

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática

**CRITERIO DEL RESIDUO DE FUNCIONES
ANALÍTICAS Y SUS APLICACIONES**

TESIS

Presentada por:

Bach. Alex Javier Flores Ticona

Para optar el Título Profesional de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TACNA - PERÚ

2026

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N° 437

En la ciudad de Tacna, en el auditorium de la Facultad de Ciencias, en la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann; siendo las 09:00 horas del día 26 de diciembre del 2024, estando presente el jurado calificador nominado por Resolución de Facultad N°11152-2024-FACI-UN/JBG, conformado por los siguientes docentes:

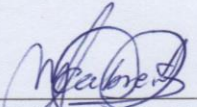
- | | |
|---------------------------------|------------|
| • Dr. Heber Melbin Cabrera Cruz | Presidente |
| • Dr. Wilder Roger Miñano León | Secretario |
| • Dr. Luis Andrés Amaya Cedrón | Vocal |

Acto seguido, se dio lectura a la Resolución correspondiente, y del mismo modo se dio lectura al artículo 22° del Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias.

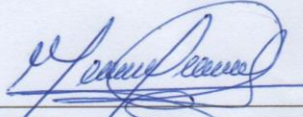
A continuación, el Presidente del Jurado instó a el Bachiller Alex Javier Flores Ticona a exponer la Tesis titulada CRITERIO DEL RESIDUO DE FUNCIONES ANALÍTICAS Y SUS APLICACIONES, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 09:40 horas el tesista concluye su exposición, luego se procedió a la formulación de las preguntas por parte de los miembros del jurado calificador. Terminado este proceso, se invitó a que los miembros del jurado emitan su calificación de acuerdo a reglamento. El promedio de la calificación dio el siguiente resultado: Aprobado por unanimidad, con nota de dieciséis (16), de acuerdo al Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann – Tacna.

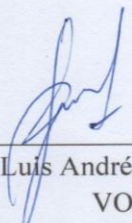
Siendo las 10:15 horas, se dio por concluido el acto de sustentación de la tesis, firmando los señores miembros del jurado calificador, en señal de conformidad.



Dr. Heber Melbin Cabrera Cruz
PRESIDENTE



Dr. Wilder Roger Miñano León
SECRETARIO

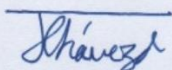


Dr. Luis Andrés Amaya Cedrón
VOCAL

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, **JHONY ALFONSO CHÁVEZ DELGADO**, en mi condición de Asesor acreditado por la Resolución de Facultad R.F. N° 10178-2022 -FACI-UN/JBG de la tesis titulada: **“CRITERIO DEL RESIDUO DE FUNCIONES ANALÍTICAS Y SUS APLICACIONES”**, presentado por el Bachiller **ALEX JAVIER FLORES TICONA** para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, habiendo cumplido con lo establecido en el reglamento de originalidad y de similitud de trabajos de investigación y producción intelectual, considerando que según la revisión, evaluación y análisis realizado a través del software de similitud textual **TURNITIN** cuenta con el nivel de similitud cuyo porcentaje es **07%** por lo que **CERTIFICO LA SIMILARIDAD** de la tesis, la cual está de acuerdo al nivel **PERMITIDO**, para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio Institucional**.

Se emite el presente certificado con fines de continuar con los trámites respectivos para su obtención del título profesional.



Firma del Asesor

MSc. Jhony Alfonso Chávez Delgado

DNI: N° 18124030



Firma del Tesista

Bach. Alex Javier Flores Ticona

DNI: N° 75854482

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a Dios Todopoderoso, mi Creador, quien es mi pilar y fuente constante de inspiración, sabiduría, conocimiento y comprensión, y quien ha sido la fuerza que me ha sostenido a lo largo de esta investigación. También dedico este trabajo a mi querida madre, quien desempeñó el papel de madre y padre a la vez, brindándome su apoyo incondicional hasta el final, y cuyo aliento me permitió dar lo mejor de mí para completar lo que había comenzado. A mis amados hermanos y hermanas, especialmente a mi querida hermana Vilma, quien siempre estuvo a mi lado cuando las circunstancias se ponían difíciles. A toda mi familia, un símbolo constante de amor y generosidad. A la Escuela de Matemática, mi maravilloso segundo hogar. A mis compañeros y profesores, por su paciencia y apoyo durante el recorrido de mi carrera profesional. Y, finalmente, a mis amigos, quienes me alientan y me brindan su apoyo, así como a todas las personas en mi vida que han tocado mi corazón.

AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios y a mi querida madre por brindarme la fuerza necesaria para superar todas las dificultades y alcanzar el éxito al culminar mi carrera. Continuaré confiando en Dios para seguir creciendo profesionalmente. Gracias, Señor.

Quiero expresar mi más sincero reconocimiento y agradecimiento a mi asesor, el profesor MSc. Jhony Alfonso Chávez Delgado, quien ha sido un gran mentor para mí. Agradezco profundamente su apoyo para incentivar mi investigación y permitirme crecer como investigador científico. Su orientación en mi carrera y en la investigación ha sido invaluable, y sus brillantes comentarios y sugerencias han sido una fuente constante de inspiración. Muchas gracias.

Asimismo, me gustaría agradecer el apoyo y el amor incondicional de mi familia. No hay palabras suficientes para expresar lo agradecido que estoy con mi madre, la Sra. Elsa Ticona Fura, con mis hermanas Vilma y Nancy, y con mis hermanos Luis y Julio, por todos los sacrificios que hicieron por mí y por su comprensión.

Índice

DEDICATORIA.....	iv
AGRADECIMIENTOS	v
INDICE DE FIGURAS.....	viii
RESUMEN	ix
ABSTRACT.....	x
CAP ITULO I:	1
INTRODUCCIÓN	1
1.1. Descripción de la realidad problemática.	1
1.2. Definición del problema.....	3
1.3. Objetivos de la investigación.	3
1.4. Justificación e importancia de la investigación.	4
CAPITULO II	5
MARCO TEORICO	5
2.1. Antecedentes del problema.....	5
2.2. Bases teóricas.....	7
2.2.1 Números complejos	7
2.2.2. Funciones de variable compleja	12
2.2.3. Topología en los complejos	14
2.2.4. Límite y continuidad en los complejos	15
2.2.5. Derivadas en los complejos.....	18
2.3 Marco conceptual.....	30
2.3.1. Integración compleja.....	31
2.3.2. Singularidades y Residuos en los complejos	35
2.3.3. Ceros de una función analítica	39
2.3.4. Residuos en los complejos	40
2.3.5. Transformada de la Laplace.....	41
CAPITULO III.....	44

MATERIALES Y MÉTODOS.....	44
3.1. Tipo de investigación.....	44
CAPITULO IV	46
RESULTADOS	46
4.1. Integral de Cauchy	46
4.2. Residuos en los complejos.....	57
4.3. Aplicación del teorema del residuo	64
4.3.1. Transformada inversa de Laplace	64
4.3.2. Cálculo de integrales trigonométricas	70
4.3.3. Cálculo de integrales impropias reales	75
CAPÍTULO V	81
DISCUSIÓN	81
CAPITULO VI.....	83
CONCLUSIONES.....	83
CAPITULO VII	84
RECOMENDACIONES.....	84
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	85

INDICE DE FIGURAS

Figura 1 Representación de números complejos.....	8
Figura 2 Interpretación geométrica del módulo w	9
Figura 3 Imagen de la función en un punto w_0	25
Figura 4 Conjunto la función compleja es analítica.....	27
Figura 5 β_1 es un camino opuesto a β	32
Figura 6 Radio de serie de Laurent.....	34
Figura 7 Singularidades aisladas.....	35
Figura 8 D Conjunto convexo y abierto.....	52
Figura 9 Puntos singulares dentro de la región B.....	60
Figura 10 Camino β que envuelve a todas las singularidades.....	66
Figura 11 Caminos β_{sc} cerrado.....	77
Figura 12 Polo $w = 1 + i$ envolviendo el camino β_{sc}	78

RESUMEN

El objetivo de esta tesis es desarrollar un criterio para calcular el residuo de una función analítica con una singularidad aislada, sin tener que calcular directamente la integral correspondiente. Para ello, se emplearon métodos inductivos y deductivos para demostrar el teorema de Cauchy, utilizando el teorema de Laurent. Este teorema establece que una función analítica en una región anular admite una representación en serie de Laurent, cuyos coeficientes están determinados por la fórmula de la integral de Cauchy.

En base a este resultado, las técnicas desarrolladas se aplicaron al cálculo de la transformada inversa de Laplace, al cálculo de integrales trigonométricas y a la evaluación de integrales impropias en el dominio de los números reales. Finalmente, el enfoque propuesto permite determinar indirectamente el residuo de una singularidad aislada, sin necesidad de evaluar las integrales que dan lugar a los coeficientes de expansión. Este procedimiento constituye, por lo tanto, una herramienta general para el cálculo de residuos en este tipo de singularidades.

Palabras claves: Funciones analíticas, Serie de Laurent, Criterio residual

ABSTRACT

The objective of this thesis is to develop a criterion that allows calculating the residue of an analytic function with an isolated singularity, without having to directly calculate the corresponding integral. To this end, inductive and deductive methods were used to prove Cauchy's theorem, using Laurent's theorem. This theorem establishes that an analytic function in an annular region admits a Laurent series representation, whose coefficients are determined by the Cauchy integral formula.

Based on this result, the developed techniques have been applied to the calculation of the inverse Laplace transform, the calculation of trigonometric integrals, and the evaluation of improper integrals in the real-number domain. Ultimately, the proposed approach allows the residue of an isolated singularity to be determined indirectly, without having to evaluate the integrals that give rise to the expansion coefficients. This procedure thus constitutes a general tool for calculating residues in this type of singularities.

Keywords: Analytic functions, Laurent Series, Residual criterion

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

1.1.Descripción de la realidad problemática.

En el estudio de las integrales de funciones complejas, el teorema de Cauchy desempeña un papel fundamental en la teoría de funciones analíticas, ya que permite demostrar que si una función es analítica, entonces todas sus derivadas existen. La fórmula integral de Cauchy es tan importante que muchos resultados obtenidos en la teoría de funciones complejas pueden considerarse consecuencias directas de su aplicación a las derivadas.

Una alternativa en la teoría de funciones analíticas es definir una función como analítica si está representada localmente por una serie de potencias convergentes, que puede extenderse mediante una serie de Taylor o de Laurent en los dominios apropiados. Cabe destacar que las expansiones de Laurent son más generales que las de Taylor; si la función es analítica en una región dada, ambas expansiones coinciden. Una aplicación directa de las series de Laurent es el estudio de las singularidades de las funciones.

Una aplicación del desarrollo de Laurent en torno a una singularidad residual es el cálculo de integrales sobre trayectorias cerradas. En este contexto, la parte más significativa de la evolución es el coeficiente a_{-1} , denominado residuo. Por lo tanto, la teoría de residuos proporciona un criterio para la evaluación rápida y eficiente de integrales de la forma:

$$\int_{\beta} f(w)dw \dots (*)$$

donde γ es una trayectoria cerrada y f analítica en $U \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, con singularidad aisladas en z_j para $j = \overline{1, n}$.

El aspecto clave de esta teoría es que las series de Laurent permiten expresar los coeficientes de la forma:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Para (f, β) en las condiciones (*), donde γ rodea una singularidad aislada z_0 , al integrando en la expansión de Laurent de f en la vecindad z_0 , obtenemos:

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \int_{\gamma} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (w - w_0)^n \right) dw = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{\gamma} (w - w_0)^n dw = a_n 2\pi i$$

Es decir, se eliminan todos los términos, excepto uno, el “residuo” a_n , pero surge la fórmula importante

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} f(w) dw,$$

Esta fórmula facilita el cálculo de integrales complejas sobre curvas cerradas. Por el contrario, surgen dificultades al calcular la integral de una función analítica con singularidades aisladas, lo que puede resultar complicado o incluso imposible. Gracias a la expansión de la serie de Laurent, podemos calcular los residuos indirectamente sin necesidad de evaluar las integrales directamente. Este criterio constituye un procedimiento general para calcular los residuos en el desarrollo de Laurent.

En este contexto, surgen naturalmente algunas interrogantes claves en esta investigación que nos gustaría formular.

1.2. Definición del problema.

1.2.1 Problema general

¿Bajo qué condiciones es posible determinar un criterio para el residuo de una función analítica sin tener que resolver la integral de Cauchy?

1.2.2. Problemas específicos

a) ¿Pueden aplicarse las condiciones residuales de Cauchy a la determinación de la transformada inversa de Laplace de una función obtenida por la transformada de Laplace con un número finito de polos?

b) ¿Pueden aplicarse las condiciones residuales de Cauchy al cálculo de integrales trigonométricas?

c) ¿Pueden aplicarse las condiciones residuales de Cauchy al cálculo de integrales impropias reales?

1.3. Objetivos de la investigación.

1.3.1. Objetivo general

Determinar un criterio para el residuo de una función analítica sin tener que resolver la integral Cauchy.

1.3.2. Objetivos específicos

a) Aplicar condiciones residuales de Cauchy para determinar la transformada inversa

de Laplace de una función obtenida mediante la transformada de Laplace con un número finitos de polos.

b) Aplicar las condiciones residuales de Cauchy para calcular integrales trigonométricas.

c) Aplicar las condiciones residuales de Cauchy para calcular integrales impropias reales.

1.4. Justificación e importancia de la investigación.

La tesis titulada "Criterio de Residuo para Funciones Analíticas y sus Aplicaciones" se justifica principalmente al ofrecer una alternativa a la teoría clásica de funciones analíticas. En lugar de definir una función como analítica por sus derivadas, se define como tal si está representada localmente por una serie de potencias convergentes, que puede expandirse en series de Taylor o Laurent en los dominios apropiados. Una de las aplicaciones clave de la expansión de Laurent alrededor de una singularidad residual es el cálculo de integrales sobre trayectorias cerradas. En este contexto, el coeficiente correspondiente, denominado residuo, desempeña un papel crucial en la evaluación de la integral.

La importancia de esta tesis radica en sus numerosas aplicaciones en diversos campos científicos, en particular en el estudio del criterio del residuo, una herramienta esencial para el cálculo de integrales reales, la determinación de la transformada de Laplace y la adición de series. Actualmente, la investigación sobre el criterio del residuo y sus aplicaciones sigue siendo un área activa de investigación en el análisis complejo.

CAPITULO II

MARCO TEORICO

2.1. Antecedentes del problema

Nacional

Marcos (2021), en su trabajo, concluye que una serie de potencias puede integrarse siempre que sea absolutamente convergente. Por lo tanto, el estudio de series ofrece numerosas ventajas. Permite, por ejemplo, la solución de integrales y sistemas de ecuaciones diferenciales, así como la aproximación numérica de sus soluciones en casos donde los métodos tradicionales no son aplicables. Por lo tanto, su estudio es muy recomendable.

Internacional

Camargo (2005), en su trabajo, afirma que el teorema del residuo es uno de los resultados más notables y convincentes del análisis complejo. Se deduce de la fórmula integral de Cauchy, que a su vez conduce al teorema de Cauchy, también conocido como teorema de Cauchy-Goursat, el cual permitió obtener el teorema flexibilizando los supuestos. Este teorema, entre otras aplicaciones, es una herramienta importante para el cálculo de integrales reales con variables complejas.

