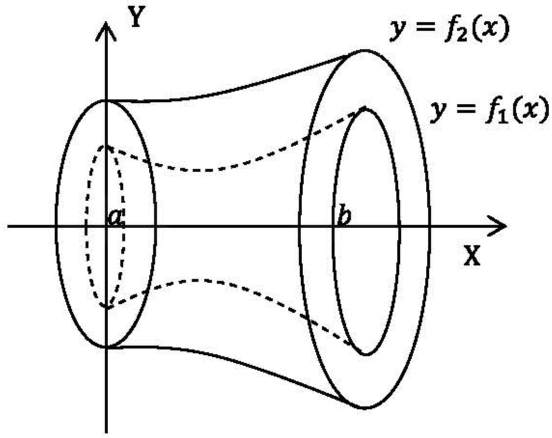


Figura 6.27

c) SI LAS DOS FUNCIONES GIRAN ALREDEDOR DEL EJE "Y"

El radio mayor se da por la función que está a la derecha: $x = F_2(y)$ y el radio menor, por la función que está por la izquierda: $x = F_1(y)$; de modo que el volumen del "cilindro hueco" (volumen del cilindro mayor menos el volumen del cilindro menor) es dado por:

$$\begin{cases} R = F_2(y) \\ r = F_1(y) \end{cases} \rightarrow V(S) = \int_c^d \pi\{[F_2(y)]^2 - [F_1(y)]^2\}dy$$

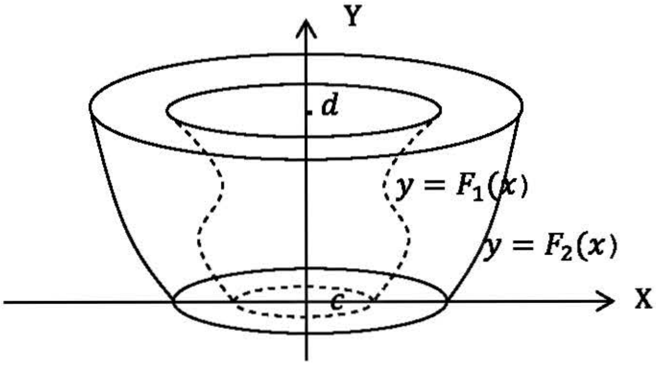


Figura 6.28

Ejemplo 1. Encontrar el volumen generado por rotación alrededor del eje X de la parte de la parábola $y = 4 - x^2$ que está por sobre X. (Ver Figura 6.29).

Solución.

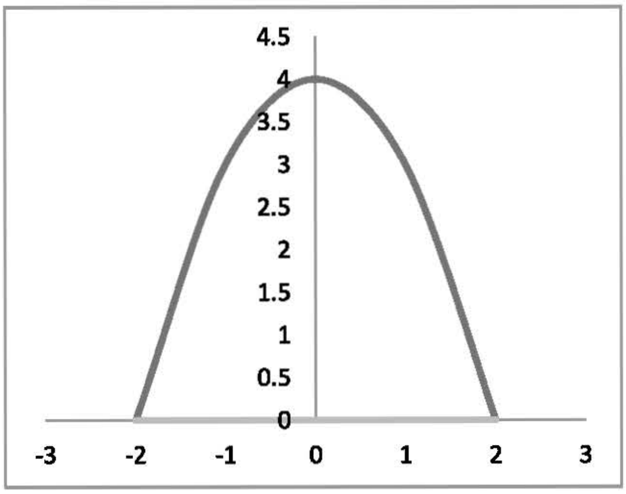


Figura 6.29

Parábola dada $P: y = 4 - x^2$. $P \cap X$, hacer $y = 0 \Rightarrow x = \pm 2$.

El radio es dado por $r = y = f(x) = 4 - x^2$

El volumen será $V(S) = \int_{-2}^{2} \pi[y]^2 dx = \pi \int_{-2}^{2}[4 - x^2]^2 dx = \pi \int_{-2}^{2}[16 - 8x^2 + x^4]^2 dx$

$= 2\pi \int_0^2 [16 - 8x^2 + x^4]^2 dx = 2\pi \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{512\pi}{15}\ unid^3.$

Ejemplo 2. La región que se encuentra entre la curva $y = x^3$; el eje X; las rectas $x = 2$, $x = 3$ giran alrededor del eje Y. Encontrar el volumen del sólido así obtenido. (Observar la Figura 6.30).

Solución. El volumen se obtiene en dos etapas:

a) De 0 a 8: $R = 3, r = 2$.

b) De 8 a 27: $R = 3, r = y^{1/3}$.

El volume sera $V(S) = \int_a^b \pi\{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\}dx$

$$V(S) = \int_0^8 \pi\{[3]^2 - [2]^2\}dx + \int_8^{27} \pi\left\{[3]^2 - \left[y^{1/3}\right]^2\right\}dx$$

$$V(S) = \int_0^8 \pi\{9 - 4\}dx + \int_8^{27} \pi\{9 - y^{2/3}\}dx$$

$$V(S) = 5\pi\int_0^8 dx + \pi\int_8^{27}\left(9 - y^{2/3}\right)dx = 5\pi[y]_0^8 + \pi\left[9y - y^{2/3}\right]_8^{27} = \frac{422\pi}{5}\,unid^3.$$

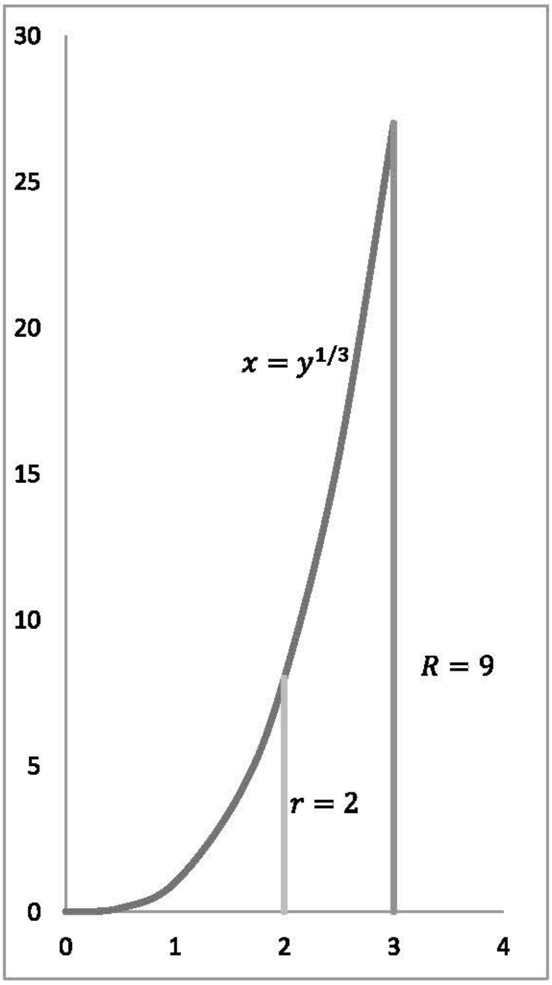


Figura 6.30

OBSERVACIONES. Para el caso de sólidos de revolución que se obtienen al girar la región D alrededor de un eje paralelo a los ejes coordenados.:

a) Si el giro de la región D se realiza alrededor de un eje paralelo al eje X, $y = k$, entonces el volumen se da por $V(S) = \int_a^b \pi\{[f(x) - k]^2 - [g(x) - k]^2\}dx$.

b) Si el giro de la región D se realiza alrededor de un eje paralelo al eje Y, $x = h$, entonces el volumen se da por $V(S) = \int_c^d \pi\{[F(y) - h]^2 - [G(y) - h]^2\}dy$.

Ejemplo 1. La superficie limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 4$ genera varios sólidos de revolución. Se pide hallar el volumen cuando:

i) Gira alrededor del eje Y.　　ii) Gira alrededor del eje X.

iii) Gira alrededor de la recta $x = 4$ (Paralela al eje Y).

Solución. (i) y (ii) se deja como ejercicio para el lector.

(iii) El giro alrededor del eje paralelo al eje Y; $x = 4$. (Ver Figura 6.31).

El volumen del sólido generado será $V(S) = \int_c^d \pi\{[F(y) - h]^2 - [G(y) - h]^2\}dy$

$= \int_0^4 \pi\left\{[0-4]^2 - \left[y^{1/2} - 4\right]^2\right\}dy = \pi\int\left(8y^{1/2} - y\right)dy = \pi\left[\frac{16}{3}y^{3/2} - \frac{1}{2}y^2\right]_0^4 = \frac{104\pi}{3}\,unid^3.$

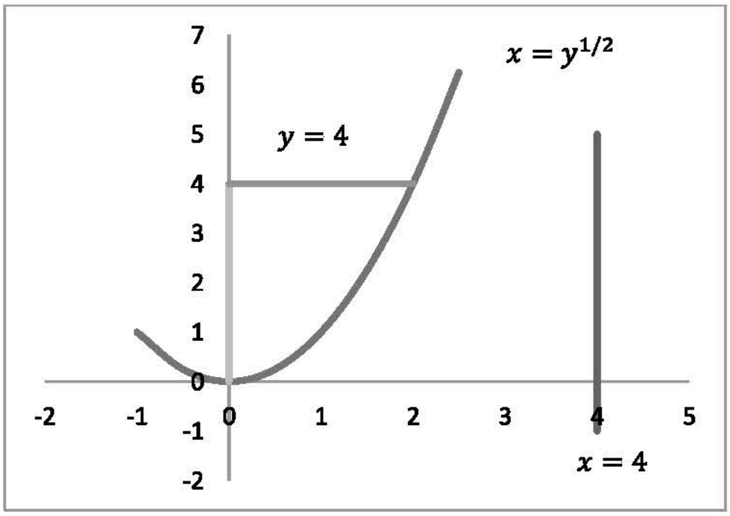


Figura 6.31

Ejemplo 2. Un sólido de revolución se forma por la rotación alrededor del eje X de la región limitada por la curva $y = \sqrt{2x+4}$, el eje X, el eje Y, así como la recta $x = C$ $(C > 0)$. ¿Con qué valor de C el volumen será de $12\,\pi\,unid^2$? (Ver figura 6.32).

Solución.

El volumen es dado por $V(S) = \int_a \pi[f(x)]^2 dx$

Reemplazando datos: $V(S) = \int_{-2}^{C} \pi\left[\sqrt{2x+4}\right]^2 dx = \pi\int_{-2}^{C}\left[\sqrt{2x+4}\right]^2 dx = \pi\int_{-2}^{C}(2x+4)dx$

$= \pi[x^2+4x]_{-2}^{C} = \pi[C^2+4C+4]$

Pero, como $V(S) = 12\pi \;\rightarrow\; 12\pi = \pi[C^2+4C+4] \;\rightarrow\; C = \sqrt{12}-2.$

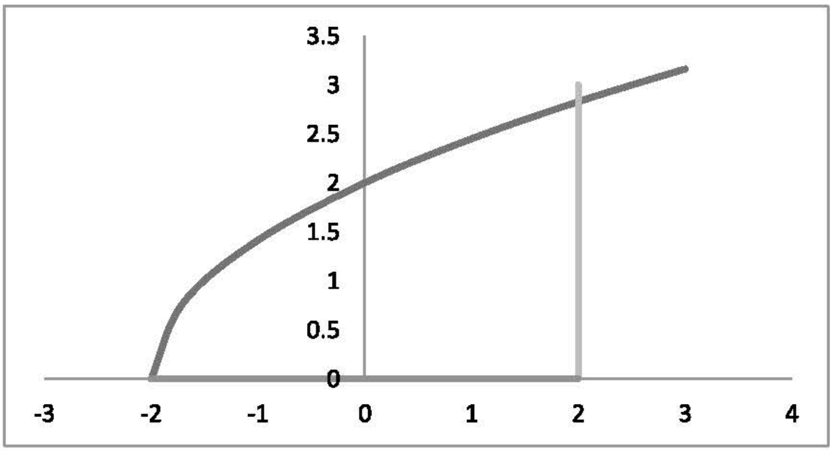


Figura 6.32

VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE CASCARONES.

a) Cuando el giro de la región D se realiza alrededor del eje Y, el volumen es dado por $V(S) = 2\pi\int_a^b x\, f(x)\, dx$

b) Cuando el giro de la región D se realiza alrededor del eje X, el volumen es dado por $V(S) = 2\pi\int_c^d y\, F(y)\, dy$

Ejemplo 1. Hallar el volumen del sólido que resulta tras hacer girar alrededor del eje Y, la región D encerrada en el primer cuadrante por la curva $y = 3+2x-x^2$. (Observar la Figura 6.33).

Solución.

Parábola dada $P: y = 3+2x-x^2$

Parábola intersectada con el eje X: $P \cap X$, en $x = -1$, $x = 3$.

Parábola intersectada con el eje X: $P \cap Y$, en y=3.

El volumen es dado por $V(S) = 2\pi\int_a^b x\, f(x)\, dx$

Reemplazando datos: $V(S) = 2\pi\int_0^3 x(3+2x-x^2)\, dx = 2\pi\int_0^3 x(3x+2x^2-x^3)\, dx$

$$= 2\pi\left[\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \frac{45\pi}{2}\,unid^3.$$

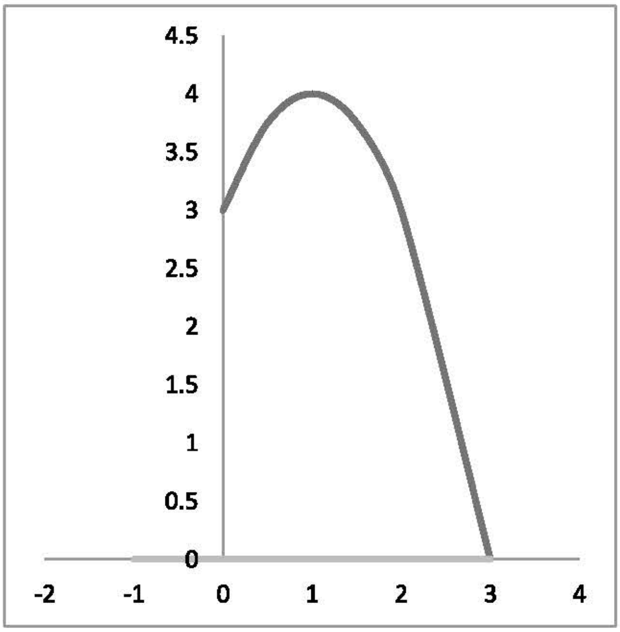


Figura 6.33

Ejemplo 2. Hallar el volumen del sólido que resulta de hacer girar la región encerrada por la curva $x = \sqrt{2y} + 1$, $y = 2$, $x = 0$, alrededor del eje X. (Observar la Figura 6.34).

Solución.

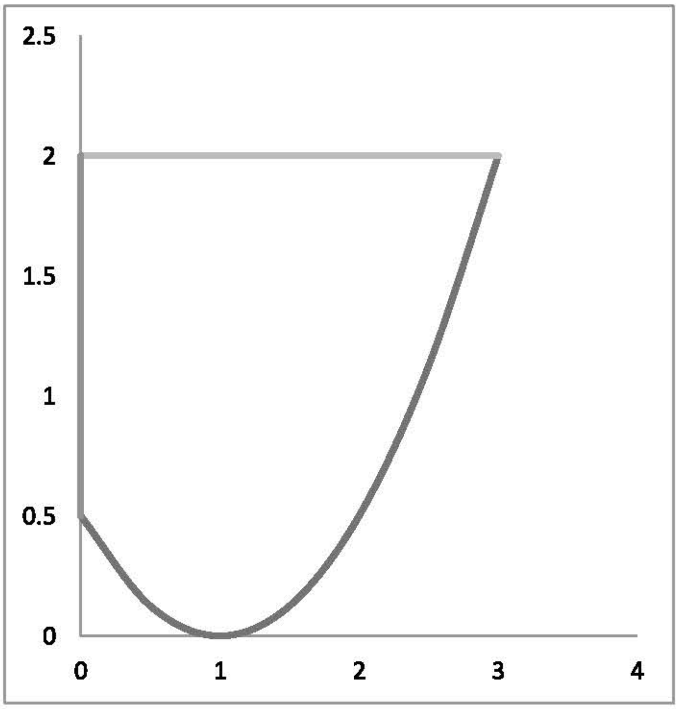


Figura 6.34

La función es $x = \sqrt{2y} + 1$ o $F(y) = \sqrt{2y} + 1$.

El volumen es dado por $V(S) = 2\pi \int_c^d y\, F(y)\, dy$

Reemplazando datos: $V(S) = 2\pi \int_0^2 y\left(\sqrt{2y} + 1\right) dx = 2\pi \int_0^2 \left(\sqrt{2}y^{3/2} + y\right) dy$

$= 2\pi \left[\frac{2\sqrt{2}}{5} y^{5/2} + \frac{1}{2} y^2\right]_0^2 = \frac{52\pi}{5}\, unid^3$.

6.8. INTEGRAL DEFINIDA Y LA LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA

DEFINICIÓN 1. (CON RESPECTO AL EJE X) Si la función $y = f(x)$ tiene derivada continua en el intervalo $I = [a; b]$, entonces la LONGITUD DE ARCO de la curva representada por "f" entre "a" y "b" es dada por: $S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

DEFINICIÓN 2. (CON RESPECTO AL EJE Y) Si la función $x = F(y)$ tiene derivada continua en el intervalo $I = [c; d]$, entonces la LONGITUD DE ARCO de la curva representada por "F" entre "c" y "d" es dada por: $S = \int_c^d \sqrt{1 + [F'(y)]^2} dy$

Ejemplo 1. (Para verificar la longitud de una circunferencia) Hallar la longitud de una circunferencia de radio "r".

Solución

La ecuación de una circunferencia de radio "r" es dada por $x^2 + y^2 = r^2$.

De donde, $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, tomando la parte positiva (parte de la circunferencia que se encuentra por sobre el eje X) se tiene $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

La derivada de y es $y' = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

La longitud de la parte del primer cuadrante (cuarta parte de la circunferencia) es dada por

$$\frac{S}{4} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_0^r \sqrt{1 + \left[\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right]^2} dx = r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \left[Arcsen\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^r = \frac{\pi r}{2}.$$

Finalmente, la longitud de la circunferencia es dada por $S = 2\pi r$.

Ejemplo 2. Hallar la longitud del arco de la parte de la parábola dada por $P: y = 4x - x^2$ que se encuentra por encima del eje X. (Ver Figura 6.35).

Solución.

La ecuación de la parábola es $y = 4x - x^2$.

La derivada de la ecuación es $y' = 4 - 2x$.

La longitud pedida será $S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_0^4 \sqrt{1 + [4 - 2x]^2}dx$

Haciendo cambio de variable: $u = 4 - 2x \rightarrow du = -2dx \rightarrow dx = -\frac{du}{2}$

Cambio en los límites: si $x = 0 \rightarrow u = 4$ y si $x = 4 \rightarrow u = -4$.

Reemplazando: $S = \int_0^4 \sqrt{1 + [4 - 2x]^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-4} \sqrt{1 + u^2}du$

Se tiene $S = 9{,}29 \ und.$

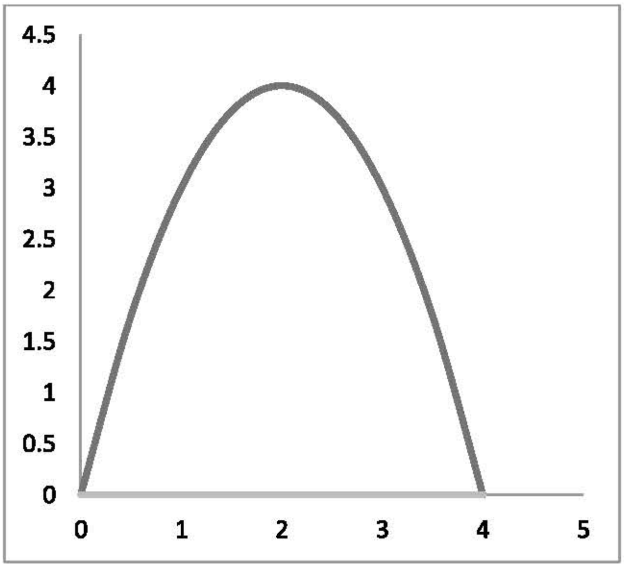


Figura 6.35

Ejemplo 3. Hallar la longitud de arco de la curva dada por $y^3 = x^2$ comprendida entre los puntos (0;0) y (8;4). (Ir a la Figura 6.36).