En particular, en el marco de las transformaciones integrales inversas, en particular las transformaciones de Laplace y de Fourier (es decir, para hallar la solución del problema inicial), la integración debe realizarse en el plano complejo. En este caso específico, la transformada de Laplace es la que utiliza contornos de Bromwich.

Molero et al. (2007), en su libro, señala que el concepto de residuo fue introducido por Cauchy, quien lo desarrolló en 1814 al estudiar la diferencia entre dos integrales

$\int_{C_1} g(w)dw$, $\int_{C_2} g(w)dw$. Este resultado se obtiene cuando C_1 y C_2 son trayectorias

con los mismos extremos y $g(w)$ tiene polos en la región entre las trazas de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. El mismo término, residuo, ya se había acuñado en 1826 y también se atribuye a Cauchy. Entre 1826 y 1829, Cauchy aplicó la teoría de residuo a problemas como la evaluación de integrales, el desarrollo de funciones en serie, los productos infinitos, la teoría de ecuaciones, etc.

Ávila (2011), en su libro menciona que, desde el siglo XVIII, el análisis complejo ha demostrado ser una de las teorías más útiles en el contexto global de las matemáticas. Gracias a ello, ha sido posible, por ejemplo, comprender la afirmación “Toda ecuación polinómica tiene al menos una solución”, establecer relaciones importantes entre funciones elementales (como $e^{-iw} = \cos(w) + i\sin(w)$) y comprender mejor las funciones definidas por series de potencias, entre otras. Entre los matemáticos importantes que contribuyeron a sus avances se encuentran Euler, Gauss, Cauchy, Abel, Riemann, Weierstrass, Picard, Poincaré y Hilbert, entre otros.

Rubio (2019), en su trabajo, concluye que la variable compleja posee propiedades especiales que la variable real no tiene. Esto se debe a la presencia de la unidad imaginaria i . En consecuencia, el teorema de Cauchy-Goursat proporciona una base sólida para el análisis complejos, ya que permite el estudio de integrales en regiones con o sin huecos, a fórmulas integrales para determinar la función y sus derivadas de

orden superior en un punto dado w_0 , así como el desarrollo de integrales mediante el cálculo de los residuos.

2.2. Bases teóricas

2.2.1 Números complejos

Se definen el cuerpo de los números reales y la distancia en los números complejos.

También se definen las sucesiones y series. Se citan algunos textos consultados en la bibliografía, en particular (Ávila, 2011), (Ahlfors, 1979) y (Apostol, 1987).

Definición 2.2.1.1. (Campo de los números reales)

El conjunto denotado por $\mathbb{C} = \{(w_1, w_2) / w_1 \in \mathbb{R}, w_2 \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones:

$$(w_1, w_2) + (w_3, w_4) = (w_1 + w_3, w_2 + w_4)$$

$$(w_1, w_2) \cdot (w_3, w_4) = (w_1 w_3 - w_2 w_4, w_1 w_4 + w_2 w_3)$$

Esto se llama campo de los números reales.

Definición 2.2.1.2. (Conjugada de w)

El conjugado de $w = w_1 + iw_2$ se denota $\bar{w}$ y se define por $\bar{w} = w_1 - iw_2$.

Definición 2.2.1.3. (Módulo w)

El módulo de w se denota $|w|$ y se define como $|w| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$.

Observación 2.2.1.1

1) Las operaciones de suma y multiplicación de números complejos se realizan utilizando las propiedades del álgebra, suponiendo que $i^2 = -1$.

2) Geométricamente, los números complejos se representan mediante un punto en el plano complejo, donde el eje “ X_1 ” se identifica con el eje real y el eje “ X_2 ” con el eje imaginario.

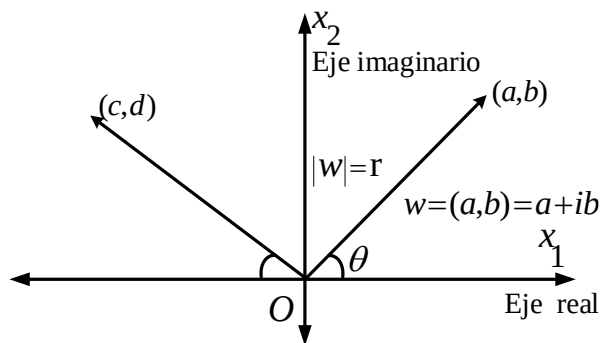


Figura 1. Representación de números complejos

Propiedad 2.2.1.1

Sea $w \in \mathbb{C}$ tal que $w = w_1 + iw_2$ y $\bar{w} = w_1 - iw_2$ entonces

$$w \cdot \bar{w} = |w|^2 = w_1^2 + w_2^2$$

Definición 2.2.1.4. (Módulo de un numero complejo)

La norma, valor absoluto o módulo de un número complejo se denota por $|w|$ y se define

$$|w| = \sqrt{w \cdot \bar{w}}$$

Observación 2.2.1.2

1) Si $w = a + ib$ entonces $|w|^2 = w \cdot \bar{w} = a^2 + b^2$. Entonces $|w| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$.

2) El módulo de w es la distancia desde el origen hasta el punto “P” que representa el complejo w , es decir, la longitud del vector $\overline{OP}$.

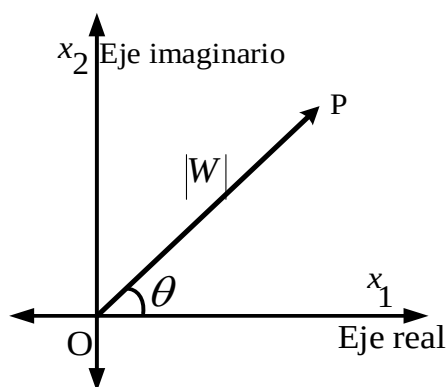


Figura 2. Interpretación geométrica del módulo w

Propiedad 2.2.1.2

Sea $w \in \mathbb{C}$, entonces lo siguiente es cierto:

- 1) $|w| \geq 0$
- 2) $|w| = |\bar{w}|$
- 3) $|w_1 \cdot w_2| = |w_1| |w_2|$
- 4) $\left| \frac{1}{w} \right| = \frac{1}{|w|}; w \neq 0$
- 5) $\left| \frac{w_1}{w_2} \right| = \frac{|w_1|}{|w_2|}; w_2 \neq 0$
- 6) $|w| = 0; w = 0$
- 7) $|\operatorname{Re}(w)| \leq |w|, |\operatorname{Im}(w)| \leq |w|$

Definición 2.2.1.5. (Distancia en los complejos)

Sean $w_1 = x_1 + iy_1$ y $w_2 = x_2 + iy_2$. Entonces $|w_1 - w_2| =$

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

es la distancia entre w_1 y w_2 .

Definición 2.2.1.6. (Función distancia)

La función $d_1: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ representa la distancia si cumple las siguientes condiciones:

- 1) $d_1(w, v) \geq 0 \quad \forall w, v \in \mathbb{C}$
- 2) $d_1(w, v) = 0 \Leftrightarrow w = v$
- 3) $d_1(w, v) = d_1(v, w) \quad \forall w, v \in \mathbb{C}$
- 4) $d_1(w, v) \leq d_1(w, u) + d_1(u, v) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{C}$

Definición 2.2.1.7. (Sucesiones en $\mathbb{C}$)

Una sucesión en $\mathbb{C}$ es una aplicación $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

$$n \mapsto f(n) := w_n = u_n + iv_n$$

Definición 2.2.1.8. (Sucesión convergente en $\mathbb{C}$)

Una sucesión $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ convergente a $w \in \mathbb{C}$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|w_n - w| < \varepsilon$.

Notación 2.2.1.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w \text{ ó } w_n \rightarrow w; n \rightarrow \infty$$

Observación 2.2.1.3

Si $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge en $\mathbb{C}$, se dice que diverge.

Teorema 2.2.1.1. Sea $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ con $w_n = u_n + iv_n$ y $w = u + iv$ entonces el $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$ si y solo si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$.

Observación 2.2.1.4

$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es el campo de extensiones de números complejos.

Definición 2.2.1.9

Sea $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| = u$ si $u_n \rightarrow u$ y $v_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$

Definición 2.2.1.10. (Series en los complejos)

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots = u_n + iv_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a w en

$\mathbb{C} \Leftrightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a w , de donde $S_n = \sum_{k=1}^n w_k$

Observación 2.2.1.5

1) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ es el valor de la suma de la serie y se escribe $S = \sum_{k=1}^{\infty} w_k$

2) Si $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ no converge se dice que diverge.

Propiedad 2.2.1.3

1) Si $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + iv_n)$ converge en $\mathbb{C}$ si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge en $\mathbb{R}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge en $\mathbb{C}$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s_n - s_m| < \varepsilon; m, n \geq n_0.$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge en $\mathbb{C}$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\sum_{k=n}^{n+p} w_k| < \varepsilon, \forall n < n_0$

Proposición 2.2.1.2 Sea $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$, $\lim_{z \rightarrow 0} w_n = w \in \mathbb{C}$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|w_n - w_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0$.

Observación 2.2.1.6

El campo de los números reales $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo, es decir, que es un espacio donde cada sucesión de Cauchy converge. En otras palabras $\mathbb{C}$ es un espacio de Banach.

2.2.2. Funciones de variable compleja

Se definen la relación en los complejos y función compleja. Así mismo, clases de función compleja. Algunos textos consultados se citan en la bibliografía, como (Conway, 1978) y (Bartle, 1992).

Definición 2.2.2.1. (Relación en los complejos)

Sean S, T subconjuntos en $\mathbb{C}$. Entonces cualquier subconjunto de

$$S \times T = \{(u, w) / u \in S, w \in T\} \text{ es una relación.}$$

Definición 2.2.2.2. (Función compleja)

Una relación g de $S \times T$ es una función si $\forall u \in S, \exists! w \in T$ tal que $(u, w) \in S \times T$

Notación 2.2.2.1

- 1) $g: S \rightarrow T$ denota una función de $S \times T$ (o de S en T).
- 2) Un elemento de T es denotado por $g(z)$.
- 3) $w = g(u)$ denota la regla de correspondencia entre los pares ordenados.

Observación 2.2.2.1

- 1) El conjunto S se llama dominio de g y se denota como $D(g)$ o D_g .
- 2) La imagen de $g = \{w \in T / \exists u \in S \text{ tal que } w = g(u)\}$.

Definición 2.2.2.3. (Función sobreyectiva)

Si para todo $w \in T$ existe $u \in S$ tal que $w = g(u)$ se dice que g es una función sobreyectiva.

Definición 2.2.2.4. (Función inyectiva)

Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$. Decimos que g es inyectiva si $w_1 \neq w_2$ entonces $g(w_1) \neq g(w_2)$.

Observación 2.2.2.2

Una regla que asigne a cada $w \in S$ más de un elemento en T se llama una función multiforme o de varios valores.

Propiedad 2.2.2.1

- 1) Si $w = g(u)$, $u = x + iy$ entonces $\text{Re}(w)$ y $\text{Im}(w)$ son funciones de las variables en x e y , es decir, $w = g(u) = w_1(x, y) + iw_2(x, y)$

2) Dos funciones $w_1(x, y) = w_1, w_2(x, y) = w_2$ de las variables x, y define una función de variable compleja, es decir $w = g(u) = w_1 + iw_2$ con $w = x + iy$.

Ejemplo 2.2.2.1. Sea $w_1(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ y $w_2(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ definir la función

$$\begin{aligned} w &= w_1(x, y) + iw_2(x, y) \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{w}{w\bar{w}} = \frac{1}{\bar{w}} \end{aligned}$$

2.2.3. Topología en los complejos

Se definen vecindades, abiertos y cerrados en los complejos. Así mismo, compactos en los complejos. Algunos textos consultados se citan en la bibliografía, como (Ahlfors, 1979), (Bartle, 1992), y (Marsden, 1987).

Definición 2.2.3.1. (Vecindad en los complejos)

Sea $w_0 \in \mathbb{C}$. Una vecindad de w_0 de radio $r > 0$ denotada por $V_r(w_0)$ se define

$$V_r(w_0) = \{w \in \mathbb{C} / d(w, w_0) = |z - z_0| < r\}.$$

Definición 2.2.3.2. (Punto interior en los complejos)

Sea $w_0 \in S \subset \mathbb{C}$, w_0 es un punto interior de S , si existe $r > 0$ tal que $V_r(w_0) \subset S$.

Definición 2.2.3.3. (Conjunto abierto en los complejos)

El conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es abierto si todos sus puntos interiores lo son.

Definición 2.2.3.4. (Punto de acumulación en los complejos)

Sea $w_0 \in \mathbb{C}$, z_0 es un punto de acumulación de $S \subset \mathbb{C}$ si toda vecindad de w_0 contiene al menos un punto $w \in S$ tal que $w_0 \neq w$.

Definición 2.2.3.5. (Conjunto compacto en los complejos)

$S \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto si todo subconjunto de S contiene un punto de acumulación de S .

Definición 2.2.3.6. (Conjunto cerrado en los complejos)

$S \subset \mathbb{C}$ es un conjunto cerrado si contiene todos sus puntos de acumulación.

2.2.4. Límite y continuidad en los complejos

Se definen sobre el Límite y continuidad en los complejos. Así mismo, continuidad uniforme y función acotada. Algunos textos consultados se citan en la bibliografía, como (Conway, 1978), (Gong, 2007) y (Marsden, 1987).

Definición 2.2.4.1. (Límite en los complejos).

Sea $S \subset \mathbb{C}$, $g: S \rightarrow \mathbb{C}$ una función y w_0 es un punto de acumulación de S . Diremos que g tiene límite L cuando z tiende a z_0 , si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $w \in S$, $0 < |w - w_0| < \delta$ entonces $|g(w) - L| < \varepsilon$.

Notación 2.2.4.1

$$\lim_{w \rightarrow w_0} f(w) = L$$

Definición 2.2.4.2. (Continuidad en los complejos)

Sean $S \subset \mathbb{C}$ abierto, $g: S \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. Diremos que g es una función continua

en $w_0 \in S$ si $\lim_{w \rightarrow w_0} g(w) = g(w_0)$.

Observación 2.2.4.1.

- 1) g es continua en w_0 si $\lim_{w \rightarrow w_0} g(w) = g(w_0)$ ó $\lim_{h \rightarrow 0} g(w_0 + h) = g(w_0)$.
- 2) $\lim_{w \rightarrow w_0} g(z) = L \in \mathbb{C}$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} g(w_n) = L$, $\forall (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $S \setminus \{w_0\}$ tal que $w_n \rightarrow w_0$.

Proposición 2.2.4.1. Sean $g: S \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua en $w_0 \in S$ entonces $|g|$ es continua en w_0 .

Prueba

Por hipótesis $g: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en $z_0 \in S$ entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$|g(w) - g(w_0)| < \varepsilon$, si $|w - w_0| < \delta$. Pero $||g(w)| - |g(w_0)|| \leq |g(w) - g(w_0)|$. Entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|w - w_0| < \delta \Rightarrow ||g(w)| - |g(w_0)|| < \varepsilon$.

Por lo tanto $|g|$ continua en $w_0, \forall w_0 \in \mathbb{C}$.

Definición 2.2.4.3. (Continuidad uniforme)

La función $g: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es uniformemente continua en S si $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall w \in S$

$\exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0$ tal que $|w - w_0| < \delta$ entonces $|g(w) - g(w_0)| < \varepsilon$

Observación 2.2.4.2

- 1) Si g es uniformemente continua entonces g es continua.
- 2) Si g es continua entonces g no es necesariamente uniformemente continua.

Definición 2.2.4.4. (Función acotada)

$g: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es acotada si existe $A > 0$ tal que $|f(w)| \leq A, \forall w \in S$.

Proposición 2.2.4.2. Sean $g: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, S cerrada y acotada.

Entonces g es acotada.

Prueba

Supongamos que f no es acotada entonces existe $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S tal que $|g(w_n)| \geq 2^n$.

Por el teorema de Bolzano-Weierstress, la sucesión $\{w_n, n \in \mathbb{N}\}$ tiene punto de acumulación en S entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $w_n \rightarrow \alpha$. Luego $g(w_n) \rightarrow g(\alpha) \in \mathbb{C}$.

Por lo tanto, g es acotada.

Propiedad 2.2.4.1

Sean $g_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $g_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas. Entonces

1) $g_1 + g_2$ es continua

2) $g_1 - g_2$ es continua

3) $g_1 \cdot g_2$ es continua

4) $\frac{1}{g}$ es continua $\forall w \in S$ tal que $g(w) \neq 0$

Ejemplo 2.2.4.1. Si g_1 y g_2 son continuas entonces $g_1 \cdot g_2$ es continua.

Prueba

Afirmación: $g_1 \cdot g_2$ es continua, es decir $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|(g_1 w + h)g_2(w + h) - g_1(w)g_2(w)| < \varepsilon, \text{ siempre que } |h| < \delta.$$

En efecto, puesto que g_1 y g_2 son continuas en $z \in S$ entonces

$$\begin{aligned} & |g_1(w+h)g_2(w+h) - g_1(w)g_2(w)| = \\ & = |g_1(w+h)g_2(w+h) - g_1(w+h)g_2(w) + g_1(w+h)g_2(w) - g_1(w)g_2(w)| \leq \\ & \leq |g_1(w+h)||g_2(w+h) - g_2(w)| + |g_2(w)||g_1(w+h) - g_1(w)| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \\ & \text{siempre que } |h| < \delta. \end{aligned}$$

2.2.5. Derivadas en los complejos

Se define la derivada en los complejos y propiedades. Así mismo, proposiciones.

Algunos textos consultados se citan en la bibliografía, como (Camargo, 2005), (Gamelin, 2001), (Gelbaum, 1992), y (Marsden, 1987).

Definición 2.2.5.1. (Derivada)

Sean $S \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $g: S \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Diremos que g es diferenciable en w si existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(w+h) - g(w)}{h} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta w} = A.$$

$A \in \mathbb{C}$ se denomina la derivada de g en w .

Notación 2.2.5.1.

La derivada de g se denota por $g'(w)$

Observación 2.2.5.1.

$$1) g'(w) = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta w} = A \dots (1)$$

2) Si $\varepsilon = \frac{\Delta g}{\Delta w} - A$ entonces $\lim_{\Delta w \rightarrow 0} \varepsilon = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta g}{\Delta w} - A \right) = 0$

Así mismo, $\Delta g = g(w + \Delta w) - g(w) = A\Delta w + \Delta w\varepsilon = A\Delta w + \Delta z(\Delta w)$

Por lo tanto $\lim_{\Delta w \rightarrow 0} (\Delta w) = 0 \dots (2)$

3) Las expresiones (1) y (2) son equivalentes.

4) La función g es diferenciable si $\exists A \in \mathbb{C}$ tal que $\Delta g = \Delta w + \Delta w(\Delta w) \Leftrightarrow \exists A = g'(w)$ talque $g(w + h) - g(w) = g'(w)h + h(h)$ de donde $\lim_{h \rightarrow 0} (h) = 0$

5) La diferencial de $g: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se define como

$$dg = g'(w)\Delta w$$

Propiedades 2.2.5.1

1) Si g es la función constante entonces $g'(w) = 0$.

2) Si α es un escalar y g es diferenciable en w_0 entonces αg es diferenciable en w_0 .

Propiedades 2.2.5.2

Si $f, g: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones diferenciables en z_0 . Entonces

1) $g_1 + g_2$ es diferenciable en w_0 y $(g_1 + g_2)'(w_0) = g_1'(w_0) + g_2'(w_0)$.

2) $g_1 - g_2$ es diferenciable en w_0 y $(g_1 - g_2)'(w_0) = g_1'(w_0) - g_2'(w_0)$.

3) $g_1 \cdot g_2$ es diferenciable en w_0 , y $(g_1 \cdot g_2)'(w_0) = g_1(w_0)g_2'(w_0) + g_2(w_0)g_1'(w_0)$.

4) $\left(\frac{1}{g}\right)$ es diferenciable en w_0 , para $g(w_0) \neq 0$, y $\left(\frac{1}{g}\right)'(w_0) = -\frac{g'(w_0)}{[g(w_0)]^2}$.

5) (g^n) es diferenciable en w_0 y $(g^n)'(w_0) = n(g^{n-1})g'(w_0)$.

Ejemplo 2.2.5.1. Hallar $g'(w)$ si $f(w) = w^n$

Solución

$$\begin{aligned} g'(w) &= \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{g(w + \Delta w) - g(w)}{\Delta w} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{(w + \Delta w)^n - w^n}{\Delta w} \\ &= \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0} w^n + \binom{n}{1} w^{n-1} \Delta w + \binom{n}{2} w^{n-2} \Delta w^2 + \dots + \Delta w^n - w^n}{\Delta w} \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta w \rightarrow 0} \left(\binom{n}{1} w^{n-1} + \binom{n}{2} w^{n-2} \Delta w + \dots + \Delta w^{n-1} \right) = n w^{n-1}$$

Ejemplo 2.2.5.2. Sea $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ talque $g(w) = |w|^2$. Mostrar que g es continua y g no es derivable en $w \neq 0$.

Solución

Como $|w|$ es continua y el producto de funciones continuas. Entonces

$f(w) = |w||w| = |w|^2$ es continua.

Afirmación: $\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0}$, no existe en $w_0 \neq 0$ en efecto,

$$\begin{aligned} \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} &= \frac{|w|^2 - |w_0|^2}{w - w_0} = \frac{w\bar{w} - w_0\bar{w}_0}{w - w_0} \\ &= \frac{w\bar{w} - \bar{w}w_0 + \bar{w}w_0 - w_0\bar{w}_0}{w - w_0} \\ &= \frac{\bar{w}(w - w_0) + w_0(\bar{w} - \bar{w}_0)}{w - w_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{w} + w_0 \left(\frac{\bar{w} - w_0}{w - w_0} \right) \\
&= \bar{w} + w_0 \frac{|\bar{w} - w_0|}{w - w_0} [\cos [\arg(\overline{w - w_0})]] \\
&= \bar{w} + w_0 \frac{|\bar{w} - w_0|}{w - w_0} [\cos[\arg(\overline{w - w_0}) - \arg(w - w_0)] + \sin[\arg(\overline{w - w_0}) - \arg(w - w_0)]], w \\
&\quad \neq w_0 \\
&= \bar{w} + w_0 [\cos(2\beta) - \sin(2\beta)], \text{ en que } \beta = \arg(w - w_0)
\end{aligned}$$

Pero, $\lim_{w \rightarrow w_0} (\cos(2\beta) - \sin(2\beta))$, no existe $w_0 \neq 0$

Por lo tanto $\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0}$, no existe $w_0 \neq 0$

Proposición 2.2.5.1. Sea $g: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(w) = u + iv$ con $u = (x, y)$, $v = (x, y)$. Si g es diferenciable en $w = x + iy$ entonces son diferenciables u_x, u_y, v_x y v_y en w y se cumple $u_x = v_y, u_y = -v_x$.

Prueba

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)$$

$$A = \alpha + i\beta$$

$$\Delta w(\Delta w) = \rho(\rho_1 + i\rho_2), \text{ donde } \rho_1 \rightarrow 0, \rho_2 \rightarrow 0, \text{ siempre que } \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$$

Si f es diferenciable y $g'(w) = A$ con $\Delta w = \Delta x + i\Delta y, \Delta g = A\Delta w + \Delta w(\Delta w)$ con

$$(\Delta w) \rightarrow 0 \text{ si } \Delta w \rightarrow 0. \text{ Luego } \Delta u + i\Delta v = (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) + \rho(\rho_1 + i\rho_2)$$

Igualdad las partes reales e imaginarias se tiene,

$$\Delta u = \alpha \Delta x - \beta \Delta y + \rho(\rho_1) \text{ con } \rho_1 \rightarrow 0, \text{ si } \rho \rightarrow 0$$

$$\Delta v = \alpha \Delta y - \beta \Delta x + \rho(\rho_2) \text{ con } \rho_2 \rightarrow 0, \text{ si } \rho \rightarrow 0$$

Entonces u y v son diferenciables, además

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\alpha - \frac{\beta \Delta y}{\Delta x} + \frac{\rho(\rho_1)}{\Delta x} \right)$$

En particular si $\Delta y = 0$ entonces $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \alpha = u_x$

Así mismo,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha \Delta x}{\Delta y} - \beta + \frac{\rho(\rho_1)}{\Delta x} \right)$$

En particular si $\Delta x = 0$ entonces $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = -\beta = u_y$.

Análogamente tenemos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \beta; \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \alpha$$

Por lo tanto

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha = \frac{\partial v}{\partial y} = v_y$$

$$v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\beta = -\frac{\partial u}{\partial x} = -v_x$$

Observación 2.2.5.2

1) Las condiciones $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, que relacionan las partes reales e imaginarias de $g(w) = u + iv$ son denominadas las funciones de Cauchy-Riemann

$$2) g'(w) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

Proposición 2.2.5.2. Si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones diferenciales en (x, y) y

$u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ continuas en (x, y) tal que $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Entonces,

$g(w) = u + iv$ es diferenciable respecto a $w = x + iy$ y $g'(w) = u_x + iv_x = u_y - v_x$.

Prueba

Si u y v son diferenciables en (x, y) , entonces

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \rho(\rho_1),$$

$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + \rho(\rho_2)$$

donde $\rho_1 \rightarrow 0$ y $\rho_2 \rightarrow 0$, si $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$

Entonces

$$\Delta u + i\Delta v = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \rho(\rho_1) + iv_x \Delta x + iv_y \Delta y + i\rho(\rho_2)$$

$$= (u_x + iv_x)\Delta x + (u_y + iv_y)\Delta y + \rho(\rho)$$

de donde, $\rho = \rho_1 + i\rho_2$

Puesto que $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, se tiene

$$\Delta u + i\Delta v = (u_x + iv_x)\Delta x + (-v_x + iu_x)v_y + \rho(\rho) = (u_x + iv_x)(\Delta x + i\Delta y) + \rho(\rho)$$

Entonces $\Delta g = A\Delta z + \rho(\rho)$ donde $\rho \rightarrow 0$, si $\rho \rightarrow 0$

Por lo tanto, g es diferenciable en $w = x + iy$ y $g'(z) = A = u_x + iv_x$

Observación 2.2.5.3

1) La existencia de las derivadas parciales u_x y u_y , v_x y v_y no implica que u y v son diferenciables.

2) Si u_x y v_y existen y son continuas en una vecindad de (x, y) entonces u y v son diferenciables.

3) Sea la función $g: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(w) = u(x, y) + iv(x, y)$ de donde $w = x + iy$.

g es diferenciable si y solo si u y v son diferenciables y se cumple la ecuación de Cauchy-Riemann, además

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Además, $g'(w) = (u_x) + i(v_y)$

2.2.6. Funciones analíticas

Se definen funciones analíticas, entera y armónica. Así mismo, la ecuación de Cauchy-Riemann. Algunos textos consultados se citan en la bibliografía, como (Ávila, 2011), (Marsden, 1987), (Rudin, 1979).

Definición 2.2.6.1. (Función analítica)

Sea S un dominio, $S \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. La función $g: S \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica si g es diferenciable en w , $\forall w \in \mathbb{C}$.

Observación 2.2.6.1

1) g es analítica en $w_0 \in S$ si g es diferenciable en una vecindad de w_0 .

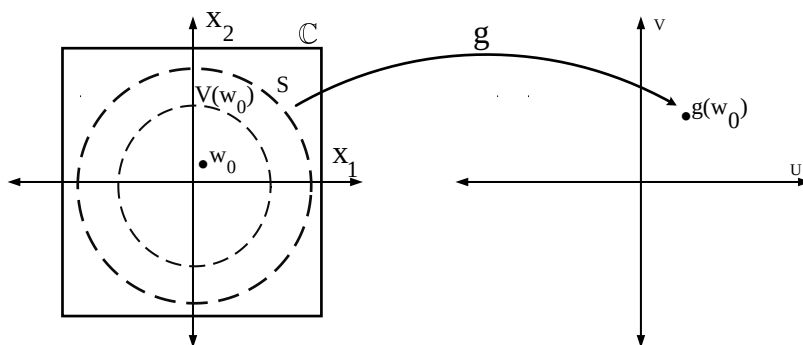


Figura 3. Imagen de la función en un punto w_0

Definición 2.2.6.2. (Funciones analíticas por medio de la ecuación de Cauchy-Riemann)

La función compleja $g: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica en S si u y v son diferenciables tal que

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \text{en } S.$$

Propiedades 2.2.6.1

Si g y h son analíticas, entonces se cumple lo siguiente:

- 1) $g + h$ son funciones analíticas
- 2) $g - h$ son funciones analíticas

3) $g \cdot h$ son funciones analíticas

4) $\frac{g}{h}$ son funciones analíticas en los puntos $w \in S$ para lo cuales $h(w) \neq 0$

Definición 2.2.6.3. (Función entera)

Una función $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, es entera si g es analítica en $\mathbb{C}$, es decir, g es analítica en w para todo $w \in \mathbb{C}$.

Observación 2.2.6.2.

La función holomorfa es una función de variable compleja que es analítica y que está definida en un conjunto abierto y conexo.

Ejemplo 2.2.6.1. Sea $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$.

Determine los conjuntos, si existen, donde la función g es analítica.