Solución

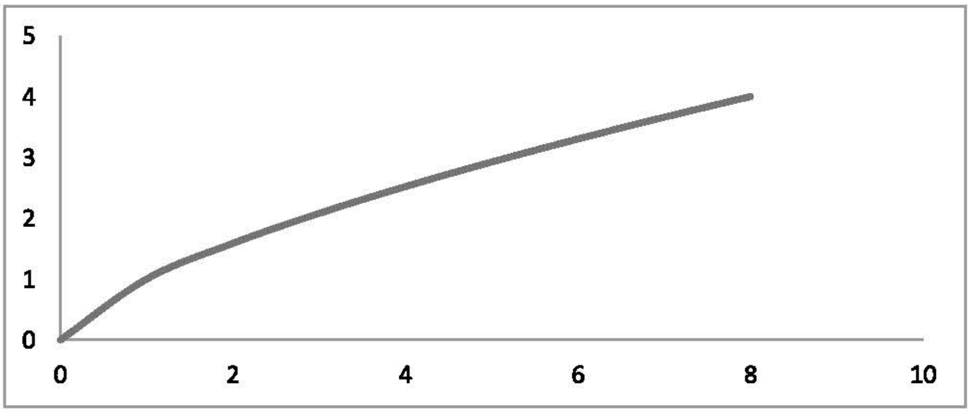


Figura 6.36

Si $y^3 = x^2 \Rightarrow x = y^{3/2}$ o $F(y) = y^{3/2} \rightarrow F'(y) = \frac{3}{2}y^{1/2}$

La longitud será $S = \int_c^d \sqrt{1 + [F'(y)]^2}dy$

Reemplazando: $S = \int_0^4 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}y^{1/2}\right]^2}\, dy = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}y}dy$

CV: $u = 1 + \frac{9}{4}y \rightarrow du = \frac{9}{4}du$. También: Si $y = 0 \rightarrow u = 1$; si $y = 4 \rightarrow u = 10$

$\Rightarrow \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}y}dy = \frac{4}{9}\int_1^{10} u^{1/2}du = \frac{4}{9}\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^{10} = \frac{8}{27}\left[10^{3/2} - 1\right]_1^{10} = 9{,}07\ und.$

Por lo tanto, la longitud de arca pedida es $S = 9{,}07$ unidades.

6.9. INTEGRAL DEFINIDA Y CENTRO DE GRAVEDAD DE UNA REGIÓN PLANA

DEFINICIÓN. El centro de gravedad es el punto que permite a una superficie plana encontrarse en equilibrio.

PROCESO. Hacemos uso del diferencial de área dA y un centro de gravedad tentativo $C(h;k)$ para el estudio. El punto $(h;k)$ es un centro de gravedad tentativo mientras que $(\bar{x};\bar{y})$ es el verdadero centro de gravedad de la lámina o superficie en cuestión.

a) Para cuando la lámina D está limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$ entre las rectas $x = a$ y $x = b$ por sobre el eje X (ver Figura 6.37); el proceso es el siguiente:

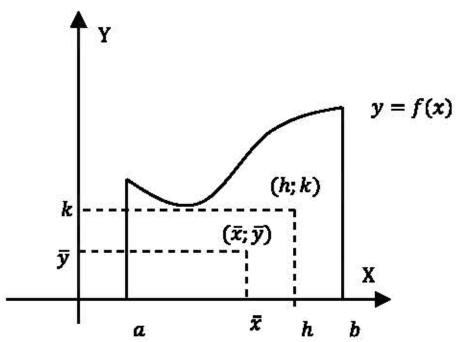


Figura 6.37

El diferencial de área es $dA = y\,dx = f(x)dx$

La coordenada horizontal: $h = x$

La coordenada vertical: $k = \frac{y}{2} = \frac{1}{2}f(x)$

El área de la región D es dada por $A(D) = \int_a^b dA$

El momento con respecto al eje X: $M_x = \int_a^b k\, dA = \int_a^b \left[\frac{1}{2} f(x)\right] f(x) dx$

El momento con respecto al eje Y: $M_y = \int_a^b h\, dA = \int_a^b x\, f(x) dx$

Siendo $A = A(D)$ el área de la región D, el centro de gravedad es dado por $(\bar{x}; \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{A}; \frac{M_x}{A}\right)$

b) Para cuando la lámina D está limitada por la gráfica de la función $x = F(y)$ entre las rectas $y = c$ y $y = d$, a la derecha del eje Y, (ver Figura 6.38); el proceso es el siguiente:

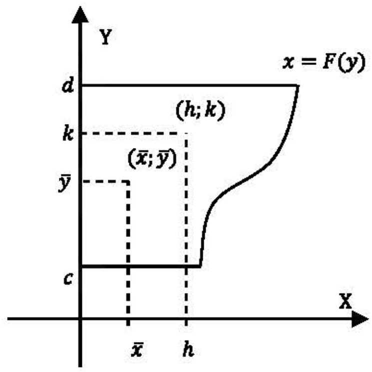


Figura 6.38

El diferencial de área es $dA = x\, dy = F(y) dy$

La coordenada horizontal: $h = \frac{x}{2} = \frac{1}{2} F(y)$

La coordenada vertical: $k = y$

El área de la región D es dada por $A(D) = \int_c^d dA$

El momento con respecto al eje X: $M_x = \int_c^d k\, dA = \int_c^d y\, F(y) dy$

El momento con respecto al eje Y: $M_y = \int_c^d h\, dA = \int_c^d \left[\frac{1}{2} F(y)\right] F(y) dy$

Siendo $A = A(D)$ el área de la región D, el centro de gravedad es dado por $(\bar{x}; \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{A}; \frac{M_x}{A}\right)$

OBSERVACIONES. Si la lámina D está entre dos curvas, $f(x)$ y $g(x)$ [o $F(y)$ y $G(y)$], entonces:

a) Con respecto al eje X, se tiene lo siguiente:

El diferencial de área es $dA = [f(x) - g(x)]\, dy$

La coordenada horizontal: $h = x$

La coordenada vertical: $k = \frac{f(x)+g(x)}{2}$

El área de la región D es dada por $A(D) = \int_a^b dA$

El momento con respecto al eje X: $M_x = \int_a^b k\,dA = \int_a^b \left[\frac{f(x)+g(x)}{2}\right][f(x) - g(x)]dx$

El momento con respecto al eje Y: $M_y = \int_a^b h\,dA = \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]dx$

Siendo A el área de la región D, el centro de gravedad es dado por $(\bar{x}; \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{A}; \frac{M_x}{A}\right)$

b) Con respecto al eje Y se tiene lo siguiente:

El diferencial de área es $dA = [F(y) - G(y)]\,dy$

La coordenada horizontal: $h = \frac{F(y)+G(y)}{2}$

La coordenada vertical: $k = y$

El área de la región D es dada por $A(D) = \int_c^d dA$

El momento con respecto al eje X: $M_x = \int_c^d k\,dA = \int_c^d y[F(y) - G(y)]dy$

El momento con respecto al eje Y: $M_y = \int_c^d h\,dA = \int_c^d \left[\frac{F(y)+G(y)}{2}\right][F(y) - G(y)]dy$

Ejemplo 1. Hallar el centro de gravedad de la lámina limitada por la parábola $x = \frac{1}{4}y^2$, el eje Y, así como la recta $y = 4$. (Observar la Figura 6.39).

Solución.

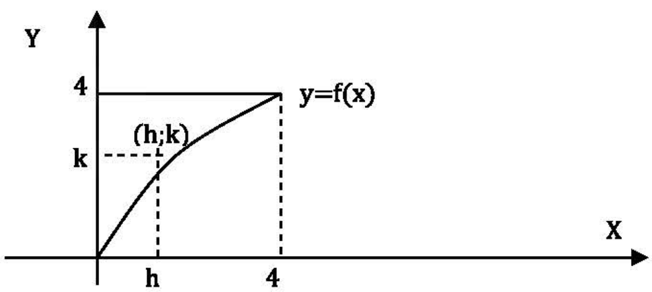


Figura 6.39

El diferencial de área es $dA = F(y)dy = \frac{1}{4}y^2dy$

La coordenada horizontal: $h = \frac{x}{2} = \frac{F(y)}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{8}y^2$

La coordenada vertical: $k = y$

El área es dada por $A(D) = \int_c^d dA = \int_0^4 \frac{1}{4}y^2dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^4 = \frac{16}{3}unid^2$.

El momento con respecto al eje X: $M_x = \int_c^d k\, dA = \int_0^4 y\left[\frac{1}{4}y^2\right]dy = \frac{1}{4}\int_0^4 y^3\, dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^4 = 16$

El momento con respecto al eje Y: $M_y = \int_c^d h\, dA = \int_c^d \left[\frac{F(y)}{2}\right]F(y)dy = \int_0^4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}y^2\right)\right]\left(\frac{1}{4}y^2\right)dy$

$= \frac{1}{32}\int_0^4 y^4\, dy = \frac{1}{32}\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^4 = \frac{32}{5}unid^2$.

Luego el centro de gravedad es dado por $(\bar{x};\bar{y}) = \left(\frac{M_y}{A};\frac{M_x}{A}\right) = \left(\frac{32/5}{16/3};\frac{16}{16/3}\right) = \left(\frac{6}{5};3\right)$

Ejemplo 2. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por las curvas dadas: $x = 4y - y^2, y = x$. (Ir a la Figura 6.40).

Solución.

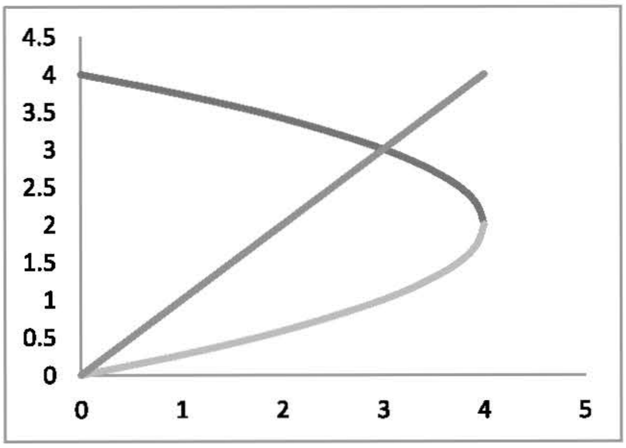


Figura 6.40

El diferencial de área es $dA = [F(y) - G(y)]\, dy = [(4y - y^2) - y]\, dy = [3y - y^2]\, dy$

La coordenada horizontal: $h = \frac{F(y)+G(y)}{2} = \frac{(4y-y^2)+y}{2} = \frac{1}{2}(5y - y^2)$

La coordenada vertical: $k = y$

El área de la región D es dada por $A(D) = \int_c^d dA = \int_0^3 [3y - y^2]\, dy = \left[\frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \frac{9}{2}\ unid^2$.

El momento con respecto al eje X: $M_x = \int_c^d k\, dA = \int_c^d y[F(y) - G(y)]dy$

$= \int_0^3 y[3y - y^2]\, dy = \int_0^3 [3y^2 - y^3]\, dy = \left[y^3 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^3 = \frac{27}{4}$

El momento con respecto al eje Y: $M_y = \int_c^d h\, dA = \int_c^d \left[\frac{F(y)+G(y)}{2}\right][F(y) - G(y)]dy$

$= \int_0^3 \left[\frac{1}{2}(5y - y^2)\right][3y - y^2]dy = \frac{1}{2}\int_0^3 [15y^2 - 8y^3 + y^4)]dy = \frac{1}{2}\left[\frac{15}{3}y^3 - 2y^4 + \frac{1}{5}y^5\right]_0^3 = \frac{108}{5}$

En consecuencia, el centro de gravedad será $(\bar{x}; \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{A}; \frac{M_x}{A}\right) = \left(\frac{27/4}{9/2}; \frac{108/5}{9/2}\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{24}{5}\right)$

6.10. INTEGRAL DEFINIDA Y ÁREA DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

a) El área S de una superficie de revolución generada al girar la gráfica de la función $y = f(x)$ alrededor del eje X, desde $x = a$ hasta $x = b$ es dada por:

$$S = \int_a^b 2\pi\, f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

b) El área S de una superficie de revolución generada al girar la gráfica de la función $x = F(y)$ alrededor del eje Y, desde $y = c$ hasta $y = d$ es dada por:

$$S = \int_c^d 2\pi F(y)\sqrt{1 + [F'(y)]^2}dy$$

Nota: El área de la superficie no es total, únicamente de la parte del sólido, generada por la curva $y = f(x)$ o por $x = F(y)$.