Solución

Sean las funciones

$$u(u, y) = |x^2 - y^2| = \begin{cases} x^2 - y^2, & \text{si } x > 0, y > 0, x^2 > y^2 \\ x^2 - y^2, & \text{si } x < 0, y > 0, x^2 > y^2 \\ x^2 - y^2, & \text{si } x < 0, y < 0, x^2 > y^2 \\ x^2 - y^2, & \text{si } x > 0, y < 0, x^2 > y^2 \end{cases}$$

$$v(x, y) = 2|xy| = 2 \begin{cases} xy, & x > 0, y > 0 \\ xy, & x < 0, y < 0 \\ -xy, & x < 0, y > 0 \\ -xy, & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

si $u(x, y) = x^2 - y^2, x^2 - y^2 > 0, x^2 > y^2, x > 0, y > 0$

$v(x, y) = 2xy, x > 0, y > 0$

Entonces se tiene

$$u_x = 2x, \quad v_x = 2y \text{ son continuas}$$

$$u_y = -2y, \quad v_y = 2x \text{ son continuas}$$

Por lo tanto $g(z) = |x^2 - y^2| \rightarrow 2i|xy|$ es diferenciable en

$$S_1 = \{z = x + iy: x^2 > y^2, x > 0, y > 0\},$$

es decir, g es analítica en S_1 . Si $u(x, y) = x^2 - y^2, x < 0, y > 0$ y $x^2 > y^2$;

$$y \quad v(x, y) = -2xy, \quad x < 0, y > 0.$$

Entonces se tiene

$$u_x = 2x, \quad v_x = -2y \text{ son continuas} \quad u_y = -2y, \quad v_y = -2x \text{ son continuas}$$

Por lo tanto $g(z) = |x^2 - y^2| \rightarrow 2i|xy|$

es diferenciable en

$$S_2 = \{z = x + iy: x^2 > y^2, x < 0, y > 0\}$$

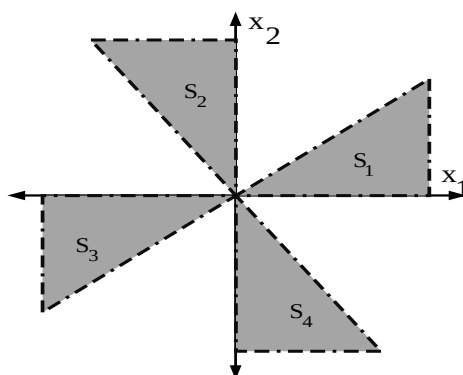


Figura 4. Conjunto la función compleja es analítica

Definición 2.2.6.4. (Función armónica)

Sea $u: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. La función u es armónica si u tiene derivadas parciales de 1^{ro} y 2^{do} orden continuas y además

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Definición 2.2.6.5. (Conjugada armónica)

Si $u = u(x, y); v = v(x, y)$ son armónicas, así como las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen, entonces las funciones u y v se denominan un par de conjugadas armónicas.

Definición 2.2.6.6. (Relación de función analítica y armónicas)

Si $g(z) = u + iv$ es analítica sobre un conjunto abierto y conexo entonces u y v son armónicas.

Ejemplo 2.2.6.3. Determinar si la función $g(w) = w^2 \bar{w}$ es una función entera

Solución

Si $w = x + iy$ entonces

$$\begin{aligned} f(w) &= (x + iy)^2(x - iy) = (x^2 + y^2 + 2ixy)(x - iy) \\ &= x^3 - xy^2 + 2ix^2y - ix^2y + iy^3 + 2xy^2 = x^3 + xy^2 + i(x^2y + y^3) \end{aligned}$$

Sea $u = x^3 + xy^2; v = x^2y + y^3$. Entonces.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2xy$$

Por la ecuación de Cauchy-Riemann tenemos

$$3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2; \Rightarrow x = y \text{ ó } x = -y$$

$$2xy = -2xy \Rightarrow x = 0 \text{ ó } y = 0$$

Entonces g solo es diferenciable en el punto $w = 0$ y por lo tanto no es analítica en ningún punto y tampoco es entera.

2.2.6.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares

Sea $w = re^{i\varphi}$ y la función compleja $g(w) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$. Por hipótesis de las ecuaciones de Cauchy- Riemann tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

donde

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Aplicando derivadas parciales tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{-\partial u}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \varphi = -r \left(\frac{\partial u}{\partial x} \sin \varphi - \frac{\partial u}{\partial y} \cos \varphi \right) \\ &= -r \left(\frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi - \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi \right) \dots \dots \dots (1)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi = \frac{\partial u}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi \dots \dots \dots (2)$$

De (1) y (2) tenemos

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

Así mismo, utilizando las Ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial x} \sin \varphi \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \varphi = r \left(\frac{\partial v}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial x} \sin \varphi \right) \quad (4)$$

De (3) y (4) tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

2.3 Marco conceptual

Para el análisis de nuestras variables de estudio, introducimos algunas definiciones de la integral compleja singularidades y residuos. También se definen la transformada de Laplace. Algunos textos consultados se citan en la bibliografía, como (De Amo, 2018), (Doetsch, 1974), (Freitag, 2005), (Gamelin, 2001), (Marsden, 1987), (Mitrinovic, 1966) y (Silverman, 1984).

2.3.1. Integración compleja

Definición 2.3.1.1. (Curva en $\mathbb{C}$)

Una curva en $\mathbb{C}$ es una función $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \rightarrow \gamma(t) = w$

Definición 2.3.1.2. (Curva cerrada en $\mathbb{C}$)

Una curva en $\mathbb{C}$ es cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$

Definición 2.3.1.3. (Camino en $\mathbb{C}$)

Un camino es una curva en $\mathbb{C}$ continuamente diferenciable por tramos.

Definición 2.3.1.4. (Integral en $\mathbb{C}$)

Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino, γ^* la imagen de γ , $g : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ continua sobre γ^* . La integral de g sobre γ se define por

$$\int_{\gamma} g(w)dw = \int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Observación 2.3.1.1.

Si $g(w) = u(x, y) + iv(x, y)$ entonces

$$\int_{\gamma} g(w)dw = \int_a^b (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy)$$

Definición 2.3.1.5. (Camino opuesto en $\mathbb{C}$)

Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino. El camino opuesto a γ se define por

$$\gamma_1(t) = \gamma(1 - t), 0 \leq t \leq 1$$

Ejemplo 2.3.1.1. Sea $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino tal que $\gamma(t) = e^{2\pi ti}$. Entonces γ es un camino cerrado porque en punto inicial y el punto final coinciden y $|\gamma(t)| = 1$. El camino opuesto a γ es:

$$\gamma_1(t) = \gamma(1-t) = e^{2\pi i(1-t)} = e^{2\pi i} e^{-2\pi it} = e^{-2\pi it}$$

Por lo tanto $\beta_1(t) = e^{-2\pi it}$ es un camino opuesto a β .

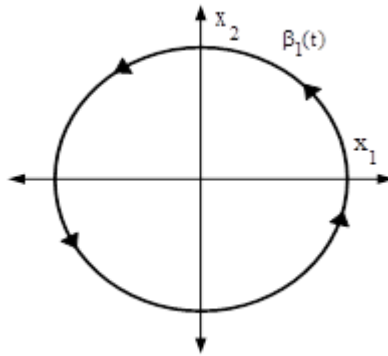


Figura 5. β_1 es un camino opuesto a β

Observación 2.3.1.2

En general, si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es un camino complejo, definimos el camino opuesto a γ como $\gamma_1(t) = \gamma(b-t)$, $a \leq t \leq b$, donde $\gamma(a)$ punto inicial de γ y $\gamma(b)$ es punto inicial de γ_1 , y $\gamma(b)$ punto final de γ y $\gamma(a)$ es el punto final de γ_1 .

Definición 2.3.1.6 (Antiderivada)

Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función, la función $G: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una primitiva o antiderivada de g si $G'(x) = g(x)$ en U .

Ejemplo 2.3.1.2.(Cálculo de la derivada)

1) Si $g(w) = e^w$ entonces $G(w) = e^w + c, \forall c \in \mathbb{R}$ es una antiderivada de g , porque

$$G'(w) = e^w = g(w).$$

2) Si $g(z) = \sinh(w)$ entonces $G(w) = \cosh(w) + c, \forall c \in \mathbb{R}$ es una antiderivada

porque $G'(x) = \sinh(w) = g(w)$.

Definición 2.3.1.7. (Índice con respecto a γ)

Sea γ un camino cerrado, $w \notin \gamma^*$. El índice de w con respecto a γ , denotado por $\text{Ind}_\gamma(w)$, se define

$$\text{Ind}_\gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\xi}{\xi - w}$$

Observación 2.3.1.3

1) $\text{Ind}_\gamma(w)$ es una función de ξ .

2) $\text{Ind}_\gamma(w)$ es constante sobre cada componente acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

3) $\text{Ind}_\gamma(w)$ es cero sobre la componente no acotada.

4) Geométricamente el $\text{Ind}_\gamma(w)$ representa el número de vueltas que da alrededor de w .

Ejemplo 2.3.1.3. Sea γ un camino tal que $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 4\pi$. Hallar el $\text{Ind}_\gamma(0)$.

Solución

$$\text{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{4\pi} \frac{d\xi}{\xi - 0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{4\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2$$

Observación 2.3.1.4.

1) Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, γ un camino cerrado en U tal que $\text{Ind}_\gamma(w) = 0 \quad \forall w \notin U$.

Sea $w \in U$ y $w \notin \gamma^*$. Entonces

$$\text{Ind}_\gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dv}{v-w}$$

$$\Rightarrow g(w) \text{Ind}_\gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(v)}{v-w} dv$$

$$g^n(w) \text{Ind}_\gamma(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(v)}{(v-w)^{n+1}} dv$$

2) Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $D = \{w \in \mathbb{C}: r_2 \leq |w - w_0| \leq r_1, \quad 0 < r_1 < r_2\}$ talque $D \subset$

$\mathbb{C}$. Sea $\Gamma_i = \{w: |w - w_0| = r_i, i = 1, 2\}$, $r_1 \leq |w - w_0| \leq r_2$, y $g: U \rightarrow$

$\mathbb{C}$ analítica en D . Entonces

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{g(v)}{(v-w)} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{g(v)}{(v-w)} dv$$

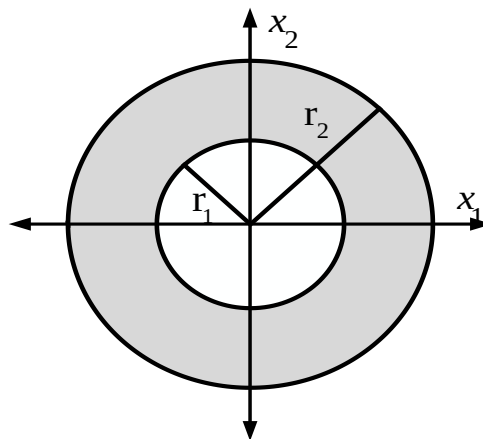


Figura 6. Radio de serie de Laurent

2.3.2. Singularidades y Residuos en los complejos

Definición 2.3.2.1. (Singularidades)

Diremos que un punto w_0 es una singularidad de una función g si existe una vecindad de w_0 tal que g es analítica e inyectiva son excepciones del punto w_0 .

Definición 2.3.2.2. (Singularidad aislada)

Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $w_0 \in U$. Si $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica sobre $U \setminus \{w_0\}$. Entonces w_0 es una singularidad aislada de g .

Ejemplo 2.3.2.2. (Singularidad aislada)

1) Si $g(w) = \frac{z^4}{1+z^4}$ entonces $w_h = \cos\left(\frac{\pi+2h\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2h\pi}{n}\right)$ para $h = 0, 1, 2, 3$, son singularidades aisladas de g .

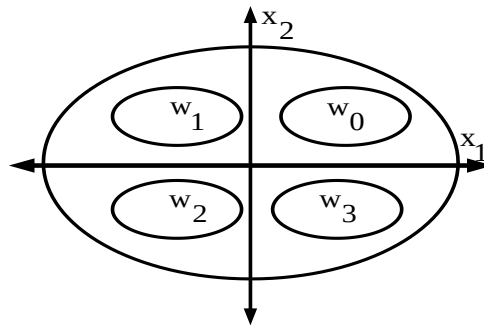


Figura 7. Singularidades aisladas

2) Sea $g(w) = \frac{e^w}{w(1-e^{-w})}$. Entonces g no es analítica, analizando el conjunto

$$\{w \in \mathbb{C} : w = 0 \vee e^{-w} = 1\} = \{w \in \mathbb{C} : w = 0 \vee w = 2h\pi i, \forall h \in \mathbb{Z}\}$$

Entonces las singularidades aisladas de g son $w = 0$ y $w = 2h\pi i, \forall h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Ejemplo 2.3.2.2. La función $g(w) = \frac{e^w}{\text{sen}(w)}$ tiene como singularidad aislada los puntos $w = \pi h$, $h \in \mathbb{Z}$, una vez que todos los múltiplos de π son ceros del denominador.

Ejemplo 2.3.2.3. Analizando la función $g(w) = \frac{\text{sen}(w)}{w}$ en cuanto a su desarrollo es una serie de Laurent. Sabemos que

$$g(w) = \text{sen}(w) = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \frac{w^7}{7!} + \dots$$

Multiplicando g por $\frac{1}{w}$, obtenemos

$$g(w) = \frac{1}{w} \left[w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \frac{w^7}{7!} + \dots \right] = 1 - \frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} - \frac{w^6}{7!} + \dots$$

Observaciones 2.3.2.1.

- 1) La función $g(w) = \frac{\text{sen}(w)}{w}$ no está definida en $w = 0$ y por tanto no es analítica en ese punto.
- 2) La expansión de g es serie de Laurent nos permite obtener $g(0) = 1$.

Definición 2.3.2.3. (Singularidad removible)

Un punto z_0 es una singularidad removible de g si, en

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(w - w_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - w_0)^n, a_{-n} = 0, \forall n \geq 1$$

Ejemplo 2.3.2.4. Considerando la función $g(w) = \frac{\text{sen}(w)}{w^2}$, determinemos su desarrollo en serie de Laurent. Tenemos

$$\begin{aligned}
g(w) &= \frac{1}{w^2} \left[w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \frac{w^7}{7!} + \dots \right] = \frac{1}{w} - \frac{w}{3!} + \frac{w^3}{5!} - \frac{w^5}{7!} + \dots \\
&= \frac{1}{w} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} w^{2n+1}
\end{aligned}$$

Observación 2.3.2.2.

1) La parte principal de la serie no está definida para $w = 0$ y la parte analítica es válida en $|w| < \infty$.

2) La serie de Laurent es válida el dominio anular $0 < |w| < \infty$. La parte principal contiene un término nulo. En este caso llamamos $w = 0$ polo simple de g .

Generalizando, se tiene

$$g(w) = \frac{a_{-1}}{w - w_0} + a_0 + a_1(w - w_0) + a_2(w - w_0)^2 + \dots$$

Entonces $w = w_0$ es un polo simple de g , porque $a_{-1} \neq 0$ y el último coeficiente no nulo de la parte principal de la serie de Laurent de g .

Definición 2.3.2.4. (Polo de orden n)

Llamamos $w = w_0$ un polo de orden n de g , cuando el último coeficiente no nulo de la parte principal de la serie de Laurent de g para a_{-n} para $\forall n \geq 1$ es decir, cuando

$$\frac{a_{-n}}{(w - w_0)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(w - w_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(w - w_0)^1} + a_0 + a_1(w - w_0) + \dots$$

Ejemplo 2.3.2.5. El punto $w = 1$ es un polo de orden 4 de la función

$$f(w) = \frac{2}{(w - 1)^4(w - 3)}$$

Desarrollando g en serie de Laurent en términos de $w - 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{(w-1)^4(w-3)} &= \frac{2}{(w-1)^4} \frac{2}{-2 + (w-1)} = \frac{2}{(w-1)^4} \frac{2}{-2 \left(1 - \left(\frac{w-1}{2}\right)\right)} \\
 &= \frac{2}{(w-1)^4} \left(\frac{1}{-2}\right) \left[1 + \frac{w-1}{2} + \frac{(w-1)^2}{2} + \frac{(w-1)^3}{2} + \dots\right] \\
 &= \frac{2}{(w-1)^4} \left[-\frac{1}{2} - \frac{w-1}{2^2} - \frac{(w-1)^2}{2^3} - \frac{(w-1)^3}{2^4} - \dots\right] \\
 &= -\frac{1}{(w-1)^4} - \frac{1}{2(w-1)^3} - \frac{1}{4(w-1)^2} - \frac{1}{8(w-1)^1} - \frac{1}{16} - \dots
 \end{aligned}$$

Observación 2.3.2.3.

$a_{-4} = -1 \neq 0$. Luego $w = 1$ es un polo de orden 4.

Definición 2.3.2.5. (Polo de orden m)

Ejemplo 2.3.2.6. Desarrollaremos la función $g(w) = \exp\left(\frac{2}{w}\right)$ en serie de Laurent es

un dominio angular $0 < |w| < \infty$.

Sabemos que $\exp(w) = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \frac{w^4}{4!} + \dots$ para obtener la serie deseada,

basta sustituir w por $\frac{2}{w}$, $w \neq 0$ en el desarrollo anterior. Del mismo modo

$$\exp\left(\frac{2}{w}\right) = 1 + \frac{2}{w} + \frac{2^2}{2!w^2} + \frac{2^3}{3!w^3} + \frac{2^4}{4!w^4} + \dots \text{ para } 0 < |w| < \infty.$$

2.3.3. Ceros de una función analítica

Definición 2.3.3.1. (Ceros de orden n)

Una función analítica f tiene un cero de orden n en w_0 si

$$g(w_0) = 0, g'(w_0) = 0, \dots, g^{(n-1)}(w_0) = 0 \quad \text{y} \quad g^{(n)}(w_0) \neq 0$$

Observación 2.3.3.1.

Una función f analítica en punto w_0 tiene representación en serie de Taylor de centro w_0 , es decir,

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - w_0)^n, \quad |w - w_0| < r,$$

y los coeficientes

$$a_n = \frac{g^{(n)}(w_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Proposición 2.3.3.1.

Sea g una función analítica y no constante en $A = \{w \in \mathbb{C}: |w - w_0| < r\}$. Una condición necesaria y suficiente para que w_0 sea un cero de orden k dada la función g en la que exista una función analítica h sobre w_0 , con $h(w_0) \neq 0$ tal que

$$g(w) = (w - w_0)^k h(w).$$

Ejemplo 2.3.3.1.

La función $g(w) = w^2 \sin(w)$ tiene un cero de orden 3 en $w = 0$. En efecto,

$$w^2 \sin(w) = w^2 \left(w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \frac{w^7}{7!} + \dots \right)$$

y factorizando w es esta serie, tenemos que $g(w) = w^2 \sin(w) = w^3 h(w)$ donde

$$h(w) = 1 - \frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} - \frac{w^6}{7!} + \dots$$

h es analítica en 0 y $h(0) = 1$. Por la proposición 2.3.3.1, $w = 0$ es un cero de orden 3 de g .

Ejemplo 2.3.3.2.

La función $g(w) = e^{2w} - e^w$ posee ceros simples para $w = 2n\pi i, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

luego se tiene que

$$\begin{aligned} g(2n\pi i) &= e^{2(2n\pi i)} - e^{2n\pi i} = (e^{4\pi i})^n - (e^{2\pi i})^n \\ &= [\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)]^n - [\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)]^n \\ &= (1 + 0i)^n - (1 + 0i)^n = 1^n - 1^n = 0 \end{aligned}$$

2.3.4. Residuos en los complejos

Si w_0 es una singularidad aislada de una función g , su desarrollo en serie de Laurent está dada por

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(w - w_0)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w - w_0)^n$$

y los coeficientes a_n son dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g(\delta)}{(\delta - w_0)^{n+1}} d\delta,$$

donde γ es un camino cerrado en el anillo que rodea a w_0 en sentido positivo

Definición 2.3.4.1. (Residuo)

Sea g una función compleja que posee una singularidad aislada en w_0 . El coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent de g se denomina residuo de g en el punto w_0 .

Notación 2.3.4.1.

El residuo de g en w_0 se denota por $\text{Res}(g, w_0)$

Ejemplo 2.3.4.1.

El desarrollo en la serie de Laurent de $g(w) = \frac{1}{(w-1)^2(w-3)}$ centrada en $w = 1$, válida en el anillo $0 < |w - 1| < 2$, está dado por

$$g(w) = \frac{-1/2}{(w-1)^2} + \frac{-1/4}{w-1} - \frac{1}{8} - \frac{w-1}{16}$$

Es que $a_{-1} = 1/4$ por lo tanto, $\text{Res}(g, 1) = -\frac{1}{4}$

2.3.5. Transformada de la Laplace**Definición 2.3.5.1. (Transformada de Laplace)**

La transformada de Laplace de una función real definida en un intervalo $[0, \infty[$ está dada por

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt = F(s)$$

Cuando la integral impropia converge

Observación 2.3.5.1.

La función $k(s, t) = e^{-st}$ se denomina núcleo de la transformada.

Definición 2.3.5.2. (Transformada inversa de la Laplace)

La función $g(t)$ se denomina transformada inversa de Laplace y se denota por $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Ejemplo 2.3.5.1. La transformada de la función $g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = e^{kt}$ esta dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{kt}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{kt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(s-k)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(s-k)t}}{-(s-k)} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(s-k)b}}{-(s-k)} - \frac{1}{-(s-k)} \right] = 0 - \frac{1}{-s+k} \\ &= \frac{1}{s-k} = F(s), \text{ si } s > k\end{aligned}$$

Observación 2.3.5.2.

Si s es una variable, es decir $s = x + iy$, entonces

$$\frac{e^{-(s-k)b}}{-(s-k)} = \frac{e^{-sb} e^{kb}}{-s+k} = \frac{e^{-bx} (\cos(by) + i \sin(by)) e^{kb}}{k-s}$$

y $e^{-bx} \rightarrow 0$ cuando $b \rightarrow \infty$, si $x > 0$, luego $\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k}$ cuando $\text{Re}(s) > 0$

Definición 2.3.5.3. (Continuidad por partes)

Una función g es continua o por partes en un intervalo $[a, b]$ si este puede ser particionado en un dominio de finito de subintervalos (t_i, t_{i+1}) de forma que

$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ tal que se cumple.

1) g es continua en cada subintervalo abierto (t_i, t_{i+1})

2) Los limites laterales $\lim_{t \rightarrow t_i^+} g(t)$ y $\lim_{t \rightarrow t_i^-} g(t)$, $0 \leq i \leq n - 1$ existen y son finitos.

Definición 2.3.5.4. (Orden exponencial)

Diremos que una función g es de orden exponencial en $[0, \infty[$ si existen constantes reales $M > 0, T > 0$ y k tal que $|g(t)| \leq Me^{kt}$, $\forall t > T$.

CAPITULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Tipo de investigación

La tesis sobre el criterio residual de las funciones analíticas y sus aplicaciones, según el fin que se persigue, se considera de tipo básico. Esto nos motiva a investigar nuevos conocimientos dentro del campo del análisis complejo. En este informe, nos centramos en el estudio de funciones analíticas con singularidades en integrales de la forma

$$\int_{\beta} g(w)dw,$$

donde $U \subset \mathbb{C}$ es conjunto abierto, β es un camino cerrado en U , y g es analítica en $U \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, con $z_j, j = \overline{1, n}$ representando singularidad aislada de g .

3.2. Métodos

Durante la elaboración de esta tesis, se emplearon los métodos lógico inductivo y deductivo para establecer el criterio residual de funciones analíticas y sus aplicaciones. El método deductivo fue utilizado para demostrar las condiciones del criterio residual, mientras que el método inductivo se aplicó mediante ejemplos de integrales reales y la transformada de Laplace. Además, como modelo de contraste y verificación, se utilizó el desarrollo de la serie de Laurent.

3.2.1. Procedimiento del Método Deductivo

1) Revisión bibliográfica

Se realizó una revisión exhaustiva de libros, revistas especializadas y artículos científicos, los cuales, gracias a su confiabilidad, permitieron validar los conceptos fundamentales. A partir de esta revisión, se planteó un conjunto de proposiciones

sobre el criterio del residuo de las funciones analíticas, con el objetivo de buscar una solución adecuada.

2) Deducción

Se han determinado las reglas de deducción y definición del criterio de residuo de las funciones analíticas. Asimismo, se ha realizado el cambio del desarrollo de Taylor al desarrollo de Laurent, introduciendo nuevos términos y proposiciones en el proceso.

3) Analogía

Se han comparado las condiciones de la serie de Laurent con las del criterio residual, evaluando sus aplicaciones correspondientes.

4) Generalización

Se generalizó el criterio del residuo mediante teoremas, basándose en las reglas de deducción lógica. A partir de las proposiciones, se elaboró el coeficiente correspondiente, al cual se denominó residuo.

CAPITULO IV

RESULTADOS

4.1. Integral de Cauchy

Proposición 4.1.1. Sea $\varphi: [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ inyectiva de clase C^1 tal que $\varphi(a_1) = a$, $\varphi(b_1) = b$ y $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino. Si $\beta_1 = \gamma \circ \varphi$ entonces $\beta_1: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$ es un camino y $\int_{\beta} g(w)dw = \int_{\beta_1} g(w)dw$.

Prueba

Evaluando la integral en el camino γ_1 :

$$\int_{\beta_1} g(w)dw = \int_{\beta} g(w)dw = \int_{a_1}^{b_1} g(\beta_1(t)) \beta_1'(t)dt$$

Sustituyendo $\beta_1 = \beta \circ \varphi$, obtenemos:

$$\int_{\beta_1} g(z)dz = \int_{a_1}^{b_1} g(\beta(\varphi(t))) \beta'(\varphi(t)) \varphi'(t)dt$$

Cambio de variable	Límite de integración
$u = \varphi(t)$	$t = a_1 \rightarrow u = a$
$du = \varphi'(t)dt$	$t = b_1 \rightarrow u = b$

Finalmente, vemos que:

$$\int_{\beta_1} g(w)dw = \int_b^a g(\beta(u)) \beta'(u)du = \int_{\beta} g(w)dw$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\int_{\beta} g(w)dw = \int_{\beta_1} g(w)dw \quad \dots(4.1)$$

Observación 4.1.1.

Cuando se verifica la igualdad en 4. 1, concluimos que los caminos β y β_1 son caminos equivalentes.

Proposición 4.1.2. Si $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es un camino y β_1 es el camino apuesto a β , entonces

$$\int_{\beta_1} g(w)dw = - \int_{\beta} g(w)dw$$

Prueba

Sea $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino y β_1 el camino opuesto a β , entonces

$$\int_{\beta_1} g(w)dw = \int_0^1 g(\beta_1(t))\beta'_1(t)dt = - \int_0^1 g(\beta(1-t))\beta'(1-t)dt =$$

Cambio de variable	Límite de integración
$s = 1 - t$	$t = 0 \rightarrow s = 1$
$ds = -dt$	$t = 1 \rightarrow s = 0$

$$= - \int_0^1 g(\beta(s)) \beta'(s) dt = - \int_{\beta} g(w) dw$$

Por lo tanto

$$\int_{\beta_1} g(w) dw = - \int_{\beta} g(w) dw$$

Proposición 4.1.3. Sea $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino y $g: \beta^* \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua

$$\text{entonces} \quad \left| \int_{\beta} g(w) dw \right| \leq \|g\|_{\infty} \int_a^b |\beta'(t)| dt.$$

Demostración

$$\text{Se sabe que} \quad \|g\|_{\infty} = \max_{w \in \beta^*} |g(w)|$$

Usando propiedades de integral a lo largo de un camino, tenemos

$$\left| \int_{\beta} g(w) dw \right| = \left| \int_{\beta} g(\beta(t)) \beta'(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(\beta(t))| |\beta'(t)| dt$$

Entonces

$$\left| \int_{\beta} g(w) dw \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} |g(\beta(t))| \int_a^b |\beta'(t)| dt = \max_{w \in \beta^*} |g(w)| \int_a^b |\beta'(t)| dt$$

Por lo tanto

$$\left| \int_{\beta} g(w) dw \right| \leq \|g\|_{\infty} L,$$

donde $L = \int_a^b |\beta'(t)| dt$ es la longitud β .

Ejemplo 4.1.1. Hallar longitud del camino definido por $\beta(t) = w_0 + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$

Solución

Tenemos que $\beta(t) = w_0 + re^{it}$. Entonces $\beta'(t) = rie^{it}$. Por lo tanto

$$L = \int_0^{2\pi} |rie^{it}| dt = r \int_0^{2\pi} dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

Ejemplo 4.1.2.

Calcular $\int_{\beta} \text{Im}(w^2)dw$ donde β es una circunferencia de radio 1 tal que

$$-\pi \leq \arg(w) \leq 0$$

Solución

Sea $\beta(t) = e^{it}, -\pi \leq t \leq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} w \text{Im}(w^2)dw &= \int_{-\pi}^0 g(\beta(t))\gamma'(t)dt = \int_{-\pi}^0 \text{Im}(\beta(t)^2)\gamma'(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^0 e^{it} \text{Im}(e^{it})^2 (e^{it})' dt \\ &= i \int_{-\pi}^0 e^{2it} \text{Im}(e^{2it}) dt = i \int_{-\pi}^0 e^{2it} \sin(2t) dt \\ &= i \int_{-\pi}^0 (\cos(2t) \sin(2t) + i \sin^2(2t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2} \int_{-\pi}^0 \operatorname{sen}(2t) \, d(\operatorname{sen}(2t)) + i^2 \int_{-\pi}^0 \frac{1 - \cos(4t)}{2} \\
&= \frac{i}{4} \operatorname{sen}^2(2t) \Big|_{-\pi}^0 - \left(\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen}(4t)}{8} \right) \Big|_{-\pi}^0 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.3. Calcular integral

$$\int_{[0,1+i]} w^3 \, dw$$

Solución

Sea $[w_1, w_2] = \{\gamma(t) \in \mathbb{C} / \beta(t) = (1-t)w_1 + tw_2, t \in [0,1]\}$

Entonces

$$\int_{[0,1+i]} w^3 \, dw = \int_{\beta} w^3 \, dw = \int_0^1 (t(1+i))^2 (t(1+i))' \, dt$$

donde $\beta(t) = t(1+i)$

$$= \int_0^1 t^3 (1+i)^3 (1+i) \, dt = (1+i)^4 \int_0^1 t^3 \, dt = \frac{(1+i)^4 t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{(1+i)^4}{4}$$

Proposición 4.1.4.

$$\int_{[w_1, w_2]} w^n \, dw = \frac{1}{n+1} (w_2^{n+1} - w_1^{n+1}), n \neq -1$$

Demostración

$$\begin{aligned}\int_{[w_1, w_2]} w^n dw &= \int_{\gamma} w^n dz = \int_0^1 ((1-t)w_1 + tw_2)^n d((1-t)w_1 + tw_2) \\ &= \frac{((1-t)w_1 + tw_2)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{w_2^{n+1} - w_1^{n+1}}{n+1}; \quad n \neq -1\end{aligned}$$

Proposición 4.1.5. Sea $g: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y g' continua sobre un intervalo $U \subset \mathbb{C}$ abierto. Entonces $\int_{\beta} g'(w) dw = 0$, para todo camino cerrado en U .