Ejemplo 1. Hallar el área S de la superficie de revolución generada por la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$, desde $x = 0$ hasta $x = 8$, al girar alrededor del eje X.

Solución. Si $y = 2\sqrt{x}$, su derivada es $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ o $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

El área de la superficie será $S = \int_a^b 2\pi\, f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_0^8 2\pi(2\sqrt{x})\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\, dx$

$= 4\pi \int_0^8 (x + 1)^{1/2}dx = 4\pi\left[\frac{2}{3}(x + 1)^{3/2}\right]_0^8 = \frac{8}{3}\pi\left(9^{3/2} - 1\right) = \frac{208}{3}\pi\ unid^2.$

Ejemplo 2. Calcular el área S de la catenoide: Superficie generada por la rotación de la catenaria $y = a\, Cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ alrededor del eje X, desde $x = 0$ hasta $x = a$.

Solución.

Si $y = a\,Cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, entonces la derivada será $y' = a\,Senh\left(\frac{x}{a}\right)$ o $f'(x) = a\,Senh\left(\frac{x}{a}\right)$

El área de la superficie será $S = \int_a^b 2\pi\, f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

$$= \int_0^a 2\pi \left[a\,Cos\left(\frac{x}{a}\right)\right]\sqrt{1+\left[aCosh\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2}\,dx = \int_0^a 2\pi\left[a\,Cos\left(\frac{x}{a}\right)\right]\sqrt{1+\left[Sen\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2}\,dx$$

$$= 2a\pi \int_0^a Cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)dx = 2a\pi\left[\frac{1}{2}x + \frac{a}{4}Senh\left(\frac{2x}{a}\right)\right]_0^a = a^2\pi\left[1+\frac{1}{2}Senh(2)\right].$$

Es decir, el área de la superficie resulta $S = a^2\pi\left[1+\frac{1}{2}Senh(2)\right]$

6.11. INTEGRAL DEFINIDA Y EL VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN REAL

Otra de las aplicaciones de la integral definida es calcular el valor promedio de una función, el cual se entiende como el promedio de la función para un número muy grande de valores a tasar.

DEFINICIÓN 1. Si $f: I \subset R \to R$ una función continua en un intervalo $I = [a; b]$, entonces el valor promedio de la función $y = f(x)$ en ese intervalo es dado por $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

DEFINICIÓN 2. Si $F: I \subset R \to R$ una función continua en un intervalo $I = [c; d]$, entonces el valor promedio de la función $x = F(y)$ en ese intervalo es dado por $\bar{F} = \frac{1}{d-c}\int_c^d F(y)dy$

Ejemplo 1. Se muestra el valor promedio de la función $f(x) = x - 3x^2$ en el intervalo $I = [-1;\ 2]$. (Ver Figura 6.41).

Aplicando la fórmula $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^2 (x-3x^2)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - x^3\right]_{-1}^2 = -\frac{5}{2}$

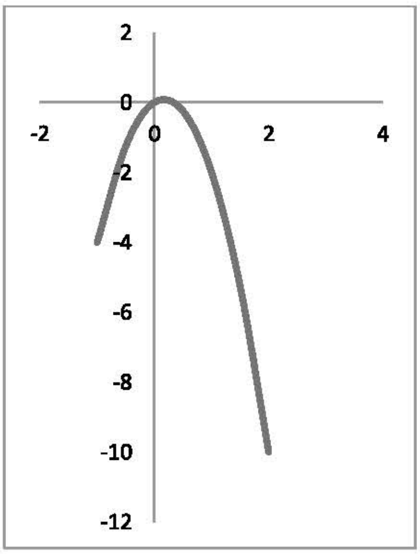


Figura 6.41

Ejemplo 2. Supóngase que en la parte central de un pequeño lago poco profundo, la temperatura T (en grados Fahrenheit) desde las 8 am ($t = 0$) hasta las 6 pm ($t = 10$) durante el mes de mayo, se determina aproximadamente en la forma como indica la Figura 6.42. Determine la temperatura media o promedio desde las 8 am hasta las 6 pm. Siendo $T(t) = -t^2 + 10t + 50$.

Solución.

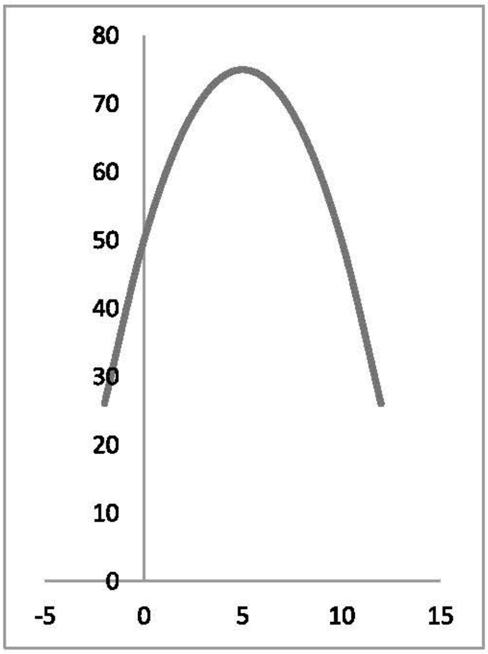


Figura 6.42

Aplicando la fórmula $\bar{T} = \frac{1}{b-a}\int_a^b T(t)dt = \frac{1}{10-0)}\int_0^{10}(-t^2 + 10t + 50)dt$

$$= \frac{1}{10}\left[-\frac{t^3}{3} + 5t^2 + 50t\right]_0^{10} = \frac{200}{3} \approx 67°F$$

Esto significa que la temperatura desde las 8 am hasta las 6 pm ha sido en promedio de 67° Fahrenheit.

Nota. Observemos que a las 8 am ($t = 0$) la temperatura es de 50° Fahrenheit; que a la 1 pm ($t = 5$) es de 75° F (la mayor); y a las 6 pm, de 50° F.

6.12. INTEGRAL DEFINIDA Y EL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA

Decimos, en general, que se ha realizado un trabajo cuando una fuerza ha movido un objeto. El concepto de trabajo es importante, especialmente para los ingenieros al momento de determinar la energía requerida para realizar diferentes tareas físicas. Son ejemplos: saber la cantidad de trabajo realizado por una grúa al levantar un determinado objeto, si se comprime un resorte o cuando un vehículo transporta una carga.

A continuación, se proporciona la definición de trabajo efectuado por una *fuerza constante*:

DEFINICIÓN 1. Si una fuerza constante F aplicada sobre un objeto permite que este se mueva una distancia D, entonces el trabajo W realizado por dicha fuerza es dado por $W = FD$.

Ahora, se da a conocer la definición de trabajo realizado por una *fuerza variable*:

DEFINICIÓN 2. Si un objeto se mueve a lo largo de una línea recta debido a la acción de una fuerza $F(x)$ que varía continuamente, entonces el trabajo realizado por dicha fuerza conforme el objeto se mueve desde $x = a$ hasta $x = b$ viene dada por $W = \int_a^b F(x)dx$

Ejemplo 1. Hallar el trabajo necesario para levantar un objeto de 180 libras a una altura de 5 pies.

Solución. (Aplicamos definición 1)

Trabajo $W = FD = 180(5) = 900$ pies-libras.

Ejemplo 2. Un resorte requiere una fuerza de 21 libras para ser estirado $1/3$ pie, excediendo su posición de reposo. Calcule el trabajo requerido para estirar el resorte $1/3$ pie más que su posición de reposo y compare con el que se efectúa para estirarlo otro $1/3$ pie, hasta alcanzar una extensión de $2/3$ de pie respecto al reposo.

Solución. (Aplicamos definición 2)

En base a la ley de Hooke, determinamos la constante de rigidez del resorte: $21 = k\left(\frac{1}{3}\right)$ o $k = 63$, entonces $F(x) = 63x$ representa la fuerza necesaria para estirar el resorte "x" pies más de su posición normal.

a) El trabajo realizado al estirar el resorte desde el reposo, $x = 0$, hasta la posición $x = \frac{1}{3}$ queda expresada de esta forma:

TRABAJO $= W = \int_a^b F(x)dx = \int_0^{1/3}(63x)dx = \left[63\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/3} = \frac{7}{2} = 3{,}5$ pies-libras.

Lo cual denota que para estirar el resorte $1/3$ de pie más allá de su posición de equilibrio, se necesita 3,5 pies – libras de fuerza.

b) Si se estira el resorte otro $1/3$ de pie desde la posición $x = \frac{1}{3}$hasta $x = \frac{2}{3}$, se tendrá lo siguiente:

TRABAJO $= W = \int_a^b F(x)dx = \int_{1/3}^{2/3}(63x)dx = \left[63\frac{x^2}{2}\right]_{1/3}^{2/3} = \frac{21}{2} = 10{,}5$ pies-libras.

Esto significa que para estirar el resorte $2/3$ de pie más allá de su posición de equilibrio, se necesita 10,5 pies – libras de fuerza.

Observación: Estirar el primer $1/3$ de pie fue más fácil que el siguiente.

Ejemplo 3. Se levanta un objeto de 900 libras de peso por medio de un cable y una polea que está 10 pies por encima del objeto. El cable pesa dos libras por pie. Calcule el trabajo requerido para levantar el objeto tres pies.

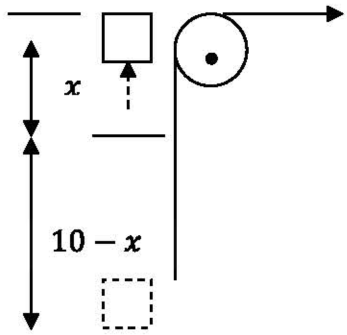


Figura 6.43

Solución

Denotamos por "x" la distancia en que se levanta el objeto, el peso del cable será (Longitud)(Densidad) $= (10 - x)(2)$ libras.

La fuerza total del objeto hacia abajo junto con el cable ha de ser $F(x) = 900 + (10 - x)(2)$.

El trabajo realizado resulta TRABAJO $=$ $W = \int_a^b F(x)dx$

$W = \int_0^3 [900 + 2(10 - x)]dx = \int_0^3 [920 - 2x]dx = [920x - x^2]_0^3 = 920(3) - 3^2 = 2751$ pies – libras.

Obsérvese que para levantar al objeto tres pies, se requiere (900)(3)=2700 pies–libras de trabajo; los 51 restantes se utilizarán para levantar los 3 pies de cable.

Ejemplo 4. Un módulo espacial pesa 15 toneladas en la superficie terrestre. ¿Cuánto trabajo exige elevarlo a una altura de 800 millas? No se tomará en cuenta la resistencia del aire ni el peso del combustible.

Solución.

Como el peso de un cuerpo varía proporcionalmente, y en sentido inverso, al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra, la fuerza ejercida por la gravedad será $F(x) = \frac{k}{x^2}$. Dado que el módulo pesa 15 toneladas en la superficie de la Tierra, cuyo radio es aproximadamente 4 000 millas, podemos hallar la constante de proporcionalidad $15 = \frac{k}{4000^2} \rightarrow k = 240\,000\,000.$

El módulo debe colocarse a 800 millas, esto significa que será transportado desde $x = 4000$ hasta $x = 4800$ millas. El trabajo total realizado será TRABAJO $= W = \int_a^b F(x)dx$

$W = \int_{4000}^{4800} \frac{240000000}{x^2} dx = \left[-\frac{240000000}{x}\right]_{4000}^{4800}$ =10 000 toneladas – millas.

Es decir, para colocar el módulo espacial cuyo peso es 15 toneladas, a 800 millas de distancia por sobre la Tierra, se requiere de 10 000 toneladas–millas de fuerza.

Ejemplo 5. Un tanque esférico de 8 pies de radio está lleno hasta la mitad de un aceite que pesa 50 libras por pie cúbico. Calcular el trabajo requerido para bombear el aceite a través de un orificio en la parte superior del tanque.

Solución.

La fuerza dada por el peso del aceite será Fuerza $= 50\pi x^2$.

Llevando al problema a un sistema de coordenadas, para un círculo de radio 8 centrado en el punto (0;8) se tiene la siguiente ecuación: $x^2 + (y-8)^2 = 8^2 \rightarrow x^2 = 16y - y^2$

Entonces la fuerza quedará expresada así: $Fuerza = 50\pi(16y - y^2)$

Por otro lado, el aceite debe elevarse a una distancia de $(16-y)$ pies; en consecuencia, la función que rige el trabajo realizado será $f(y) = 50\pi(16y - y^2)(16-y) = 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)$.

Finalmente, como el tanque está lleno hasta la mitad, "y" varía de 0 a 8; por tanto, el trabajo requerido para vaciarlo será el siguiente:

$w = \int_0^8 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)dy = 50\pi\left[128y^2 - \frac{32}{3}y^3 + \frac{y^4}{4}\right]_0^8 = 50\pi\left(\frac{11264}{3}\right) \approx 589\,782$ pies–libras.

6.13. INTEGRAL DEFINIDA EN OTRAS APLICACIONES

APLICACIONES A LA ADMINISTRACIóN Y ECONOMÍA

Estas aplicaciones serán mostradas directamente con ejemplos, puesto que aparecen a menudo en el trabajo con derivadas de funciones reales que representan al costo, ingreso, utilidad, oferta, demanda, etc.

PROBLEMA 1. Suponga que la función de costo marginal de una empresa manufacturera de un cierto producto se calcula con la fórmula $C'(x) = 2 - 0{,}2x,\ 0 \le x \le 8$, donde el costo marginal está dado en miles de dólares y la producción es de "x" unidades por día. ¿Cuál es el cambio total en el costo diario para pasar de un nivel de producción de 2 a 6 unidades diarias? Interpretar.

Solución

Nos dan $C'(x) = 2 - 0{,}2x, 0 \leq x \leq 8$

Reescribiendo para integrar: $\frac{dC(x)}{dx} = 2 - 0{,}2x \;\rightarrow\; dC(x) = (2 - 0{,}2x)$

Piden $C = C_2^6 = \int_2^6 dC(x) = \int_2^6 (2 - 0{,}2x)dx = [2x - 0{,}1x^2]_2^6 = 2(6) - 0{,}1(6)^2 - 2(2) + 0{,}1(2)^2 = 4{,}8$.

Esto denota que los costos totales de una producción que en un día aumenta de 2 a 6 unidades es de 4 800 dólares.

El intervalo $I = [0;\ 8]$ da a entender que la función únicamente es válida en ese intervalo.

PROBLEMA 2. Una fábrica grande cercana a un río descarga en este contaminantes, con una rapidez que el Departamento de Control de Calidad de Aguas calcula mediante la fórmula $P'(t) = t\sqrt{t^2+1}$, con $0 \leq t \leq 5$, donde $P(t)$ es el número total de toneladas de contaminante descargado en el agua después de "t" años en que la empresa viene funcionando. ¿Qué cantidad de contaminantes se habrá descargado en el río durante los 3 primeros años de funcionamiento y cuánto entre el 2do. y el 4to. año?

Solución.

Nos dan $P'(t) = t\sqrt{t^2+1}$, con $0 \leq t \leq 5$.

Reescribiendo para integrar: $\frac{dP(t)}{dt} = t\sqrt{t^2+1} \;\rightarrow\; dP(t) = (t\sqrt{t^2+1})dt$

a) Piden calcular la cantidad de contaminantes arrojados los tres primeros años. Esto es:

$P = P_0^3 = \int_0^3 dP(t) = \int_0^3 (t\sqrt{t^2+1})dt = \left[\frac{1}{2}(t^2+1)^{3/2}\right]_0^3 = \frac{1}{2}(3^2+1)^{3/2} - \frac{1}{2}(0^2+1)^{3/2} = 10{,}2$ Ton.

En conclusión, durante los tres primeros años la fábrica ha arrojado al río 10,2 toneladas de contaminantes.

El intervalo $I = [0;\ 5]$ significa que la función únicamente es válida en ese intervalo.

b) Respecto a la cantidad de contaminante que la empresa descarga entre el segundo y cuarto año de su funcionamiento, se calcula:

$P = P_2^4 = \int_2^4 dP(t) = \int_2^4 (t\sqrt{t^2+1})dt = \left[\frac{1}{2}(t^2+1)^{3/2}\right]_2^4 = \frac{1}{2}(4^2+1)^{3/2} - \frac{1}{2}(2^2+1)^{3/2} =$ 29,45 Ton.

6.14. LISTA DE EJERCICIOS PROPUESTOS

TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO.

1. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $G(x) = \int_a^x Cos\, t\, dt$ b) $G(x) = \int_x^2 (u - e^u + 2u^2)\, du$

2. Determinar la derivada de las siguientes funciones:

a) Si $G(x) = \int_a^{\sqrt{x}} Ln\, t\, dt$ b) Si $G(x) = \int_x^{x^3} t\sqrt{1+t^2}\, dt$

c) Si $G(x) = \int_{x-x^2}^{x+x^2} \left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

3. Evaluar:

a) $N = \int_2^3 x^3 dx$ b) $N = \int_0^2 e^x\, dx$

c) $N = \int_0^\pi Sen\, x\, dx$ d) $N = \int_1^e Ln\, x\, dx$

e) $N = \int_{1/2}^{5/2} \frac{1}{x}\, dx$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

1. Evaluar:

a) $N = \int_3^8 4\, dx$ b) $N = \int_0^3 (3x^2 + x - 1)\, dx$

c) $N = \int_{-1}^1 x(x^2+1)^3\, dx$ d) $N = \int_0^3 |2x - 3|\, dx$

e) $N = \int_{-1}^{-1} \left(x - \frac{1}{x^2}\right) dx$

2. Evaluar:

a) $N = \int_0^{\pi/2} Sen(2x)\, dx$ b) $N = \int_{\pi/3}^{\pi/2} (x + Cos\, x)\, dx$

c) $N = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} Sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

ÁREA BAJO UNA CURVA.

1. Dibuje la región cuya área se indica mediante la integral definida propuesta. Después calcule el valor de la integral mediante una fórmula geométrica.

a) $N = \int_{-r}^{r} 5\,dx$ b) $N = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ c) $N = \int_{0}^{5} (2x + 5)\,dx$

2. Realizando las gráficas en cada caso:

a) Encuentre el área de la región D bajo la curva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ entre $x = -1$, $x = 2$. Respuesta: $5{,}1 unid^2$.

b) Hallar el área comprendida entre la parábola $y = x^2 + 2x - 3$ y el eje X.

c) Determine el área que está comprendida entre la curva $y = x^3 - x + 2$, las rectas $x = -1$, $x = 2$.

d) Identificar el área comprendida entre la parábola cúbica $y = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje X.

HALLAR EL ÁREA ENTRE DOS CURVAS.

1. Desarrolle según se pide.

a) Hallar el área comprendida entre la curva $y = \sqrt{x}$; la recta $y = 6 - x$, y el eje X, en el primer cuadrante.

b) Bosqueje la región D limitada por $y = x + 6$; $y = x^3$; $2y + x = 0$. Posteriormente determine su área.

c) Hallar el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $y = |2x|$ y la parábola $y = 2x^2 + x - 4$.

2. Desarrolle según se pide:

a) Hallar el área limitada por las gráficas de las curvas $y = x^2$, $y = x^3$.

b) Hallar el área de la región limitada por la curva cerrada $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) Hállese el área limitada por las gráficas de las curvas $x = y(y-1)(y-2)$; $x = y(2-y)$

3. Determinar el área de la región encerrada por las curvas representadas por las funciones $f(x) = 3 + 2x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 4x + 3$

INTEGRAL DEFINIDA Y EL VOLUMEN POR SECCIONES PLANAS CONOCIDAS.

1. Calcular el volumen de un sólido, cuya base tiene forma circular de radio 2 y sus secciones transversales tiene forma cuadrada. La diagonal de cada cuadrado que forma la sección transversal es perpendicular al eje X y se encuentra sobre el plano XY.

2. Encuentre el volumen del sólido, cuya base es un triángulo rectángulo sobre el plano XY con secciones transversales perpendiculares al eje X y con forma de triángulo equilátero. Uno

de los catetos del triángulo que forma la base mide 6 metros y es paralelo al eje Y; el otro cateto mide 4 metros y es paralelo el eje X.

3. Sea D la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = 2\sqrt{x}$, la recta horizontal $y = 6$ y el eje Y. Encuentre el volumen del sólido generado al tomar la región D como base para colocar semicírculos perpendiculares al eje X.

4. Resuelva el ejercicio anterior (Nº 3), si se toma la región D como base para colocar triángulos equiláteros perpendiculares al eje X, haciendo contacto la hipotenusa de cada triángulo equilátero con la base.

VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN .

1. Resolver los siguientes ejercicios:

a) Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región D limitada por las curvas dadas, en torno al eje indicado:

(i) $y = \frac{4}{x}, x = 1, x = 4, y = 0$; giro alrededor del eje X.

(ii) $y = x^2, x = 2, y = 0$; giro alrededor del eje Y.

(iii) $y = 4$ con $x \geq 0, x = 0, y = 0$; giro alrededor de la recta $x = 2$.

(iv) $x = \sqrt{2y}, y = 2, x = 0, y = 0$; giro alrededor de la recta $y = 3$.

b) La región D acotada por las curvas $y = 2 + Sen(x)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$ se hace girar alrededor del eje Y. Encuentre el volumen que resulta.

c) Calcular el área de la región D que está limitada por la función $y = x\sqrt{x+1}$ e $y = 0$. Si se hace girar esta región alrededor del eje X; calcular el volumen del sólido así generado.

2. La superficie limitada por las curvas $y = Sen(x)$, $y = Cos(x)$ entre $x = \pi/4$, $x = 5\pi/4$ genera varios sólidos de revolución. Calcular el volumen cuando gira alrededor de:

(i) El eje Y. (ii) La recta $y = 0$. (iii)La recta $y = -2$

3. La región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$. Si se hace girar alrededor de:

(i) el eje X. Hallar el volumen del sólido generado.

(ii) el eje Y. Hallar el volumen del sólido generado.

LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA.

1. Determinar la longitud de la curva $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ desde $x = 1$ hasta $x = 3$. Respuesta: $S = \frac{53}{6}$ unidades.

2. Resuelva los siguientes ejercicios:

a) Encuentre la longitud del arco de la curva $y = x^{3/2}$, entre los puntos $(1; 1)$ y $(4; 8)$.

b) Determine la longitud de arco de la curva $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$ entre $x = 1, x = 4$.

c) Identifique la longitud de arco de la curva $y = \frac{x^4+3}{6x}$ entre $x = 1, x = 4$.

INTEGRAL DEFINIDA Y CENTRO DE GRAVEDAD DE UNA REGIÓN PLANA. MOMENTOS.

1. Calcular el centro de gravedad de las láminas de densidad uniforme limitadas por las gráficas de las ecuaciones dadas a continuación:

a) $y = \sqrt{x}; y = 0; x = 4$

b) $x = 4 - y^2; x = 0$

c) $y = \frac{1}{x}; y = 0; 1 \leq x \leq 4$

d) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 10); y = 0$ entre $x = -2$ y $x = 3$

INTEGRAL DEFINIDA Y EL ÁREA DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓn.

1. Calcular el área de la superficie de revolución generada al hacer girar la curva plana dada alrededor del eje X.

a) $y = \frac{x^3}{3}$ con $0 \leq x \leq 3$

b) $y = \sqrt{x - 1}$ con $2 \leq x \leq 5$

c) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ con $1 \leq x \leq 2$

2. Determinar el área de la superficie de revolución generada al hacer girar la curva plana dada alrededor del eje Y.

a) $y = \sqrt[3]{x} + 2$ con $1 \leq x \leq 8$

b) $y = 4 - x^2$ con $0 \leq x \leq 2$

3. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por $y = x^2 - 2x - 3; y = 6x - x^2 - 3$
Respuesta. $(\bar{x}; \bar{y}) = (2; 1)$

INTEGRAL DEFINIDA Y EL VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN REAL.

1. Encuentre el valor promedio de la función planteada en el intervalo dado:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$, en $x \in [1;\ 8]$

b) $f(x) = Sen\ x$, en $x \in [-\pi;\ \pi]$

c) $f(x) = \frac{1}{12}t^3 - 3t^2 + 2t + 70$, en $x \in [0; 6]$

2. Hallar el valor promedio de la función de velocidad planteada en el intervalo dado:

a) $v(t) = 3t^3 + 2$, en $1 \leq t \leq 4$

b) $v(t) = t^{1/2}$, en $2 \leq t \leq 9$

c) $v(t) = 1500e^{0,06t}$, en $0 \leq t \leq 5$

3. Desarrolle lo siguiente:

a) Calcule el valor medio de la función $f(x) = 500 - 50x$ en el intervalo $I = [0; 10]$

b) Calcule el valor medio de la función $f(t) = \sqrt{1+t}$ en el intervalo $I = [3; 8]$

4. Si la temperatura $C(t)$ de un hábitat artificial varía según la fórmula $C(t) = t^3 - 2t + 10$, $0 \leq t \leq 2$, (en grados Celsius) en un lapso de 2 horas, ¿cuál es la temperatura promedio de este periodo?

5. En las peores cuatro horas de un huracán, la velocidad del viento en millas por hora está dada por $V(t) = 5t - t^2 + 100$, $0 \leq t \leq 4$. ¿Cuál es la velocidad promedio del viento en dicho periodo?

6. Si la temperatura a las t horas, en grados Fahrenheit se modela por $T(t) = 60 + 5t - \frac{1}{2}t^2$, $0 \leq t \leq 10$, hallar el máximo, mínimo y el valor promedio de la temperatura en el periodo de las 10 primeras horas.

7. Si un equipo se evalúa en $V(t) = 6500 - 120t - 51t^2$ dólares al cabo de t años, encontrar su valor promedio durante el primer año de uso. Asimismo en el tercer año, y, luego, en los 10 primeros.

8. Suponga que el inventario de cierto artículo t meses después del primer mes del año se calcula aproximadamente con el modelo $I(t) = 10 + 36t - 3t^2$ para $0 \leq t \leq 12$. Hallar el inventario promedio en el segundo trimestre del año.

9. Una población está disminuyendo de acuerdo con la fórmula $P(t) = \frac{2\times 10^6}{t+1}$, donde t es el tiempo. Encuentre el tamaño promedio de la población entre $t = 1$ y $t = 2$.

INTEGRAL DEFINIDA Y EL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA.

1. Resolver los siguientes problemas para obtener Trabajo:

a) Calcular el trabajo realizado para elevar a 10 pies de altura, un saco de azúcar de 100 libras.

b) Con una fuerza de 750 libras se comprime en 3 pulgadas un resorte, desde su longitud natural de 15 pulgadas. Calcular el trabajo realizado al comprimir dicho resorte 3 pulgadas más. Respuesta: 3375 pulgadas–libras.

c) Se llena de agua un depósito rectangular con una base de 4 por 5 pies y una altura de 4 pies (el agua pesa 62,4 libras por pie cúbico). ¿Cuánto trabajo se realiza al bombear afuera el agua por encima del borde superior (i) si se vacía la mitad del depósito o (ii) si se vacía todo?

INTEGRAL DEFINIDA EN OTRAS APLICACIONES.

1. (Análisis marginal) Las ecuaciones de costo, ingreso y utilidad marginal de una empresa (en millares de dólares) son: $C'(1)$; $R'(x) = 10 - 2x$; $P'(x) = R'(x) - C'(x)$, para $0 \leq x \leq 10$, donde x es el número de unidades producidas cada día. Encuentre el cambio en (i) costo; (ii) ingreso; y (iii) utilidad para pasar de un nivel de producción de 2 a 4 unidades diarias.

2. (Valor de recuperación) Una parte nueva de repuesto en un equipo industrial se deprecia al principio rápidamente. Después, a medida que transcurre el tiempo, la rapidez de depreciación de su valor es más lenta. Suponga que la rapidez (en dólares por año) con la cual cambia el valor en libras de una nueva máquina moledora, se calcula aproximadamente con la fórmula $V'(t) = f(t) = 500(t - 12)$, $0 \leq t \leq 12$, donde $V(t)$ es el valor de la máquina después de "t" años. Calcule la pérdida total del valor de la máquina para los 5 primeros años y luego para los próximos 5. Escriba las integrales correspondientes y resuelva.

3. (Costo de mantenimiento) Los costos de mantenimiento de un departamento generalmente aumentan a medida que el edificio es más antiguo. Según registros anteriores, una empresa de servicios determina que la razón de incremento en los costos de mantenimiento (en dólares por año) de un conjunto habitacional se calcula aproximadamente con la fórmula $M'(x) = f(x) = 90x^2 + 5000$; donde x es la edad del departamento en años y $M(x)$ es el costo total (acumulado) de mantenimiento por "x" años. Escriba una integral definida que dará los costos totales de mantenimiento desde 2 hasta 7 años, después de haberse construido ese departamento y evalúe esa integral.

4. Las ecuaciones de costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal de una empresa, en miles de dólares diarios, son:

$$\left.\begin{aligned} C'(x) &= 1 \\ R'^{(x)} &= 10 - 2x \\ P'(x) &= R'(x) - C'(x) \end{aligned}\right\}, 0 \leq x \leq 10$$

Donde x es el número de unidades producidas cada día. Encuentre el cambio en:

a) Costo b) Ingreso c) Utilidad

A fin de traspasar el nivel de producción de 2 a 4 unidades diarias.

5. Las ecuaciones de costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal de una empresa, en miles de dólares diarios, son:

$$\left.\begin{aligned} C'(t) &= 0{,}5t + 2 \\ R'(t) &= 10 - 0{,}5t \\ P'(t) &= R'(t) - C'(t) \end{aligned}\right\}, 0 \leq t \leq 20$$

Donde t es el número de unidades producidas cada día. Encuentre el cambio en:

a) Costo b) Ingreso c) Utilidad

para elevar el nivel de producción de 2 a 4 unidades diarias.

Capítulo VII

LA INTEGRAL IMPROPIA

CAPÍTULO VII

LA INTEGRAL IMPROPIA

CONTENIDO

7.1. La integral impropia. Convergencia y divergencia.

7.2. Integral impropia en intervalos infinitos.

7.3. Integral impropia para funciones discontinuas en los extremos de su intervalo de integración.

7.4. Integral impropia para funciones discontinuas en puntos internos de su intervalo de integración.

7.5. Otras aplicaciones de la integral impropia.

7.6. Lista de ejercicios propuestos.

7.1. LA INTEGRAL IMPROPIA. CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA

Hasta aquí se ha estudiado la integral de Riemann de una función f acotada, la cual es definida en un intervalo cerrado y acotado $I = [a; b]$ con a y b números reales, tales que $a < b$.

La integral impropia no cumple enteramente con los criterios de integración de una integral de Riemann.

En este capítulo, se intentará generalizar el concepto de integral definida para funciones que no verifican alguna de las hipótesis citadas en las definiciones de una integral, es decir:

a) La integral de una función acotada, definida en un intervalo no acotado, por ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $I = [1;\ +\infty\rangle$
b) La integral de una función no acotada, definida en un intervalo no acotado, por ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $I = \langle 0;\ +\infty\rangle$
c) La integral de una función no acotada, definida en un intervalo acotado, por ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $I = \langle 0;\ 1]$

De calcularse estas integrales, se tendrá dos resultados:

a) Que sea un número real, por lo cual se dirá que la integral es convergente. En este caso se tiene como resultado un número real.
b) Que no sea un número real, por lo cual se dirá que la integral es divergente. En este caso se tiene como resultados, ∞ o $-\infty$

Existe más de una forma de clasificar este tipo de integrales. Aquí se ha usado un orden que pasamos a detallar.