Demostración

Sea $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es un camino cerrado en $U \subset \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} g'(w) dw &= \int_a^b g'(\beta(t)) \beta'(t) dt \\ &= \int_a^b g'(\beta(t)) d\beta(t) = [g(\beta(t))]_{a=t}^{b=t} \\ &= g(\beta(a)) - g(\beta(b)) \\ &= g(\beta(a)) - g(\beta(a)) = 0\end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.4. Sean $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino cerrado en $U \subset \mathbb{C}$ y $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(w) = \sin(w)$. Entonces

$$g'(w) = \cos(w)$$

Por lo tanto

$$\int_{\beta} \cos(w)dw = 0$$

Proposición 4.1.6.

Sean $D \subset \mathbb{C}$ abierto y convexo, $p \in U$, $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ continua en D y analítica sobre $D/\{p\}$. Entonces existe una función analítica G sobre D tal que

$$G'(w) = g(w).$$

Demostración

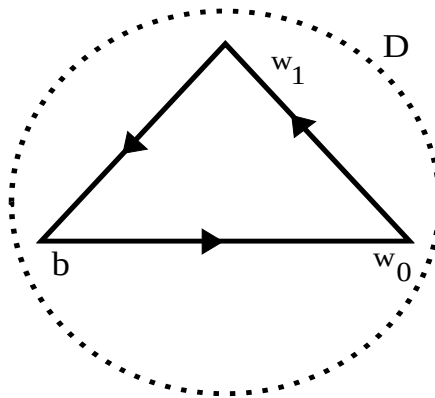


Figura 8. D conjunto convexo y abierto

Fijemos un punto $b \in D$. Entonces el segmento $[b, w] \subset D$ porque D es convexo.

Además, definamos la función $g(w)$ como la integral

$$G(w) = \int_{[a,w]} g(\xi) d\xi = \int_a^w g(\xi) d\xi, \forall w \in D.$$

Sea w_0 cualquier punto de D entonces $G(w_0) = \int_a^{w_0} g(\xi) d\xi$. Por el teorema de Cauchy para el triángulo: Sean el triángulo cerrado $\Delta \subset D$, $p \in D$, $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ función continua en D y analítica en $D \setminus \{p\}$. Entonces $\int_{\partial\Delta} g(w) dw = 0$, es decir

$$\int_a^{w_0} g(\xi) d\xi + \int_{w_0}^w g(\xi) d\xi + \int_w^a g(\xi) d\xi = 0$$

Como w_0 es cualquier punto de D , tenemos

$$G(w_0) + \int_{z_0}^z g(\xi) d\xi - \int_a^z g(\xi) d\xi = 0$$

$$G(w) - G(w_0) = \int_{[w_0,w]} g(\xi) d\xi = \int_{w_0}^w g(\xi) d\xi$$

Para $w \neq w_0$, se tiene

$$\frac{G(w) - G(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{w - w_0} \int_{w_0}^w g(\xi) d\xi$$

Aplicando el valor absoluto y luego el límite, tenemos

$$\left| \frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} - g(w_0) \right| = \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{w_0}^z g(\xi) d\xi - g(w_0) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{w - w_0} \int_{w_0}^w |(g(\xi)d\xi - g(w_0))d\xi|$$

$$\leq \|g(w) - g(w_0)\|_{\infty} \frac{1}{w - w_0} \cdot (w - w_0)$$

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \left| \frac{G(w) - G(w_0)}{w - w_0} - g(w_0) \right| \leq \lim_{w \rightarrow w_0} \|g(w) - g(w_0)\|_{\infty} = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{G(w) - G(w_0)}{w - w_0} = G'(w_0) \equiv g(w_0)$$

En consecuencia, como w_0 es cualquier punto de D , tenemos $G'(w_0) = g(w_0)$.

Además $G(w) = \int_a^w g(\xi)d\xi$ es analítica sobre D . Finalmente,

$$\int_{\beta} g(w)dw = \int_{\beta} G'(w)dw = 0, \text{ para cualquier camino cerrado en } D.$$

Proposición 4.1.7. Sean $D \subset \mathbb{C}$ abierto, $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, $U = \{w \in \mathbb{C} / |w - w_0| < r\}$ y $\beta: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\beta(t) = w_0 + re^{it}$ entonces

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{g(\xi)}{\xi - w} d\xi, \forall w \in U$$

Demostración

Se define
$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{g(\xi) - g(w)}{\xi - w}, & \text{si } \xi \in D, \xi \neq w \\ g'(w), & \text{si } \xi = w \end{cases}$$

Entonces g es continua sobre U y analítica sobre $U \setminus \{w\}$. Por el teorema sobre conjuntos convexos se tiene que $\int_{\beta} g(\xi) d\xi = 0$. Además,

$$\int_{\beta} \frac{g(\xi) - g(w)}{\xi - w} d\xi = 0 \equiv \int_{\beta} \frac{g(\xi)}{\xi - w} d\xi - \int_{\beta} \frac{g(w)}{\xi - w} d\xi = 0$$

Despejamos tenemos

$$g(w) \int_{\beta} \frac{d\xi}{\xi - w} = \int_{\beta} \frac{g(\xi)}{\xi - w} d\xi$$

$$g(w) \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{w + re^{it} - w} d\xi = \int_{\beta} \frac{g(\xi)}{\xi - w} d\xi$$

Por lo tanto,

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{g(\xi)}{\xi - w} d\xi$$

Ejemplo 4.1.5.

Hallar la integral

$$\int_{\beta} \frac{d\xi}{\xi^2 + 8}$$

γ es una circunferencia en forma positiva

Solución:

$$\int_{\beta} \frac{d\xi}{\xi^2 + 8} = \int_{\beta} \frac{d\xi}{(\xi + i\sqrt{8})(\xi - i\sqrt{8})},$$

Si $i\sqrt{8}$ y $-i\sqrt{8}$ no están en la circunferencia entonces

$$\int_{\beta} \frac{d\xi}{(\xi + i\sqrt{8})(\xi - i\sqrt{8})} = 0$$

Ahora, si $w = i\sqrt{8}$ esta dentro de γ y $-i\sqrt{8}$ esta fuera de γ entonces

$$\int_{\beta} \frac{d\xi}{(\xi + i\sqrt{8})(\xi - i\sqrt{8})} = \int_{\beta} \frac{\frac{d\xi}{\xi + i\sqrt{8}}}{\xi - i\sqrt{8}}$$

Por la fórmula de integración de la proposición 4.1.7, se tiene

$$\int_{\beta} \frac{d\xi}{\xi^2 + 8} = 2\pi i g(i\sqrt{8}),$$

Como $g(\xi) = \frac{1}{\xi + i\sqrt{8}}$, entonces

$$\int_{\beta} \frac{d\xi}{\xi^2 + 8} = 2\pi i \left[\frac{1}{i\sqrt{8} + i\sqrt{8}} \right] = \frac{\pi}{\sqrt{8}}$$

Si $w = -i\sqrt{8}$, está dentro de β y $w = i\sqrt{8}$ esta fuera de γ entonces

$$\int_{\beta} \frac{d\xi}{(\xi + i\sqrt{8})(\xi - i\sqrt{8})} = \int_{\beta} \frac{\frac{d\xi}{\xi - i\sqrt{8}}}{\xi - (-i\sqrt{8})}$$

Por la fórmula de integración de la proposición 4.1.7. se tiene

$$\int_{\beta} \frac{d\xi}{\frac{\xi - i\sqrt{8}}{\xi + i\sqrt{8}}} = 2\pi i g(-i\sqrt{8})$$

Como $g(\xi) = \frac{1}{\xi - i\sqrt{8}}$, entonces

$$\int_{\beta} \frac{d\xi}{\frac{\xi - i\sqrt{8}}{\xi + i\sqrt{8}}} = 2\pi i \left[\frac{1}{-i\sqrt{8} - i\sqrt{8}} \right] = -\frac{\pi}{\sqrt{8}}$$

4.2. Residuos en los complejos

Proposición 4.2.1. (Residuo de una función compleja en un polo simple)

Si g es una función analítica en $0 < w - w_0 < r$ y w_0 es un polo simple de g ,

entonces $\text{Res}(g, w_0) = \lim_{w \rightarrow w_0} (w - w_0)g(w)$

Demostración

Por hipótesis, g tiene un polo simple en w_0 , entonces su desarrollo en la serie de

Laurent de centro w_0 viene dado por:

$$g(w) = \frac{a_{-1}}{w - w_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - w_0)^n, \text{ con } a_{-1} \neq 0$$

Multiplicando por $(w - w_0)$ los dos miembros de la igualdad anterior, tenemos

$$(w - w_0)g(w) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - w_0)^{n+1}$$

Tomando el límite cuando $w \rightarrow w_0$, obtenemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (w - w_0)g(w) = \lim_{w \rightarrow w_0} (a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - w_0)^{n+1}) = a_{-1} = \text{Res}(g, w_0)$$

Ejemplo 4.2.1. La función $f(w) = \frac{w}{w^2 + 4i}$ tiene un polo simple en $2i$ y $-2i$.

También,

$$\lim_{w \rightarrow 2i} (w - w_0) \frac{w}{(w - 2i)(w + 2i)} = \lim_{w \rightarrow 2i} \frac{w}{w + 2i} = \frac{2i}{2i + 2i} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{w \rightarrow -2i} (w + w_0) \frac{w}{(w - 2i)(w + 2i)} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{w}{w - 2i} = \frac{2i}{-2i - 2i} = -\frac{1}{2}$$

Por la proposición 4.2.1. hacemos que $\text{Res}(g, 2i) = \frac{1}{2}$ y $\text{Res}(g, -2i) = -\frac{1}{2}$

Proposición 4.2.2.(Residuo de una función analítica en un polo de orden k)

Si g es una función analítica en $0 < w - w_0 < r$ y w_0 es un polo de orden k de g ,

entonces $\text{Res}(g, w_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((w - w_0)^k g(w))$.

Demostración

Como w_0 es un polo de orden k de g , entonces su desarrollo en serie de Laurent centrada en w_0 valida en el anillo $0 < w - w_0 < r$ esta dada por

$$g(w) = \frac{a_{-k}}{(w - w_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(w - w_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(w - w_0)^1} + a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - w_0)^n$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por $(w - w_0)^k$, tenemos

$$\begin{aligned}
(w - w_0)^k g(w) &= a_{-k} + \cdots + a_{-2}(w - w_0)^{k-2} + a_{-1}(w - w_0)^{k-1} a_{-1} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - w_0)^{n+k}
\end{aligned}$$

Asimismo, para obtener el coeficiente a_{-1} , derivamos los dos lados de la última igualdad $(k - 1)$ veces en relación a w , es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((w - w_0)^k g(w) \right) \\
= (k - 1)! \cdot a_{-1} + k! \cdot a_0 (w - w_0) + (k + 1)! a_1 (w - w_0)^2 \dots
\end{aligned}$$

Aplicando $w \rightarrow w_0$, obtenemos

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{d^{k-1}}{dw^{k-1}} ((w - w_0)^k g(w)) = (k - 1)! \cdot a_{-1}$$

Como $a_{-1} = \text{Res}(g, w_0)$, concluimos que

$$\text{Res}(g, w_0) = \frac{1}{(k - 1)!} \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{d^{k-1}}{dw^{k-1}} \left((w - w_0)^k g(w) \right).$$

Ejemplo 4.2.2. La función $g(w) = \frac{1}{(w-1)^2(w-3)}$ tiene un polo de orden 2 en $w = 1$ y

un polo simple en $w = 3$. Por la proposición 4.2.2, tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{Res}(g, 1) &= \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{w \rightarrow 1} \frac{d}{dw} \left((w - 1)^2 g(w) \right) = \lim_{w \rightarrow 1} \frac{d}{dw} \left((w - 1)^2 \frac{1}{(w - 1)^2 (w - 3)} \right) \\
&= \lim_{w \rightarrow 1} \frac{d}{dw} \left(\frac{1}{(w - 3)} \right) = \lim_{w \rightarrow 1} \left(\frac{-1}{(w - 3)^2} \right) = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Proposición 4.2.3. (Teorema del residuo de Cauchy)

Sea g una función analítica en un dominio $B \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Supongamos que $\beta \subset B \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ es una curva de Jordan suave por partes en sentido contrario a las agujas de reloj tal que la región cerrada y limitada se define en B y contiene todos los puntos $b_1, b_2, \dots, b_m$. Con estas condiciones se cumple

$$\int_{\beta} g(w)dw = 2\pi i \sum_{n=1}^m \text{Res}(g, b_n)$$

Demostración

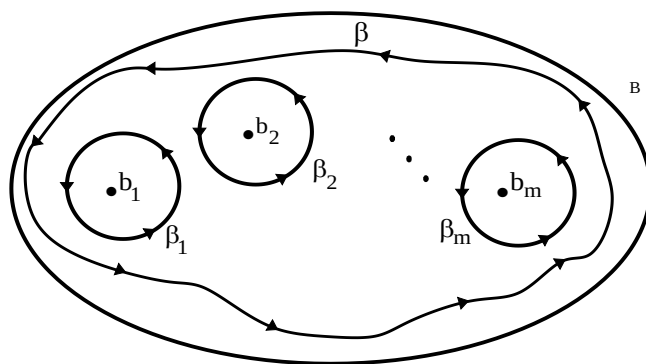


Figura 9. Puntos singulares dentro de la región B

Orientando $\beta_k = 1, 2, 3, \dots, m$ en el sentido antihorario y consideremos que la región B en un dominio $\mathbb{C}$ un dominio y que $g: B \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica. Sea $V \subset B$ un subconjunto cerrado y limitado, cuya frontera ∂V está formada por un número finito de curvas de Jordan suaves por tramos: $\partial V = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_m$

y tal que $V - \{\partial V\}$ es un camino. Según el teorema de Cauchy para dominios con frontera suave, tenemos que:

$$\int_{\partial V} g(w)dw = 0$$

Ahora tenemos que

$$\int_{\beta \cup \beta_1 \cup \dots \cup \beta_m} g(w)dw = 0$$

Esto es equivalente a

$$\int_{\beta} g(w)dw - \int_{\beta_1} g(w)dw - \int_{\beta_2} g(w)dw - \dots - \int_{\beta_m} g(w)dw = 0$$

Es decir

$$\int_{\beta} g(w)dw = \int_{\beta_1} g(w)dw + \int_{\beta_2} g(w)dw + \dots + \int_{\beta_m} g(w)dw$$

Ahora, aplicamos el teorema de Laurent, que establece que si g es analítica en el anillo

$$B = \{w \in \mathbb{C}: r < |w - w_0| < R\}$$

donde $0 \leq r < R \leq \infty$, entonces la función g tiene una expansión en serie de Laurent centrada en w_0

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(w - w_0)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w - w_0)^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (w - w_0)^n, \forall w \in B$$

los coeficientes a_n están dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{g(\delta)}{(\delta - w)^{n+1}} d\delta$$

Se sigue

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(w - w_0)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w - w_0)^n$$

Es la serie de Laurent centrada en a_m y

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_k} g(w) dw, \forall k = \overline{1, m}$$

De esta forma

$$\int_{\beta_k} g(w) dw = 2\pi i a_{-1} = \text{Res}(g, a_k)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\beta} g(w) dw &= 2\pi i \text{Res}(g, a_1) + 2\pi i \text{Res}(g, a_2) + \dots + 2\pi i \text{Res}(g, a_m) \\ &= 2\pi i \sum_{n=1}^m \text{Res}(g, a_n) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.3. Consideremos la función $g(w) = \frac{1}{(w-1)^2(w-3)}$. Determinamos la integral de g a lo largo de la circunferencia $|w| = 2$ usando la proposición 4.2.2. Observamos que el polo $w = 1$ está dentro de la circunferencia $|w| = 2$. Además

$$\begin{aligned} \int_{|w|=2} \frac{dz}{(w-1)^2(w-3)} &= 2\pi i \operatorname{Res}(g, 1) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi i}{2} \end{aligned}$$

Recordando que

$$\operatorname{Res}(g, 1) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{w \rightarrow 1} \frac{d}{dw} ((w-1)^2 g(w)) = -\frac{1}{4}$$

Ejemplo 4.2.4. Consideremos la función $g(z) = \frac{1}{w^2+4w+13}$ y calcule la integral de g a lo largo del camino γ definimos por $|w-3i| = 3$. Tenga en cuenta que g se puede ser escribir como

$$g(w) = \frac{1}{(w+2-3i)(w+2+3i)}$$

Y qué $w = -2 + 3i$, $w = -2 - 3i$ son los polos simples de g , porque $w = -2 + 3i$, están dentro del camino $\gamma = 3 + 3e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces, por proposición 4.2.3 tenemos

$$\begin{aligned}
\oint_{\beta} \frac{1}{(w+2-3i)(w+2+3i)} dz &= 2\pi i \text{Res}(g, -2+3i) \\
&= 2\pi i \lim_{w \rightarrow -2+3i} \frac{z+2-3i}{(w+2-3i)(w+2+3i)} \\
&= 2\pi i \cdot \frac{2}{6i} = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

4.3. Aplicación del teorema del residuo

4.3.1. Transformada inversa de Laplace

Proposición 4.3.1.1. (Transformada de Laplace)

Si g es una función continua por partes en $[0, \infty[$ y de orden exponencial k , para $t > T$, entonces $\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}g(t)dt$ existe para $\text{Re}(s) > k$

Demostración

Por la propiedad aditiva de la integral definida, tenemos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st}g(t)dt + \int_T^{\infty} e^{-st}g(t)dt = I_1 + I_2$$

(i) La integral I_1 , existe porque se puede escribir como la suma de integrales en intervalos de donde la función $e^{-st}g(t)$ es continua.

(ii) Vamos a comprobar que la integral I_2 también existe. De hecho, sea s una variable compleja $s = x + iy$.

Por hipótesis, f es de orden exponencial k , para $T < t$, es decir, existe $M > 0$ tal que $|g(t)| \leq Me^{kt}$, para $t > T$. Usando $|e^{-st}| = |e^{-xt}(\cos(yt + i\sin(yt)))| = e^{-xt}$, obtenemos

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_T^\infty |e^{st}g(t)|dt \leq M \int_T^\infty e^{-xt}e^{kt}dt = M \int_T^\infty e^{-(x-k)t}dt = \\ &= M \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(x-k)t}}{-(x-k)} \right]_T^b \\ &= M \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(x-k)b}}{-(x-k)} - \frac{e^{-(x-k)T}}{-(x-k)} \right] \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-(x-k)b}}{-(x-k)} = 0$, si $x > k$. Por lo tanto.

$$|I_2| \leq M \left[\frac{e^{-(x-k)T}}{-(x-k)} \right], \text{ para } x > k, \text{ donde } x = \operatorname{Re}(s)$$

Dado que $\int_T^\infty Me^{-(x-k)T}dt$ converge a $M \frac{e^{-(x-k)T}}{-(x-k)}$ si $x > k$, se sigue de la propiedad de las integrales impropias, que la integral $\int_T^\infty |e^{-st}g(t)|dt$ converge si $x > k$, lo que implica que I_2 exista para $x = \operatorname{Re}(s) > k$.

De (i) e (ii), concluimos que

$$\{g(t)\} = \int_0^T e^{-st}g(t)dt$$

exista, para $\operatorname{Re}(s) > k$.

Proposición 4.3.1.2.(Transformada inversa de Laplace en términos del residuo)

Sea $G(s)$ una función obtenida para la transformada de Laplace que tiene un numero finito de polos s_k , $k=1, 2, \dots, n$ a la izquierda de la recta vertical $\text{Re}(s) = \gamma$. Sea β el camino. Si la función $G(s)$ es acotada en β_1 en una semicircunferencia de radio R y centro $(\gamma, 0)$, cuando $R \rightarrow \infty$, entonces.

$$\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = \sum_{k=1}^n \text{Res}(e^{st}G(s), s_k)$$

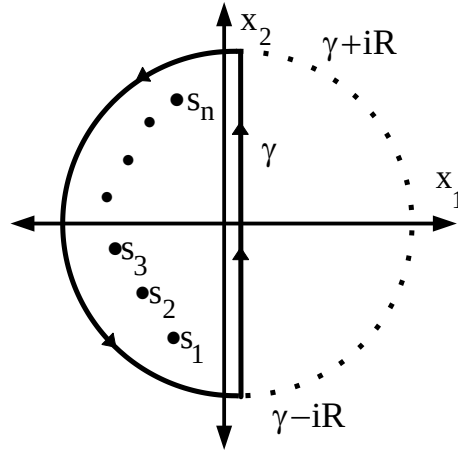


Figura 10. Camino β que envuelve a todas las singularidades

Demostración

Sean β_1 una semicircunferencia de radio R y de centro $(\gamma, 0)$ y β_2 el segmento de recta vertical que se extiende de $y = \gamma - iR$ y $y = \gamma + iR$. De la figura 10 y la proposición 4.2.2, se sigue que

$$\int_{\beta_1} e^{st} G(s) ds + \int_{\beta_2} e^{st} G(s) ds = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(e^{st} G(s), s_k)$$

Lo que implica

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} e^{st} G(s) ds = \sum_{k=1}^n \text{Res}(e^{st} G(s), s_k) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1} e^{st} G(s) ds$$

Primeramente, mostraremos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\beta_1} e^{st} G(s) ds = 0$$

Si la semicircunferencia β_1 es parametrizada por $s = \gamma + Re^{i\theta}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, entonces

$ds = Re^{i\theta} d\theta$. Como $s - \gamma = Re^{i\theta}$, se sigue que $ds = (s - \gamma)id\theta$. Asimismo,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1} e^{st} G(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{\alpha + Re^{i\theta}} G(\gamma + Re^{i\theta}) Re^{i\theta} d\theta$$

De donde se sigue que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1} e^{st} G(s) ds \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\beta_1} e^{st} G(s) ds \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |e^{\gamma t + Rte^{i\theta}}| |G(\gamma + Re^{i\theta})| |Re^{i\theta}| d\theta$$

Observe que

$$\left| e^{\gamma t + R t e^{i\theta}} \right| = \left| e^{\gamma t} e^{R t (\cos(\theta) + i \sin(\theta))} \right| = \left| e^{\gamma t} e^{R t \cos(\theta)} e^{i R t \sin(\theta)} \right| = e^{\gamma t} e^{k t \cos(\theta)}$$

En $|\operatorname{Re} i\theta|$, tenemos para R suficientemente grande y $\gamma < s$

$$|\operatorname{Re} i\theta| = |s - \gamma| |i| \leq |s| + |\gamma| < |s| + |s| = 2|s| \text{ y } s|G(s)| < M$$

De esta forma

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{\beta_1} e^{st} G(s) ds \right| \leq \frac{M}{\pi} e^{\gamma t} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{\alpha + \operatorname{Re} i\theta} d\theta$$

Haciendo $\theta = w + \frac{\pi}{2}$, la integral $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{\gamma + \operatorname{Re} i\theta} d\theta$ se convierte

$$\int_0^{\pi} e^{-R t \sin(w)} dw = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R t \sin(w)} dw$$

Como $\sin(w) \geq \frac{2w}{\pi}$, $\forall w \in [0, \pi/2]$, se tiene que

$$2 \int_0^{\pi/2} e^{-R t \sin(w)} dw \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R t w}{\pi}} dw = \left[-\frac{\pi}{R t} e^{-\frac{2R t w}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{R t} (1 - e^{-R t})$$

Usando las desigualdades obtenidas anteriormente concluimos que

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{\beta_1} e^{st} G(s) ds \right| \leq \frac{M e^{\gamma t}}{R t} (1 - e^{-R t})$$

Cuando $R \rightarrow \infty$, $\frac{M e^{\gamma t}}{R t} (1 - e^{-R t}) \rightarrow 0$ y, por tanto,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\beta_1} e^{st} G(s) ds = 0$$

Luego, cuando $R \rightarrow \infty$, en

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} e^{st} G(s) ds = \sum_{k=1}^n \text{Res}(e^{st} G(s), s_k) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1} e^{st} G(s) ds$$

Se sigue que

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} e^{st} G(s) ds = \sum_{k=1}^n \text{Res}(e^{st} G(s), s_k)$$

Ejemplo 4.3.1.1. Usar la proposición 4.3.1.2 para calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^6}\right\}$, con $\text{Re}(s) > 0$.

Tenga en cuenta que $G(s) = \frac{1}{s^6}$ tiene un polo de orden 6 en $s = 0$. Además,

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^6}\right\} &= \text{Res}\left(e^{st} \cdot \frac{1}{s^6}, 0\right) = \frac{1}{(6-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^5}{ds^5} \left[(s-0)^6 \cdot \frac{e^{st}}{s^6} \right] \\ &= \frac{1}{5!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^5}{ds^5} \left[s^6 \frac{e^{st}}{s^6} \right] = \frac{1}{5!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^5}{ds^5} [e^{st}] = \frac{1}{5!} \lim_{s \rightarrow 0} t^5 e^{st} = \frac{1}{120} t^5 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.1.2. Determinar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$. La función $G(s) = \frac{1}{s^2+4}$ tiene dos polos

simples, $s = 2i$ y $s = -2i$. Aplicando la proposición 4.3.1.2, tenemos

$$\begin{aligned} g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} &= \text{Res}\left(\frac{1}{s^2+4}, 2i\right) + \text{Res}\left(\frac{1}{s^2+4}, -2i\right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 2i} \left[(s-2i) \cdot \frac{e^{st}}{(s-2i)(s+2i)} \right] + \lim_{s \rightarrow -2i} \left[(s+2i) \cdot \frac{e^{st}}{(s-2i)(s+2i)} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{2st}}{4i} + \frac{e^{-2st}}{-4i} = \frac{\cos 2t + i \sin 2t}{4i} - \frac{\cos(-2t) + i \sin(-2t)}{4i} = \\
&= \frac{\cos 2t + i \sin 2t - \cos(-2t) + i \sin(-2t)}{4i} \\
&= \frac{2i \sin 2t}{4i} = \frac{1}{2} \cdot \sin 2t.
\end{aligned}$$

4.3.2. Cálculo de integrales trigonométricas de la forma $\int_0^{2\pi} G(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$

Para este caso, convertimos la integral $\int_0^{2\pi} G(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$, en una integral compleja en el que el camino β es una circunferencia unitaria $|w| = 1$ centrada en el origen y parametrizada por $w = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Del mismo modo, $dw = ie^{i\theta} d\theta$, además sabemos que

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ y } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Observamos que $w^{-1} = \frac{1}{w} = e^{-i\theta}$, luego $d\theta = \frac{dw}{iw}$, $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(w + w^{-1})$ y

$\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(w - w^{-1})$. Por tanto, la integral

$$\int_0^{2\pi} G(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$$

Se convierte

$$\oint_{\beta} G\left(\frac{1}{2}(w + w^{-1}), \frac{1}{2i}(w - w^{-1})\right) \frac{dw}{iw}$$

En que γ es una circunferencia unitaria $|w| = 1$.

Ejemplo 4.3.2.1. Calcula la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos(\theta))^2}, a > 1$$

Solución

Al hacer las sustituciones antes mencionadas, tenemos

$$\begin{aligned} \oint_{\beta} \frac{1}{\left(a + \frac{1}{2}(w + w^{-1})\right)^2} \frac{dw}{iw} &= \oint_{\beta} \frac{1}{\left(a + \frac{w^2 + 1}{2w}\right)^2} \frac{dw}{iw} \\ &= \oint_{\beta} \frac{1}{\left(\frac{w^2 + 2aw + 1}{2w}\right)^2} \frac{dw}{iw} = \oint_{\beta} \frac{4w^2}{(w^2 + 2aw + 1)^2} \frac{dw}{iw} \\ &= \frac{4}{i} \oint_{\beta} \frac{wdw}{(w^2 + 2aw + 1)^2}. \end{aligned}$$

El polinomio $w^2 + 2aw + 1$ se puede factorizar en un producto de un polinomio de primer grado:

$$w^2 + 2aw + 1 = (w + a - \sqrt{a^2 - 1})(w + a + \sqrt{a^2 - 1})$$

El camino de integración es una circunferencia $|w| = 1$. Siendo

$w_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ y $w_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$, solo w_1 puede estar dentro de $|w| = 1$

por lo tanto

$$\oint_{\beta} \frac{wdw}{(w - w_1)^2(w - w_2)^2} = 2\pi i \text{Res}(g, w_1)$$

Por la proposición 4.2.2, vamos a calcular el residuo de g en w_1 . Como w_1 es un polo de orden 2, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Res}(g, w_1) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{w \rightarrow w_1} \frac{d}{dw} [(w - w_1)^2 g(w)] = \lim_{w \rightarrow w_1} \frac{d}{dw} \left[\frac{w}{(w - w_2)^2} \right] \\ &= \lim_{w \rightarrow w_1} \left[\frac{(w - w_2)^2 - 2w(w - w_2)}{(w - w_2)^4} \right] = \lim_{w \rightarrow w_1} \left[\frac{(w - w_2)(w - w_2 - 2w)}{(w - w_2)^4} \right] \\ &= \lim_{w \rightarrow w_1} \left[\frac{(w - w_2)}{(w - w_2)^3} \right] = \frac{a}{4(\sqrt{a^2 - 1})} \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\frac{4}{i} \oint_{\beta} \frac{w}{(w^2 + 2aw + 1)^2} dw = \frac{4}{i} \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}(g, w_1) = 8\pi \cdot \frac{a}{4(\sqrt{a^2 - 1})^3} = \frac{2a\pi}{(\sqrt{a^2 - 1})^3}$$

Ejemplo 4.3.2.2. En la derivación de la tercera Ley de Kepler, hay una etapa en la que se necesita calcular la integral

$$K = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos(\theta))^2}$$

siendo $0 < \varepsilon < 1$ la excentricidad de la órbita. Calcular K por el criterio del residuo.

Solución

Tras el cambio de variable $w = e^{i\theta}$, tenemos que

$$K = \oint_{\beta} \frac{1}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}(w + w^{-1})\right)^2} \frac{dw}{iw} = \frac{4}{i} \oint_{\beta} \frac{w}{(2w + \varepsilon w^2 + \varepsilon)^2} dw$$

$$= \frac{4}{i\varepsilon^2} \oint_{\beta} \frac{w}{\left(w^2 + \frac{2}{\varepsilon}w + 1\right)^2} dw$$

Los ceros del denominador son:

$$w_{\pm} = -\frac{1}{\varepsilon} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 4} = -\frac{1}{\varepsilon} \pm \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1}$$

Entre los dos ceros, solo w_+ se encuentra en el contorno γ . Es un doble polo ya que podemos factorizar el integrando en la forma

$$g(w) = \frac{w}{(w - w_+)^2(w - w_-)^2}$$

Calculamos el residuo

$$\begin{aligned} \text{Res}(g, w_+) &= \lim_{w \rightarrow w_+} \frac{d}{dw} \frac{w}{(w - w_-)^2} = \frac{(w_+ - w_-)^2 - 2w_+(w_+ - w_-)}{(w - w_-)^4} \\ &= -\frac{w_+ + w_-}{(w_+ - w_-)^3} = \frac{1}{4\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Aplicamos la proposición 4.2.2 para calcular K :

$$K = \frac{4}{i\varepsilon^2} 2\pi i \cdot \text{Res}(g, w_+) = \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ejemplo 4.3.2.3. El kernel de Poisson

$$P(\theta) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2}, -1 < a < 1$$

es una función que aparece en problemas bidimensionales con simetría circular. Por ejemplo, $P(\theta)$ está relacionado con la distribución de probabilidad de los coeficientes de transporte de ciertas nanoestructuras o con el potencial electrostático de un disco conductor. Calcular

$$K = \int_0^{2\pi} P(\theta) d\theta$$

Solución

Tras el cambio de variable $w = e^{i\theta}$, obtenemos una integral sobre la circunferencia de radio unidad β :

$$\begin{aligned} K &= \oint_{\beta} \frac{1 - a^2}{1 - 2a \frac{w + w^{-1}}{2} + a^2} dw = \frac{1}{i} \oint_{\beta} \frac{w}{-aw^2 + w(1 + a^2) - a} dw \\ &= \frac{i}{a} \oint_{\beta} \frac{1 - a^2}{w^2 - \frac{1 + a^2}{a} w + 1} dw \end{aligned}$$

Los ceros del denominador $w^2 - \frac{1+a^2}{a}w + 1$ son $w = a$ y $w = \frac{1}{a}$. Puesto que $-1 < a < 1$, solo el punto $w = a$ se sitúa dentro de γ , y corresponde a un polo simple de la función

$$g(w) = \frac{1 - a^2}{(w - a)(w - \frac{1}{a})}$$

Determinamos el residuo correspondiente

$$\text{Res}(g, a) = \lim_{w \rightarrow a} (w - a) \frac{1 - a^2}{(w - a)(w - \frac{1}{a})} = \frac{1 - a^2}{a - \frac{1}{a}}$$

De la proposición 4.2.2 se deduce que la integral es

$$K = \frac{i}{a} 2\pi \cdot \text{Res}(g, a) = \frac{i}{a} 2\pi \frac{1 - a^2}{a - \frac{1}{a}} = 2\pi$$

4.3.3. Cálculo de integrales impropias reales

Sea g una función real continua definida en el intervalo $[0, +\infty >$,

$$I_1 = \int_0^{+\infty} g(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r g(x) dx$$

Si el límite existe, diremos que la integral I_1 converge, en el caso que no exista, diremos que I_1 diverge.

De la misma forma, tenemos que, si g está definida en $< -\infty, 0]$,

$$I_2 = \int_{-\infty}^0 g(x) dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 g(x) dx$$

Si el límite existe diremos, que la integral I_2 converge, en caso que no exista diremos, que I_2 diverge.

Si f es continua en $< -\infty, +\infty >$, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ es definida por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^0 g(x) dx + \int_0^{+\infty} g(x) dx = I_1 + I_2$$

donde las dos integrales del lado derecho convergen. Para que la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$$

converja es necesario que los limites existan independientemente uno del otro.

Definición 4.3.3.1. (Valor principal de Cauchy).

El $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r g(x)dx$ es denominado valor principal de Cauchy y es denotado por

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r g(x)dx = \text{V. P.} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx.$$

Proposición 4.3.3.1. (Valor principal de Cauchy de la integral impropia)

Sea g una función racional $g(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ continua en $< -\infty, +\infty >$, el grado de p es cero

y el grado de q es 2. Si β_{sc} es un camino (semicircunferencia) cuya parametrización es

$w = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces

$$\text{V. P.} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(g, w_k)$$

Demostración

Como f es una función racional $g(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ continua en $< -\infty, +\infty >$, sustituimos

la variable real x por el complejo w y calculamos la integral de la función compleja g a lo largo de un camino cerrado β , dado por el intervalo $[-r, r]$ en el eje real en una

semicircunferencia con radio suficientemente grande para envolver todos los polos de

$g(w) = \frac{p(w)}{q(w)}$ contenidos en el semiplano superior $\text{Im}(w) > 0$.

Por el teorema de los Residuos, tenemos

$$\int_{\beta} g(w)dw = \int_{\beta_{sc}} g(w)dw + \int_{-r}^r g(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(g, w_k)$$

en que β_{sc} es una semicircunferencia y $w_k, k = 1, 2, \dots, n$ son los polos en simiplano $\text{Im}(w) > 0$.

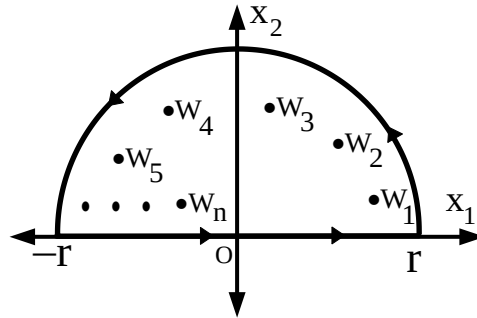


Figura 11. Caminos β_{sc} cerrado

Si $\int_{\beta_{sc}} g(w)dw \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$

Entonces

$$\text{V. P.} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r g(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(g, w_k)$$

Ejemplo 4.3.3.2. Determinar el valor principal de Cauchy de la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx$$

Solución

Observamos que

$$g(w) = \frac{1}{w^2 - 2w + 2} = \frac{1}{(w - 1 - i)(w - 1 + i)}$$

Consideremos el camino cerrado β que consiste en el intervalo $[-r, r]$ en el eje de las abscisas y una circunferencia β_{sc} con radio $r > r_2$, porque es necesario envolver el polo $w = 1 + i$, que pertenece de semiplano $\text{Im}(w) > 0$

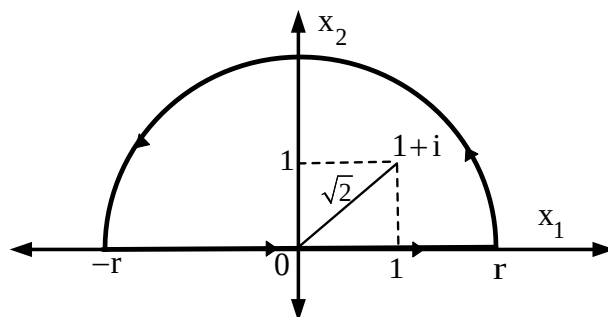


Figura 12. Polo $w = 1 + i$ envolviendo el camino β_{sc}

Por la proposición 4.3.3.1, tenemos

$$\oint_{\beta} \frac{1}{w^2 - 2w + 2} dw = \int_{\beta_{sc}} \frac{1}{w^2 - 2w + 2} dw + \int_{-r}^r \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(g, 1 + i)$$

Como $w = 1 + i$ es un polo simple se sigue que

$$\text{Res}(g, 1 + i) = \lim_{w \rightarrow 1+i} (w - 1 - i) \cdot \frac{1}{(w - 1 - i)(w - 1 + i)}$$

$$= \frac{1}{1 + i - 1 + i} = \frac{1}{2i}$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

Afirmación:

$$\int_{\beta_{sc}} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty$$

En efecto

$$|w^2 - 2w + 2| = |(w - 1 - i)(w - 1 + i)| \geq ||w| - (-1 - i)| \cdot ||w| - (-1 + i)|$$

$$= ||w| - \sqrt{2}| \cdot ||w| - \sqrt{2}| = (r - \sqrt{2})^2$$

Sabemos que la longitud de la semicircunferencia es πr , se sigue de la igualdad. Sean $A \subset \mathbb{C}$, $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, $\beta: [a, b] \rightarrow A$ un camino suave por partes y $L(\beta)$ su longitud. Si $|g(z)| \leq M, \forall w \in \beta$, y $M > 0$, entonces $\left| \int_{\beta} g(w) dw \right| \leq ML(\beta)$.

Se sigue que

$$\left| \int_{\beta_{sc}} \frac{1}{w^2 - 2w + 2} dw \right| \leq \int_{\beta_{sc}} \left| \frac{1}{w^2 - 2w + 2} \right| |dw| \leq \frac{\pi r}{(r - \sqrt{2})^2}$$

y

$$\frac{\pi r}{(r - \sqrt{2})^2} \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty.$$

CAPÍTULO V

DISCUSIÓN

5.1. Uno de los principales objetivos de esta tesis fue determinar el residuo de una función analítica sin necesidad de resolver directamente la integral de Cauchy. Para la demostración del teorema del residuo de Cauchy, se utilizó el teorema de Laurent, que establece que una función analítica definida en un dominio anular puede representarse mediante una expansión de Laurent cuyos coeficientes se determinan mediante la fórmula de la integral de Cauchy. Este resultado concuerda con trabajos previos en esta campo, en particular como los De Amo (2018), Gamelin (2001), Mitrinovic (1966) y Silverman (1984), quienes abordaron problemas similares en sus respectivas investigaciones.

5.2. Utilizando el teorema de la transformada de Laplace, obtenemos una función analítica con singularidades y una trayectoria cerrada que las abarca. Esto nos permite calcular la transformada de Laplace inversa de una función utilizando el teorema del residuo. De forma similar, las condiciones de Cauchy se han aplicado al cálculo de integrales trigonométricas. Suponemos que $F(\cos\theta, \sin\theta)$ es una función racional de dos variables continuas en la circunferencia unitaria. La idea subyacente de esta integral, utilizando el criterio del residuo, es transformarla en la integral de una función compleja, que también será racional. Sabemos que las únicas singularidades de esta función racional son los polos. Para calcular la integral, solo nos interesan los polos ubicados dentro del disco unitario. Según el teorema del residuo, tenemos:

$$\int_{\beta} G(\cos\theta, \sin\theta)dw = 2\pi i \sum_{n=1}^m \text{Res}(g, w_n)$$

5.3. Para evaluar la integral de $g(x)$ desde $-\infty$ a $+\infty$, utilizamos una curva semicircular en el plano complejo. Gracias al teorema de los residuos, se puede

calcular la integral sobre el eje real se calcula sumando los residuos de la función en sus singularidades dentro de la curva semicircular cerrada, multiplicada por $2\pi i$.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES

6.1. El criterio del residuo para una función analítica se define en la proposición 4.2.2 (Residuo de una función analítica en un polo de orden k), que permite determinar el residuo sin resolver directamente la integral de Cauchy.

6.2. El criterio del residuo para una función se obtiene mediante la transformada inversa de Laplace, como se indica en la proposición 4.3.1.2 (Transformada inversa de Laplace en función del residuo).

6.3. El criterio del residuo se utiliza para el cálculo de integrales trigonométricas de la forma $\int_0^{2\pi} G(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$.

6.4. El criterio del residuo se aplica para determinar el valor principal de integrales impropias, como se indica en la proposición 4.3.3 (Valor principal de Cauchy de la integral impropia).

CAPITULO VII

RECOMENDACIONES

7.1. Sería muy interesante realizar una investigación para aplicar el criterio del resto a series de sumas.

7.2. Sería muy interesante realizar un estudio para analizar el teorema de Rouché relativo a la localización de regiones del plano en las que una función analítica tiene ceros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ávila, G. (2011). Variáveis complexas e aplicações. 3 Ed. Rio de Janeiro: LTC
- Ahlfors, L. (1979). Complex Analysis. 3da ed. McGraw - Hill Higher Education.
- Apostol, T. (1987). Calculus. 2. Ed. New York: Wiley.
- Arredondo, J. y Alberto, C. (2019). Paskín matemática. Vol. 1, Colombia.
- Bartle, R. & Shebert, D. (1992). Introduction to Real Analysis. 2. Ed. [S.I.]: John Wiley & Sons, Inc.
- Camargo, R. F. (2005). Do Teorema de Cauchy ao Método de Cagniard. IMECC UNICAPM.
- Conway, J. (1978). Functions of one complex variable. 2. Ed. New York: SpringerVerlag.
- De Amo, E, and Úbeda, M. (2018). Complex Analysis: Theory of analytical functions of one variable. University of Almeria.
- Doetsch, G.(1974). Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation. New York Springer Science and Business Media.
- Freitag, E. and Busam, R. (2005). Complex Analysis. New York, Springer.
- Gamelin, T. (2001). Complex Analysis. New York, Spring, ISBN 9780387950693.
- Gelbaum, B. (1992). Problems in real and Complex Analysis. New York, Springer
- Gong, S. and Gong, Y. (2007), Concise Complex Analysis, World Scientific, New York,

ISBN 9789812706935.

Marcos, E. (2021). Diferenciación e integración de una serie de potencias sin utilizar la convergencia uniforme. [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Mayor de San Marcos]. Repositorio UNMSM.

Marsden, J. y Hoffman, M. (1987). Basic complex Analysis. 2da edc. W. H. freeman & compsnny. Nueva York.

Mitrinovic, D. (1966). Calculus of residues. Tutorial Text 4, Noordhoff.

Molero, M.,Salvador, A. ,Menarguez, T., Garmendia ,L. (2007). Análisis Matemático para ingeniería. Pearson Prentice Hall, Madrid.

Silverman, R. (1984). Complex analysis with applications. Dover publications Mineola.

Rubio, A. (2019). Una introducción a la teoría de integración en una variable compleja. [Tesis de Licenciatura, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. Repositorio UPTC.

Rudin, W. (1979). Análisis real y complejo. México, Alhambra, 84-205-0651-6.(MÑ).

Zill, D. y Jaqueline, D. (2008). Matemáticas avanzadas para ingeniería. Cálculo vectorial, análisis de Fourier y análisis, 3ra edición, México, McGraw-Hill, ISBN 978-970-10-6510-5.(VPO).