7.2. LA INTEGRAL IMPROPIA EN INTERVALOS INFINITOS (NO ACOTADOS)

También denominadas integrales impropias de primera clase. Estas se generalizan desde las integrales de Riemann de la siguiente forma:

DEFINICIÓN 1. Si f es acotada y continua en el intervalo infinito $I = [a; +\infty\rangle$, entonces se tiene $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \underset{b\to+\infty}{Lím} \int_a^b f(x)dx$.

La integral impropia anterior converge si el límite existe; de lo contrario, diverge.

DEFINICIÓN 2. Si f es acotada y continua en el intervalo infinito $I = \langle -\infty; b]$, entonces se tiene $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \underset{a\to-\infty}{Lím} \int_a^b f(x)dx$.

La integral impropia anterior converge si el límite existe; de lo contrario, diverge.

DEFINICIÓN 3 . Si f es acotada y continua en el intervalo infinito $I = \langle -\infty; +\infty \rangle$, entonces se tiene $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \underset{a\to -\infty}{Lím} \int_a^c f(x)dx + \underset{b\to +\infty}{Lím} \int_c^b f(x)dx$, siendo c cualquier número real.

La integral impropia anterior converge si ambos límites existen; de lo contrario, diverge.

Se acostumbra por comodidad tomar al valor de división c como cero, puesto que facilita cálculos.

Ejemplo 1. Obtener el volumen del sólido generado por la rama en el primer cuadrante de la curva $y = \frac{1}{x}$, cuando gira alrededor del eje X, y a la derecha de la recta $x = 1$.

Solución.

Identificando elementos: $y = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$ y $b = +\infty$

El volumen será dado por

$$V(S) = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx = \pi \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x}\right]^2 dx = \pi \underset{b\to +\infty}{Lím} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \pi \underset{b\to +\infty}{Lím} [-x^{-1}]_1^b$$

$$= \pi \underset{b\to +\infty}{Lím} \left[-\frac{1}{b} + 1\right] = \pi(1) = \pi\ unid^3.$$

Ejemplos 2. Se muestra la resolución de algunas integrales impropias:

a) $L = \int_{-\infty}^3 \frac{1}{(9-x)^2} dx = \underset{a\to -\infty}{Lím} \left[\int_a^3 (9-x)^{-2} dx\right] = \underset{a\to -\infty}{Lím} \left[\frac{-1}{x-9}\right]_a^3 = \underset{a\to -\infty}{Lím} \left[\frac{-1}{-6} + \frac{1}{a-9}\right] = \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}$.

b) $L = \int_{-\infty}^1 e^x dx = \underset{a\to -\infty}{Lím} \left[\int_a^1 e^x dx\right] = \underset{a\to -\infty}{Lím} [e^x]_a^1 = \underset{a\to -\infty}{Lím} [e^1 - e^a] = e$.

Ejemplo 3. Véase el cálculo de la siguiente integral: $L = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+8} dx$.

Solución:

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+8} dx = \underset{a\to -\infty}{\text{Lím}} \int_a^0 \frac{1}{(x+2)^2+2^2} dx + \underset{b\to +\infty}{\text{Lím}} \int_0^b \frac{1}{(x+2)^2+2^2} dx$$

$$= \underset{a\to -\infty}{\text{Lím}} \left[\frac{1}{2} ArcTan\left(\frac{x+2}{2}\right)\right]_a^0 + \underset{b\to +\infty}{\text{Lím}} \left[\frac{1}{2} ArcTan\left(\frac{x+2}{2}\right)\right]_0^b$$

$$= \underset{a\to -\infty}{\text{Lím}} \left[\frac{1}{2} ArcTan\left(\frac{0+2}{2}\right) - \frac{1}{2} ArcTan\left(\frac{a+2}{2}\right)\right] + \underset{b\to +\infty}{\text{Lím}} \left[\frac{1}{2} ArcTan\left(\frac{b+2}{2}\right) - \frac{1}{2} ArcTan\left(\frac{0+2}{2}\right)\right]$$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} ArcTan(-\infty) + \frac{1}{2} ArcTan(+\infty) - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}.$

Ejemplo 4. Hallar el área comprendida entre la curva de Agnesi $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ y el eje de las abscisas.

Solución.

En la siguiente gráfica se tiene:

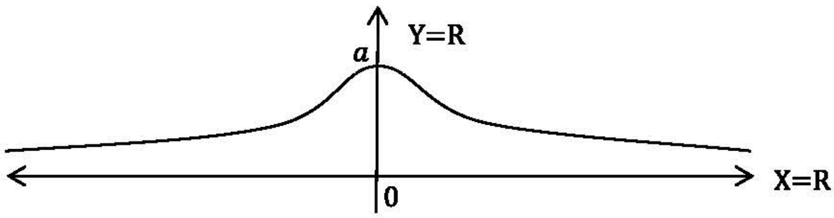


Figura 7.1

El área será dada por $A(D) = 2\int_0^{+\infty} y\, dx = \lim\limits_{b\to\infty} 2\int_0^b \frac{a^3}{x^2+a^2} dx = \lim\limits_{b\to\infty} 2a^3 \int_0^b \frac{1}{x^2+a^2} dx$

$= \lim\limits_{b\to\infty} 2a^3 \left[\frac{1}{a} Arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^b = \lim\limits_{b\to\infty} 2a^3 \left[\frac{1}{a} Arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right]_0^b + \lim\limits_{b\to\infty} 2a^3 \left[\frac{1}{a} Arctan\left(\frac{0}{a}\right)\right]_0^b$

$= 2a^2 Arctan\,(\infty) = 2a^2 \frac{\pi}{2} = \pi a^2\ unid^2.$

Ejemplo 5. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = \frac{2|x|}{1+x^4}, y = -\frac{4|x|}{1+x^4}$.

Solución.

Tal como se muestra en la Figura 7.2, se tiene:

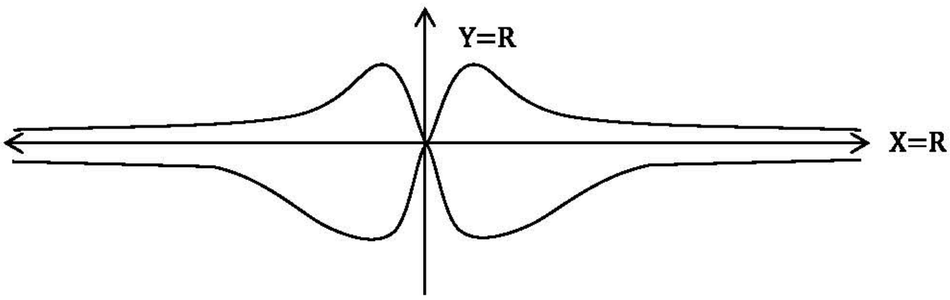


Figura 7.2

El área será dada por $A(D) = 2\int_0^{+\infty} \left(\frac{2x}{1+x^4} - \frac{-4x}{1+x^4}\right) dx = \lim\limits_{b\to\infty} 2\int_0^b \frac{6x}{1+x^4} dx$

$= \lim\limits_{b\to\infty} 2(3)\int_0^b \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} 6\,[Arctan(x^2)]_0^b$

$= \lim\limits_{b\to\infty} 6\,[Arctan(b^2) - Arctan(0)] = 6\,Arctan\,(\infty) = 6\frac{\pi}{2} = 3\pi\,unid^2$.

Ejemplo 6. Hallar el volumen del sólido de revolución, generado al hacer girar la región limitada por las curvas $y = e^x$, $x = 0$ e $y = 0$ alrededor del eje real X=R.

Solución.

Bosquejando la gráfica (Figura 7.3), se tiene:

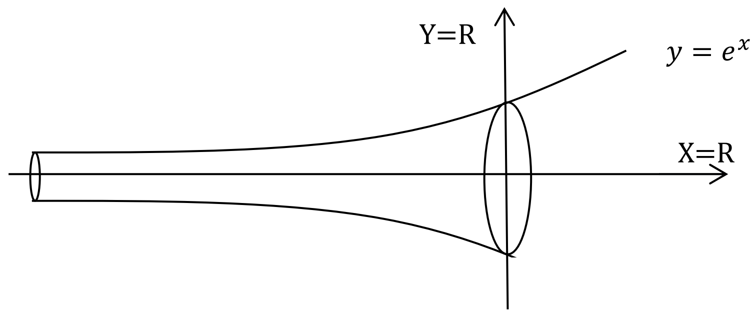


Figura 7.3

El volumen será dada por $V(S) = \pi\int_{-\infty}^{0} y^2\,dx = \pi\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \pi \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{2x}dx$

$= \pi \lim\limits_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_a^0 = \pi \lim\limits_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{2(0)}}{2} - \frac{e^{2a}}{2}\right] = \pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,unid^3$.

Ejercicio. ¿Es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región limitada por la curva $y = \frac{1}{e^x+e^{-x}}$ y el eje X? Respuesta: La integral es convergente y el área, $A = \frac{\pi}{2}$.

7.3. INTEGRAL IMPROPIA PARA FUNCIONES DISCONTINUAS EN LOS EXTREMOS DE SU INTERVALO DE INTEGRACIÓN

Estas integrales tienen puntos de discontinuidad para valores aislados de "x" dentro de los límites de integración. Consideremos los tres casos siguientes:

a) Cuando la función no es continua en el extremo izquierdo $x = a$ del intervalo I. Caso 1.

b) Cuando la función no es continua en el extremo derecho $x = b$ del intervalo I. Caso 2.

CASO 1. La función $y = f(x)$ es continua en el intervalo $I = [a; b]$, excepto en el extremo izquierdo del intervalo $x = a$. Si $a < b$ y sea el número $\varepsilon > 0$, entonces:

DEFINICIÓN 1. La integral impropia se puede expresar como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, siempre que este límite exista. (Ver Figura 7.4).

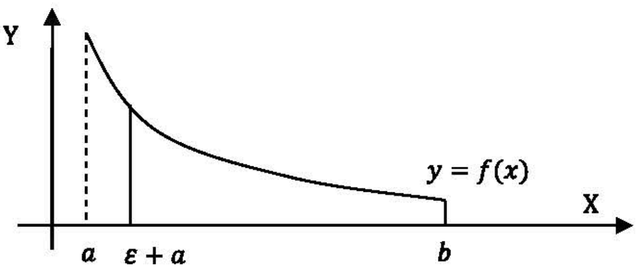


Figura 7.4

CASO 2. La función $y = f(x)$ es continua en el intervalo $I = [a; b]$ excepto en el extremo derecho del intervalo $x = b$. Si $a < b$ y sea el número $\varepsilon > 0$, entonces:

DEFINICIÓN 2. La integral impropia puede expresarse como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, siempre que este límite exista. (Ver Figura 7.5).

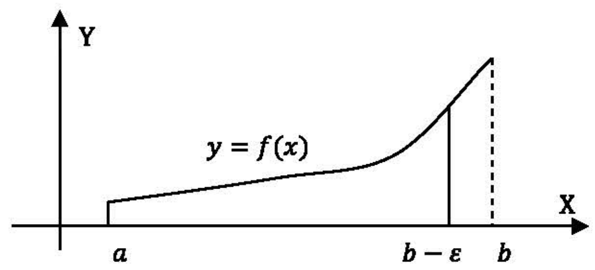


Figura 7.5

Ejemplo 1. Se muestra el desarrollo de la integral impropia: $L = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx$.

Observamos que integrando la función, esta se hace indeterminada para el extremo derecho $x = 4$ en el intervalo $I = [0;\ 4]$.

$$L = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[Arcsen\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^{4-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[Arcsen\left(\frac{4-\varepsilon}{4}\right) - Arsen(0)\right] = Arcsen(1) - Arcsen(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

En este caso la integral es convergente.

Ejemplo 2. Calcule la integral impropia $L = \int_1^2 \frac{1}{1-x}dx$.

Solución.

La función $y = \frac{1}{1-x}$ no es continua en el extremo izquierdo del intervalo $I = [1; 2]$, es decir, en $x = 1$.

$$L = \int_1^2 \left(\frac{1}{1-x}\right) dx = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{Lím}} \int_{1+\varepsilon}^2 \left(\frac{1}{1-x}\right) dx = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{Lím}} [-Ln(1-x)]_{1+\varepsilon}^2$$

$$= \underset{\varepsilon \to 0}{\text{Lím}} [-Ln(1-2) + Ln(1-(1+\varepsilon))] = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{Lím}} \left[Ln\left(\frac{\varepsilon}{1}\right)\right] = -\infty\,.$$

En este caso, la integral es divergente.

Ejemplo 3. Se muestra el desarrollo de la integral impropia $L = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$.

Observamos que integrando la función, esta se hace indeterminada para el extremo izquierdo $x = 0$ en el intervalo $I = [0;\ 1]$.

$$L = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{Lím}} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{Lím}} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2} dx = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{Lím}} [-x^{-1}]_{\varepsilon}^1 = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{Lím}} \left[-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right]_{\varepsilon}^1 = \infty\,.$$

En este caso, la integral es divergente.

7.4. INTEGRAL IMPROPIA PARA FUNCIONES DISCONTINUAS EN PUNTOS INTERNOS DE SU INTERVALO DE **INTEGRACIÓN**

Cuando la función no es continua para un valor interno "$x = c$" dentro del intervalo I. Caso 3.

CASO 3. Sea c un número real comprendido entre a y b del intervalo $I = [a; b]$; y sea $y = f(x)$, una función continua para todos los valores $x \in I = [a; b]$, excepto para $x = c$. Siendo $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, con $a < b$, entonces:

DEFINICIóN 1. $\int_a^b f(x)dx = \underset{\varepsilon_1 \to 0}{\text{Lím}} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \underset{\varepsilon_2 \to 0}{\text{Lím}} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$, siempre que estos límites existan.

Ejemplo 1. Se presenta el desarrollo de la integral impropia $L = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$.

Observamos que integrando la función, eta se hace indeterminada para $x = 0 \in [-2, 2]$.

$$L = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx = \underset{\varepsilon_1 \to 0}{\text{Lím}} \int_{-2}^{0-\varepsilon_1} \frac{1}{x^2} dx + \underset{\varepsilon_2 \to 0}{\text{Lím}} \int_{0+\varepsilon_2}^2 \frac{1}{x^2} dx, \text{ siendo } \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$$

$$= \underset{\varepsilon_1 \to 0}{\text{Lím}} \int_{-2}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x^2} dx + \underset{\varepsilon_2 \to 0}{\text{Lím}} \int_{\varepsilon_2}^2 \frac{1}{x^2} dx = \underset{\varepsilon_1 \to 0}{\text{Lím}} [-x^{-1}]_{-2}^{-\varepsilon_1} + \underset{\varepsilon_2 \to 0}{\text{Lím}} [-x^{-1}]_{\varepsilon_2}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0}\left[\frac{-1}{-\varepsilon_1} - \frac{-1}{-2}\right] + \lim_{\varepsilon_2 \to 0}\left[\frac{-1}{2} - \frac{-1}{\varepsilon_2}\right] = \lim_{\varepsilon_1 \to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{2}\right] + \lim_{\varepsilon_2 \to 0}\left[\frac{-1}{2} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right]$$

$$= +\infty + \infty = \infty\,.$$

En este caso, la integral es divergente.

Ejercicio. Calcular $L = \int_0^{3a} \frac{2x}{(x^2-a^2)^{2/3}}\,dx$. (Ver Figura 7.6).

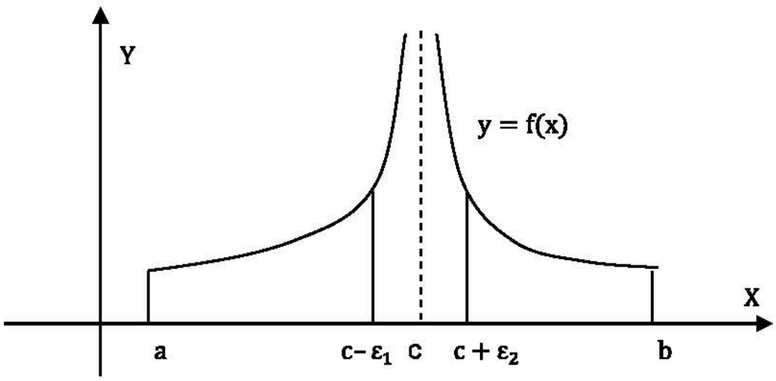


Figura 7.6

Solución. Integrando la función, esta se hace indeterminada para $x = \pm a$; en el intervalo $I = [0;\ 3a]$, el punto de discontinuidad es $x = a$.

Rpta. $L = 9a^{2/3}$.

7.5. OTRAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL IMPROPIA

OBSERVACIÓN 1. Notemos que estos ejemplos corresponden a integrales impropias que tienen intervalo no acotado en un extremo.

Ejemplo 1. Un nuevo invento para el control de la diabetes consiste en un dispositivo que se implanta en el paciente y que libera lentamente un suministro continuo de insulina en el torrente sanguíneo. Suponga que se diseña este dispositivo para que libere insulina con una rapidez $f(t) = \frac{1}{2}te^{-0,9t}$ centímetros cúbicos por día. Calcule la cantidad de insulina liberada por la capsula implantada en el tiempo que dura.

Solución.

Graficando este hecho en la Figura 7.7, se tendrá:

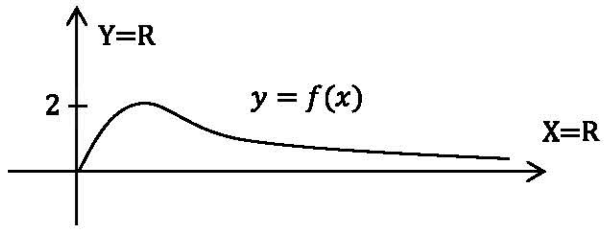


Figura 7.7

El área de la región representará la cantidad total de insulina que el dispositivo ha de liberar durante su vida útil.

Entonces, $A(D) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} te^{-0{,}09t}\,dt = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^{b} \frac{1}{2} te^{-0{,}09t}\,dt$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{te^{-0{,}09t}}{-0{,}09} - \frac{e^{-0.09t}}{(-0{,}09)^2}\right]_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{be^{-0{,}09b}}{-0{,}09} - \frac{e^{-0.09b}}{(-0{,}09)^2} - \frac{(0)e^{-0{,}09(0)}}{-0{,}09} + \frac{e^{-0.09(0)}}{(-0{,}09)^2}\right]$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{be^{-0{,}09b}}{-0{,}09} - \frac{e^{-0.09b}}{0{,}09^2} + \frac{1}{0{,}09^2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0{,}0081}\right) = 61{,}73\ cm^3$.

Esto significa que durante toda su vida útil, el dispositivo necesita de 61,73 cm^3 de insulina.

Ejemplo 2. Se está utilizando un combustible fósil con una rapidez determinada mediante $f(t) = \frac{10^4}{(t+1)^{3/2}}$ toneladas por año. Calcular la cantidad total de combustible que se necesita de ahora en adelante.

Solución.

La cantidad total será determinada por $V = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{10^4}{(t+1)^{3/2}}\,dt = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^{b} \frac{10^4}{(t+1)^{3/2}}\,dt$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} 10^4 \left[\frac{-2}{(t+1)^{1/2}}\right]_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} 10^4 \left[\frac{-2}{(b+1)^{1/2}} - \frac{-2}{(0+1)^{1/2}}\right] = 2(10^4)$ toneladas de combustible.

7.6. LISTA DE EJERCICIOS PROPUESTOS

LA INTEGRAL IMPROPIA. CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA.

1. Hallar todos los valores de "p" para los cuales, la integral $N = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge.

2. Determinar todos los valores de "p" para los cuales, la integral $N = \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ converge.

INTEGRAL IMPROPIA EN INTERVALOS INFINITOS.

1. Resolver:

a) $N = \int_{-\infty}^{0} xe^{-2x} dx$ b) $N = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ c) $N = \int_0^{+\infty} e^x Cos\, x\, dx$

d) $N = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\, dx$ e) $N = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^x}}\, dx$

2. Calcular el área de la región "infinita" dada por $y = \frac{1}{x^3}$ y el eje X, sobre el intervalo $I = [1; +\infty]$.

3. Se está utilizando un combustible con la rapidez $Q'(t) = \frac{10^4}{t+4}$ toneladas por año. Hallar la cantidad total $Q(t)$ necesaria para todo el tiempo de aquí en adelante.

INTEGRAL IMPROPIA PARA FUNCIONES DISCONTINUAS EN LOS EXTREMOS DE SU INTERVALO DE INTEGRACIóN.

1. Resolver:

a) $N = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ b) $N = \int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx$ c) $N = \int_0^9 \frac{1}{\sqrt{9-x}} dx$

2. Demostrar que $N = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx = -\infty$.

INTEGRAL IMPROPIA PARA FUNCIONES DISCONTINUAS EN PUNTOS INTERNOS DE SU INTERVALO DE INTEGRACIóN.

Ejercicio. Resolver lo siguiente:

a) $N = \int_{-1}^{8} x^{-1/3} dx$ b) $N = \int_0^4 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx$ c) $N = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|1-x|}} dx$

Fondo Editorial
UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN