

**UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN – TACNA**

**Escuela de Posgrado**

**DOCTORADO EN CIENCIAS AMBIENTALES**

**SIMULACIÓN DE MODELO MATEMÁTICO PARA  
ESTIMAR LA CONCENTRACIÓN DE  $PM_{10}$  EN  
LA ZONA URBANA ALEDAÑA AL OVALO  
CUSCO DE LA CIUDAD DE TACNA, PERÚ**

**TESIS**

**PRESENTADA POR:**

**M. Sc. JAVIER LOZANO MARREROS**

**Para optar el Grado Académico de:  
DOCTOR EN CIENCIAS AMBIENTALES**

**TACNA – PERÚ**

**2 016**


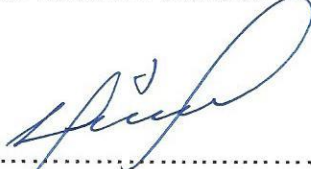
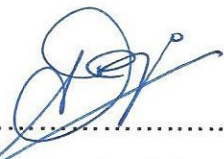

**UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN – TACNA**

**Escuela de Posgrado**

**DOCTORADO EN CIENCIAS AMBIENTALES**

**SIMULACIÓN DE MODELO MATEMÁTICO PARA ESTIMAR LA  
CONCENTRACIÓN DE PM<sub>10</sub> EN LA ZONA URBANA ALEDAÑA AL  
OVALO CUSCO DE LA CIUDAD DE TACNA, PERÚ**

Tesis sustentada y aprobada el 06 de junio del 2016, estando integrado el  
Jurado Calificador por:

Presidente	 ..... Dr. Alberto Savino Pacheco Pacheco
Secretario	 ..... Dr. Hugo Benito Canahua Loza
Miembro	 ..... Dr. Alberto Bacilio Quispe Cohaila
Asesor	 ..... Dr. Raúl Omar Gallegos Jara

### ***Dedicatoria***

*A mis padres por la vida que me dieron,  
la educación, consejos y sobretodo  
mucho amor.*

*A mi esposa y a mis hijos por su amor,  
cariño, motivación y comprensión.*

### ***Agradecimiento***

*Agradezco a mi asesor, por el apoyo académico brindado y por sus invaluable consejos.*

## CONTENIDO

Dedicatoria	iii
Agradecimiento	iv
RESUMEN	xix
ABSTRACT	xx
RESUMO	xxi
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	
1.1. Descripción del problema	3
1.2. Formulación del problema	5
1.3. Justificación e importancia	6
1.4. Objetivos	8
1.4.1. Objetivo general	8
1.4.2. Objetivos específicos	8
1.5. Hipótesis	9
1.5.1. Hipótesis General	9
1.5.2. Hipótesis específicas	9

## CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1.	Antecedentes del estudio	10
2.2.	Modelación matemática	15
2.3.	Modelos de dispersión atmosférica.	22
2.4.	Modelo Gaussiano de Dispersión	24
2.5.	Modelos eulerianos	29
2.5.1.	Término de advección	31
2.5.2.	Término de difusión molecular	32
2.6.	El método del elemento finito	34
2.6.1.	Discretización unidimensional	36
2.6.2.	Ecuaciones de los elementos	37
2.6.3.	Ensamble	39
2.6.4.	Condiciones de frontera	40
2.7.	El método del elemento finito en dos dimensiones	40
2.7.1.	Discretización bidimensional	40
2.7.2.	Ecuaciones de los elementos	41
2.7.2.1.	Método de residuos ponderados	51
2.7.2.2.	Método de Galerkin	58
2.7.3.	Ensamblaje y condiciones de frontera	61
2.8.	Material particulado	61
2.9.	Panorama mundial y nacional de los PM <sub>10</sub>	63

2.10. Material particulado $PM_{2,5}$	64
2.11. Material particulado $PM_{10}$	65
2.12. Reglamento de Estándares Nacionales de Calidad Ambiental del Aire	66

### CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO

3.1. Tipo de diseño de la investigación	69
3.2. Variables atmosféricas y de ubicación	69
3.3. Área de estudio	71
3.4. Protocolo para la medición de los $PM_{10}$ .	73
3.5. Ubicación de la estación de monitoreo	76
3.6. Equipos para medición de material particulado $PM_{10}$ .	78
3.7. Equipo utilizado en el proyecto	78
3.8. Instalación de la estación para el monitoreo	86
3.9. Fechas de monitoreo de los $PM_{10}$	88
3.10. Ecuación de Advección – Difusión	88
3.11. Formulación débil de la ecuación de advección–difusión	90
3.12. Formulación de Galerkin y aproximación de elementos finitos	92
3.13. Discretización del tiempo	95
3.14. La ecuación de advección-difusión como modelo de	98

dispersión	
3.15. Programas codificadas en MATLAB para solucionar la ecuación de advección-difusión	99
3.15.1. Función matriz_M	100
3.15.2. FUNCIÓN matriz_Kuxuy	111
3.15.3. Función ejemplo1g	115
3.15.4. Función gcoord_nodos	116
3.15.5. Función con_frontera	116
3.15.6. Función feeldof	116
3.15.7. Función det_jacobiano_xuv_yuv	117
3.15.8. Función funcforma_xy_coef	118
3.15.9. Función VerTri	120
3.15.10. Función tri_verticesnodos	121
3.15.11. Función funcforma_uv_coef	123
3.15.12. Función nuevascoord_uv_coef	126
3.15.13. Función matriz_F	128
3.15.14. Función integraldoble_fNuv	129
3.15.15. Función GaussLegendre_l2	130
3.15.16. Función NPLegendre	131
3.15.17. Función nuevascoord_uv_xuv_yuv	132
3.15.18. Función feasmb12	133

3.15.19. Función feasmb1	134
3.15.20. Función feaplyc2	134
3.16. Aplicaciones del método del elemento finito	134

#### CAPÍTULO IV: RESULTADOS

4.1. Estación de monitoreo de calidad de aire y meteorológica	150
4.2. Lugar y fechas de monitoreo	152
4.3. Parámetros evaluados por el equipo	153
4.4. Resultados del monitoreo de la estación ubicada en la Escuela Profesional de Metalurgia (ESME)–UNJBG	154
4.5. Resultados de la simulación del modelo numérico	167
4.5.1. Datos de entrada	167
4.5.2. Código del programa principal	173

#### CAPÍTULO V: DISCUSION

5.1. Comparación entre el resultado analítico de una ecuación de advección - difusión y la simulación del modelo numérico.	180
5.1.1. Resultado analítico de una ecuación de advección- difusión (EDP parabólica)	180
5.1.2. Resultado numérico de la ecuación de advección-difusión	182

5.1.3. Comparación entre los resultados analítico y numérico de la ecuación de advección - difusión	183
5.1.4. Prueba estadística ANDEVA entre los resultados exactos y la simulación	185
5.2. Comparación entre el resultado obtenido con el equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF la simulación del modelo numérico.	187
5.2.1. Prueba estadística ANDEVA	187
5.2.2. Prueba estadística ANDEVA entre los resultados del equipo y la simulación correspondientes al 29 de marzo del 2016.	188
CONCLUSIONES	191
RECOMENDACIONES	193
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	195
ANEXO	200

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.	Pasos para el desarrollo y aplicación de modelos de simulación de sistemas	19
Tabla 2.	Estándares Nacionales de Calidad Ambiental del Aire D.S. N° 074-2001-PCM. (Todos los valores son concentraciones en microgramos por metro cúbico. NE significa no exceder)	67
Tabla 3.	Valores de tránsito	68
Tabla 4.	Valores referenciales	68
Tabla 5.	Criterios de ubicación de la toma muestra por contaminante y escala de medición	74
Tabla 6.	Cronograma de monitoreo de los PM <sub>10</sub>	88
Tabla 7.	Comparación de la solución exacta y la simulación del ejemplo 3.2.	139
Tabla 8.	Comparación de la solución exacta y la simulación del ejemplo 3.3.	144
Tabla 9.	Condiciones de frontera del ejemplo 3.4	146
Tabla 10.	Comparación de la solución exacta y la simulación del ejemplo 3.4.	150

Tabla 11.	Equipos meteorológicos utilizados durante el monitoreo	151
Tabla 12.	Equipos de calidad de aire utilizados durante el monitoreo	152
Tabla 13.	Lugar(punto) de monitoreo	153
Tabla 14.	Fechas consideradas del monitoreo del material particulado PM <sub>10</sub> para la simulación.	153
Tabla 15.	Datos meteorológicos de la estación de monitoreo ubicada en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG, del día martes 29 de marzo del 2016	155
Tabla 16.	Datos meteorológicos de la estación de monitoreo ubicada en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG, del día miércoles 30 de marzo del 2016	156
Tabla 17.	Datos meteorológicos de la estación de monitoreo ubicada en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG, del día jueves 31 de marzo del 2016	157
Tabla 18.	Datos meteorológicos de la estación de monitoreo ubicada en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG, del día viernes 1 de abril del 2016	158
Tabla 19.	Resultados del monitoreo de la estación en la ESME obtenido con el equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF, el día martes 29/03/2016	160

Tabla 20.	Resultados del monitoreo de la estación en la ESME obtenido con el equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF, el día miércoles 30/03/2016	161
Tabla 21.	Resultados del monitoreo de la estación en la ESME obtenido con el equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF, el día jueves 31/03/2016	162
Tabla 22.	Resultados del monitoreo de la estación en la ESME obtenido con el equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF, el día viernes 1/04/2016	163
Tabla 23.	Números de Schmidt usados en estudios de transporte de contaminantes sobre entornos urbanos.	170
Tabla 24.	Coordenadas UTM y geográficas del punto de monitoreo en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG.	172
Tabla 25.	Dominio de la simulación en coordenadas cartesianas en la zona aledaña al Ovalo Cusco.	172
Tabla 26.	Punto de monitoreo en la simulación en coordenadas cartesianas ubicado en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG.	172
Tabla 27.	Concentración de material particulado PM <sub>10</sub> obtenido con el equipo y con la simulación del modelo numérico	174

	propuesto. Martes 29 de marzo del 2016.	
Tabla 28.	Concentración de material particulado $PM_{10}$ obtenido con el equipo y con la simulación del modelo numérico propuesto. Miércoles 30 de marzo del 2016.	174
Tabla 29.	Concentración de material particulado $PM_{10}$ obtenido con el equipo y con la simulación del modelo numérico propuesto. Jueves 31 de marzo del 2016.	175
Tabla 30.	Concentración de material particulado $PM_{10}$ obtenido con el equipo y con la simulación del modelo numérico propuesto. Viernes 01 de abril del 2016.	176
Tabla 31.	Concentración de material particulado $PM_{10}$ obtenido con la simulación del modelo numérico propuesto en 1681 nodos	178
Tabla 32.	Solución exacta de la ecuación de advección-difusión	181
Tabla 33.	Resultado numérico de la ecuación de advección-difusión	182
Tabla 34.	Comparación entre los resultados analítico y numérico (simulación) de la ecuación de advección-difusión	183

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.	Concepto de modelación simple	16
Figura 2.	Principales fases de la modelación.	20
Figura 3.	Elevación del perfil de concentración de un penacho gaussiano	24
Figura 4.	Curva de distribución normal (Gaussiana).	25
Figura 5.	Desarrollo de series de tiempo de un penacho	27
Figura 6.	Dominio mallado en el plano cartesiano $xy$ .	34
Figura 7.	Dominio unidimensional $x$ , cuyos “elementos” son líneas	36
Figura 8.	Dominio en el plano cartesiano $xy$ , cuyos “elementos” son triángulos	37
Figura 9.	El $i$ -ésimo triángulo con sus respectivos nodos	41
Figura 10.	Función de aproximación $u(x, y)$ .	43
Figura 11.	Función base $N_1$	44
Figura 12.	Función base $N_2$	44
Figura 13.	Función base $N_3$	44
Figura 14.	Dominio bidimensional con un solo “elemento” triangular	49

Figura 15.	Dominio $\Omega$ y su contorno $\Gamma$	52
Figura 16.	Distribución típica de las partículas en la atmosfera donde se muestran las partículas finas y las gruesas	62
Figura 17.	El mapa de Perú y Tacna	72
Figura 18.	Zona urbana aledaña al Ovalo Cusco	72
Figura 19.	La UNJBG ubicada en la zona urbana aledaña al Ovalo Cusco	73
Figura 20.	El Ovalo Cusco ubicado en la ciudad de Tacna	76
Figura 21.	Lugar de monitoreo ESME- UNJBG, 367568.00 m E (Coordenada Este) y 8006300.00 m S (Coordenada Norte)	77
Figura 22.	La estación de monitoreo del Gobierno Regional de Tacna ubicado en la Ciudad Universitaria de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann, donde se realizó el monitoreo de $PM_{10}$ desde el 28 de marzo al 05 de abril del 2016	77
Figura 23.	El equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF.	79
Figura 24.	Vista del equipo instalado en la Loza deportiva de la ESME - UNJBG	79
Figura 25.	Equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF para la medición de $PM_{10}$ y $PM_{2,5}$	80

Figura 26.	Loza deportiva de la ESME donde se instaló la estación de monitoreo	87
Figura 27.	Estación de monitoreo instalado en la loza deportiva de la ESME-UNJBG.	87
Figura 28.	El $i$ -ésimo elemento triangular del dominio	100
Figura 29.	El $i$ -ésimo elemento triangular con sus coordenadas	100
Figura 30.	Dos elementos triangulares del dominio	101
Figura 31.	Nuevo $i$ -ésimo elemento triangular del dominio con sus coordenadas	107
Figura 32.	Grafica de la función VerTri	121
Figura 33.	Dominio discretizado con sus nodos	123
Figura 34.	Dominio discretizado del ejemplo 3.2	135
Figura 35.	Dominio del ejemplo 3.3	140
Figura 36.	Dominio discretizado del ejemplo 3.4	145
Figura 37.	Niveles de PM <sub>10</sub> en la estación de monitoreo de la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG	164
Figura 38.	Gráfica de los puntos dirección del viento versus la concentración de PM <sub>10</sub> en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG	165
Figura 39.	Gráfica de los puntos velocidad del viento versus la concentración de PM <sub>10</sub> en la Escuela Profesional de	166

Metalurgia – UNJBG

Figura 40.	Resultados de la solución numérica y analítica de la ecuación de advección - difusión	185
Figura 41.	Nivel de confianza de la comparación entre el resultado numérico y analítico de la ecuación de advección - difusión	186
Figura 42.	Niveles entre el resultado numérico y analítico de la ecuación de advección - difusión	186
Figura 43.	Concentración de PM <sub>10</sub> obtenidos con el equipo y la simulación del modelo numérico en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG.	188
Figura 44.	Nivel de confianza de la comparación entre los resultados obtenidos con el equipo y la simulación del modelo numérico de los PM <sub>10</sub> en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG	189
Figura 45.	Niveles de PM <sub>10</sub> entre los resultados obtenidos con el equipo y la simulación del modelo numérico de los PM <sub>10</sub> en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG	189

## RESUMEN

En la presente tesis se realizó una descripción teórica del método del elemento finito, el cual se utiliza en la solución de la ecuación de advección-difusión, que es una ecuación diferencial parcial parabólica y representa la concentración de un contaminante que se dispersa. Se desarrollaron programas computacionales (funciones codificadas en el lenguaje de programación MATLAB), para obtener la solución de la ecuación diferencial de advección-difusión, como por ejemplo, la solución de una integral doble sobre un dominio bidimensional compuesto de múltiples triángulos. Se instaló una estación de monitoreo de calidad de aire, de propiedad del Gobierno Regional de Tacna, a un costado del edificio de la Escuela Profesional de Metalurgia de la UNJBG; las concentraciones de los  $PM_{10}$  obtenidas con el equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF, y los obtenidos con la simulación de la solución de la ecuación de advección-difusión, son aproximados; por ejemplo, la concentración obtenida con el equipo el día 29 de marzo a las 9:00 horas es  $94,34 \mu\text{g}/\text{m}^3$  y con la simulación se obtuvo  $94,21 \mu\text{g}/\text{m}^3$ . Se concluye el trabajo mostrando que es el viento, el parámetro que más influye en la dispersión de los  $PM_{10}$ .

Palabras clave: Elemento finito, advección-difusión,  $PM_{10}$ , simulación

## **ABSTRACT**

In this thesis a theoretical description of the finite element method, which is used in the solution of the advection-diffusion equation, which is a parabolic partial differential equation and represents the concentration of a contaminant that is dispersed was performed. Computer programs (codified in MATLAB programming language functions) were developed to obtain the solution of differential advection-diffusion equation, such as the solution of a double integral over a two-dimensional domain composed of multiple triangles. Station air quality monitoring, owned by the Regional Government of Tacna, next to the building of the Professional School of Metallurgy UNJBG was installed; PM10 concentrations obtained with equipment Thermo Scientific TEOM 1405-DF, and those obtained with the simulation of the solution of the advection-diffusion equation are approximate; for example, the concentration obtained with the team on March 29 at 9:00 pm is 94.34 ug / m<sup>3</sup> and simulation 94.21 ug / m<sup>3</sup> was obtained. The work concludes by showing that it is the wind, the parameter that most influences the dispersion of PM10.

Keywords: Finite element, advection-diffusion, PM10, simulation

## RESUMO

Neste tese uma descrição teórica do método dos elementos finitos, o qual é utilizado na solução da equação advecção-difusão, que é uma equação diferencial parcial parabólica e representa a concentração de um contaminante que é disperso foi realizada. programas de computador (codificado em funções da linguagem de programação MATLAB) foram desenvolvidos para obter a solução da equação diferencial advection-difusão, tais como a solução de um duplo integrante ao longo de um domínio bidimensional composta de vários triângulos. estação de monitorização da qualidade do ar, de propriedade do Governo do Tacna Regional, ao lado do edifício da Escola Profissional de Metalurgia UNJBG foi instalado; As concentrações de PM10 obtida com equipamento Thermo Scientific TEOM 1405-DF, e os obtidos com a simulação da solução da equação advecção-difusão são aproximados; por exemplo, a concentração obtida com a equipe em 29 de Março às 9:00 pm é 94,34 ug / m<sup>3</sup> e simulação 94,21 ug / m<sup>3</sup> foi obtido. O trabalho conclui mostrando que é o vento, o parâmetro que mais influencia a dispersão de PM10.

Palavras-chave: Elementos finitos, advecção-difusão, PM10, simulação

## INTRODUCCIÓN

La presente tesis tiene el propósito de desarrollar un programa para simular la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica de advección-difusión (modelo matemático) que describe la dispersión de un contaminante, en este caso de material particulado menor a 10 micras ( $PM_{10}$ ), y compararlo con datos reales obtenidos de una estación de monitoreo de calidad de aire e identificar cual es el parámetro meteorológico que más influye en el nivel de concentración del  $PM_{10}$ . La validación de los datos obtenidos con los modelos matemáticos dependerá de cuan aproximado esté con respecto a los datos reales, tal como se muestra con los resultados que se obtuvieron en Christchurch, Nueva Zelanda, una ciudad con niveles altos de contaminación atmosférica por partículas, en donde las concentraciones medias observadas ( $42,9 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ) y modeladas ( $43,4 \text{ microgramos } \text{m}^3$ ) son aproximadas (Burns & Higashi, 1991; Gaines Wilson & Zawar-Reza, 2006).

El trabajo consta de cinco capítulos. En el primer capítulo se plantea si son válidos los datos obtenidos con la simulación del modelo matemático que estima la concentración de material particulado  $PM_{10}$ , comparado con los de un equipo de muestreo de partículas, considerando las condiciones

atmosféricas, en la zona urbana aledaña al Ovalo Cusco de la ciudad de Tacna, Perú. En el segundo capítulo se describen en líneas generales los modelos de dispersión atmosférica; por ejemplo, el modelo Euleriano. En el tercer capítulo se desarrolla el método del elemento finito (MEF) aplicado a la solución de la ecuación de advección-difusión, y se elaboran programas computacionales. En el cuarto capítulo se obtienen los parámetros meteorológicos y los resultados de las concentraciones de los  $PM_{10}$  mediante una estación de monitoreo de calidad de aire. También se obtienen las concentraciones de los  $PM_{10}$  mediante la simulación de un programa codificado en el lenguaje de programación MATLAB.

Y en el quinto capítulo se comparan los resultados. Se observa que la diferencia entre los resultados obtenidos con el equipo y la simulación del modelo numérico de los  $PM_{10}$  en el punto de monitoreo ubicado en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG (zona aledaña al ovalo Cusco), no son significativos.

## **CAPÍTULO I**

### **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

#### **1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA**

En los últimos años, la información sobre los efectos que ocasiona al medio ambiente y a la salud pública las emisiones de sustancias a la atmósfera, tales como el material particulado  $PM_{10}$  se ha concentrado principalmente en las grandes ciudades o áreas conurbadas con intensa actividad de procesos industriales y elevado flujo vehicular de automotores.

En nuestro país la contaminación del aire es uno de los principales problemas ambientales; el tema de la calidad de aire viene a adquirir importancia significativa desde el año 2001, año en el que el gobierno emitió el D.S. 074-2001-PCM, referido a los Estándares Nacionales de Calidad Ambiental del Aire; y el D.S. 047-2001-MTC de Límites Máximos Permisibles (LMP) de emisiones de contaminantes para vehículos automotores que circulan en la red vial. Estos documentos dan pie al inicio de procesos de evaluación, monitoreo continuos de los estándares y determinación de niveles de alerta para la población. El año 2008, el Ministerio del Ambiente actualiza los Estándares de Calidad Ambiental del Aire (ECA) mediante el DS N° 003-2008-MINAM.

La Evaluación y Monitoreo de la calidad del aire en el Perú, es competencia del Ministerio de Salud, y en lo que corresponde a la provincia de Tacna es la Dirección Regional de Salud Ambiental - (DIRESA); no obstante, el servicio de salud pública es inadecuado, lo cual amerita impulsar un sistema integral y permanente de evaluación y monitoreo.

En la zona urbana aledaña al Ovalo Cusco, que comprende las avenidas Cusco, Circunvalación Sur y Tarapacá de la ciudad de Tacna, las emisiones de contaminantes se han incrementado notablemente debido a que este Ovalo, es la principal entrada y salida a la ciudad de Tacna del distrito Coronel Gregorio Albarracín Lanchipa (C.G.A.L).

La población que vive en la zona aledaña a estas avenidas y los estudiantes de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann (UNJBG), institución que colinda con el Ovalo Cusco, estarían siendo afectados en su salud por el incremento en las emisiones de contaminantes, específicamente por el aumento en la concentración de material particulado PM<sub>10</sub>.

Para obtener los valores correspondientes a las mediciones de las concentraciones de material particulado PM<sub>10</sub> se utilizó una estación de monitoreo. Para validar los resultados que muestre el modelo numérico, se utilizó los resultados obtenidos de la estación de monitoreo, específicamente del equipo de muestreo de partículas, y se comparó con

los obtenidos en el modelo numérico. Debido al alto costo que representa obtener los datos utilizando una estación de monitoreo, es que se propone en esta investigación, además de conocer la concentración del material particulado  $PM_{10}$  obtenido con el monitoreo, el desarrollo de un software basado en un modelo numérico de dispersión de contaminantes, que estime, mediante la simulación, la concentración de material particulado  $PM_{10}$  en la zona urbana comprendida entre las avenidas Cusco, Circunvalación Sur y Tarapacá de la ciudad de Tacna. Este software, que estará al alcance de una mayor cantidad de usuarios, permitirá conocer resultados que ayudarán a los encargados de las políticas ambientales, a tomar decisiones tendientes a minimizar la contaminación del aire por material particulado  $PM_{10}$ . Luego del análisis respecto a esta problemática se plantean las siguientes interrogantes:

## **1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA**

### **1.2.1 Interrogante general**

¿Serán válidos los datos obtenidos con la simulación del modelo matemático que estima la concentración de material particulado  $PM_{10}$ , comparado con los de un equipo de muestreo de partículas, considerando los parámetros meteorológicos, en la zona urbana aledaña al Ovalo Cusco de la ciudad de Tacna, Perú?

### **1.2.2 Interrogantes específicas**

¿Cuáles serán los parámetros meteorológicos utilizados en la simulación del modelo matemático, que estima la concentración de material particulado  $PM_{10}$ , que influirán en el nivel de concentración en la zona urbana aledaña al Ovalo Cusco de la ciudad de Tacna, Perú?

¿Serán similares los datos obtenidos con la simulación del modelo matemático, que estima la concentración del material particulado  $PM_{10}$ , con los datos de un equipo de muestreo de partículas?

### **1.3 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA**

La población de Tacna, las autoridades locales, regionales y nacionales relacionadas con la protección del medio ambiente, necesitan conocer si las concentraciones de contaminantes atmosféricos están por encima de los Estándares de Calidad Ambiental (ECA), para de este modo llevar a cabo medidas de prevención para minimizar la contaminación, si es que los hubiere.

En las últimas décadas, la modelación matemática se convirtió en una herramienta habitual de diversas disciplinas que buscan explicar o reproducir sus respectivas observaciones. La modelación permite determinar los resultados o predecir lo que podría ocurrir a un sistema a partir de un conjunto de datos de entrada. Existen modelos diseñados o

paquetes de programas para casi cada tarea que se pueda plantear, ya sea el tratamiento de aguas residuales, la optimización de las rutas para los camiones municipales de transporte de residuos sólidos, la identificación de una localización óptima para el vertido de aguas residuales (con objeto de maximizar la mezcla y dilución) o por supuesto el modelamiento de la calidad del aire; el problema es que no se conoce el código fuente y esto limita poder adecuarlo a la realidad tacneña.

Desde el punto de vista de la dispersión de contaminantes en el aire, la modelación se utiliza para saber, entre otras cosas, cómo cambia en el tiempo y el lugar la concentración o la razón de mezcla de una sustancia o traza habitualmente identificada como un contaminante criterio, a objeto de predecir y analizar la calidad del aire y de esta forma colaborar en las decisiones políticas y de planificación respecto a la gestión ambiental, mediante el desarrollo de planes, programas, proyectos y normas de emisión o calidad del aire.

Específicamente, en este trabajo de investigación se estimará, mediante la simulación de un modelo numérico, la concentración de material particulado  $PM_{10}$ , en la zona urbana aledaña a las avenidas Cusco, Circunvalación Sur y Tarapacá de la ciudad de Tacna. Una vez conocidos los datos de entrada, con este programa se podrá obtener los resultados en forma inmediata, permitiendo tomar mejores decisiones y manejar con

eficiencia recursos como el tiempo, el dinero y las personas. Con estos resultados, las autoridades regionales encargados de las políticas ambientales deberán tomar las medidas necesarias, conducentes a minimizar el impacto en la contaminación del aire por material particulado  $PM_{10}$ , evitar daños en la salud de la población, si los resultados que se obtuvieren demostraran que existe tal contaminación.

## **1.4 OBJETIVOS**

### **1.4.1 Objetivo general**

Determinar la validez de los datos obtenidos con la simulación del modelo matemático, que predice la concentración de material particulado  $PM_{10}$ , en la zona urbana aledaña al Ovalo Cusco de la ciudad de Tacna, considerando las condiciones atmosféricas y de ubicación, con respecto a los datos obtenidos de un equipo de muestreo de partículas.

### **1.4.2 Objetivo específicos**

- Identificar los parámetros meteorológicos que influyen en el nivel de concentración de material particulado  $PM_{10}$ , utilizadas en la simulación del modelo matemático para estimar la concentración de material particulado  $PM_{10}$  en la zona urbana aledaña al Ovalo Cusco de la ciudad de Tacna, Perú.

- Determinar la similitud entre los datos obtenidos de la simulación del modelo matemático que estima la concentración de material particulado  $PM_{10}$ , y los datos obtenidos de un equipo de muestreo de partículas  $PM_{10}$ .

## **1.5 HIPÓTESIS**

### **1.5.1 Hipótesis general**

La simulación del modelo matemático que estima la concentración de material particulado  $PM_{10}$  en la zona urbana aledaña al Ovalo Cusco de la ciudad de Tacna, considerando los parámetros meteorológicos, con respecto a un equipo de muestreo de partículas, es válida.

### **1.5.2 Hipótesis específicas**

- El viento, es el parámetro meteorológico que influye en los resultados de la simulación del modelo matemático que estima la concentración de material particulado  $PM_{10}$  en la zona urbana aledaña al Ovalo Cusco de la ciudad de Tacna, Perú.
- Los datos obtenidos de la simulación del modelo matemático, que estima la concentración de material particulado  $PM_{10}$ , y los datos obtenidos de un equipo de muestreo de partículas, son similares.

## CAPÍTULO II

### MARCO TEÓRICO

#### 2.1 ANTECEDENTES DEL ESTUDIO

La validación de los datos obtenidos con los modelos matemáticos dependerá de cuan aproximado este con respecto a los datos reales, tal como se muestra con los resultados que se obtuvieron en Christchurch, Nueva Zelanda, una ciudad con niveles altos de contaminación atmosférica por partículas, en donde las concentraciones medias observadas ( $42,9 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ) y modeladas ( $43,4 \text{ microgramos } \text{m}^3$ ) son aproximadas (Burns & Higashi, 1991; Gaines Wilson & Zawar-Reza, 2006).

La concentración de  $\text{PM}_{10}$  en las dos estaciones utilizando el DataRam 4 fue de  $23,64 \mu\text{g}/\text{m}^3$  y  $36,86 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ; y utilizando el muestreador de alto volumen  $\text{PM}_{10}$  fue de  $25,09 \mu\text{g}/\text{m}^3$  y  $36,64 \mu\text{g}/\text{m}^3$ . Se observa que los datos obtenidos con el modelo y el muestreador son aproximados. (R. Alvarado, Montiel, & Deluque, 2011).

La simulación es la ejecución de un modelo matemático en el computador para obtener las respuestas de las ecuaciones y compararlas con los datos reales obtenidos en un determinado problema (Peláez & Mejía, 2009).

Las comparaciones entre simulaciones y mediciones de PM<sub>10</sub> en tres sitios (industrial, urbano y rural) fueron satisfactorias (Wang, Chen, Wang, Lee, & Tsai, 2009).

La simulación también se podría dar con un inventario de datos, y se podría comparar con los resultados de otros modelos (Barna & Gimson, 2002).

Las concentraciones de partículas (PM<sub>10</sub>) también varían de acuerdo al interior y exterior de un hogar, como lo muestran los resultados en Agra, India en que las concentraciones medias anuales de partículas PM<sub>10</sub> en interiores y al aire libre fueron 247 mg/m<sup>3</sup> y 255 mg/m<sup>3</sup> (Massey, Kulshrestha, Masih, & Taneja, 2012).

En las tres ciudades más grandes de Taiwán se llevó a cabo un muestreo de aerosoles atmosféricos para medir el PM<sub>10</sub>. De acuerdo con estos resultados, las concentraciones de PM<sub>10</sub> en masa en Taipei, Taichung y Kaohsiung fueron 42,19, 60,99 y 77,10 g/m<sup>3</sup>, respectivamente (Chen et al., 1999).

Así mismo, la velocidad y la dirección del viento influye en el aumento o disminución de la concentración de PM<sub>10</sub>; cuando la mayor cantidad de polvo de China ha pasado por Kangnung bajo la influencia de un viento del oeste, la concentración PM<sub>10</sub> alcanzó 340 mg/m<sup>3</sup> (Choi & Choi, 2008).

El análisis de los niveles de PM<sub>10</sub> debe centrarse en las variaciones espaciales y temporales de los contaminantes y sus posibles fuentes (Unal, Toros, Deniz, & Incecik, 2011).

Las partículas en suspensión PM<sub>10</sub>, según la predicción del modelo HYSPLIT muestran que la contaminación por metales pesados de las emisiones industriales en una determinada área está dominada por las fracciones de tamaño ultra-finos (<0,66 μm) y fino (<2,5 μm) (Chen, Mao, & Lin, 1999).

También el tráfico vehicular en vías de acarreo ha sido identificado como la más prolífica fuente de MP fugitivo, y puede contribuir con cerca del 80% del total de MP emitido (Angulo, Huertas, & Restrepo, 2011).

En las tres ciudades más grandes de Taiwán se llevó a cabo un muestreo de aerosoles atmosféricos para medir el PM<sub>10</sub>. De acuerdo con estos resultados, las concentraciones de PM<sub>10</sub> en masa en Taipei fue de 42,19 μg/m<sup>3</sup>, Taichung 60,99 μg /m<sup>3</sup> y Kaohsiung 77,10 μg/m<sup>3</sup> (Chen et al., 1999).

Los principales contaminantes atmosféricos en la Europa más desarrollada son las partículas en suspensión, el dióxido de nitrógeno y el ozono troposférico. Los niveles medios de PM<sub>10</sub> en ciudades como Berlín, Londres o Ámsterdam suelen aproximarse a 30-35 μg/m<sup>3</sup> (Querol, 2008).

La concentración de material particulado  $PM_{10}$  en la ciudad de Riobamba, lo cual proviene de la ceniza emanada por el volcán Tungurahua, presentó un promedio aritmético de  $48 \mu\text{g}/\text{m}^3$ , hallándose por debajo de los  $50 \mu\text{g}/\text{m}^3$  límite permisible (Jiménez & Carlos, 2010).

Los óxidos de minerales contribuyen a las concentraciones de  $PM_{10}$ . Las concentraciones de  $PM_{10}$  en masa representan una media del  $26,4 \pm 16\%$  ( $n = 1090$ ) de la masa de  $PM_{10}$  (Limbeck et al., 2009).

Las concentraciones de  $PM_{10}$  se encontraron altas y excedían los límites permisibles exigidos por el Gobierno de la India ( $500 \mu\text{g}/\text{m}^3$  para áreas industriales,  $200 \mu\text{g}/\text{m}^3$  para áreas residenciales, y  $100 \mu\text{g}/\text{m}^3$  para áreas sensibles) en todas las locaciones (Arciniégas Suárez, 2012).

Los modelos estadísticos paramétricos Gamma presentan mejores aciertos que los no paramétricos para las concentraciones de  $PM_{10}$  con valores  $240 \mu\text{g}/\text{m}^3$  para el año 2001; y los modelos no paramétricos presentan mejores aciertos para aquellas que exceden los  $240 \mu\text{g}/\text{m}^3$  de  $PM_{10}$  para todos los años (S. A. Alvarado, Silva, & Cáceres, 2010).

Cuando se simula el promedio diario de material particulado  $PM_{10}$  y este es mayor que  $150 \text{mg}/\text{m}^3$ . Evidentemente es necesario estudiar los impactos de origen antes de establecer un modelo de simulación (Liu, 2009).

Se ha utilizado el modelo Gaussiano para estimar el impacto de las distintas fuentes de emisión de PM<sub>10</sub>. Con esta metodología se pudo estimar la variación estacional e interanual de PM<sub>10</sub>, considerando la influencia de las variables meteorológicas y establecer la importancia relativa de las distintas fuentes de emisión (Abril & Diez, 2010).

Para registrar la composición y las concentraciones promedios ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ) de material particulado suspendido en el aire de un sector correspondiente al área urbana de la ciudad de Santa Marta, departamento del Magdalena, Colombia, se utilizó el método gravimétrico con un equipo muestreador de alto volumen (Manjarrés García, Manjarrés Pinzón, & Linero Cueto, 2005).

Se debe elegir una muestra para realizar las mediciones, como la que se llevó a cabo en un ambiente suburbano cerca de una carretera principal en Kuopio, Finlandia. Las concentraciones en masa de las partículas finas (PM<sub>2.5</sub>) se midieron simultáneamente en las distancias de 12, 25, 52 y 87 m desde el centro de una carretera principal a una altura de 1,8 m, con equipos de muestreo idénticas (Tiitta et al., 2002).

La estabilidad atmosférica se utiliza para el estudio de los parámetros que afectan a las concentraciones ambientales de contaminantes, especialmente en el caso de complejas áreas del terreno (Zoras, Triantafyllou, & Deligiorgi, 2006).

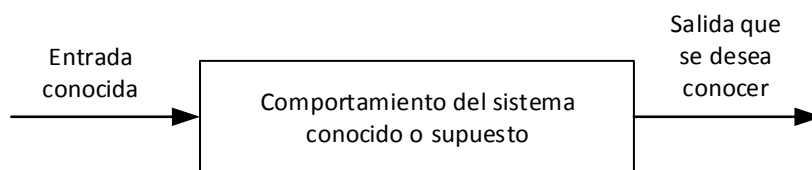
## 2.2 MODELACIÓN MATEMÁTICA

En las últimas décadas, la modelación se convirtió en una herramienta habitual de diversas disciplinas que buscan explicar o reproducir sus respectivas observaciones. Un modelo matemático es un conjunto de expresiones matemáticas que describen el comportamiento de las variables que caracterizan un sistema y se obtiene al estudiar las leyes físicas que están involucradas en el proceso (Peláez & Mejía, 2009).

Un modelo matemático se define, de manera general, como una formulación o una ecuación que expresa las características esenciales de un sistema físico o de un proceso en términos matemáticos (Chapra & Canale, 2007). También (Burns & Higashi, 1991) señalan: “La modelación matemática es una metodología sistemática de comprobado éxito en el descubrimiento y entendimiento de los procesos y causas subyacentes en la naturaleza basada sobre sus partes observables y sus relaciones”.

Como se muestra esquemáticamente en la Figura 1, la modelación permite determinar los resultados o predecir lo que podría ocurrir a un sistema a partir de un conjunto de datos de entrada. Suponiendo que se desea modelar un contaminante descargado a la atmósfera a través de una chimenea. Los datos de partida serán la altura de la chimenea, la tasa de emisión del contaminante, las condiciones meteorológicas, la topografía del

terreno, las concentraciones básicas, etc. Mientras que los resultados esperados serán los niveles del contaminante a una determinada distancia de la fuente o las tasas de deposición del contaminante sobre el terreno.



**Figura 1. Concepto de modelación simple**

*Fuente:* Kiely, 1999

El nivel de sofisticación puede variar enormemente entre las diversas implementaciones de los modelos, no obstante, la sofisticación del modelo depende en general del nivel de comprensión y entendimiento del sistema en sí. Por ejemplo, para modelar la hidrodinámica del flujo de un río, los modelos usados más comúnmente son unidimensionales; es decir, modelos que dan un valor único a la velocidad en cada corte transversal. En el extremo más sofisticado se encuentra la solución numérica completa de las ecuaciones que describen completamente el flujo total (Kiely, 1999).

Algunas veces, no se comprende completamente el problema o el sistema no se encuentra bien definido, dando lugar a que el conocimiento y manejo del sistema de simulación sea incompleto. Esta es la situación de muchos problemas reales en el mundo. Por ejemplo, el estudio del

movimiento de un contaminante en las aguas subterráneas o en el aire puede verse dificultado debido al conocimiento incompleto de algunos de los parámetros de campo, tales como la conductividad hidráulica, la rapidez y dirección del viento o las reacciones químicas que afectan a los contaminantes en su trayecto. Muchos de los problemas se resuelven analíticamente para condiciones en régimen estacionario (es decir, condiciones del problema que no varían con el tiempo); pero en la realidad, la mayoría de los problemas presentan condiciones que cambian con el tiempo o simplemente no tienen soluciones analíticas, debiendo ser resueltas numéricamente.

No solo Burns & Higashi (1991) señalaron a la modelación como una metodología sistemática, Tanji (1994) y Kiely (1999) coinciden en que la modelación es una metodología que sigue o se ajusta a un conjunto de reglas o principios racionalmente enlazados entre sí. Esta aproximación metodológica, sin ser exactamente coincidente para estos autores en el número y alcance de sus etapas, concuerda en la necesidad de analizar y definir el problema, construir o seleccionar el modelo, especificar los valores de las variables y los parámetros, ejecutar la modelación, evaluar y validar los resultados, ver Tabla 1.

El análisis y definición del problema para efectos de la modelación difiere poco del utilizado en cualquier otra herramienta de análisis.

Especialmente, implica estudiar los procesos físicos, químicos o biológicos o de otra índole; identificar aquellos procesos que son esenciales y dominantes; reconocer el problema, especificar los objetivos de la modelación e identificar aquellas variables del sistema en estudio que son controlables o no.

El primer paso de la construcción o selección de un modelo es determinar qué propiedades del sistema real permanecen fijas (parámetros) y cuáles pueden variar durante todo el funcionamiento del modelo (variables), para, a continuación, deducir, desarrollar o seleccionar una expresión matemática que describa el sistema. Esta puede ser tan sencilla como una simple expresión algebraica o una ecuación diferencial o compleja como un conjunto de ecuaciones diferenciales y expresiones algebraicas.

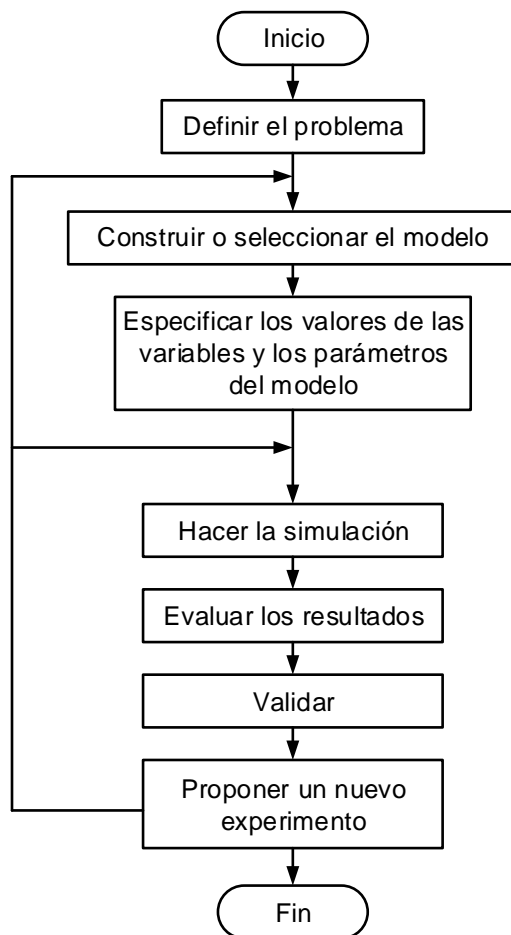
*Tabla 1*

**Pasos para el desarrollo y aplicación de modelos de simulación de sistemas**

<b>Situación del problema y objetivos del estudio</b>
Reconocimiento de una situación problemática concreta Identificación de los objetivos de la modelación
<b>Análisis del sistema</b>
Aislar el sistema de interés del entorno de dicho sistema Evaluación de los datos existentes Conceptualización del modelo Formulación
<b>Síntesis del sistema</b>
Modelar en ordenador, programación. Verificación del esquema numérico Calibración del modelo Sensibilidad del modelo Validación del modelo usando otros conjuntos de datos Puesta en marcha del modelo
<b>Análisis de simulación</b>
Evaluación e interpretación de los resultados simulados Nuevo examen de los análisis y síntesis del sistema

Fuente: Adaptado de Tanji, 1994

Luego de construir o seleccionar el modelo, es necesario especificar los valores que tomarán las variables y parámetros durante la modelación, a objeto que dichos valores reflejen en la mejor forma posible el estado del sistema, ver Figura 2.



**Figura 2. Principales fases de la modelación**

*Fuente:* Kiely, 1999

La ejecución del modelo propiamente tal, consiste en resolver analíticamente o numéricamente la(s) ecuación(es) y obtener los resultados de dicha ejecución.

Las conclusiones que pueden extraerse de una modelación dependen, naturalmente, del grado en el cual el modelo refleja al sistema

real, pero también dependen del diseño del modelo en un sentido estadístico.

En la mayoría de las situaciones, el analista tiene información disponible para comparar los resultados de la modelación con datos del sistema real, datos del desempeño de sistemas similares y el conocimiento propio del analista sobre la operación del sistema real. Sin embargo, la información obtenida de estas fuentes probablemente no es suficiente para validar las conclusiones derivadas de la simulación. Así pues, la única prueba verdadera de una simulación es qué tan bien se desempeña el sistema real después de que los resultados del estudio se hayan puesto en ejecución.

La validación se refiere al hecho de probar el modelo para garantizar que la simulación esté correcta. Específicamente, se trata de verificar si el modelo representa al sistema real de manera adecuada. Durante el desarrollo, selección o aplicación del modelo, pueden surgir errores en cualquiera de las etapas de la modelación. El modelo puede funcionar, pero fallar en la producción de resultados correctos.

Con base en los resultados de la modelación, puede realizarse un nuevo experimento de modelación. Se pueden cambiar, entre otros, los parámetros, las variables, las normas de decisión, las condiciones iniciales y la duración del funcionamiento. Se puede reproducir la modelación con

niveles de emisión de contaminantes o precios del producto diferentes para ver qué cambios pueden ocurrir. Este ejercicio, se conoce como análisis de sensibilidad. Dicho análisis, al realizarse de manera sistemática de modo de optimizar la elección de parámetros para ajustar los resultados a un conjunto de observaciones, se conoce como modelación inversa (Bennett, 2005).

Finalmente, el hecho de ensayar duraciones de funcionamiento diferentes constituye un nuevo experimento en lugar de ser una reproducción de uno previo que depende de los tipos de eventos que ocurren en la operación del sistema con el tiempo.

### **2.3 MODELOS DE DISPERSIÓN ATMOSFÉRICA**

Los modelos de dispersión atmosférica son una de las soluciones más extendidas al problema del comportamiento de los contaminantes en la atmósfera. Su planteamiento general sigue el esquema de un modelo de procesos o fenómenos, es decir, consisten en aplicar un modelo matemático a cada fenómeno que experimentan los contaminantes en la atmósfera, y sumar las contribuciones de todos los modelos de proceso en una ecuación de balance o conservación para cada propiedad considerada.

El balance de contaminante en la atmósfera aplicable de forma general es (Seinfeld & Pandis, 2012) el siguiente:

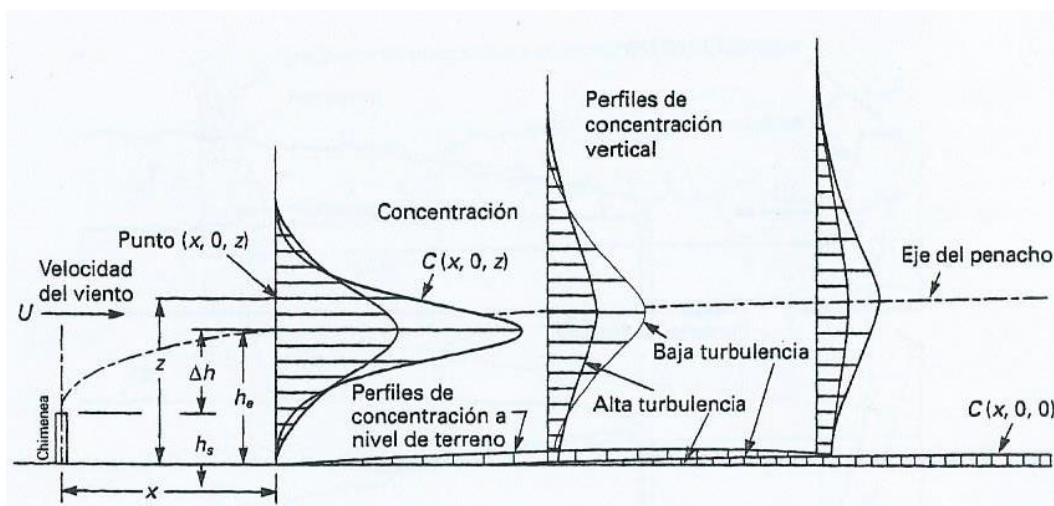
$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j c_i) = D_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_j} + R_i(c_1, \dots, c_N, T) + S(\vec{x}, t), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

donde el primer término representa la variación de concentración del contaminante  $i$  en el tiempo; el segundo, la entrada neta de contaminante asociada al flujo atmosférico (advección y turbulencia); el tercero, la variación de la concentración de contaminante debido a la difusión molecular; el cuarto, la velocidad de desaparición del contaminante por reacción química; y el quinto, la aparición de contaminante en el entorno considerado, proveniente de focos emisores en el propio entorno.

Sin embargo, la resolución analítica de estas ecuaciones no es posible, puesto que no se conoce la forma de la función  $u_j c_i$  ni de la difusión turbulenta asociada. Además, hay que tener en cuenta que es necesario resolver las  $N$  ecuaciones diferenciales simultáneamente, para tener en cuenta la influencia de la concentración de un contaminante  $c_i$  en la velocidad de reacción  $R_i$  de los otros contaminantes y, por tanto, en su balance. Por ello existen dos aproximaciones generales a la resolución de este problema, la vía euleriana y la vía lagrangiana; y muchas soluciones particulares, especialmente para la segunda de estas.

## 2.4 MODELO GAUSSIANO DE DISPERSIÓN

Este modelo describe a través de una fórmula simple el campo tridimensional de concentraciones generado por una fuente puntual en condiciones meteorológicas y de emisión estacionarias.



**Figura 3. Elevación del perfil de concentración de un penacho gaussiano**

Fuente: Kiely, 1999

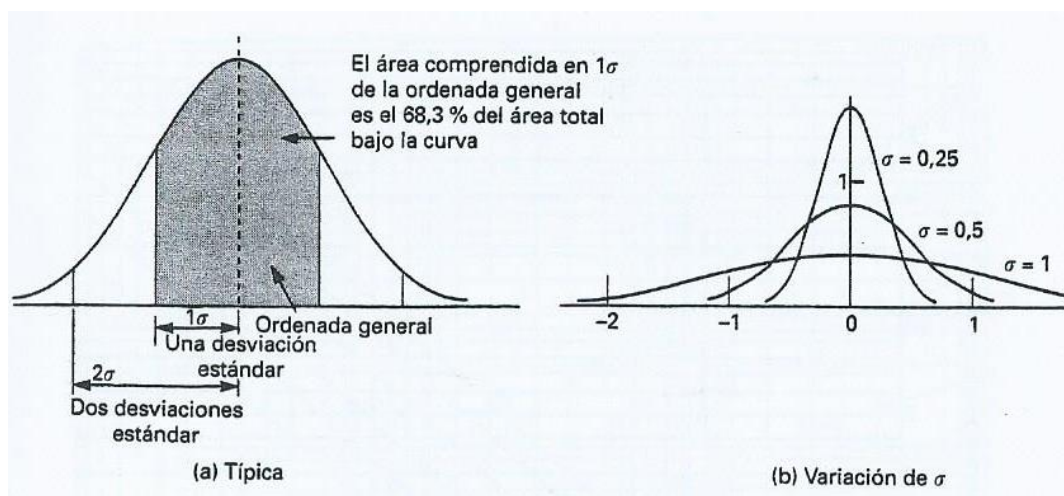
A medida que un penacho progresa en la dirección del viento, el modelo gaussiano supone que el perfil de concentración por mezcla turbulenta adquiere una distribución gaussiana. Si la condición atmosférica es neutra, entonces se desarrollará un penacho en forma de cono. La concentración en la línea central del penacho será máxima a una distancia cercana del foco emisor y disminuirá en la dirección viento abajo. A medida

que la distancia viento abajo aumenta, los extremos del penacho pueden impactar sobre el terreno tal y como se muestra en la Figura 3. La concentración de un contaminante en cualquier punto es tal que:

$$C(x; y; z) \propto \frac{1}{U} QG \quad (2.1)$$

donde  $U$ , es la velocidad del viento,  $Q$  es la tasa de emisión y  $G$  es la curva de Gauss normalizada en el plano  $yz$ , esto es, el plano perpendicular a la dirección del viento,  $x$ .

En la Figura 4, se representa la curva normal (gaussiana), empleada para caracterizar un proceso estocástico. La altura central en el eje de ordenadas se denomina “media” y el ancho de la curva se describe como “desviación estándar”.



**Figura 4. Curva de distribución normal (Gaussiana)**

Fuente: Kiely, 1999

La distribución de Gauss en la dirección lateral se describe por la expresión:

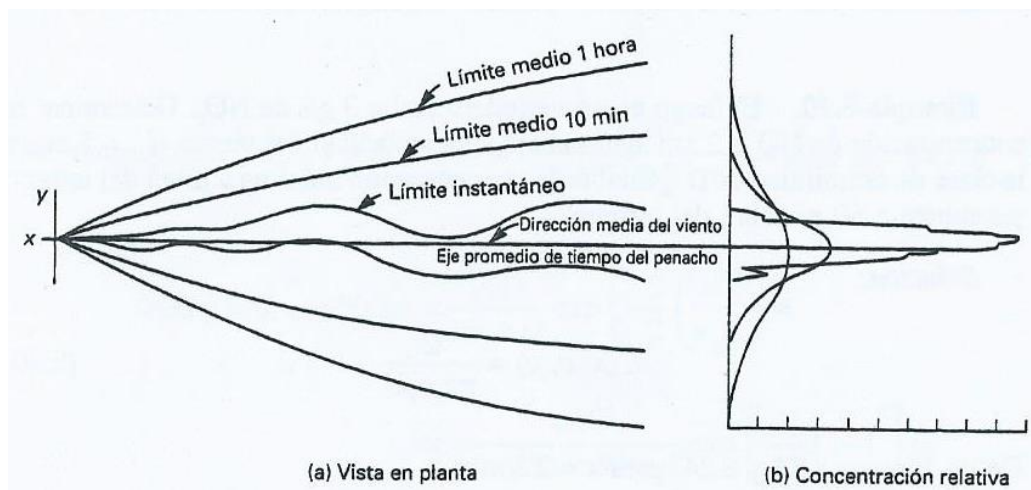
$$G_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2\right] \quad (2.2)$$

Análogamente en el eje de la  $z$ .

$$G_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma_z}\right)^2\right] \quad (2.3)$$

A medida que la distancia viento abajo se incrementa, la concentración máxima en la línea central disminuye ya que el penacho se ensancha en las direcciones  $z$  e  $y$ . En la Figura 4 (b) se muestra cómo el valor aumenta a medida que la distancia a partir del foco emisor aumenta.

La Figura 5 (a) es una gráfica de la evolución del penacho en tiempos diferentes. En cualquier instante, el penacho presenta un contorno serpenteante. A los 10 minutos o 1 hora, el contorno se extiende y con él la concentración de la línea central disminuye, tal y como se muestra en la gráfica de la Figura 5 (b).



**Figura 5. Desarrollo de series de tiempo de un penacho**

Fuente: Kiely, 1999 en Seinfeld, 1986

El penacho gaussiano que es transportado en la dirección positiva del eje  $x$  puede ser expresado, en general como:

$$c = \frac{Q}{2\pi\sigma_h\sigma_z|\bar{u}|} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_{cw}}{\sigma_h}\right)^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z_s + \Delta h - z_r}{\sigma_z}\right)^2\right] \quad (2.4)$$

donde  $c(s; r)$ , es la concentración en  $r = (x_r; y_r; z_r)$  debido a las emisiones en  $s = (x_s; y_s; z_s)$ ;  $Q$  es la tasa de emisión;  $\sigma_h(j_h; d)$  y  $\sigma_z(j_z; d)$  son la desviación estándar (horizontal y vertical, respectivamente) de la distribución espacial de la concentración del penacho ( $\sigma_h$  también se escribe como  $\sigma_y$ );  $j_h$  y  $j_z$  son los estados de turbulencia vertical y horizontal;  $d$  es la distancia viento abajo desde la fuente al receptor, donde:

$$d = \frac{|(r-s) \cdot \bar{u}|}{|\bar{u}|} \quad (2.5)$$

$\bar{u}$  es la rapidez promedio del vector viento a la altura de la emisión (suponiendo que  $\bar{u}_z \leq (|r-s|^2 - d^2)^{1/2}$ );  $\Delta_{cw}$  es la distancia a lo largo del viento entre la fuente y el receptor (es decir, entre el receptor y la línea central del penacho), donde:

$$\Delta_{cw} = (|r-s|^2 - d^2)^{1/2} \quad (2.6)$$

Y  $\Delta h$  es la elevación del penacho por sobre la chimenea, que es una función de los parámetros de la emisión, condiciones meteorológicas y la distancia viento abajo  $d$ . La ecuación (2.4) es aplicable para  $d > 0$ ; si  $d < 0$ , entonces  $c = 0$ .

Como puede observarse, la ecuación (2.4) está referida a estado estacionario, utiliza condiciones meteorológicas (viento y estados de turbulencia) que requieren ser consideradas homogéneas y estacionarias en el área modelada (es decir, entre  $r$  y  $s$ ) y no opera en condiciones de calma cuando la rapidez tiende a cero. Sin embargo, la simplicidad de la aproximación gaussiana, la hacen sencilla de usar con parámetros meteorológicos fáciles de medir.

La ecuación (2.4) es generalmente escrita en la forma:

$$c = \frac{Q}{2\pi\sigma_y\sigma_z|\bar{u}|} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_r}{\sigma_y}\right)^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{h_e - z_r}{\sigma_z}\right)^2\right] \quad (2.7)$$

donde  $\bar{u}$ , es la rapidez media del viento,  $h_e$  es la altura efectiva de la emisión (es decir,  $h_e = h_z + \Delta h$ ) y  $\sigma_y$  reemplaza a  $\sigma_h$ , utilizando un sistema de coordenadas cartesiano cuyo eje  $x$  está orientado en la dirección del viento.

## 2.5 MODELOS EULERIANOS

Los modelos eulerianos son unos de los más completos a la hora de modelar los fenómenos de transporte. Estos se fundamentan en calcular para cada punto del espacio en cada instante de tiempo el valor de las propiedades y concentraciones de las sustancias contaminantes dependiendo de si estos ocupan o no los puntos en el instante específico. Para esto se describe numéricamente el comportamiento de las sustancias o compuestos contenidos dentro de un volumen fijo de manera global por medio de una ecuación de transporte conocida comúnmente como ecuación de difusión-advención-reacción, ecuación (2.8).

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j C_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( K_i \frac{\partial C_i}{\partial x_j} \right) + f_i, \quad i = 1, \dots, N_c \text{ en } \Omega \quad (2.8)$$

donde  $C_i = (x; y; z; t)$ , es la concentración media del contaminante  $i$ ,  $u_j$ , representa el campo de velocidades del flujo presente en el dominio de simulación;  $K_i$  es el tensor diagonal de difusividad;  $f_i$  es la fuente o generación externa para cada sustancia y  $N_c$  es el número de sustancias o especies consideradas en el estudio (Baik, Kim, & Fernando, 2003).

Esta ecuación es modificada como en la ecuación (2.9) para los casos en los que es necesario incluir los efectos debido a los fenómenos turbulentos, así como a procesos naturales relacionados directamente con la interacción entre sustancias como es el caso de los procesos reactivos. Otros procesos que pueden ser incluidos son los procesos fisicoquímicos como es el caso de la deposición que para un estudio atmosférico se deben principalmente a la humedad y la lluvia.

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j C_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( D_i \frac{\partial C_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_j c'_i}) + R_i + f_i, \quad i = 1, \dots, N_c \text{ en } \Omega \quad (2.9)$$

En esta ecuación  $\bar{u}_j$  es la velocidad media del flujo;  $u'_j$  y  $c'_i$  son las fluctuaciones en la velocidad y la concentración respectivamente debidas a la turbulencia;  $D_i$  es la difusividad molecular para cada sustancia  $i$ ;  $R_i$  es el término que representa los procesos reactivos entre sustancias.

En la ecuación (2.9) el primer término representa la variación en el

tiempo de las concentraciones de las sustancias sobre un punto en específico dentro del entorno de simulación; es debido a esto que se conoce como derivada local o tendencia local en el tiempo.

### 2.5.1 Término de advección

El término de advección comprende el proceso de transporte de las sustancias debido al movimiento de los fluidos causado por la variación de las propiedades como son la presión y la temperatura, así como por la presencia de otros procesos artificiales.

El transporte advectivo  $J_a$  se expresa como una función del campo vectorial de los fluidos a lo largo del dominio, ver ecuación (2.10).

$$J_a = u_j C_i \quad (2.10)$$

Donde  $u_j$ , es la velocidad del fluido en la dirección  $j$ ; y  $C_i$  es la concentración de la sustancia  $i$ . Reemplazando  $J_a$  en la ecuación de conservación de las especies, ecuación (2.11), se obtiene la ecuación (2.12) de transporte de sustancias por advección.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial x_j} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j C_i) \quad (2.12)$$

Como se puede observar, esta ecuación es una simplificación de la ecuación (2.9), donde solo se incluyen los efectos de dispersión debido al movimiento de los fluidos.

### **2.5.2 Término de difusión molecular**

Este término considera la difusión molecular, que es un proceso físico que conlleva a la dispersión de las sustancias presentes en un espacio debido a los movimientos aleatorios que presentan sus moléculas.

Por medio de este proceso las sustancias tienden a difundirse en el espacio hasta lograr una uniformidad de la concentración presente en el mismo, esto por medio del transporte de las sustancias desde regiones de alta concentración hacia regiones de baja concentración.

Los movimientos moleculares que comprenden este tipo de difusión solo dependen de la temperatura, la viscosidad y el tamaño de las moléculas de las sustancias, debido a esto es que el proceso de difusión molecular se presenta aún cuando no existe una diferencia de concentración de los contaminantes en el espacio.

La difusión de las sustancias en el espacio se representa matemáticamente por medio de la primera ley de Fick, ecuación (2.13).

$$J_d = -D_i \frac{\partial C_i}{\partial x_j} \quad (2.13)$$

Donde  $J_d$ , es la tasa de transporte de sustancias por difusión;  $C_i$  es la concentración de la sustancia  $i$ ;  $D_i$  es el coeficiente de difusión para la sustancia  $i$  que representa la facilidad en que una sustancia puede dispersarse en un fluido; y el signo negativo presente en la ecuación se debe a que el transporte de sustancias se realiza en sentido contrario al gradiente de concentración.

Reemplazando  $J_d$  en la ecuación de conservación de las especies, ecuación (2.11), se obtiene la segunda ley de Fick, ecuación (2.14), o ecuación de transporte de sustancias por difusión (Roberts & Webster, 2002), donde se incluye el término de difusión molecular presente en la ecuación (2.9).

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( D_i \frac{\partial C_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.14)$$

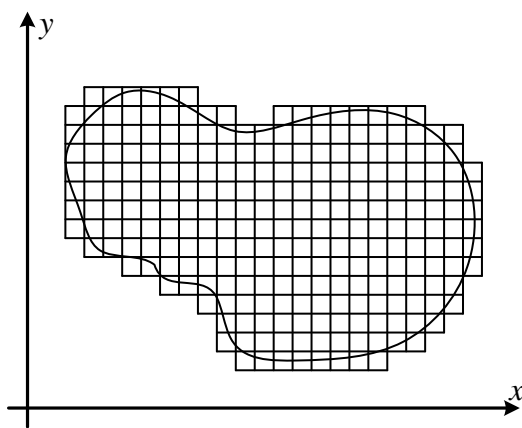
El desarrollo de los demás términos de la ecuación (2.9) son presentados de manera más completa en (Lozano, 2012).

Entre las ventajas que presenta este modelo está la facilidad de predecir el comportamiento de una o varias sustancias cuando se presentan esquemas complejos de emisión. Un ejemplo de esto son los

sectores industriales urbanos que presentan numerosas y diversas fuentes de emisión sobre un área específica. Asimismo en los casos en donde es importante tener en cuenta los procesos reactivos entre sustancias, debido a que pueden llegar a jugar un papel importante en el comportamiento de las sustancias, como es el caso de los estudios sobre contaminantes secundarios, los cuales solo son productos de la reacción entre los contaminantes que son emitidos a la atmósfera.

## 2.6 EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

En el método de diferencias finitas, el dominio de la solución se divide en una malla con puntos discretos o nodos, tal como se muestra en la Figura 6.



**Figura 6. Dominio mallado en el plano cartesiano  $xy$**

*Fuente:* Elaboración propia

Se aplica la ecuación en derivadas parciales (EDP) en cada nodo, donde las derivadas parciales se reemplazan por diferencias finitas divididas. Aunque tal aproximación por puntos es conceptualmente fácil de entender, tiene varias desventajas. En particular, es difícil de aplicar a sistemas con una geometría irregular, con condiciones de frontera no usuales.

El método del elemento finito (MEF) ofrece una alternativa que es más adecuada para tales sistemas. A diferencia de las técnicas por diferencias finitas, la técnica del elemento finito divide el dominio de la solución en regiones con formas sencillas o “elementos”, como por ejemplo triángulos, tal como se muestra en la Figura 8.

Se puede desarrollar una solución aproximada para la ecuación en derivadas parciales para cada uno de estos “elementos”. La solución total se genera uniendo o “ensamblando”. El uso de “elementos”, en lugar de una malla rectangular, proporciona una mejor aproximación para sistemas en forma irregular. Además, se pueden generar continuamente valores de las incógnitas a través de todo el dominio de la solución en lugar de puntos aislados.

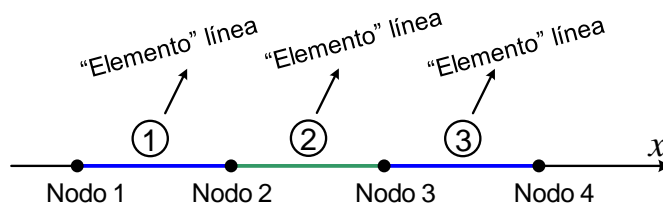
El método de elementos finitos combina varios conceptos matemáticos produciendo sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. El número de ecuaciones por lo general es muy grande, ya que puede variar

de 20 a 200000 o más y requiere obviamente de una gran potencia computacional en cuanto a velocidad y a memoria. El método resulta por lo tanto de poco valor práctico si no se cuenta con el software y hardware adecuado.

Aunque las particularidades varían, la implementación del método del elemento finito usualmente sigue un procedimiento estándar paso a paso. La aplicación de tales pasos en la solución de una ecuación en derivadas parciales se desarrollara en las siguientes secciones.

### 2.6.1 Discretización unidimensional

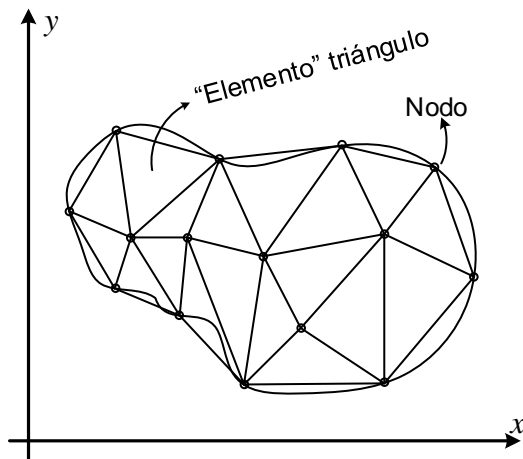
Consiste en dividir el dominio de la solución en elementos finitos. El dominio puede ser unidimensional, bidimensional o tridimensional. Si el dominio es unidimensional, se tiene como “elementos” a líneas, tal como se muestra en la Figura 7.



**Figura 7. Dominio unidimensional  $x$ , cuyos “elementos” son líneas**

Fuente: Elaboración propia

Si el dominio es bidimensional, se tiene como “elementos” a triángulos o cuadriláteros, tal como se muestra en la Figura 8.



**Figura 8. Dominio en el plano cartesiano  $xy$ , cuyos “elementos” son triángulos**

*Fuente:* Elaboración propia

Si el dominio es tridimensional, se tiene como “elementos” a tetraedros o hexaedros.

### **2.6.2 Ecuaciones de los elementos**

Consiste en desarrollar ecuaciones para aproximar la solución de cada elemento. Elegir una función apropiada con coeficientes desconocidos, que aproximaré la solución y evaluar estos coeficientes desconocidos de modo que la función aproxime la solución de manera óptima.

Debido a que son fáciles de manipular matemáticamente, a menudo se utilizan polinomios para este propósito.

En el caso unidimensional, la aproximación más sencilla es un polinomio de primer grado o línea recta.

$$u(x) = a_0 + a_1x$$

donde  $u(x)$ , es la variable dependiente,  $a_0$  y  $a_1$  son los coeficientes, y  $x$  es la variable independiente.

En el caso bidimensional, para un elemento triangular, la aproximación más sencilla es el polinomio lineal

$$u(x; y) = a_0 + a_1x + a_2y$$

donde  $u(x; y)$ , es la variable dependiente,  $a_0, a_1$  y  $a_2$  son los coeficientes, y  $x$  y  $y$  son las variables independientes.

Una vez que se ha elegido la función base, se debe desarrollar la ecuación que rige el comportamiento del elemento. Esta ecuación representa un ajuste de la función a la solución de la ecuación diferencial de que se trate. Existen varios métodos para este propósito; entre los más comunes están el método directo, el método de los residuos ponderados y el método variacional.

Matemáticamente, las ecuaciones del elemento resultante a menudo consisten en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que puede expresarse en forma matricial:

$$[k][u] = [F]$$

donde  $[k]$ , es la matriz de una propiedad del elemento o matriz de rigidez,  $[u]$  es el vector columna de las incógnitas en los nodos y  $[F]$  es el vector columna determinado por el efecto de cualquier influencia externa aplicada a los nodos.

### 2.6.3 Ensamble

Una vez obtenidas las ecuaciones de elementos individuales, estas deben unirse o ensamblarse para caracterizar el comportamiento de todo el sistema. El proceso de ensamble está regido por el concepto de continuidad. Es decir, las soluciones de elementos contiguos se acoplan, de manera que los valores de las incógnitas en sus nodos comunes sean equivalentes. Así, la solución total será continua.

Cuando finalmente todas las versiones individuales de  $[k][u] = [F]$  están ensambladas, el sistema completo se expresa en forma matricial como:

$$[K][u'] = [F']$$

donde  $[K]$ , es la matriz de propiedades de ensamble; y  $[u']$  y  $[F']$  son los vectores columna de las incógnitas y de las fuerzas externas.

#### 2.6.4 Condiciones de frontera

Antes de resolver la ecuación  $[K][u'] = [F']$ , esta debe modificarse para considerar las condiciones de frontera del sistema. Dichos ajustes dan como resultado:

$$[\bar{K}][u'] = [\bar{F}']$$

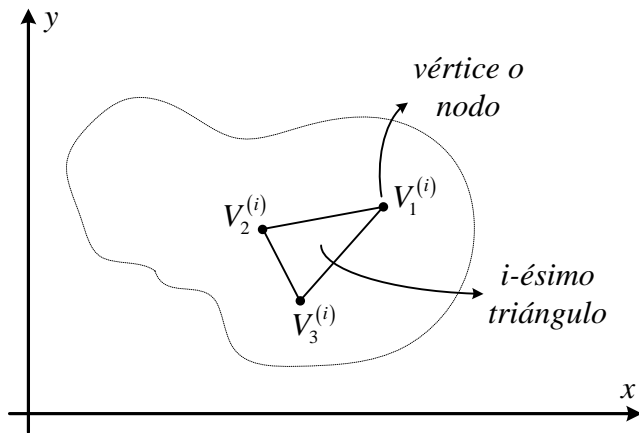
#### 2.6.5 Solución

La solución se obtiene al resolver la ecuación  $[\bar{K}][u'] = [\bar{F}']$ . Una vez obtenida la solución, esta se despliega en forma tabular o de manera gráfica.

### 2.7 EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO EN DOS DIMENSIONES

#### 2.7.1 Discretización bidimensional

Para iniciar el procedimiento se divide la región  $D$  en un conjunto de triángulos  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_M$  en el que el  $i$ -ésimo triángulo tiene tres vértices, o nodos, denotados con  $V_j^{(i)} = (x_j^{(i)}; y_j^{(i)})$ , para  $j = 1, 2, 3$ , tal como se muestra en la Figura 9.



**Figura 9. El *i*-ésimo triángulo con sus respectivos nodos**

Fuente: Elaboración propia

### 2.7.2 Ecuaciones de los elementos

Se debe desarrollar una ecuación para aproximar la solución del elemento. Para cada elemento triangular, es decir, para el *i*-ésimo triángulo  $T_i$  la función de aproximación o de forma es el polinomio lineal

$$u(x; y) = a_j + b_j x + c_j y \quad (2.15)$$

donde  $u(x; y)$ , es la variable dependiente,  $a_j, b_j, c_j$  son los coeficientes y  $x, y$  son las variables independientes.

Esta función debe pasar a través de los valores de  $u(x; y)$  en los vértices o nodos  $(x_1^{(i)}; y_1^{(i)})$ ,  $(x_2^{(i)}; y_2^{(i)})$  y  $(x_3^{(i)}; y_3^{(i)})$  del triángulo. Esto significa que para el *i*-ésimo triángulo  $T_i$  de la figura anterior, se tiene las ecuaciones

$$\begin{cases} u_1^{(i)}(x; y) = a_1^{(i)} + b_1^{(i)}x_1 + c_1^{(i)}y_1 \\ u_2^{(i)}(x; y) = a_1^{(i)} + b_1^{(i)}x_2 + c_1^{(i)}y_2 \\ u_3^{(i)}(x; y) = a_1^{(i)} + b_1^{(i)}x_3 + c_1^{(i)}y_3 \end{cases}$$

O en forma más simplificada, 
$$\begin{cases} u_1(x; y) = a_1 + b_1x_1 + c_1y_1 \\ u_2(x; y) = a_1 + b_1x_2 + c_1y_2 \\ u_3(x; y) = a_1 + b_1x_3 + c_1y_3 \end{cases}$$

Que, expresado en forma matricial es, 
$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Y cuya solución del sistema está dado por:

$$\begin{cases} a_1 = \left( \frac{x_2y_3 - y_2x_3}{A_{T_i}} \right) u_1 - \left( \frac{x_1y_3 - y_1x_3}{A_{T_i}} \right) u_2 + \left( \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{A_{T_i}} \right) u_3 \\ b_1 = \left( \frac{-y_3 + y_2}{A_{T_i}} \right) u_1 - \left( \frac{-y_3 + y_1}{A_{T_i}} \right) u_2 + \left( \frac{-y_2 + y_1}{A_{T_i}} \right) u_3 \\ c_1 = \left( \frac{-x_3 + x_2}{A_{T_i}} \right) u_1 - \left( \frac{-x_3 + x_1}{A_{T_i}} \right) u_2 + \left( \frac{-x_2 + x_1}{A_{T_i}} \right) u_3 \end{cases} \quad (2.16)$$

donde  $A_{T_i} = x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 + y_1x_3 + x_1y_2 - y_1x_2$  y el área del  $i$ -ésimo triángulo

$T_i$  es,  $(\frac{1}{2})A_{T_i}$ .

Las ecuaciones correspondientes a los coeficientes  $a_1, b_1$  y  $c_1$  se sustituyen en la ecuación  $u(x; y) = a_j + b_jx + c_jy$ . Después de reagrupar términos semejantes, el resultado se expresa como sigue:

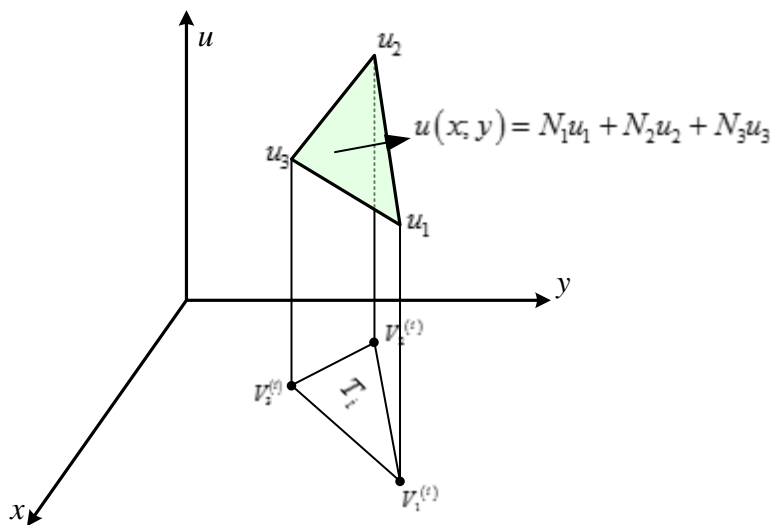
$$u(x; y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (2.17)$$

Donde

$$\begin{cases} N_1 = \frac{(x_2 y_3 - y_2 x_3) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2} \\ N_2 = \frac{(x_3 y_1 - y_3 x_1) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2} \\ N_3 = \frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2} \end{cases} \quad (2.18)$$

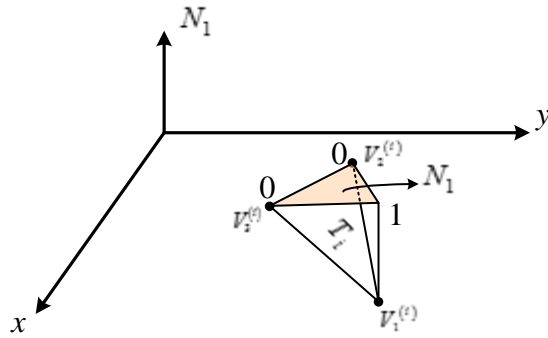
La ecuación  $u(x; y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$  permite predecir valores intermedios en el elemento, con base en los valores de sus nodos.

En las Figuras 10, 11, 12 y 13 se muestran la función de aproximación lineal  $u(x; y)$  y las funciones base respectivamente.

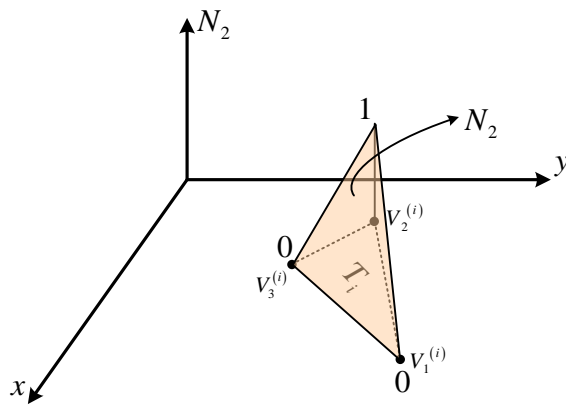


**Figura 10. Función de aproximación lineal  $u(x; y)$**

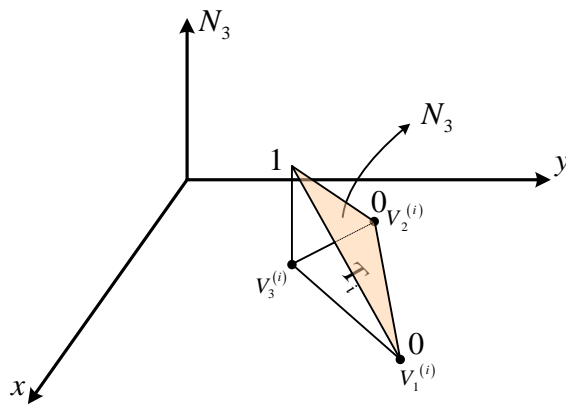
Fuente: Elaboración propia



**Figura 11. Función base  $N_1$**   
 Fuente: Elaboración propia



**Figura 12. Función base  $N_2$**   
 Fuente: Elaboración propia



**Figura 13. Función base  $N_3$**   
 Fuente: Elaboración propia

Para cada vértice  $V_j^{(i)} = (x_j^{(i)}; y_j^{(i)})$  asociamos un polinomio lineal

$$N_j^{(i)}(x_k^{(i)}; y_k^{(i)}) = a_j^{(i)} + b_j^{(i)}x + c_j^{(i)}y, \text{ donde } N_j^{(i)}(x_k^{(i)}; y_k^{(i)}) = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k \\ 0, & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

**A. Desarrollo para el nodo  $V_1^{(i)}$ :**  $N_1^{(i)}(x_k^{(i)}; y_k^{(i)}) = a_1^{(i)} + b_1^{(i)}x + c_1^{(i)}y$

Si  $x = x_1$  y  $y = y_1$ , entonces,

$$N_1^{(i)}(x_1; y_1) = \frac{(x_2y_3 - y_2x_3) + (y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1}{x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 + y_1x_3 + x_1y_2 - y_1x_2} = 1 \quad (2.19)$$

Si  $x = x_2$  y  $y = y_2$ , entonces,

$$N_1^{(i)}(x_2; y_2) = \frac{(x_2y_3 - y_2x_3) + (y_2 - y_3)x_2 + (x_3 - x_2)y_2}{x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 + y_1x_3 + x_1y_2 - y_1x_2} = 0 \quad (2.20)$$

Si  $x = x_3$  y  $y = y_3$ , entonces,

$$N_1^{(i)}(x_3; y_3) = \frac{(x_2y_3 - y_2x_3) + (y_2 - y_3)x_3 + (x_3 - x_2)y_3}{x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 + y_1x_3 + x_1y_2 - y_1x_2} = 0 \quad (2.21)$$

Entonces, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} a_1 + b_1x_1 + c_1y_1 &= 1 \\ a_1 + b_1x_2 + c_1y_2 &= 0 \\ a_1 + b_1x_3 + c_1y_3 &= 0 \end{aligned}$$

Que, escrita en forma matricial que como:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cuya solución de este sistema es:

$$a_1 = \frac{x_2 y_3 - y_2 x_3}{\Delta_i}, \quad b_1 = \frac{-y_3 + y_2}{\Delta_i}, \quad c_1 = \frac{x_3 - x_2}{\Delta_i}$$

donde  $\Delta_i = x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2$ .

Por lo tanto, la función base  $N_1(x; y)$  está dada por

$$N_1(x; y) = a_1 + b_1 x + c_1 y$$

**B. Desarrollo para el nodo  $V_2^{(i)}$ :**  $N_2^{(i)}(x_k^{(i)}; y_k^{(i)}) = a_2^{(i)} + b_2^{(i)} x + c_2^{(i)} y$

Si  $x = x_1$  y  $y = y_1$ , entonces,

$$N_2^{(i)}(x_1; y_1) = \frac{(x_3 y_1 - y_3 x_1) + (y_3 - y_1) x_1 + (x_1 - x_3) y_1}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2} = 0 \quad (2.22)$$

Si  $x = x_2$  y  $y = y_2$ , entonces,

$$N_2^{(i)}(x_2; y_2) = \frac{(x_3 y_1 - y_3 x_1) + (y_3 - y_1) x_2 + (x_1 - x_3) y_2}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2} = 1 \quad (2.23)$$

Si  $x = x_3$  y  $y = y_3$ , entonces,

$$N_2^{(i)}(x_3; y_3) = \frac{(x_3 y_1 - y_3 x_1) + (y_3 - y_1) x_3 + (x_1 - x_3) y_3}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2} = 0 \quad (2.24)$$

Entonces, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned}a_2 + b_2x_1 + c_2y_1 &= 0 \\a_2 + b_2x_2 + c_2y_2 &= 1 \\a_2 + b_2x_3 + c_2y_3 &= 0\end{aligned}$$

Que, escrita en forma matricial queda como:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cuya solución de este sistema es:

$$a_2 = \frac{x_3y_1 - y_3x_1}{\Delta_i}, \quad b_2 = \frac{y_3 - y_1}{\Delta_i}, \quad c_2 = \frac{x_1 - x_3}{\Delta_i}$$

Donde  $\Delta_i = x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 + y_1x_3 + x_1y_2 - y_1x_2$ .

Por lo tanto, la función de interpolación  $N_2(x; y)$  está dada por

$$N_2(x; y) = a_2 + b_2x + c_2y$$

**C. Desarrollo para el nodo  $V_3^{(i)}$ :**  $N_3^{(i)}(x_k^{(i)}; y_k^{(i)}) = a_3^{(i)} + b_3^{(i)}x + c_3^{(i)}y$

Si  $x = x_1$  y  $y = y_1$ , entonces,

$$N_3^{(i)}(x_1; y_1) = \frac{(x_1y_2 - y_1x_2) + (y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - x_1)y_1}{x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 + y_1x_3 + x_1y_2 - y_1x_2} = 0 \quad (2.25)$$

Si  $x = x_2$  y  $y = y_2$ , entonces,

$$N_3^{(i)}(x_2; y_2) = \frac{(x_1y_2 - y_1x_2) + (y_1 - y_2)x_2 + (x_2 - x_1)y_2}{x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 + y_1x_3 + x_1y_2 - y_1x_2} = 0 \quad (2.26)$$

Si  $x = x_3$  y  $y = y_3$ , entonces,

$$N_3^{(i)}(x_3; y_3) = \frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (y_1 - y_2)x_3 + (x_2 - x_1)y_3}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2} = 1 \quad (2.27)$$

Entonces, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$a_3 + b_3 x_1 + c_3 y_1 = 0$$

$$a_3 + b_3 x_2 + c_3 y_2 = 0$$

$$a_3 + b_3 x_3 + c_3 y_3 = 1$$

Que, escrita en forma matricial que como:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cuya solución de este sistema es:

$$a_3 = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{\Delta_i}, \quad b_3 = \frac{y_1 - y_2}{\Delta_i}, \quad c_3 = \frac{x_2 - x_1}{\Delta_i}$$

Donde  $\Delta_i = x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2$ .

Por lo tanto, la función de interpolación  $N_3(x; y)$  está dada por

$$N_3(x; y) = a_3 + b_3 x + c_3 y$$

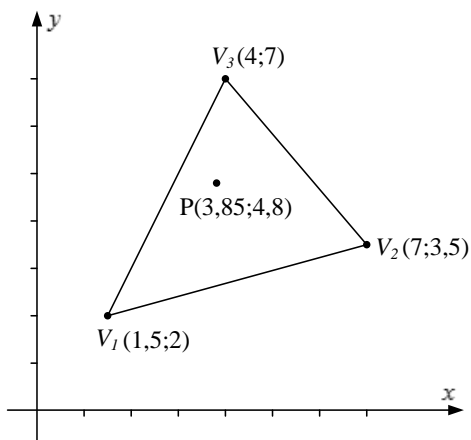
En resumen, para el  $i$ -ésimo triángulo  $T_i$ , se tienen las siguientes

funciones base:

$$\begin{cases} N_1(x; y) = a_1 + b_1 x + c_1 y \\ N_2(x; y) = a_2 + b_2 x + c_2 y \\ N_3(x; y) = a_3 + b_3 x + c_3 y \end{cases}$$

Y la función de aproximación es:  $u(x; y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$

Por ejemplo, se puede determinar las funciones base  $N_1(x; y)$ ,  $N_2(x; y)$  y  $N_3(x; y)$  en el punto interior  $P(3,85;4,8)$  para el elemento triangular de la Figura 14.



**Figura 14. Dominio bidimensional con un solo “elemento” triangular**

Fuente: Elaboración propia

**A. Para el vértice  $V_1$ :  $N_1(x; y) = a_1 + b_1x + c_1y$**

Se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 2 \\ 1 & 7 & 3,5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el sistema se tiene:

$$\begin{cases} a_1 = 1,4737 \\ b_1 = -0,1474 \\ c_1 = -0,1263 \end{cases}$$

Por lo tanto, la función es  $N_1(x; y) = 1,4737 - 0,1474x - 0,1263y$

**B. Para el vértice  $V_2$  :**  $N_2(x; y) = a_2 + b_2x + c_2y$

Se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 2 \\ 1 & 7 & 3,5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el sistema se tiene:

$$\begin{cases} a_2 = -0.1053 \\ b_2 = 0.2105 \\ c_2 = -0.1053 \end{cases}$$

Por tanto la función es,

$$N_2(x, y) = -0.1053 + 0.2105x - 0.1053y$$

**C. Para el vértice  $V_3$  :**  $N_3(x; y) = a_3 + b_3x + c_3y$

Se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2 \\ 1 & 7 & 3.5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el sistema se tiene:

$$\begin{cases} a_3 = -0,3684 \\ b_3 = -0,0632 \\ c_3 = 0,2316 \end{cases}$$

Por tanto la función es,

$$N_3(x, y) = -0,3684 - 0,0632x + 0,2316y$$

Entonces se tiene:

$$\begin{cases} N_1(x, y) = 1,4737 - 0,1474x - 0,1263y \\ N_2(x, y) = -0,1053 + 0,2105x - 0,1053y \\ N_3(x, y) = -0,3684 - 0,0632x + 0,2316y \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1(3,85; 4,8) = 1,4737 - 0,1474(3,85) - 0,1263(4,8) = 0,3000 \\ N_2(3,85; 4,8) = -0,1053 + 0,2105(3,85) - 0,1053(4,8) = 0,1997 \\ N_3(3,85; 4,8) = -0,3684 - 0,0632(3,85) + 0,2316(4,8) = 0,5000 \end{cases}$$

### 2.7.2.1 Método de residuos ponderados

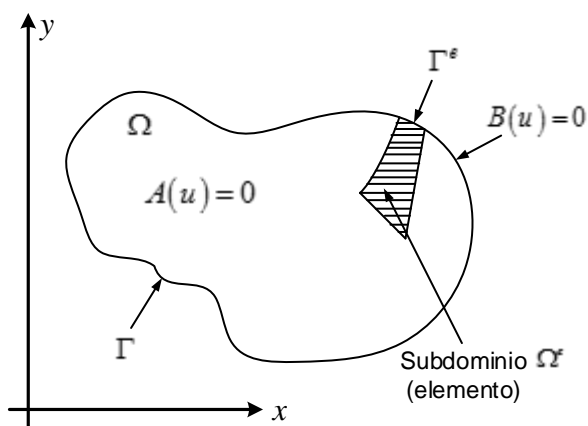
El problema a resolver, expresado en la forma más general, es determinar una función desconocida  $u$  tal que satisfaga un determinado sistema de ecuaciones diferenciales (Zienkiewicz & Taylor, 1994)

$$A(u) = \begin{Bmatrix} A_1(u) \\ A_2(u) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \vec{0} \quad (2.28)$$

En un dominio  $\Omega^e$ , ya sea volumen, superficie, etc, junto con ciertas condiciones de contorno

$$B(u) = \begin{Bmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \vec{0} \quad (2.29)$$

En los contornos  $\Gamma$  del dominio, ver Figura 15.



**Figura 15. Dominio  $\Omega$  y su contorno  $\Gamma$**

Fuente: Elaboración propia

La función buscada puede ser un escalar o bien un vector de varias variables. Similarmente, la ecuación diferencial puede ser una sola o un sistema de ecuaciones simultáneas. Es por esta razón que se ha recurrido antes a la notación matricial.

Todo cálculo por elementos finitos, siendo un método aproximado, busca una expresión aproximada de la solución, de la forma

$$u = \hat{u} = \sum_1^n N_i a_i = Na \quad (2.30)$$

En la que  $N_i$  son funciones de forma expresadas en función de variables independientes (tales como las coordenadas  $x, y$ , etc.) y donde todos o algunos de los parámetros  $a_i$  son incógnitas.

Como el sistema de ecuación diferenciales, ver ecuación (2.28), tiene que ser cero en todos los puntos del dominio  $\Omega$ , se deduce que

$$\int v^T A(u) d\Omega \equiv \int [v_1 A_1(u) + v_2 A_2(u) + \dots] d\Omega \equiv \bar{0} \quad (2.31)$$

donde

$$v = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (2.32)$$

es un conjunto de funciones arbitrarias de número igual al de ecuaciones (o componentes de  $u$ ) del problema.

Esto tiene importantes consecuencias. Puede afirmarse que si la ecuación (2.31) se cumple para cualquier  $v$ , las ecuaciones diferenciales mostradas en la ecuación (2.28) deberán satisfacerse en todos los puntos del dominio. La prueba de la validez de esta afirmación es obvia si se

considera la posibilidad de que  $A(u) \neq \vec{0}$  en un punto o porción del dominio. Inmediatamente se puede encontrar una función  $v$  que haga la integral de la ecuación (2.31) distinta de cero, con lo que se demuestra lo afirmado.

Para satisfacer simultáneamente las condiciones de contorno, ecuación (2.29), se debe imponer que

$$\int v^T B(u) d\Gamma \equiv \int [v_1 B_1(u) + v_2 B_2(u) + \dots] d\Gamma \equiv \vec{0} \quad (2.33)$$

Que la expresión integral

$$\int_{\Omega} v^T A(u) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{v}^T B(u) d\Gamma = \vec{0} \quad (2.34)$$

Se satisfaga para todos los  $v$  y  $\bar{v}$  equivale a que satisfagan las ecuaciones diferenciales, ecuación (2.28), y sus condiciones de contorno, ecuación (2.29).

Consideremos la expresión integral

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + u_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + Q = 0 \\ B(\phi) = \phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{en } \Gamma_{\phi} \\ B(\phi) = k \frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} = 0 \quad \text{en } \Gamma_q \end{array} \right. \quad (2.35)$$

donde (siendo  $n$  la normal a  $\Gamma$ )  $\phi \equiv u$ , representa la temperatura,  $k$  es la conductividad, y  $\bar{\phi}$  y  $\bar{q}$  son los valores de contorno, respectivamente, establecidos para la temperatura y el flujo térmico. Aquí,  $u_x$  y  $u_y$  son funciones conocidas de la posición y representan velocidades del fluido a través del cual se transfiere el calor.

La expresión de la ecuación (2.34) se puede escribir así

$$\int_{\Omega} v \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q \right] dx dy + \int_{\Gamma_q} \bar{v} \left[ k \frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} \right] d\Gamma = 0 \quad (2.36)$$

Advirtiendo que  $v$  y  $\bar{v}$  son funciones escalares y presuponiendo que una de las condiciones de contorno, tal como  $\phi - \bar{\phi} = 0$  se satisface automáticamente mediante la elección adecuada de las funciones  $\phi$ .

Ahora se puede integrar por partes la ecuación (2.36) haciendo uso de las fórmulas generales para este tipo de integración (las fórmulas de Green).

$$\begin{cases} \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy \equiv - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy + \int_{\Gamma_q} v \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) n_x d\Gamma \\ \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy \equiv - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma_q} v \left( k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) n_y d\Gamma \end{cases} \quad (2.37)$$

Así pues, la ecuación (2.36) quedaría como

$$\begin{aligned}
& -\int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x} k \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} k \frac{\partial \phi}{\partial y} - Qv \right) dx dy + \int_{\Gamma} vk \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_q} \bar{v} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} \right) d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Teniendo en cuenta que la derivada respecto de la normal viene dada por

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \tag{2.39}$$

Y, además haciendo

$$v = -\bar{v} \tag{2.40}$$

Se puede escribir, sin pérdida de generalización (ya que ambas funciones son arbitrarias), la ecuación (2.38) como

$$\int_{\Omega} \nabla^T vk \nabla \phi d\Omega - \int_{\Omega} v Q d\Omega - \int_{\Gamma_q} v \bar{q} d\Gamma - \int_{\Gamma_{\phi}} vk \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = 0 \tag{2.41}$$

Donde el operador  $\nabla$  es simplemente  $\nabla = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$

Obsérvese que:

- a) La variable  $\phi$  desaparece de las integrales sobre el contorno  $\Gamma_q$  y que las condiciones de contorno

$$B(\phi) = k \frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} = 0$$

Correspondientes al mismo, se satisfacen automáticamente. Tal condición se conoce como condición de contorno natural, y

- b) Si  $\phi$  se toma de manera que satisfaga las condiciones de contorno forzadas  $\phi - \bar{\phi} = 0$ , se puede omitir el último término de la ecuación (2.41) restringiendo la elección de las funciones  $v$  solo a aquellos que den  $v = 0$  en  $\Gamma_\phi$ .

Si para expresar la función incógnita  $u$  se toma una expresión aproximada como la ecuación (2.30), o sea

$$u = \hat{u} = \sum_1^n N_i a_i = Na$$

Será evidentemente imposible que en el caso más general se satisfagan a la vez la ecuación diferencial y las condiciones de contorno. Las expresiones integrales de la ecuación (2.34) permiten efectuar una aproximación si, en lugar de cualquier función  $v$ , se toma un conjunto finito de funciones preestablecidas

$$v = w_j \quad \bar{v} = \bar{w}_j \quad j = 1 a n \quad (2.42)$$

donde  $n$ , es el número de parámetros incógnita  $a_i$  que entran en el problema.

Así, las ecuaciones (2.34) proporcionan un sistema de ecuaciones ordinarias, de las que pueden calcularse los parámetros  $a$ . Es decir, tendrá el sistema siguiente:

$$\int_{\Omega} w_j^T A(Na) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_j^T B(Na) d\Gamma = \bar{0} \quad j=1 \text{ a } n \quad (2.43)$$

Si se tiene en cuenta que  $A(Na)$  representa el residuo o error que se obtiene al sustituir la solución aproximada en la ecuación diferencial (y  $B(Na)$  el residuo obtenido al hacer esta sustitución en las condiciones de contorno), la expresión de la ecuación (2.43) será la integral ponderada de tales residuos. Por ello este procedimiento de aproximación puede recibir el nombre de método de residuos ponderados.

### 2.7.2.2 Método de Galerkin

A efectos de ponderación, se utiliza el conjunto de funciones independientes  $w_j = N_j$ . Como se aprecia, este método permite frecuentemente (pero no siempre) obtener matrices simétricas y por esta y otras razones se adoptarán casi exclusivamente para las operaciones con elementos finitos.

Sustituyendo  $v = w_j$  en la ecuación (2.41) y añadiendo los términos de convección a la misma, se puede escribir inmediatamente la ecuación de residuos ponderados. Se obtiene así

$$\int_{\Omega} \nabla^T w_j k \nabla \hat{\phi} d\Omega - \int_{\Omega} w_j \left( u_x \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} w_j Q d\Omega - \int_{\Gamma_q} w_j \bar{q} d\Gamma = 0 \quad (2.44)$$

Donde  $\hat{\phi} = \sum N_i a_i$  tal que los valores impuestos de  $\hat{\phi}$  se dan en el contorno  $\Gamma = \phi$  y a la vez  $w_j = 0$  en dicho contorno.

Estableciendo la aproximación de Galerkin, es decir, haciendo  $w_j = N_j$ , se obtiene inmediatamente un sistema de ecuaciones de la forma

$$Ka + f = 0 \quad (2.45)$$

donde

$$\begin{aligned} K_{ji} &= \int_{\Omega} \nabla^T N_j k \nabla N_i d\Omega - \int_{\Omega} \left( N_i u_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_j v_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} k \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} k \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \left( N_i u_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_j v_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$f_j = - \int_{\Omega} N_j Q d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_j \bar{q} d\Gamma \quad (2.47)$$

La ecuación de la conducción del calor en dos dimensiones en régimen transitorio se obtiene a partir de la ecuación (2.35) añadiendo el término que expresa el almacenamiento de calor  $c \frac{\partial \phi}{\partial t}$ , donde  $c$  es el calor

específico. Se tiene ahora un problema definido en un dominio  $\Omega(x; y; t)$  y gobernado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 A(\phi) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + u_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + Q - c \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \\
 B(\phi) &= \phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{en } \Gamma_\phi \\
 B(\phi) &= k \frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} = 0 \quad \text{en } \Gamma_q
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Tomando

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum N_i a_i \tag{2.49}$$

Con  $a_i = a_i(t)$  y  $N_i = N_i(x; y)$  y utilizando el método de Galerkin, se sigue exactamente los pasos descritos en las ecuaciones (2.44) a (2.47) para llegar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$Ka + C \frac{da}{dt} + f = 0 \tag{2.50}$$

En este caso, la expresión  $K_{ij}$  es idéntica a la de la ecuación (2.46) (prescindiendo de los términos de convección); la de  $f_i$  es idéntica a la de la ecuación (2.47), y la matriz  $C$  viene dada por

$$C_{ij} = \int_{\Omega} N_i c N_j dx dy \tag{2.51}$$

Como siempre, la matriz  $C$  puede formarse por ensamblaje de las contribuciones de cada elemento.

### **2.7.3 Ensamblaje y condiciones de frontera**

Una vez obtenidas las ecuaciones de elementos individuales, estas deben unirse o ensamblarse para caracterizar el comportamiento de todo el sistema. El proceso de ensamble está regido por el concepto de continuidad. El sistema completo se expresa en forma matricial tal como se muestra en la ecuación (2.13), la cual debe modificarse para considerar las condiciones de frontera del sistema, ver ecuación (2.14). De la ecuación (2.14) se obtiene la solución.

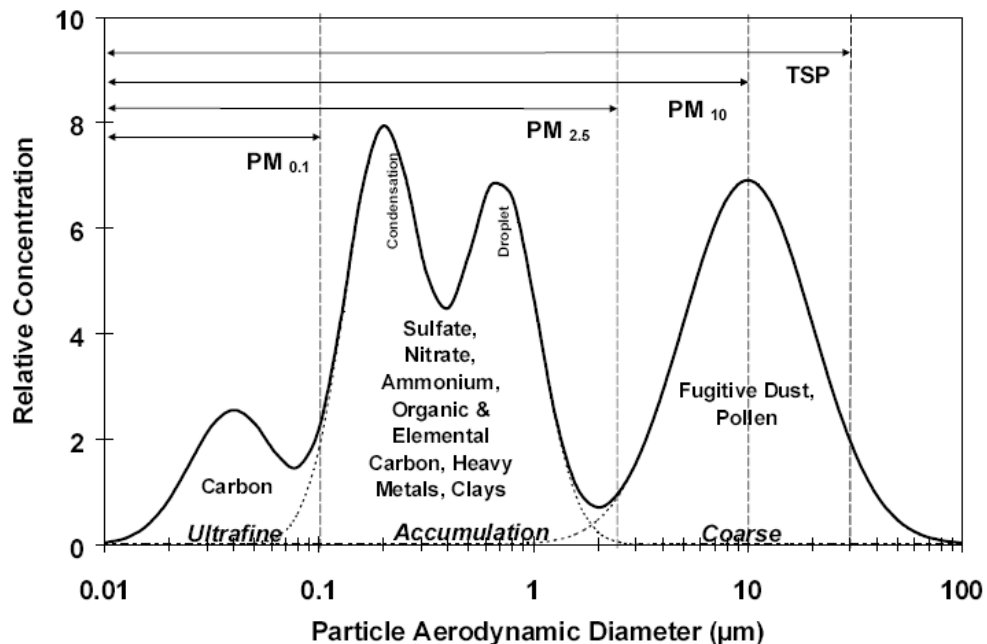
## **2.8 MATERIAL PARTICULADO**

El material particulado (MP) es un conjunto de partículas sólidas y líquidas emitidas directamente al aire, tales como el hollín de diesel, polvo de vías, el polvo de la agricultura y las partículas resultantes de procesos productivos (Fang et al., 2003).

Estas partículas en suspensión (MP) son una compleja mezcla de productos químicos y/o elementos biológicos, como metales, sales, materiales carbonosos, orgánicos volátiles, compuestos volátiles (COV),

hidrocarburos aromáticos policíclicos (HAP) y endotoxinas que pueden interactuar entre sí formando otros compuestos (Billet et al., 2007).

Debido a que son de tamaño, forma y composición variada, para su identificación se han clasificado en términos de su diámetro aerodinámico que corresponde al diámetro de una esfera uniforme en unidad de densidad que alcanza la misma velocidad terminal de asentamiento que la partícula de interés y que está determinado por la forma y densidad de la partícula. De acuerdo a esto, pueden ser clasificadas como finas y gruesas (Bell, Samet, & Dominici, 2004; Garcia, 2002), como se presenta en la Figura 16.



**Figura 16. Distribución típica de las partículas en la atmósfera donde se muestran las partículas finas y las gruesas**

Fuente: Tomado de Watson & Chow, 2000

## 2.9 PANORAMA MUNDIAL Y NACIONAL DE LOS PM<sub>10</sub>

Investigaciones recientes relacionadas con el material particulado se han realizado en todo el mundo. En Italia (Perrone et al., 2005), España (Viana et al., 2006), Beijing (Wu et al., 2008), Suecia (Sternbeck et al., 2002), China (Zhang et al., 2006) y Estados Unidos (Wilhelm, Qianc & Ritz, 2009), entre otras. En ellas demuestran la presencia de MP en la atmósfera por causas naturales y antropogénicas, manifestando además la necesidad de adelantar estudios detallados relacionados con los efectos causados por la presencia de este contaminante, con el fin de implementar estrategias para el control del mismo.

En el Perú, de acuerdo al último Informe Técnico de Estadísticas Ambientales presentado por el INEI, (2016), correspondiente al mes de febrero de 2016, el máximo valor obtenido de PM<sub>10</sub> se registró en el distrito de Villa María del Triunfo (169,8 ug/m<sup>3</sup>), que sobrepasó el ECA (150 ug/m<sup>3</sup>) permitido, seguido de Puente Piedra (125,1 ug/m<sup>3</sup>), Ate (98,8 ug/m<sup>3</sup>), Carabayllo (82,0 ug/m<sup>3</sup>), Huachipa (80,4 ug/m<sup>3</sup>), San Juan de Lurigancho (73,4 ug/m<sup>3</sup>), Santa Anita (70,1 ug/m<sup>3</sup>), San Borja (48,8 ug/m<sup>3</sup>), San Martín de Porres (39,5 ug/m<sup>3</sup>) y Jesús María (38,2 ug/m<sup>3</sup>).

## **2.10 MATERIAL PARTICULADO PM<sub>2,5</sub>**

Las partículas de diámetro menor o igual a 2,5 micras (PM<sub>2,5</sub>) son 100 veces más delgadas que un cabello humano. Agrupan a partículas sólidas o líquidas generalmente ácidas, que contienen hollín y otros derivados de las emisiones de vehículos e industrias. Son altamente peligrosas porque son respirables en un 100% y por ello, se alojan en bronquios, bronquiolos y alvéolos pulmonares. Pueden alterar los mecanismos defensivos del organismo y facilitar el ingreso de microorganismos, como bacterias o virus, produciendo infecciones respiratorias y problemas cardiovasculares. Las partículas finas pueden estar constituidas por metales pesados, u otros elementos nocivos, causando daño a la salud a más largo plazo.

Estas partículas se dividen en ultrafinas o de nucleación y las de acumulación. Las de nucleación, tienen diámetros inferiores a 0,08 micras, debido a que rápidamente coagulan con partículas más grandes o sirven de núcleo a gotas de lluvia y neblina. Al rango de diámetro de partículas finas que comprenden de 0,08 a 2 micras se le conoce con el nombre de acumulación ya que estas partículas son el resultado de la coagulación de pequeñas partículas emitidas por fuentes de combustión, de la condensación de especies volátiles, de la conversión de gas a partículas y de partículas finas de suelos (INEI, 2009).

## **2.11 MATERIAL PARTICULADO PM<sub>10</sub>**

Son partículas en suspensión con un diámetro aerodinámico de hasta 10  $\mu\text{m}$  (micras); son 20 veces más pequeñas que un cabello, por su tamaño el PM<sub>10</sub> es capaz de ingresar al sistema respiratorio del ser humano; las partículas PM<sub>10</sub> son transportadas por el aire y pueden permanecer suspendidas por minutos u horas. El material particulado generado por la combustión incompleta, el tráfico, chimeneas de viviendas, incineración, minería y la quema de carbón en centrales térmicas tiene un tiempo de permanencia de 5 a 10 días. El PM<sub>10</sub> se produce principalmente por la desintegración de partículas, a través de procesos mecánicos, el polvo, el polen, las esporas, el moho, el hollín, partículas metálicas, cemento, los fragmentos de plantas e insectos, polvo tóxico de las fábricas y agricultura y de materiales de construcción. El PM<sub>10</sub> también se genera por el alto contenido de azufre de los combustibles diesel agravándose por la antigüedad y mal estado del parque automotor especialmente de los vehículos que transportan pasajeros.

Mediante DS 074-2001-PCM se establece los estándares nacionales de calidad del aire entre los cuales se considera un estándar de media aritmética anual para el PM<sub>10</sub> de 50 microgramos por metro cúbico ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ). Asimismo, se determina que para 24 horas este contaminante no debe sobrepasar 150 microgramos por metro cúbico ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ) sin excederse a más

de 3 veces al año. En el mes de setiembre del 2009, la Dirección General de Salud Ambiental (DIGESA) reportó que la concentración de material particulado PM<sub>10</sub> ascendía a 100,0 microgramos por metro cúbico ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ), cifra inferior en 23,0% en relación a igual mes del 2008. Asimismo, fue inferior en 2,0%, con respecto a agosto del 2009. No obstante, fue mayor en 100,0% en relación al estándar de la calidad del aire, que es 50 microgramos por metro cúbico ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ), (INEI, 2009).

## **2.12 REGLAMENTO DE ESTÁNDARES NACIONALES DE CALIDAD AMBIENTAL DEL AIRE**

- Decreto Supremo D.S. N° 003-2008-MINAM. Aprueban Estándares de Calidad Ambiental para Aire.
- Resolución Presidencial N° 089-2005-CONAM/PCD. Programa Anual Mayo 2005 - Abril 2006, para Estándares de Calidad Ambiental (ECA) y Límites Máximos Permisibles.
- Decreto Supremo D.S. N° 074-2001-PCM. Aprueban el Reglamento de Estándares de Calidad Ambiental para Aire (tablas 2, 3 y 4).

El Estándar de Calidad Ambiental (ECA), es la medida de la concentración o del grado de elementos sustancias o parámetros físicos, químicos y biológicos en el aire, agua o suelo en su condición de cuerpo

receptor, que no representa riesgo significativo para la salud de las personas ni al ambiente.

*Tabla 2*

**Estándares Nacionales de Calidad Ambiental del Aire D.S. N° 074-2001-PCM. (Todos los valores son concentraciones en microgramos por metro cúbico. NE significa no exceder)**

CONTAMINANTES	PERIODO	FORMA DEL		MÉTODO DE ANÁLISIS <sup>1[1]</sup>
		VALOR	FORMATO	
Dióxido de Azufre	Anual	80	Media aritmética anual	Fluorescencia UV (método automático)
	24 horas	365	NE más de 1 vez al año	
PM <sub>10</sub>	Anual	50	Media aritmética anual	Separación inercial/ filtración (Gravimetría)
	24 horas	150	NE más de 3 veces/año	
Monóxido de Carbono	8 horas	10000	Promedio móvil	Infrarrojo no dispersivo (NDIR) (Método automático)
	1 hora	30000	NE más de 1 vez/año	
Dióxido de Nitrógeno	Anual	100	Promedio aritmético anual	Quimiluminiscencia (Método automático)
	1 hora	200	NE más de 24 veces/año	
Ozono	8 horas	120	NE más de 24 veces/año	Fotometría UV (Método automático)
Plomo	Anual <sup>2[2]</sup>			Método para PM10 (Espectrofotometría de absorción atómica)
	Mensual	1.5	NE más de 4 veces/año	
Sulfuro de Hidrógeno	24 horas <sup>2</sup>			Fluorescencia UV (método automático)

<sup>1[1]</sup> O método equivalente aprobado

<sup>2[2]</sup> A determinarse según lo establecido en el Artículo del presente reglamento.

Fuente: Decreto Supremo N° 074-2001-PCM

**Tabla 3**  
**Valores de tránsito**

CONTAMINANTE	PERIODO	FORMA DEL ESTÁNDAR		MÉTODO DE ANÁLISIS
		VALOR	FORMATO	
Dióxido de Azufre	Anual	100	Media aritmética anual	Fluorescencia UV (método automático)
	Anual	80	Media aritmética anual	
PM <sub>10</sub>	24 horas	200	NE más de 3 veces/año	Separación inercial/ filtración (Gravimetría)
	1 hora	250	NE más de 24 veces/año	
Dióxido de Nitrógeno	1 hora	250	NE más de 24 veces/año	Quimiluminiscencia (Método automático)
Ozono	8 horas	160	NE más de 24 veces/año	Fotometría UV (Método automático)

Fuente: Decreto Supermo N° 074-2001-PCM

**Tabla 4**  
**Valores Referenciales**

CONTAMINANTE	PERIODO	FORMA DEL ESTÁNDAR		MÉTODO DE ANÁLISIS
		VALOR		
PM-2.5	Anual	15		Separación inercial/ filtración (gravimetría)
	24 horas	65		

Fuente: Decreto Supremo N° 074-2001-PCM

Todos los valores son concentraciones en microgramos por metro cúbico; NE significa no exceder. El método de análisis puede también ser un método equivalente aprobado.

## CAPÍTULO III

### MARCO METODOLÓGICO

#### 3.1 TIPO DE DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

En el presente trabajo de investigación se empleó el diseño cuasi-experimental o de campo.

Los diseños cuasi-experimentales, principales instrumentos de trabajo dentro del ámbito aplicado, son esquemas de investigación no aleatorios. Dado la no aleatorización, no es posible establecer de forma exacta la equivalencia inicial de los grupos, como ocurre en los diseños experimentales (Bono Cabré, 2012).

#### 3.2 VARIABLES ATMOSFÉRICAS Y UBICACIÓN

##### 3.2.1 Para el modelo matemático

###### **Variables dependientes**

- Ubicación  $(x; y; z)$  del emisor  $(m)$  – variable cuantitativa.
- Concentración de material particulado  $PM_{10}$   $(\mu g/m^3)$  – variable cuantitativa.
- Tiempo desde la liberación del contaminante  $(s)$ .

### **Variables independientes**

- Ubicación  $(x; y; z)$  del receptor  $(m)$  – variable cuantitativa.
- Velocidad del viento  $(m/s)$  – variable cuantitativa.
- Dirección del viento (en grados sexagesimales) – variable cuantitativa.
- Estabilidad atmosférica (A, B, C, D, E o F) – variable discreta.
- Tipo de suelo (Rural o Urbano) - variable discreta.
- Cantidad de contaminante del emisor  $(g/s)$  – variable cuantitativa.
- Temperatura ambiente (K) – variable cuantitativa.
- Humedad (%) – variable cuantitativa.

### **3.2.2 Para el equipo de medición de partículas PM<sub>10</sub>**

#### **Variables dependientes**

- Concentración de material particulado PM<sub>10</sub>  $(\mu g/m^3)$  – variable cuantitativa.
- Ubicación  $(x; y; z)$  del emisor  $(m)$  – variable cuantitativa.
- Tiempo desde la liberación del contaminante  $(s)$ .
- Dirección del viento (en grados sexagesimales) – variable cuantitativa.

- Temperatura ambiente (K) – variable cuantitativa.
- Estabilidad atmosférica (A, B, C, D, E o F) – variable discreta.
- Velocidad del viento ( $m/s$ ) – variable cuantitativa.
- Tipo de suelo (Rural o Urbano) - variable discreta.

### **Variables independientes**

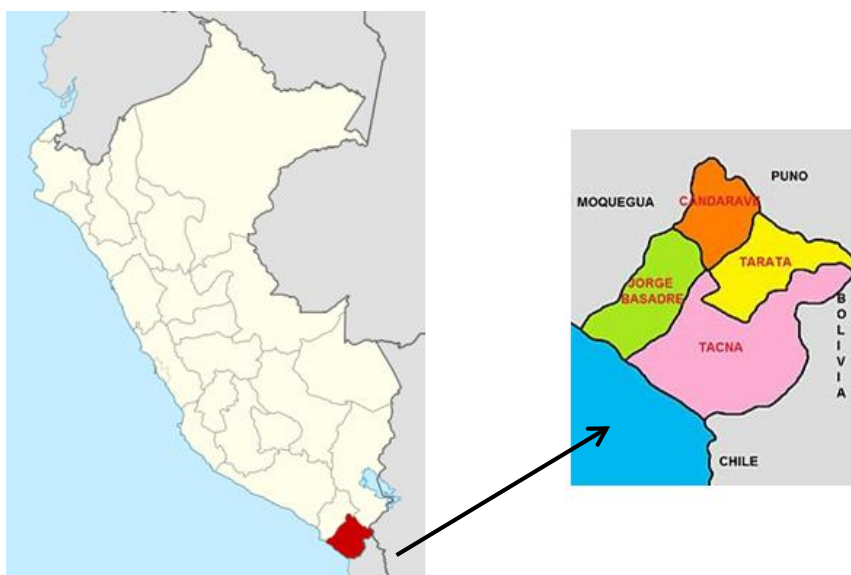
- Ubicación ( $x; y; z$ ) del equipo de alto volumen PM<sub>10</sub> ( $m$ ) – variable cuantitativa.

### **3.3 ÁREA DE ESTUDIO**

El presente estudio se llevó a cabo en la zona urbana aledaña al Ovalo Cusco de la ciudad de Tacna, que se ubica en la capital del departamento del mismo nombre, la cual se encuentra en la zona más extrema del sur del País con las siguientes coordenadas: La Concordia, frontera con Chile 18° 19' latitud Sur y 70° 20' longitud Oeste; el Tripartito, frontera con Chile y Bolivia 17° 27' latitud Sur, 69° 10' longitud Oeste y se encuentra a una altitud de 562 msnm. Cuenta con una superficie de 8 170,39 km<sup>2</sup>, y su cantidad de habitantes en el año 2 012 fue de 279 750; de los cuales 265 763 viven en la zona urbana y 13 987 en la zona rural.

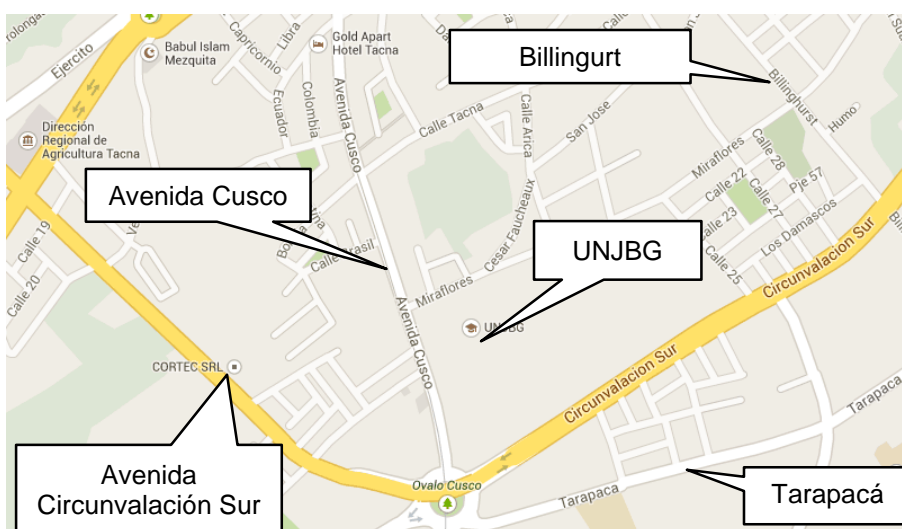
La zona urbana aledaña al Ovalo Cusco, comprende las avenidas Circunvalación Sur, Cusco, Tarapaca, la calle Billinghamurst y la Universidad

Nacional Jorge Basadre Grohmann - UNJBG, tal como se muestra en las Figuras 17, 18 y 19.



**Figura 17. El mapa de Perú y Tacna**

Fuente: Elaboración propia



**Figura 18. Zona urbana aledaña al Ovalo Cusco**

Fuente: Google earth



**Figura 19. La UNJBG ubicada en la zona urbana aledaña al Ovalo Cusco**

Fuente: Google earth

### **3.4 PROTOCOLO PARA LA MEDICIÓN DE LOS PM<sub>10</sub>**

Los equipos de monitoreo automático requieren temperaturas estables en el rango de 20°C a 25°C, por lo que se requiere un sistema de aire acondicionado (DIGESA, 2005).

Los muestreadores de material particulado, como el de alto volumen, son generalmente localizados al aire libre sobre la caseta, mientras que los monitores automáticos de partículas y gases son ubicados dentro de la estación (en estantes) recibiendo la muestra de aire del exterior a través de mangueras de material inerte (recomendable teflón).

Existen diferentes recomendaciones de distancias y elevaciones pertinentes para cada contaminante en particular. La entrada del muestreador debe protegerse de manera adecuada de condiciones de tiempo como altas temperaturas, luz solar intensiva, lluvia y viento fuerte, entre otras. La Tabla 5 resume los criterios de la USEPA para la toma de muestra por contaminante y escala de medición.

*Tabla 5*

**Criterios de ubicación de la toma muestra por contaminante y escala de medición**

Contaminante	Escala	Altura de la toma de muestra (m)	Distancia vertical y horizontal de las estructuras de soporte	
SO <sub>2</sub> <sup>B, C, D, E</sup>	Media	3 – 15	> 1	
	Local			
	Urbana			
	Regional			
CO <sup>C, D, F</sup>	Microescala	3 ± 0.5	> 1	
	Media	3 – 15		
Local				
O <sub>3</sub> <sup>B, C, D</sup>	Media	3 – 15	> 1	
	Local			
	Urbana			
	Regional			
NO <sub>2</sub> <sup>B, C, D</sup>	Media	3 – 15	> 1	
	Local			
	Urbana			
PM-10 <sup>B, C, D, E, G</sup>	Microescala	2 – 7	> 2, solo horizontal	
	Media	2 – 15		
	Local			
	Urbana			
Pb	Regional		2 – 15	> 2, solo horizontal
	Microescala	2 – 7		
	Media			
	Local			
	Urbana	2 – 15	> 2, solo horizontal	
	Regional			

Fuente: DIGESA 2005

Donde:

- <sup>A</sup> Cuando el sensor se localiza en un tejado, esta distancia de separación hace referencia a las paredes, a los parapetos o a los áticos situados en la azotea.
- <sup>B</sup> Debe ser > 20 metros de la línea de goteo del árbol y debe estar a 10 metros de la línea de goteo cuando el árbol actúa como obstrucción.
- <sup>C</sup> La distancia entre los obstáculos (árboles y edificios) y el muestreador debe ser mayor que dos veces la altura del obstáculo sobre el nivel de las entradas del muestreador.
- <sup>D</sup> Deben tener circulación de aire sin restricción de 270 grados alrededor del sensor o muestreador, 180 grados si el sensor está en el lado de un edificio.
- <sup>E</sup> El sensor o muestreador debe estar ausente de fuentes menores tales como hornos o tubos de incineración. La distancia de separación es dependiente de la altura de emisión de la fuente de menor importancia (como un tubo de emisión), del tipo de combustible o de basura quemada, y de la calidad del combustible (sulfuro, ceniza, o contenido de plomo). Este criterio se diseña para evitar influencias indebidas de fuentes menores.
- <sup>F</sup> Para microescalas de sitios de monitoreo de CO, el sensor debe estar > 10 metros de una intersección de calle y preferiblemente en una

localización a mitad de calle

<sup>G</sup> Para monitores de PM<sub>10</sub> una distancia de separación de 2 a 4 metros entre los monitores colocados.

### 3.5 UBICACIÓN DE LA ESTACIÓN DE MONITOREO

El lugar de monitoreo para obtener la concentración del contaminante PM<sub>10</sub> se ubicó al costado del edificio de la Escuela de Metalurgia que está ubicada dentro del campus de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann de Tacna – UNJBG. Su ubicación se encuentra a 18°01'35.51" S 70°15'01.84" O, y en coordenadas UTM, 367568.00 m E (Coordenada Este) y 8006300.00 m S (Coordenada Norte), tal como se muestra en las figuras 20, 21 y 22.



**Figura 20. El Ovalo Cusco ubicado en la ciudad de Tacna.**

Fuente: Google earth.



**Figura 21. Lugar de monitoreo ESME - UNJBG, 367568.00 m E (Coord. Este) y 8006300.00 m S (Coordenada Norte)**

Fuente: Google earth



**Figura 22. La estación de monitoreo del Gobierno Regional de Tacna ubicado en el campus de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann, donde se realizó el monitoreo de PM<sub>10</sub> desde el 28 de marzo al 05 de abril del 2016.**

Fuente: Elaboración propia

### **3.6 EQUIPOS PARA MEDICIÓN DE MATERIAL PARTICULADO**

Los equipos utilizados para la medición de material particulado, succionan una cantidad medible de aire ambiente hacia una caja de muestreo a través de un filtro, durante un periodo de tiempo conocido, generalmente 24 horas. El filtro es pesado antes y después para determinar el peso neto ganado. El volumen total de aire muestreado se determina a partir de la velocidad promedio de flujo y el tiempo de muestreo. La concentración total de partículas en el aire ambiente se calcula como la masa recolectada dividida por el volumen de aire muestreado, ajustado a las condiciones de referencia. Existen dos muestreadores de este tipo que se diferencian en su controlador de flujo, pueden ser de sistema MFC (controlador de flujo de tipo másico) o VFC (controlador de flujo de tipo volumétrico) (MAVDT, 2010).

### **3.7 EQUIPO UTILIZADO EN EL PROYECTO**

El Thermo Scientific TEOM 1405-DF, es un monitor de aire ambiente dicotómica continua con dos Filtrar Dynamics Sistemas de Medición (Figura 23). El sistema de una sola pieza proporciona tres mediciones: PM<sub>10</sub>, PM<sub>2,5</sub> y PM-Grueso las mismas que representan fracciones PM volátiles y no volátiles.



**Figura 23. El equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF**

Fuente: Elaboración propia



**Figura 24. Vista del equipo instalado en la Loza deportiva de la ESME - UNJBG**

Fuente: Elaboración propia



**Figura 25. Equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF para la medición de PM<sub>10</sub> y PM<sub>2,5</sub>**

*Fuente:* Empresa TEOM

### **Sistema totales**

El Thermo Scientific TEOM 1405-DF, monitor, mide simultáneamente PM-10, PM-2,5 y PM-Grueso (PM10-2,5) de concentración de masa, tal como existe en el aire ambiente. El sistema 1405-DF se compone de dos: Filtrar Dynamics Sistemas de Medición (EMDC) y dos sensores de masa TEOM alojados en un solo armario, la

configuración preparada para la red que incluye el sistema de control con interfaz de usuario de pantalla táctil.

### **Medida total**

El sistema está diseñado para proporcionar la lectura representante de corto y largo plazo de la concentración ambiental PM, incluso en la presencia de materiales volátiles. Los enfoques convencionales de monitoreo de PM no dan cuenta de la rápida pérdida que puede ocurrir con captación en un filtro mientras degusta ambiente PM. El 1405-DF supera este reto mediante la generación automática de las mediciones de concentración de masa ( $\text{mg} / \text{m}^3$ ) que dan cuenta de los dos componentes no volátiles y volátiles  $\text{PM}_{10}$ ,  $\text{PM}_{2,5}$  y PM-gruesos. La salida de datos por defecto del sistema consiste en una concentración de masa media de 1 hora y 24 horas corriendo actualizado cada 6 minutos y en la hora, respectivamente. El monitor calcula una base de concentraciones FD EM 1 hora y masa de referencia actualizados cada 6 minutos. Los usuarios pueden seleccionar tiempos de promediado adicional de 30 minutos a 23 horas.

### **La certeza total (precisión)**

El 1405-DF proporciona una referencia a sí misma, NIST medición de masa real utilizando la tecnología Thermo Scientific TEOM alta fiabilidad

probada. El sistema se diferencia de otros métodos de medición de PM mediante la utilización de una medición directa de masas que no está sujeto a incertidumbres de medición. Se encuentran en técnicas indirectas, como la atenuación beta, dispersión de la luz y la caída de presión.

### **Especificaciones del producto**

#### **Designaciones reguladoras**

- Candidato de la EPA y TUV muestreador método equivalente para las PM10, PM-2,5 y fracciones de tamaño PM-Gruesos.

#### **Seguridad / Denominaciones eléctricas**

##### **Diseñado para cumplir con:**

- CE: EN 61326: 1997 + A1: 1998 + A2: 2001 + A3: 2003, EN: 61010-1
- UL: 61010-1: 2004
- CSA: C22.2 No. 61010-1: 2004
- FCC: Parte 15 Subparte B, Clase B

#### **Configuración del sistema estándar**

- El *software* guiado por menú para la interacción del usuario a través de un cuarto de pantalla VGA con pantalla táctil
- Conexión y cables de interfaz, y la bomba de vacío
- Los consumibles para la operación del primer año medio (ambiente)

- RPCOMM y exportación de *software* para la comunicación local o remota.

### **Instrumento desempeño (3 l / min, 1s, condiciones estables)**

- Rango de medición: 0 a 1.000.000 g / m<sup>3</sup> (1 g / m<sup>3</sup>)
- Resolución: 0,1 mg / m<sup>3</sup>
- Precisión: ± 2,0 mg / m<sup>3</sup> (ave de 1 hora), ± 1.0 mg / m<sup>3</sup> (24 horas ave)
- La exactitud de medición de la masa: ± 0,75%

### **De promedio y salida de datos**

- En tiempo real de masas Conc. Promedio: 1 hora promedio móvil actualiza cada seis minutos
- Valor promedio a largo plazo: 1, 8, y 24 horas
- Velocidad de datos de salida: seleccionable desde 10 segundos a 24 horas

### **Rango de operación**

La temperatura del aire muestreado puede variar entre -40 y 60 ° C. La unidades de sensor y de control TEOM debe ser protegido de la intemperie dentro de la gama de 8 a 25 ° C. Un recinto al aire libre completa opcional proporciona protección contra la intemperie completa.

### **Flujo de muestra**

- Sistema de control de flujo Activol utiliza los sensores de flujo de masa y la temperatura ambiente medida y presión para mantener los caudales volumétricos constantes.
- Velocidad de flujo principal: filtro fino PM: 3,0 l / min; Filtro grueso PM: 1,67 l / min
- Velocidad de flujo de derivación: 12,0 l / min

### **Almacenamiento de datos**

- Registro de datos interna de las variables especificadas por el usuario; capacidad de 500.000 registros.

### **Medios de filtro**

- Filtro de la muestra: Pallflex TX40, de 13 mm de diámetro efectivo
- Acondicionador de muestra del filtro: 47 mm de diámetro situado en un casete de filtro moldeado de estilo FRM, mantenida a 4 ° C. Adecuado para recoger y archivar muestras de MP integrada en el tiempo para el análisis de laboratorio posteriores.

### **Acondicionamiento de la muestra**

- Sistema de equilibrado de la muestra (SES) secadora reduce el flujo principal de humedad relativa y permite el funcionamiento del

transductor de masa a 5 °C sobre la temperatura de la estación de monitoreo de aire pico.

- De purga del filtro del acondicionador contiene un intercambiador de calor que mantiene la temperatura del filtro de flujo y de partículas principal a 4 °C para filtrar eficientemente el PM volátil y no volátil en la muestra.

#### **Datos de salida y de entrada**

- Interfaz de usuario de pantalla táctil
- Ethernet con servidor integrado FTP, USB, RS232, RS485
- 8 definido por el usuario salidas analógicas (0-1 o 0-5 VDC)
- 2 circuitos de alarma Cierre por Contacto definidas por el usuario
- 4 entradas analógicas promediado (0-5 VCC) con la conversión definida por el usuario a unidades de ingeniería

#### **Requerimientos de energía**

- Modelo 1405: 100-240 VCA, 440 VA, 47-63 Hz
- Bomba: 120 VAC / 60 Hz: 4,25 A; 240 V / 50 Hz: 2,25 A

#### **Dimensiones físicas**

- W: 17 "(43,2 cm) x D: 19" (48,3 cm) x H: 50 "(127 cm)
- Peso: 75 libras (34 kg)

### **3.8 INSTALACIÓN DE LA ESTACIÓN PARA EL MONITOREO**

Para la instalación de la estación de monitoreo, se tuvo en cuenta lo siguiente: a) tipo de emisiones y fuentes de emisión; b) factores topográficos y meteorológicos, c) información de la calidad de aire, d) análisis de las características del flujo de viento (velocidad y dirección) alrededor del Ovalo Cusco y de la ciudad universitaria de la UNJBG.

Para la selección del punto de monitoreo se tuvo en cuenta el mayor flujo de vehículos.

La estación de monitoreo se instaló en la loza deportiva del pabellón de la Escuela Profesional de metalurgia – ESME, que está ubicada dentro del campus de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann-UNJBG. El sensor se ubicó a una altura de 3,80m, tal como se muestra en la Figura 26 y 27.

La estación de monitoreo estuvo administrado por personal profesional y capacitado en las operaciones de monitoreo del Gobierno Regional de Tacna, dando como resultados las concentraciones de los contaminantes  $PM_{10}$ ,  $PM_{2,5}$ , CO,  $NO_x$  (NO y  $NO_2$ ),  $SO_2$ ,  $H_2S$  y  $O_3$  y los parámetros meteorológicos de la velocidad y dirección del viento, la humedad relativa, la temperatura, la precipitación, la radiación solar, la presión barométrica y la radiación ultravioleta.



**Figura 26. Loza deportiva de la ESME donde se instaló la estación de monitoreo**

*Fuente:* Elaboración propia



**Figura 27. Estación de monitoreo en la loza deportiva de la ESME-UNJBG**

*Fuente:* Elaboración propia

### 3.9 FECHAS DE MONITOREO DE LOS PM<sub>10</sub>

El monitoreo de los PM<sub>10</sub> se realizó durante las fechas descritas en la tabla 3.2, de acuerdo a las facilidades otorgadas por el Gobierno Regional de Tacna (préstamo del equipo) y de la UNJBG donde se instaló la estación de monitoreo.

*Tabla 6.*  
**Cronograma de monitoreo de los PM<sub>10</sub>**

Mes	N° de muestras	Fecha	Hora Inicial	Hora Final	Tiempo medido (horas)
MARZO	1	28/03/2016	13:00	24:00	12
	2	29/03/2016	00:00	24:00	24
	3	30/03/2016	00:00	24:00	24
	4	31/03/2016	00:00	24:00	24
ABRIL	5	01/04/2016	00:00	24:00	24
	6	02/04/2016	00:00	24:00	24
	7	03/04/2016	00:00	24:00	24
	8	04/04/2016	00:00	24:00	24
	9	05/04/2016	00:00	07:00	7

Fuente: Elaboración propia

### 3.10 ECUACIÓN DE ADVECCIÓN – DIFUSIÓN

La ecuación de advección-difusión, es una ecuación diferencial parcial (EDP) de tipo parabólico, y describe el proceso de la advección y la difusión de una sustancia en un fluido, donde la advección es una especie

de transporte de la sustancia, es decir, la sustancia es transportada por el efecto de un campo vectorial, generado por una energía.

Esta ecuación aparece en el estudio de la propagación de sustancias contaminantes en diferentes medios, su solución representa la concentración de la sustancia que se dispersa y es una información muy importante en el estudio de diversos problemas de diferente naturaleza (física, química, económica, ambiental, etc.). Debido a la complejidad de estos problemas no es posible en general obtener una solución analítica de esta ecuación, por lo que se usó el método del elemento finito (MEF) para hallar una solución aproximada (Galeano Vargas, 2013).

La ecuación de advección-difusión está dada por  $u$ , tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \beta \nabla u = f & \text{para } x \in \Omega \\ u(x;t) = g_D(x) & \text{para } x \in \Gamma_D \subset \partial\Omega, \quad t > 0 \\ \nabla u(x;t) \eta(x) = g_N(x) & \text{para } x \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(0;x) = u_0(x) & \text{para } x \in \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = f & \text{para } x \in \Omega \\ u(x;t) = g_D(x) & \text{para } x \in \Gamma_D \subset \partial\Omega, \quad t > 0 \\ \nabla u(x;t) \eta(x) = g_N(x) & \text{para } x \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(0;x) = u_0(x) & \text{para } x \in \Omega \end{cases}$$

donde  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , es el diferencial a través del tiempo,  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$  es el

término correspondiente a la difusión, con coeficiente de difusión  $\mu > 0$ , las primeras derivadas parciales corresponden a la advección en la dirección  $\beta = (\beta_1; \beta_2)$  y  $x = (x_1; x_2)$ ,

Para la aplicación del método del elemento finito a la ecuación de advección-difusión, se denominará a la ecuación (3.1) como la formulación fuerte de esta, se hallará su respectiva formulación débil, y así se seguirá con el método para llegar a la solución de la ecuación. Se puede ver que esta ecuación depende del tiempo y del espacio.

### 3.11 FORMULACIÓN DÉBIL DE LA ECUACIÓN DE ADVECCIÓN – DIFUSIÓN

Para hallar la formulación débil de la ecuación de advección-difusión, se comienza suponiendo que  $u$  es una solución a la ecuación (3.1); se toma  $v \in H_0^1(\Omega)$  como función de prueba y se multiplica por el primer término de la ecuación (3.1), pero antes se sabe que  $\beta = (\beta_1; \beta_2)$  y

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}; \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \text{ entonces, } \beta \nabla u = \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

Por lo tanto, la ecuación de advección-difusión se escribe como,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \beta \nabla u = f$$

Que al multiplicarla por  $v$  se obtiene,

$$\frac{\partial u}{\partial t} v - \mu (\Delta u) v + \beta (\nabla u) v = f v$$

Que al integrarla sobre el dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  se tiene

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v - \int_{\Omega} \mu (\Delta u) v + \int_{\Omega} \beta (\nabla u) v = \int_{\Omega} f v$$

Que al aplicar la fórmula de Green se obtiene,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v + \mu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\partial \Omega} v \nabla u \cdot \eta + \int_{\Omega} \beta (\nabla u) v = \int_{\Omega} f v$$

Se usa el hecho de que  $v = 0$  en  $\partial \Omega$ , entonces

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v + \mu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} \beta (\nabla u) v = \int_{\Omega} f v$$

Con lo anterior, se escribe la formulación débil de la ecuación de advección-difusión como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v + \mu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} \beta (\nabla u) v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(x;t) = g_D(x) \quad \text{para } x \in \Gamma_D \subset \partial \Omega, \quad t > 0 \\ \nabla u(x;t) \eta(x) = g_N(x) \quad \text{para } x \in \Gamma_N \subset \partial \Omega, \quad t > 0 \\ u(0;x) = u_0(x) \quad \text{para } x \in \Omega \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Ahora, con la ecuación (3.2), que es la formulación débil de la ecuación de advección-difusión, se debe elegir un espacio de dimensión finita adecuado, para construir la formulación de Galerkin, la cual es el paso a seguir en el método del elemento finito.

### 3.12 FORMULACIÓN DE GALERKIN Y APROXIMACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

La formulación de Galerkin es un método para discretizar el espacio  $\Omega$  en el que se está trabajando, pero el tiempo sigue siendo continuo. Luego de realizar esta discretización del espacio, se verá un método para discretizar el tiempo.

Se sabe que para esta formulación, lo primero que se necesita es construir una triangulación  $\tau^h$ , con aspecto regular y cuasi-uniforme en el dominio  $\Omega$ . Con esta triangulación se obtiene los elementos  $K_i$  y los vértices  $x_i$ , que crearán un espacio de dimensión finita. Para la ecuación de advección-difusión se emplea el espacio de funciones  $P_0^2(\tau^h)$ .

$$\begin{cases} P_0^2(\tau^h) = \{v \in C(a,b) : v|_K \text{ es un polinomio de grado total } 2 \forall K \in \tau^h\} \\ = \{v \in C(a,b) : v|_K = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2\} \\ P_0^2(\tau^h) = \{v \in P_0^2(\tau^h) : v(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega\} \end{cases}$$

es decir, este será el espacio de funciones de forma y funciones de prueba.

Por lo que la formulación de Galerkin se escribe como,

Encontrar  $u \in P_0^2(\tau^h)$  tal que:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v + \mu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} \beta(\nabla u) v = \int_{\Omega} f v & \forall v \in P_0^2(\tau^h) \\ u(x;t) = g_D(x) & \text{para } x \in \Gamma_D \subset \partial\Omega, \quad t > 0 \\ \nabla u(x;t) \eta(x) = g_N(x) & \text{para } x \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{para } x \in \Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

Con esto se tiene la formulación de Galerkin semidiscreta, ya que el tiempo aún esta continuo. Para obtener la formulación discreta se utiliza un método para discretizar el tiempo.

Ahora, se escribe la formulación matricial semidiscreta (tiempo continuo), por lo que se usa las funciones base  $\varphi_i$  de  $P_0^2(\tau^h)$ , tal que  $u$  es combinación lineal de estas  $\varphi_i$ .

$$u = \sum_{i=1}^{N_h^v} \alpha(x_i) \varphi_i$$

donde  $N_h^v$ , es el número de vértices de la triangulación, y  $u$  es el vector que representa las coordenadas de la función de elementos finitos.

Por lo que se escribe la formulación matricial semi-discreta (tiempo continuo) como:

Encontrar  $\alpha \in P_0^2(\tau^h)$ , tal que

$$\begin{cases} (T + A + V)\alpha = B & \forall v \in P_0^2(\tau^h) \\ u(x;t) = g_D(x) & \text{para } x \in \Gamma_D \subset \partial\Omega, \quad t > 0 \\ \nabla u(x;t)\eta(x) = g_N(x) & \text{para } x \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(0;x) = u_0(x) & \text{para } x \in \Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

Donde

$$T = [t_{ij}] \text{ y } t_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \varphi_j$$

$$A = [a_{ij}] \text{ y } a_{ij} = \mu \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j$$

$$V = [v_{ij}] \text{ y } v_{ij} = \int_{\Omega} \beta(\nabla \varphi_i) \varphi_j$$

$$B = [b_i] \text{ y } b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i + l_i$$

son las matrices formadas por las funciones base de  $P_0^2(\tau^h)$  y  $l_i$  es un término que surge de acuerdo a la condición de frontera.

En consecuencia, la ecuación (3.4) no es posible solucionarla en un *software* para el desarrollo del método del elemento finito, ya que el tiempo esta continuo, por lo que se estudió un método para discretizar el tiempo.

### 3.13 DISCRETIZACIÓN DEL TIEMPO

Para obtener la discretización del tiempo, se escribe la serie de Taylor de  $u$  como,

$$u(t + \Delta t; x) = u(t; x) + \Delta t \frac{\partial u(t; x)}{\partial t} + \Delta t^2 r(x; t)$$

Despejando  $\frac{\partial u}{\partial t}$  y asumiendo que  $r(x; t)$  es acotado, se tiene que

$$\frac{\partial u(t; x)}{\partial t} \approx \frac{u(t + \Delta t; x) - u(t; x)}{\Delta t}$$

Con un error de aproximación de orden  $\Delta t$ . Para simplificar la escritura, se denota esta expresión como,

$$\frac{\partial u(t; x)}{\partial t} \approx \frac{u_m - u_{m-1}}{\Delta t} \quad (3.5)$$

donde  $t_m = t + \Delta t$ ,  $t_{m-1} = t$ ,  $u_m = u(t + \Delta t; x)$  y  $u_{m-1} = u(t; x)$

Con esto, se aplica el método de Euler-Galerkin, el cual consiste en reemplazar la ecuación (3.5) en la ecuación (3.3) y así se obtiene,

$$\int_{\Omega} \frac{u_m - u_{m-1}}{\Delta t} v + \mu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} \beta(\nabla u) v = \int_{\Omega} f v \quad (3.6)$$

Ahora, como  $u_{m-1} = u(t; x)$ , es decir en el tiempo  $t$ , se despeja la ecuación

(3.6) de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u_m v + \mu \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla v + \int_{\Omega} \beta(\nabla u_m) v = \int_{\Omega} f v + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u_{m-1} v$$

Por lo tanto, tenemos que, dado  $u_0 \in P_0^2(\tau^h)$  encontrar

$u_1, u_2, u_3, \dots, u_m, \dots$  tal que

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u_m v + \mu \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla v + \int_{\Omega} \beta(\nabla u_m) v = \int_{\Omega} f v + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u_{m-1} v, \forall v \in P_0^2(\tau^h) \\ u(x; t) = g_D(x) \quad \text{para } x \in \Gamma_D \subset \partial\Omega, \quad t > 0 \\ \nabla u(x; t) \eta(x) = g_N(x) \quad \text{para } x \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(0; x) = u_0(x) \quad \text{para } x \in \Omega \end{cases} \quad (3.7)$$

es la formulación de Galerkin discreta e implícita, así ya se puede hacer la aproximación por elementos finitos.

Ahora se toma las funciones base  $\varphi_i$  de  $P_0^2(\tau^h)$ , tal que  $u$  es combinación lineal de estas  $\varphi_i$ , es decir,

$$u = \sum_{i=1}^{N_h^v} \mathbf{u}(x_i) \varphi_i$$

donde  $N_h^v$ , es el número de vértices de la triangulación, y  $\mathbf{u}$  es el vector que representa las coordenadas de la función de elementos finitos.

Ahora, se define la formulación matricial implícita como:

Dado  $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^2$  encontrar  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_m, \dots$  tal que:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} M \vec{u}_m + A \vec{u}_m + V \vec{u}_m = B + \frac{1}{\Delta t} M \vec{u}_{m-1}, \forall \vec{v} \in P_0^2(\tau^h) \\ u(x;t) = g_D(x) \quad \text{para } x \in \Gamma_D \subset \partial\Omega, \quad t > 0 \\ \nabla u(x;t) \eta(x) = g_N(x) \quad \text{para } x \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(0;x) = u_0(x) \quad \text{para } x \in \Omega \end{cases} \quad (3.8)$$

Donde

$$\begin{cases} M = [m_{ij}] \quad y \quad m_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \\ A = [a_{ij}] \quad y \quad a_{ij} = \mu \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \\ V = [v_{ij}] \quad y \quad v_{ij} = \int_{\Omega} \beta (\nabla \varphi_i) \varphi_j \\ B = [b_i] \quad y \quad b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i + k_i \end{cases} \quad (3.9)$$

Donde estos términos son las formas bilineales y los funcionales lineales y

$k_i$  es un término que surge de acuerdo a la condición de frontera.

La ecuación (3.8) es la formulación matricial de la ecuación de advección-difusión, para hallar una aproximación por elementos finitos, basta con resolver este sistema, el cual en una triangulación muy fina, tendrá un alto costo computacional.

### 3.14 LA ECUACIÓN DE ADVECCIÓN-DIFUSIÓN COMO MODELO DE DISPERSIÓN

El modelo matemático que se utilizó en el presente trabajo y que representa la concentración de PM<sub>10</sub> que se dispersa, es la ecuación de advección-difusión:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_x \frac{\partial C}{\partial x} + u_y \frac{\partial C}{\partial y} = (D + Kc) \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + Q \quad (3.10)$$

Que matricialmente es de la forma:

$$M \frac{\partial C}{\partial t} + KC + F = 0 \quad (3.11)$$

Para hallar una aproximación de la solución por elementos finitos, basta con resolver esta ecuación matricial y reemplazar las funciones base  $\varphi_i(x, y)$  por  $N_i(x, y)$  en la ecuación (3.9). Se reformuló de la siguiente manera:

$$M = [m_{ij}] \text{ y } m_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j = \iint_{\Omega} N_i(x; y) N_j(x; y) d\Omega$$

$$A = [a_{ij}] \text{ y } a_{ij} = \mu \int_{\Omega} \nabla N_i \nabla N_j, \text{ es decir,}$$

$$a_{ij} = (D + kc) \iint_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega$$

$$V = [v_{ij}] \text{ y } v_{ij} = \int_{\Omega} \beta(\nabla N_i) N_j \beta = (\beta_1; \beta_2) = (u_x; u_y),$$

$$v_{ij} = \iint_{\Omega} N_i u_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i u_y \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega$$

Se hace  $K = A + V$ , entonces

$$k_{ij} = (D + kc) \iint_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega + \iint_{\Omega} N_i u_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i u_y \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega$$

$$F = [f_i] \text{ y } f_i = \int_{\Omega} Q N_i + l_i, \text{ es decir } f_i = \iint_{\Omega} Q N_i(x; y) d\Omega + l_i$$

$(u_x, u_y)$ , es el campo de velocidades del flujo presentes en el dominio de simulación;  $D$  es la difusividad molecular;  $K_c$  es el coeficiente de difusión de masa debido a la turbulencia y  $Q$  es la fuente o generación externa. Las funciones base  $N_i(x, y)$  se muestran en la ecuación (2.18) y Figura 9.

### 3.15 PROGRAMAS CODIFICADAS EN MATLAB PARA SOLUCIONAR LA ECUACIÓN DE ADVECCIÓN-DIFUSIÓN

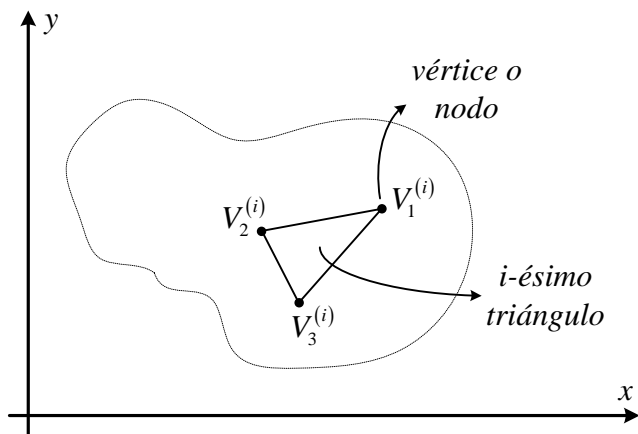
Para resolver la ecuación matricial (3.11) se utilizó el lenguaje de programación MATLAB, cuya estructura de computacional está basada en funciones.

### 3.15.1 Función matriz\_M

Esta función devuelve el valor de

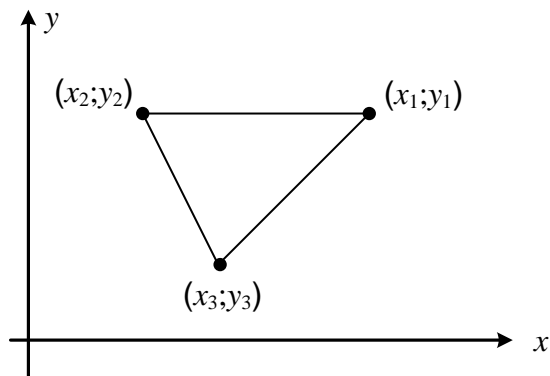
$$m_{ij} = \iint_{\Omega} N_i(x; y) N_j(x; y) d\Omega,$$

donde  $\Omega$  es una región triangular del  $i$ -ésimo elemento como se observa en la Figura 28 y 29.



**Figura 28. El  $i$ -ésimo elemento triangular del dominio**

Fuente: Elaboración propia



**Figura 29. El  $i$ -ésimo elemento triangular con sus coordenadas**

Fuente: Elaboración propia

Para ilustrar el desarrollo de esta función véase el ejemplo 3.1.

### Ejemplo 3.1.

Hallar las funciones base  $N_1(x; y)$ ,  $N_2(x; y)$  y  $N_3(x; y)$  y la solución de

$$m_{ij} = \iint_{\Omega} N_i(x; y) N_j(x; y) d\Omega, \text{ para el triángulo de la Figura 30.}$$

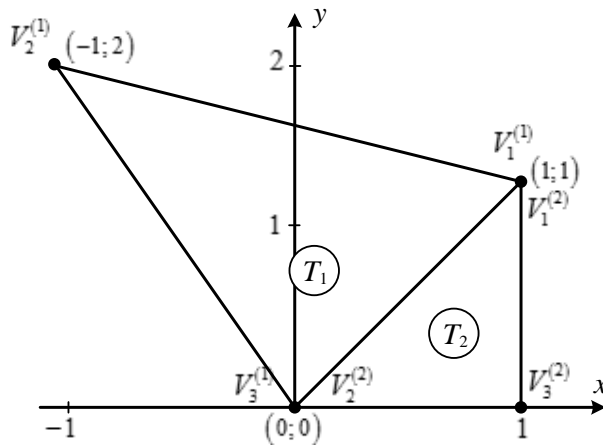


Figura 30. Dos elementos triangulares del dominio

Fuente: Elaboración propia

### Solución

Para hallar las funciones base, se utilizan las ecuaciones:

$$N_1 = \frac{(x_2 y_3 - y_2 x_3) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

$$N_2 = \frac{(x_3 y_1 - y_3 x_1) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

$$N_3 = \frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

$$2A = x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2$$

Donde A es el área del triángulo.

$$N_1 = A_1x + B_1y + C_1, \quad A_1 = \frac{y_2 - y_3}{2A}, \quad B_1 = \frac{x_3 - x_2}{2A}, \quad C_1 = \frac{x_2y_3 - y_2x_3}{2A}$$

$$N_2 = A_2x + B_2y + C_2, \quad A_2 = \frac{y_3 - y_1}{2A}, \quad B_2 = \frac{x_1 - x_3}{2A}, \quad C_2 = \frac{x_3y_1 - y_3x_1}{2A}$$

$$N_3 = A_3x + B_3y + C_3, \quad A_3 = \frac{y_1 - y_2}{2A}, \quad B_3 = \frac{x_2 - x_1}{2A}, \quad C_3 = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{2A}$$

O el siguiente procedimiento:

#### A. Funciones base para el triángulo $T_1$

Para el vértice  $V_1^{(1)}$ :  $N_1^{(1)}(x; y) = a_1^{(1)} + b_1^{(1)}x + c_1^{(1)}y$

Se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ b_1^{(1)} \\ c_1^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ b_1^{(1)} \\ c_1^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\begin{cases} a_1^{(1)} = 0 \\ b_1^{(1)} = \frac{2}{3} \\ c_1^{(1)} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

y la función base es  $N_1^{(1)}(x; y) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$ .

donde se verifica que para el vértice  $(1; 1)$ ,  $N_1^{(1)}(1; 1) = 1$ ; para el vértice  $(-1; 2)$ ,  $N_1^{(1)}(-1; 2) = 0$ ; y para el vértice  $(0; 0)$ ,  $N_1^{(1)}(0; 0) = 0$

**Para el vértice  $V_2^{(1)}$ :**  $N_2^{(1)}(x; y) = a_2^{(1)} + b_2^{(1)}x + c_2^{(1)}y$

Se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ c_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ c_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el sistema de ecuaciones se obtiene: 
$$\begin{cases} a_2^{(1)} = 0 \\ b_2^{(1)} = -\frac{1}{3} \\ c_2^{(1)} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

y la función base es  $N_2^{(1)}(x; y) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y$ .

donde se verifica que para el vértice  $(1; 1)$ ,  $N_2^{(1)}(1; 1) = 0$ ; para el vértice  $(-1; 2)$ ,  $N_2^{(1)}(-1; 2) = 1$ ; y para el vértice  $(0; 0)$ ,  $N_2^{(1)}(0; 0) = 0$

**Para el vértice  $V_3^{(1)}$ :**  $N_3^{(1)}(x; y) = a_3^{(1)} + b_3^{(1)}x + c_3^{(1)}y$

Se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ c_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ c_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\begin{cases} a_3^{(1)} = 1 \\ b_3^{(1)} = -\frac{1}{3} \\ c_3^{(1)} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

y la función base es  $N_3^{(1)}(x; y) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y$ .

donde se verifica que para el vértice  $(1; 1)$ ,  $N_3^{(1)}(1; 1) = 0$ ; para el vértice  $(-1; 2)$ ,  $N_3^{(1)}(-1; 2) = 0$ ; y para el vértice  $(0; 0)$ ,  $N_3^{(1)}(0; 0) = 1$

Por lo tanto, las funciones base para el triángulo  $T_1$  son:

$$\begin{cases} N_1^{(1)}(x; y) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y \\ N_2^{(1)}(x; y) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y \\ N_3^{(1)}(x; y) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \end{cases} \quad (3.12)$$

## B. Funciones base para el triángulo $T_2$

Para el vértice  $V_1^{(2)}$ :  $N_1^{(2)}(x; y) = a_1^{(2)} + b_1^{(2)}x + c_1^{(2)}y$

Se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{(2)} \\ b_1^{(2)} \\ c_1^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{(2)} \\ b_1^{(2)} \\ c_1^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el sistema de ecuaciones se obtiene: 
$$\begin{cases} a_1^{(2)} = 0 \\ b_1^{(2)} = 0 \\ c_1^{(2)} = 1 \end{cases}$$

y la función lineal es  $N_1^{(2)}(x; y) = y$ .

donde se verifica que para el vértice  $(1; 1)$ ,  $N_1^{(2)}(1; 1) = 1$ ; para el vértice

$(0; 0)$ ,  $N_1^{(2)}(0; 0) = 0$ ; y para el vértice  $(1; 0)$ ,  $N_1^{(2)}(1; 0) = 0$

**Para el vértice  $V_2^{(2)}$ :**  $N_2^{(2)}(x; y) = a_2^{(2)} + b_2^{(2)}x + c_2^{(2)}y$

Se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ c_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ c_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el sistema de ecuaciones se obtiene: 
$$\begin{cases} a_2^{(2)} = 1 \\ b_2^{(2)} = -1 \\ c_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$

y la función lineal es  $N_2^{(2)}(x; y) = 1 - x$ .

donde se verifica que para el vértice  $(1; 1)$ ,  $N_2^{(2)}(1; 1) = 0$ ; para el vértice

$(0; 0)$ ,  $N_2^{(2)}(0; 0) = 1$ ; y para el vértice  $(1; 0)$ ,  $N_2^{(2)}(1; 0) = 0$

**Para el vértice  $V_3^{(2)}$ :**  $N_3^{(2)}(x; y) = a_3^{(2)} + b_3^{(2)}x + c_3^{(2)}y$

Se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ c_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ c_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el sistema de ecuaciones se obtiene: 
$$\begin{cases} a_3^{(2)} = 0 \\ b_3^{(2)} = 1 \\ c_3^{(2)} = -1 \end{cases}$$

y la función lineal es  $N_3^{(2)}(x; y) = x - y$ .

donde se verifica que para el vértice  $(1; 1)$ ,  $N_3^{(2)}(1; 1) = 0$ ; para el vértice

$(0; 0)$ ,  $N_3^{(2)}(0; 0) = 0$ ; y para el vértice  $(1; 0)$ ,  $N_3^{(2)}(1; 0) = 1$

Por lo tanto, las funciones base para el triángulo  $T_1$  y  $T_2$  son:

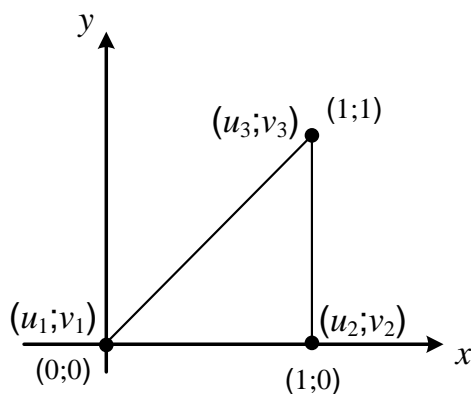
$$\begin{cases} N_1^{(1)}(x; y) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y \\ N_2^{(1)}(x; y) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y \\ N_3^{(1)}(x; y) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \end{cases} \quad \begin{cases} N_1^{(2)}(x; y) = y \\ N_2^{(2)}(x; y) = 1 - x \\ N_3^{(2)}(x; y) = x - y \end{cases}$$

### C. Solución de la integral doble $m_{ij}$

Para calcular la integral doble:

$$m_{ij} = \iint_{\Omega} N_i(x; y) N_j(x; y) d\Omega,$$

Inicialmente se va a transformar cada triángulo de la Figura 29 en un triángulo de la Figura 31.



**Figura 31. Nuevo i-ésimo elemento triangular del dominio con sus coordenadas**

*Fuente:* Elaboración propia

Las ecuaciones para la transformación son:

$$a_1x + b_1y + c_1 = u \quad (3.13)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = v \quad (3.14)$$

Reemplazando  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3)$  en la ecuación (3.13) se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \text{inversa} \left( \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando el software MATLAB se obtiene:

```
>> XX=simplify(inv([x1 y1 1;x2 y2 1;x3 y3 1])*[0;1;1])
a1= -(y2 - y3)/(x1*y2 - x2*y1 - x1*y3 + x3*y1 + x2*y3 - x3*y2)
b1=(x2 - x3)/(x1*y2 - x2*y1 - x1*y3 + x3*y1 + x2*y3 - x3*y2)
c1=(x1*y2-x2*y1-x1*y3+x3*y1)/(x1*y2-x2*y1-x1*y3+x3*y1+x2*y3-x3*y2)
```

Reemplazando  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3)$  en la ecuación (3.14) se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \text{inversa} \left( \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando el software MATLAB se obtiene:

```
>> YY=simplify(inv([x1 y1 1;x2 y2 1;x3 y3 1])*[0;0;1])
a2=(y1 - y2)/(x1*y2 - x2*y1 - x1*y3 + x3*y1 + x2*y3 - x3*y2)
b2=-(x1 - x2)/(x1*y2 - x2*y1 - x1*y3 + x3*y1 + x2*y3 - x3*y2)
c2=(x1*y2 - x2*y1)/(x1*y2 - x2*y1 - x1*y3 + x3*y1 + x2*y3 - x3*y2)
```

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \text{inversa} \left( \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u - c_1 \\ v - c_2 \end{bmatrix}$$

Aplicando el *software* MATLAB se obtiene:

```
>> xyuv=simplify(inv([a1 b1;a2 b2])*[u-c1;v-c2])
x = x1 - u*x1 + u*x2 - v*x2 + v*x3
y = y1 - u*y1 + u*y2 - v*y2 + v*y3
```

Estas ecuaciones se sustituyen en:

$$N1 = (x*(y2-y3) + (x3-x2)*y + x2*y3 - x3*y2) / (x1*y2 - x2*y1 - x1*y3 + x3*y1 + x2*y3 - x3*y2)$$

Aplicando el *software* MATLAB, se obtiene:

```
>> nn1=simplify(subs(N1,{x,y},{xyuv(1),xyuv(2)}))
N1(u,v) = 1 - u
```

Ahora se evaluará la integral doble utilizando la transformación

$$\iint_{\Omega} N_1(x,y) N_1(x,y) d\Omega = \int_0^1 \int_0^u N_1(u,v) N_1(u,v) |J(u,v)| dv du$$

Aplicando el *software* MATLAB se obtiene:

```
>> J=jacobian(uv,[u v])
J =
[ x2 - x1, x3 - x2]
[ y2 - y1, y3 - y2]
```

```

>> J=det(J)
J =
x1*y2 - x2*y1 - x1*y3 + x3*y1 + x2*y3 - x3*y2
>> Id=int(int(nn1*nn1*J,v,0,u),u,0,1)
Id = (1/12)*(x1*y2 - x2*y1 - x1*y3 + x3*y1 + x2*y3 - x3*y2)

```

$$\iint_{\Omega} N_1(x,y)N_1(x,y)d\Omega = \frac{1}{12}(x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)$$

Y así sucesivamente se evalúan las siguientes integrales dobles:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} N_1(x,y)N_2(x,y)d\Omega, \quad \iint_{\Omega} N_1(x,y)N_3(x,y)d\Omega, \quad \iint_{\Omega} N_2(x,y)N_1(x,y)d\Omega, \\
& \iint_{\Omega} N_2(x,y)N_2(x,y)d\Omega, \quad \iint_{\Omega} N_2(x,y)N_3(x,y)d\Omega, \quad \iint_{\Omega} N_3(x,y)N_1(x,y)d\Omega, \\
& \iint_{\Omega} N_3(x,y)N_2(x,y)d\Omega \quad \text{y} \quad \iint_{\Omega} N_3(x,y)N_3(x,y)d\Omega
\end{aligned}$$

Dando como resultado la siguiente matriz

$$M = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

donde  $A = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)$ , es el área del triángulo

#### D. Código de la función matriz\_M

El código para evaluar la integral  $m_{ij} = \iint_{\Omega} N_i(x,y)N_j(x,y)d\Omega$  se

muestra a continuación:

```
function M=matriz_M(x1,y1,x2,y2,x3,y3)
A=0.5*(x2*y3+x1*y2+x3*y1-x2*y1-x1*y3-x3*y2);
M=(A/12)*[2 1 1;1 2 1;1 1 2];
```

### Ejecución de la función matriz\_M

```
>> M=matriz_M(2,1,8,4,5,6)
M =
    1.7500    0.8750    0.8750
    0.8750    1.7500    0.8750
    0.8750    0.8750    1.7500
```

### 3.15.2 Función matriz\_Kuxuy

Esta función devuelve el valor de la expresión:

$$k_{ij} = (D + kc) \iint_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega + \iint_{\Omega} N_i u_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i u_y \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega$$

donde  $\Omega$ , es una región triangular

La función devuelve la matriz  $k_{ij}$  de 3x3, donde  $k=(D+Kc)*I1 + I2$ .

$I1=\text{integraldoble}(\text{dp}(N_i,x)*\text{dp}(N_j,x)+\text{dp}(N_i,y)*\text{dp}(N_j,y))$

$I2=\text{integraldoble}(N_i*ux*\text{dp}(N_j,x)+N_i*uy*\text{dp}(N_j,y))$

$$N_1 = \frac{(x_2 y_3 - y_2 x_3) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

$$N_2 = \frac{(x_3 y_1 - y_3 x_1) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

$$N_3 = \frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

$$\frac{\partial N_1(x, y)}{\partial x} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2} = \frac{y_2 - y_3}{2A}$$

$$\frac{\partial N_1(x, y)}{\partial y} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2} = \frac{x_3 - x_2}{2A}$$

$$k_{11} = (D + kc) \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} d\Omega + \iint_{\Omega} N_1 u_x \frac{\partial N_1}{\partial x} + N_1 u_y \frac{\partial N_1}{\partial y} d\Omega$$

$$k_{11} = (D + kc) \iint_{\Omega} \frac{y_2 - y_3}{2A} \frac{y_2 - y_3}{2A} + \frac{x_3 - x_2}{2A} \frac{x_3 - x_2}{2A} d\Omega + \iint_{\Omega} N_1 u_x \frac{\partial N_1}{\partial x} + N_1 u_y \frac{\partial N_1}{\partial y} d\Omega$$

$$k_{11} = (D + kc) \left( \left( \frac{y_2 - y_3}{2A} \right)^2 + \left( \frac{x_3 - x_2}{2A} \right)^2 \right) \iint_{\Omega} d\Omega + \iint_{\Omega} N_1 u_x \frac{\partial N_1}{\partial x} + N_1 u_y \frac{\partial N_1}{\partial y} d\Omega$$

Pero  $\iint_{\Omega} d\Omega$  es el área del triángulo, entonces:

$$\iint_{\Omega} d\Omega = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2) = A$$

$$k_{11} = (D + kc) \left( \left( \frac{y_2 - y_3}{2A} \right)^2 + \left( \frac{x_3 - x_2}{2A} \right)^2 \right) A + \iint_{\Omega} N_1 u_x \frac{\partial N_1}{\partial x} + N_1 u_y \frac{\partial N_1}{\partial y} d\Omega$$

$$k_{11} = (D + kc) \left( \frac{(y_2 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_2)(x_3 - x_2)}{4A} \right) + \iint_{\Omega} N_1 u_x \frac{\partial N_1}{\partial x} + N_1 u_y \frac{\partial N_1}{\partial y} d\Omega$$

$$k_{11} = (D + kc) \left( \frac{(y_2 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_2)(x_3 - x_2)}{4A} \right) + \frac{\partial N_1}{\partial x} \iint_{\Omega} N_1 u_x d\Omega + \frac{\partial N_1}{\partial y} \iint_{\Omega} N_1 u_y d\Omega$$

$$k_{11} = (D + kc) \left( \frac{(y_2 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_2)(x_3 - x_2)}{4A} \right) + \frac{y_2 - y_3}{2A} \iint_{\Omega} N_1 u_x d\Omega + \frac{x_3 - x_2}{2A} \iint_{\Omega} N_1 u_y d\Omega$$

Para el caso de las integrales dobles

$\iint_{\Omega} N_1 u_x d\Omega$  y  $\iint_{\Omega} N_1 u_y d\Omega$  se aplicará la cuadratura gaussiana

**Código en MATLAB de la función que evalúa la expresión**

$$k_{ij} = (D + kc) \iint_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega + \iint_{\Omega} N_i u_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i u_y \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega$$

```
function k=matriz_Kuxuy(x1,y1,x2,y2,x3,y3,D,kc,ux,uy)
%
%Matriz de rigidez para un elemento triangular
%(x1,y1) coordenadas del primer nodo
%(x2,y2) coordenadas del segundo nodo
%(x3,y3) coordenadas del tercer nodo
%Devuelve la matriz k de 3x3
%Donde k=(D+kc)*I1 + I2
%I1=integraldoble(dp(Ni,x)*dp(Nj,x)+dp(Ni,y)*dp(Nj,y))
%I2=integraldoble(Ni*ux*dp(Nj,x)+Ni*uy*dp(Nj,y))
%sobre un triangulo
%Ejemplo:
%>>k=matriz_Kuxuy(2,1,8,4,5,6,0,1,'10*y','-10*x')
%k =
%  -70.9405    10.8095    60.1310
%  -57.5238    12.0595    45.4643
%  -76.5357    15.4643    61.0714
%
% -----
% I1=integraldoble(dp(Ni,x)*dp(Nj,x)+dp(Ni,y)*dp(Nj,y))

c1=D+kc;
AreaT=0.5*(x2*y3-y2*x3-x1*y3+y1*x3+x1*y2-y1*x2);

T1(1,1)=(x3-x2)*(x3-x2)+(y2-y3)*(y2-y3)/(4*AreaT);
T1(1,2)=(x3-x2)*(x1-x3)+(y2-y3)*(y3-y1)/(4*AreaT);
T1(1,3)=(x3-x2)*(x2-x1)+(y2-y3)*(y1-y2)/(4*AreaT);

T1(2,1)=T1(1,2);
```

```

T1(2,2)=(x1-x3)*(x1-x3)+(y3-y1)*(y3-y1)/(4*AreaT);
T1(2,3)=(x1-x3)*(x2-x1)+(y3-y1)*(y1-y2)/(4*AreaT);

T1(3,1)=T1(1,3);
T1(3,2)=T1(2,3);
T1(3,3)=(x2-x1)*(x2-x1)+(y1-y2)*(y1-y2)/(4*AreaT);
T1=c1*T1;
% -----
%
% -----
%I2=integraldoble(Ni*ux*dp(Nj,x)+Ni*uy*dp(Nj,y))
J=det_jacobiano_xuv_yuv([x1,y1,x2,y2,x3,y3]);
[A B C]=funcforma_xy_coef([x1 y1;x2 y2;x3 y3]);
[P Q R]=funcforma_uv_coef([x1 y1;x2 y2;x3 y3]);
[D E F]=nuevascoord_uv_coef([x1 y1;x2 y2;x3 y3]);

for i=1:3
    text1=sprintf('%f*u+%f*v+%f',P(i),Q(i),R(i));
    text1=strrep(text1,'+','-');

    for j=1:3
        xuv=sprintf('%f*u+%f*v+%f',D(1),E(1),F(1));
        yuv=sprintf('%f*u+%f*v+%f',D(2),E(2),F(2));
        xuv=strrep(xuv,'+','-');
        yuv=strrep(yuv,'+','-');
        text2=strrep(ux,'x',xuv);
        text2=strrep(text2,'y',yuv);
        text2=strrep(text2,'--','+');

        text3=strrep(uy,'x',xuv);
        text3=strrep(text3,'y',yuv);
        text3=strrep(text3,'--','+');

        %Une las dos funciones Ni(x,y) y ux en sus nuevas variables u,v
        Niux=strcat('@(u,v)',text1,'*',text2);
        Niux=vectorize(Niux);
        Niux=str2func(Niux);

        %Une las dos funciones Ni(x,y) y uy en sus nuevas variables u,v
        Niuy=strcat('@(u,v)',text1,'*',text3);
        Niuy=vectorize(Niuy);
        Niuy=str2func(Niuy);
    T2(i,j)=A(j)*integraldoble_fNuv(Niux,J)+B(j)*integraldoble_fNuv(Ni
    uy,J);
    end
end
% -----
k=T1+T2;

```

### 3.15.3 Función ejemplo1g

```
function [x,y]=ejemplo1g(bs,s)
%[x,y]=ejemplo1g(bs,s) da las coordenadas de los puntos
%límitrofes.
%bs especifica los segmentos de contorno (segmento 1,
%segmento2,...). bs puede ser un escalar.
%s especifica los valores de los parámetros correspondientes
nbs=4; %nbs numero de segmentos de contorno
if nargin==0,
    x=nbs;
    return
end
d=[
    0 0 0 0 % valor del parametro de inicio
    1 1 1 1 % valor del parametro final
    1 1 1 1 % valor de la region de la mano izquierda
    0 0 0 0 % valor de la region de la mano derecha
];
bs1=bs(:)';
if find(bs1<1 | bs1>nbs),
    error(message('pde:squareg:InvalidBs'))
end
if nargin==1,
    x=d(:,bs1);
    return
end
x=zeros(size(s));
y=zeros(size(s));
[m,n]=size(bs);
if m==1 && n==1,
    bs=bs*ones(size(s)); % expande bs
elseif m~=size(s,1) || n~=size(s,2),
    error(message('pde:squareg:SizeBs'));
end
if ~isempty(s),
    % segmento de contorno 1
    ii=find(bs==1);
    if length(ii)
        x(ii)=interp1([d(1,1),d(2,1)], [0 1],s(ii));
        y(ii)=interp1([d(1,1),d(2,1)], [0 0],s(ii));
    end
    % segmento de contorno 2
    ii=find(bs==2);
    if length(ii)
        x(ii)=interp1([d(1,2),d(2,2)], [1 1],s(ii));
        y(ii)=interp1([d(1,2),d(2,2)], [0 1],s(ii));
    end
    % segmento de contorno 3
    ii=find(bs==3);
```

```

    if length(ii)
        x(ii)=interp1([d(1,3),d(2,3)], [1 0],s(ii));
        y(ii)=interp1([d(1,3),d(2,3)], [1 1],s(ii));
    end
    % segmento de contorno 4
    ii=find(bs==4);
    if length(ii)
        x(ii)=interp1([d(1,4),d(2,4)], [0 0],s(ii));
        y(ii)=interp1([d(1,4),d(2,4)], [1 0],s(ii));
    end
end
end

```

### 3.15.4 Función gcoord\_nodos

```

function [gcoord nodos]=gcoord_nodos(xy)
%
%La funcion gcoord_nodos(xy) devuelve las coordenadas de los
%vertices y los nodos de los triangulos
%xy: matriz mx2 con los vertices de los triangulos
%
clc
[m n]=size(xy);
gcoord(1:m,1)=xy(1:m,1);
gcoord(1:m,2)=xy(1:m,2);
nodos=delaunay(gcoord); % devuelve los nodos

```

### 3.15.5 Función cond\_frontera

```

function [nodo_frontera valor_frontera]=cond_frontera(nf)
%Funcion para ingresar los valores en la frontera
%nf: nodos de la frontera. Matriz nx2
%nf=[1 0;2 0;3 0;4 0;5 0;6 0;11 0;16 0;21 0;22 38.2683;23
%70.7107;24 92.388;25 100]
%primera columna: nodo de la frontera
%segunda columna: valor de la frontera en ese nodo
nodo_frontera=nf(:,1);
valor_frontera=nf(:,2);

```

### 3.15.6 Función feeldof

```

function [index]=feeldof(nd,nnel,ndof)
%nd: números de nodo de elemento cuyo sistema de grados
% de libertad (DOFS) están por determinar

```

```

%índice - de vectores dof vector asociado con cada elemento
%nnel: numero de nodos por elemento
%ndof: numero de grados de libertad (dofs) por nodo
k=0;
for i=1:nnel
    start=(nd(i)-1)*ndof;
    for j=1:ndof
        k=k+1;
        index(k)=start+j;
    end
end
end

```

### 3.15.7 Función det\_jacobiano\_xuv\_yuv

Esta función devuelve el determinante del jacobiano de las funciones:

$$x=g(u,v)=D(i,1)u+E(i,1)v+F(i,1)$$

$$y=h(u,v)=D(i,2)u+E(i,2)v+F(i,2)$$

#### Código de la función

```

function dj=det_jacobiano_xuv_yuv(vt)
%Devuelve el determinante del jacobiano de las funciones:
%      x=g(u,v)=D1u+E1v+F1
%      y=h(u,v)=D2u+E2v+F2
%vt = Es una matriz donde cada fila esta compuesta por los
%vertices de un triangulo [x1 y1 x2 y2 x3 y3]
%Primer vertice del triangulo 1: (x1,y1)=(v(1,1),v(1,2))
%Segundo vertice del triangulo 1: (x2,y2)=(v(1,3),v(1,4))
%Tercer vertice del triangulo 1: (x3,y3)=(v(1,5),v(1,6))
%
[m,n]=size(vt);
for i=1:m
    for j=1:3
        x(i,j)=vt(i,2*j-1);
        y(i,j)=vt(i,2*j);
    end
end
for i=1:m
    x1=x(i,1);
    x2=x(i,2);
    x3=x(i,3);

```

```

y1=y(i,1);
y2=y(i,2);
y3=y(i,3);
A=[x1 x2 x3]' [y1 y2 y3]' ones(3,1)];
a=A\[0;1;1];
b=A\[0;0;1];

m1=b(2)/(a(1)*b(2)-b(1)*a(2));
m2=-b(1)/(a(1)*b(2)-b(1)*a(2));
m3=-a(2)/(a(1)*b(2)-b(1)*a(2));
m4=a(1)/(a(1)*b(2)-b(1)*a(2));
mm=[m1 m2;m3 m4];
dj(i)=m1*m4-m2*m3;
end

```

## Ejecución de la función

```

>> p=VerTri([2 1;5 1;8 1;8 4;5 4;2 4;2 6;5 6;8 6]);
>> a=det_jacobiano_xuv_yuv(p)
a =
          9          9          6          6
          6          9          6          9

```

### 3.15.8 Función funcforma\_xy\_coef

Esta función devuelve los coeficientes en las matrices  $A(i,j)$ ,  $B(i,j)$  y  $C(i,j)$ ,  $j=1:3$ , de las funciones de forma del  $i$ -ésimo triángulo:

$$N1(x,y)=A(i,1)*x+B(i,1)*y+C(i,1)$$

$$N2(x,y)=A(i,2)*x+B(i,2)*y+C(i,2)$$

$$N3(x,y)=A(i,3)*x+B(i,3)*y+C(i,3)$$

## Código de la función

```

function [A B C]=funcforma_xy_coef(xy)
%Esta función devuelve los coeficientes en las matrices A, B y C,
%j=1:3, de las funciones de forma del i-ésimo triángulo:
% N1(x,y)=A(i,1)*x+B(i,1)*y+C(i,1)
% N2(x,y)=A(i,2)*x+B(i,2)*y+C(i,2)
% N3(x,y)=A(i,3)*x+B(i,3)*y+C(i,3)

```

```

%xy = Es una matriz nx2, donde en la primer columna estan las
%abcisas y en la segunda columna las ordenadas. Son los vertices
%de un %triangulo.
%
format short
vt=VerTri(xy);

[m,n]=size(vt);
for i=1:m
    for j=1:3
        vx(i,j)=vt(i,2*j-1);
        vy(i,j)=vt(i,2*j);
    end
end
for i=1:m
    x1=vx(i,1);
    x2=vx(i,2);
    x3=vx(i,3);
    y1=vy(i,1);
    y2=vy(i,2);
    y3=vy(i,3);
    d=x2*y3-y2*x3-x1*y3+y1*x3+x1*y2-y1*x2;
    A(i,1)=(y2-y3)/d;
    B(i,1)=(x3-x2)/d;
    C(i,1)=(x2*y3-y2*x3)/d;
    A(i,2)=(y3-y1)/d;
    B(i,2)=(x1-x3)/d;
    C(i,2)=(x3*y1-y3*x1)/d;
    A(i,3)=(y1-y2)/d;
    B(i,3)=(x2-x1)/d;
    C(i,3)=(x1*y2-y1*x2)/d;
end

```

## Ejecución de la función

```

>> xy=[2 1;5 1;8 1;8 4;5 4;2 4;2 6;5 6;8 6];
>> [A B C]=funcforma_xy_coef(xy)
A =
    -0.33333    0.33333    0
         0    0.33333   -0.33333
   -0.33333    0.33333    0
   -0.33333    0.33333    0
   -0.33333         0    0.33333
   -0.33333    0.33333    0
   -0.33333         0    0.33333
   -0.33333         0    0.33333

B =
   -0.33333         0    0.33333

```

```

-0.33333    0.33333    0
  -0.5      0          0.5
  -0.5      0          0.5
    0      -0.5      0.5
-0.33333    0          0.33333
    0      -0.5      0.5
    0     -0.33333    0.33333
C =
    2     -0.66667   -0.33333
  1.3333    -2       1.6667
  3.6667   -0.66667   -2
  4.6667   -1.6667    -2
  1.6667    3       -3.6667
    3     -1.6667   -0.33333
  2.6667    3       -4.6667
  2.6667    1.3333    -3

```

### 3.15.9 Función VerTri

Esta función devuelve una matriz conteniendo los vértices de cada triángulo y su gráfica. Por ejemplo, la primera fila de la matriz contiene los vértices del triángulo 1. El argumento de entrada son los vértices de cada triángulo en una matriz de nx2, donde n es el número de filas.

#### Código de la función

```

function vt = VerTri(xy)
%VerTri = Vertices de los Triangulos
%VerTri(xy) devuelve una matriz mx6 cuya 1ra fila contiene los
%vertices del primer triangulo (x1,y1), (x2,y2), (x3,y3) ([x1 y1 x2
%y2 x3 y3])
nodos=delaunay(xy(:,1),xy(:,2));
vt=tri_verticesnodos(xy,nodos);
triplot(nodos,xy(:,1),xy(:,2));
axis equal

```

#### Ejecución de la función

```

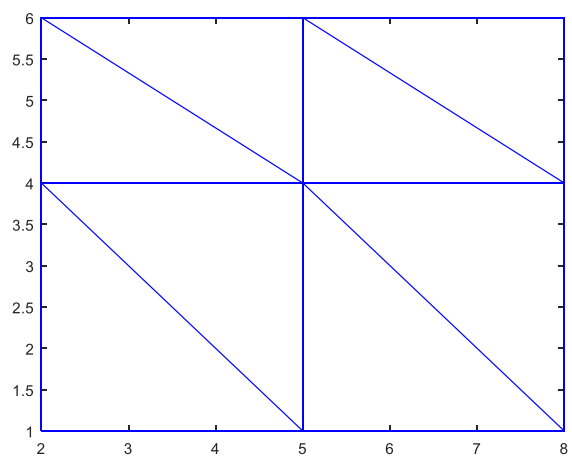
>> xy=[2 1;5 1;8 1;8 4;5 4;2 4;2 6;5 6;8 6];
>> vt=VerTri(xy)
nodos =

```

```

1      2      6
2      5      6
6      5      7
5      4      8
7      5      8
2      3      5
8      4      9
5      3      4
vt =
2      1      5      1      2      4
5      1      5      4      2      4
2      4      5      4      2      6
5      4      8      4      5      6
2      6      5      4      5      6
5      1      8      1      5      4
5      6      8      4      8      6
5      4      8      1      8      4

```



**Figura 32. Grafica obtenida con la función VerTri**

*Fuente:* Elaboración propia

### 3.15.10 Función tri\_verticesnodos

Esta función devuelve una matriz conteniendo los vértices de cada triángulo. Por ejemplo, la primera fila de la matriz contiene los vértices del triángulo 1. El argumento de entrada son los vértices de cada triángulo en

una matriz de nx2, donde n es el número de filas, y los nodos de cada triángulo.

### Código de la función

```
function V=tri_verticesnodos(vertices,nodos)
%
%Devuelve una matriz conteniendo los vertices de cada triangulo
%vertices: lista de vertices
%nodos: numeros que indican los vertices de cada triangulo
%mv: matriz de vertices de cada triangulo
%La primera fila de "V" contiene los vertices del triangulo 1
%La segunda fila de "V" contiene los vertices del triangulo 2
%V
%   0.2000    0.2000    0.2000         0    0.3000    0.1000
%   0.4000    0.2000    0.3000    0.1000    0.4000         0
%   0.2000    0.2000         0    0.4000         0    0.2000
%Triangulo 1
%x(1,1)=vertices(1,1)   y(1,1)=vertices(1,2)   v1=(x(1,1),y(1,1))
%x(1,2)=vertices(1,3)   y(1,2)=vertices(1,4)   v2=(x(1,2),y(1,2))
%x(1,3)=vertices(1,5)   y(1,3)=vertices(1,6)   v3=(x(1,3),y(1,3))
%
[m,c1]=size(vertices);
[n,c2]=size(nodos);
for i=1:m
    X(i)=vertices(i,1);
    Y(i)=vertices(i,2);
end

for k=1:n
    for L=1:3
        J=nodos(k,L);
        V(k,2*L-1)=X(J);
        V(k,2*L)=Y(J);
    end
end
end
```

### Ejecución de la función

```
>> vertices=[2 1;5 1;8 1;8 4;5 4;2 4;2 6;5 6;8 6]
>> nodos=[1 2 5;2 3 1;3 4 5;4 9 5;5 9 8;5 8 7;6 5 7;1 5 6]
>> triplot(nodos,vertices(:,1),vertices(:,2));
```

```
nodos =
     1     2     5
     2     3     1
```

```

3     4     5
4     9     5
5     9     8
5     8     7
6     5     7
1     5     6

```

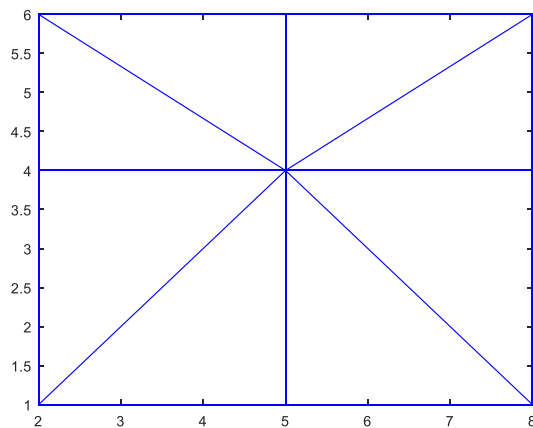
```
>> V=tri_verticesnodos(vertices,nodos)
```

```
V =
```

```

2     1     5     1     5     4
5     1     8     1     2     1
8     1     8     4     5     4
8     4     8     6     5     4
5     4     8     6     5     6
5     4     5     6     2     6
2     4     5     4     2     6
2     1     5     4     2     4

```



**Figura 33. Grafica obtenida con la función tri\_verticesnodos**

*Fuente:* Elaboración propia

### 3.15.11 Función funcforma\_uv\_coef

Esta función devuelve los coeficientes en las matrices  $P(i;j)$ ,  $Q(i;j)$  y  $R(i;j)$ ,  $j=1:3$ , de las funciones de forma del  $i$ -ésimo triángulo en términos de las variables  $u$  y  $v$ :

$$N1(u;v)=P(i;1)*u+Q(i;1)*v+R(i;1)$$

$$N2(u;v)=P(i;2)*u+Q(i;2)*v+R(i;2)$$

$$N3(u;v)=P(i;3)*u+Q(i;3)*v+R(i;3)$$

### Código de la función

```
function [P Q R]=funcforma_uv_coef(xy)
%
%Funcion que devuelve
%P=[P1;P2;P3];
%Q=[Q1;Q2;Q3];
%R=[R1;R2;R3]
%Que son coeficientes de las funciones de forma N1(u,v), N2(u,v)
%y N3(u,v) en terminos de u, v
% N1=P1*u+Q1*v+R1
% N2=P2*u+Q2*v+R2
% N3=P3*u+Q3*v+R3
%
%xy = Es una matriz nx2, donde en la primer columna estan las
%abcisas y en la segunda columna las ordenadas
%Ejemplo: [P Q R]=funcforma_uv_coef([2 1;8 4;5 6]) devuelve
%P =
%          -1         1         0
%Q =
%          0         -1         1
%R =
%          1         0         5.5511e-17
%-----
format short
vt=VerTri(xy);
[m,n]=size(vt);
[D E F]=nuevascoord_uv_coef(xy);
for i=1:m
    for j=1:3
        vx(i,j)=vt(i,2*j-1);
        vy(i,j)=vt(i,2*j);
    end
end
for i=1:m
    x1=vx(i,1);
    x2=vx(i,2);
    x3=vx(i,3);
    y1=vy(i,1);
    y2=vy(i,2);
    y3=vy(i,3);
    d=x2*y3-y2*x3-x1*y3+y1*x3+x1*y2-y1*x2;
```

```

A1=(y2-y3)/d;
B1=(x3-x2)/d;
C1=(x2*y3-y2*x3)/d;
A2=(y3-y1)/d;
B2=(x1-x3)/d;
C2=(x3*y1-y3*x1)/d;
A3=(y1-y2)/d;
B3=(x2-x1)/d;
C3=(x1*y2-y1*x2)/d;
P(i,1)=A1*D(i,1)+B1*D(i,2);
Q(i,1)=A1*E(i,1)+B1*E(i,2);
R(i,1)=A1*F(i,1)+B1*F(i,2)+C1;
P(i,2)=A2*D(i,1)+B2*D(i,2);
Q(i,2)=A2*E(i,1)+B2*E(i,2);
R(i,2)=A2*F(i,1)+B2*F(i,2)+C2;
P(i,3)=A3*D(i,1)+B3*D(i,2);
Q(i,3)=A3*E(i,1)+B3*E(i,2);
R(i,3)=A3*F(i,1)+B3*F(i,2)+C3;
end

```

## Ejecución de la función

```

>>[P Q R]=funcforma_uv_coef([2 1;5 1;8 1;8 4;5 4;2 4;2 6;5 6;8 6])
P =
    -1         1         0
    -1         1         0
    -1         1         0
    -1         1     8.3267e-17
    -1         1    -2.2204e-16
    -1         1         0
    -1         1    -2.2204e-16
    -1         1         0
Q =
    -2.2204e-16    -1         1
     3.3307e-17    -1         1
    -4.4409e-16    -1         1
     2.2204e-16    -1         1
         0         -1         1
         0         -1         1
         0         -1         1
         0         -1         1
R =
     1    -1.1102e-16         0
     1    -2.2204e-16     2.2204e-16
     1     3.3307e-16         0
     1     4.4409e-16         0
     1    -4.4409e-16     4.4409e-16
     1     2.2204e-16         0
     1         0    -8.8818e-16
     1     2.2204e-16    -4.4409e-16

```

### 3.15.12 Función nuevascoord\_uv\_coef

Esta función devuelve los coeficientes D1, E1, F1, D2, E2 y F2. Esta función transforma coordenadas cartesianas (x;y) de un triángulo en coordenadas (u;v). Es decir  $T(u;v)=(x;y)$ .

donde:

$$x=g(u;v)=D1u+E1v+F1$$

$$y=h(u;v)=D2u+E2v+F2$$

#### Código de la función

```
function [D E F]=nuevascoord_uv_coef(xy)
%
%Programado por MsC. Javier Lozano Marreros 28/8/2015
%Esta funcion devuelve los coeficientes D1 E1 F1 D2 E2 F2 de las
%funciones x=g(u;v), y=h(u;v)
%
%Esta función transforma coordenadas cartesianas (x,y) de un
triangulo
%a coordenadas (u;v). Es decir T(u;v)=(x;y).
%donde:
%       x=g(u;v)=D1u+E1v+F1
%       y=h(u;v)=D2u+E2v+F2
%xy = Es una matriz nx2, donde en la primer columna estan las
abcisas
%y en la segunda columna las ordenadas
%xy=vertices de un triangulo:
%xy=[x1 y1
%   x2 y2
%   x3 y3
%   ...
%   xn yn]
%-----
vt=VerTri(xy);
[m,n]=size(vt);
for i=1:m
    for j=1:3
        vx(i,j)=vt(i,2*j-1);
        vy(i,j)=vt(i,2*j);
    end
end
```

```

for i=1:m
    x1=vx(i,1);
    x2=vx(i,2);
    x3=vx(i,3);
    y1=vy(i,1);
    y2=vy(i,2);
    y3=vy(i,3);
    A=[x1 x2 x3]' [y1 y2 y3]' ones(3,1)];
    a=A\[0;1;1];
    b=A\[0;0;1];
    a1=a(1);b1=a(2);c1=a(3);a2=b(1);b2=b(2);c2=b(3);
    D(i,1)=b2/(a1*b2-a2*b1);
    E(i,1)=-b1/(a1*b2-a2*b1);
    F(i,1)=(b1*c2-b2*c1)/(a1*b2-a2*b1);
    D(i,2)=-a2/(a1*b2-a2*b1);
    E(i,2)=a1/(a1*b2-a2*b1);
    F(i,2)=(a2*c1-a1*c2)/(a1*b2-a2*b1);
End

```

## Ejecución de la función

```

>>[D E F]=nuevascoord_uv_coef([2 1;5 1;8 1;8 4;5 4;2 4;2 6;5 6;8
6])
D =
     3     0
     0     3
     3     0
     3  1.6653e-16
     3    -2
     3     0
     3    -2
     3    -3
E =
    -3     3
    -3  -9.992e-17
    -3     2
    -3     2
     0     2
    -3     3
     0     2
     0     3
F =
     2     1
     5     1
     2     4
     5     4
     2     6
     5     1
     5     6
     5     4

```

### 3.15.13 Función matriz\_F

Esta función devuelve la integral doble de  $R \cdot Ni(x;y)$  mas la integral doble de  $Ni(x;y) \cdot Q(x;y)$  sobre el triángulo cuyos vértices son  $(x1;y1)$ ,  $(x2;y2)$  y  $(x3;y3)$ .

#### Código de la función

```
function F=matriz_F(x1,y1,x2,y2,x3,y3,R,Qxy)
%Calcula integral_doble(R*Ni(x,y))+integral_doble(Ni(x,y)*Q(x,y))
%sobre el triangulo con vertices [x1,y1;x2,y2;x3,y3]=[2 1;8 4;5 6]
%Ejemplo:
%Ni(x,y)= -x/7+2*y/7
%syms x y
%F11=int(int(-x/7+2*y/7,y,x/2,5*x/3-7/3),x,2,5)
%F11 = 7/4
%F12=int(int(-x/7+2*y/7,y,x/2,-2*x/3+28/3),x,5,8)
%F12 = 7/4
%F=F11+F12=7/2
%
%>>F=matriz_F(2,1,8,4,5,6,1,'sin(x+y)')
%F(1)= %    3.5000
%
%Para la integral_doble(R*Ni(x,y)) -----
J=det_jacobiano_xuv_yuv([x1,y1,x2,y2,x3,y3]);
[A B C]=funcforma_xy_coef([x1 y1;x2 y2;x3 y3]);
[p q r]=funcforma_uv_coef([x1 y1;x2 y2;x3 y3]);

for i=1:3
    text1=sprintf('%f*u+%f*v+%f',p(i),q(i),r(i));
    text1=strrep(text1,'+-','-');
    text1=inline(text1);
    text1=char(text1);
    text1=strcat('@(u,v)',text1);
    Ni=str2func(text1);
    F1(i)=R*integraldoble_fNuv(Ni,J);
end
%Para la integral_doble(Ni(x,y)*Q(x,y)) -----
xuv_yuv=nuevascoord_uv_xuv_yuv([x1 y1;x2 y2;x3 y3]);
[D E F]=nuevascoord_uv_coef([x1 y1;x2 y2;x3 y3]);
xy=xuv_yuv{:};
xuv=xy(1);
yuv=xy(2);
for i=1:3
    text2=sprintf('(%f*u+%f*v+%f)',p(i),q(i),r(i));
    text2=strrep(text2,'+-','-');
```

```

text2=inline(text2);
text2=char(text2);
xuv=sprintf(' (%f*u+%f*v+%f) ',D(1),E(1),F(1));
yuv=sprintf(' (%f*u+%f*v+%f) ',D(2),E(2),F(2));
xuv=strrep(xuv,'+-','-');
yuv=strrep(yuv,'+-','-');
text3=strrep(Qxy,'x',xuv);
text3=strrep(text3,'y',yuv);
text3=strrep(text3,'--','+');
text3=inline(text3,'u','v');
f1=char(text3);
%Une las funciones Ni(x,y) y Q(x,y) en sus nuevas variables u,v
NiQ=strcat('@(u,v) ',text2, '.*',f1);
NiQ=vectorize(NiQ);
NiQ=str2func(NiQ);
F2(i)=0.31107894*integraldoble_fNuv(NiQ,J);
end

F=F1+F2;

```

### 3.15.14 Función integraldoble\_fNuv

Esta función devuelve la integral doble de una función  $f(u;v)$  dado en coordenadas  $(u;v)$ . Esta función  $f(u;v)$  es producto de la transformación  $T(u;v)=(x;y)$ . Utiliza la cuadratura gaussiana. Los límites de integración son fijos, es decir,  $u=0$  hasta  $u=1$  y  $v=g1(u)=0$  hasta  $v=g2(u)=u$ .

La integral doble de la función  $f(u;v)$  es equivalente a la integral doble de la función  $f(x;y)$ .

#### Código de la función

```

function I=integraldoble_fNuv(fNuv,dj)
%Devuelve la integral doble de una función fNuv=f(u,v) dado en
%coordenadas (u,v). Esta función f(u,v) es producto de la
%transformación T(u,v)=(x,y). Utiliza la cuadratura Gaussiana.
%fNuv: es la función transformada y donde los límites de
%integración son fijos, es decir,
%u=0 hasta u=1 y v=g1(u)=0 hasta v=g2(u)=u.
%g1(u) y g2(u) son funciones en u fijas.
%dj: es el discriminante del jacobiano

```

```

%int(int(1-u,v,0,u),u,0,1)=3.5
%Por ejemplo:La integral doble sobre los vertices de un triangulo:
[2 1;8 4;5 6], es:
%>>i1=int(int(-x/7+2*y/7,y,x/2,5*x/3-7/3),x,2,5)
%>>i2=int(int((-x/7+2*y/7),y,x/2,-2*x/3+28/3),x,5,8)
%>>i1+i2
%Al hacer la transformación a un triangulo rectángulo de vertices
%(0,0),(1,0) y (1,1) se obtiene:
%          x=-3u+6v+5
%          y=-5u+3v+6
%>>fNuv=@(u,v)(-1.00*u+0.00*v+1.00)
%>>dj(1)=21
%>>I=integraldoble_fNuv(@(u,v)(-1.00*u+0.00*v+1.00),dj)
%I =      3.5
%Los resultados son equivalentes
textg1='0*u';
textg1f=strcat('@(u)',textg1);
g1=str2func(textg1f);
textg2='u';
textg2f=strcat('@(u)',textg2);
g2=str2func(textg2f);

I=dj*GaussLegendre_I2(fNuv,0,1,g1,g2,8,8);

```

### Ejecución de la función

```

>> dj(1)=21
dj =
    21
>> I=integraldoble_fNuv(@(u,v)(-1.00*u+0.00*v+1.00),dj)
I =
    3.5

```

### 3.15.15 Función GaussLegendre\_I2

Esta función devuelve la integral doble de la función  $f(x,y)$  desde  $y=c(x)$  hasta  $y=d(x)$  y desde  $x=a$  hasta  $x=b$ . Utiliza el método de la cuadratura gaussiana.

### Código de la función

```

function I=GaussLegendre_I2(fxy,a,b,g1,g2,m,n)
%Utiliza la cuadratura Gaussiana.

```

```

%x=a hasta x=b, y=g1(x) hasta y=g2(x).
%g1(x) y g2(x) son funciones en x. Pueden ser nombres de archivos
% m,n: grado de los polinomios de Legendre en x e y
%Ejemplo:
%f(x,y)=x+y, g1(x)=x, g2(x)=x^2, a=0, b=1
%>>I=GaussLegendre_I2(@ (x,y) x+y,0,1,@ (x) x,@ (x) x.^2,6,6)

[x,c1]=NPLegendre(m);
x=(a+b)/2+(b-a)/2*x; %eje x
cx=feval(g1,x);
dx=feval(g2,x);
[y,c2]=NPLegendre(n);
i=1;
while i<=(m)
    if cx(i)==dx(i)
        s(i)=0;
    else
        yn=((dx(i)-cx(i))/2)*y+(dx(i)+cx(i))/2;
        fxyi=feval(fxy,x(i),yn);
        s(i)=((dx(i)-cx(i))/2)*sum(c2.*fxyi);
    end
    i=i+1;
end
I=(b-a)/2*sum(c1.*s');

```

### Ejecución de la función

```

>>I=GaussLegendre_I2(@ (x,y) x+y,0,1,@ (x) x,@ (x) x.^2,6,6)
I =
    -0.15

```

### 3.15.16 Función NPLegendre

Esta función devuelve los nodos y los pesos que se van a utilizar en la cuadratura gaussiana. Utiliza los polinomios de Legendre.

#### Código de la función

```

function [Nodos, Pesos]=NPLegendre(n)
%Esta función devuelve los nodos y los pesos que se van a utilizar
%en la cuadratura Gaussianan. Utiliza los polinomios de Legendre.
%n representa el numero de puntos.
%
r=1;

```

```

q=[1 0];
for k=1:n-1
    p=(1/(k+1))*((2*k+1)*[q 0]-k*[0 0 r]);
    r=q;
    q=p;
end
Nodos = roots(p);
dp=polyder(p); %devuelve la derivada de un polinomio
y=polyval(dp,Nodos);
Pesos=2./((1-Nodos.^2).*(y.^2));

```

### Ejecución de la función

```

>> [N P]=NPLegendre(4)
N =
    -0.86114
     0.86114
    -0.33998
     0.33998
P =
     0.34785
     0.34785
     0.65215
     0.65215

```

### 3.15.17 Función nuevascoord\_uv\_xuv\_yuv

Esta función devuelve las funciones  $x=g(u;v)$ ,  $y=h(u;v)$ . Transforma coordenadas cartesianas  $(x;y)$  de un triángulo a coordenadas  $(u;v)$ . Es decir  $T(u;v)=(x;y)$ , donde  $x=g(u;v)=D1u+E1v+F1$ ,  $y=h(u;v)=D2u+E2v+F2$

### Código de la función

```

function xuv_yuv=nuevascoord_uv_xuv_yuv(xy)

%xy = Es una matriz nx2, donde en la primer columna estan las
%abcisas y en la segunda columna las ordenadas
%xy=vertices de un triangulo:
%-----
vt=VerTri(xy);
[m,n]=size(vt);
for i=1:m
    for j=1:3

```

```

        vx(i,j)=vt(i,2*j-1);
        vy(i,j)=vt(i,2*j);
    end
end

for i=1:m
    x1=vx(i,1);
    x2=vx(i,2);
    x3=vx(i,3);
    y1=vy(i,1);
    y2=vy(i,2);
    y3=vy(i,3);
    A=[x1 x2 x3]' [y1 y2 y3]' ones(3,1)];
    a=A\[0;1;1];
    b=A\[0;0;1];
    a1=a(1);
    b1=a(2);
    c1=a(3);
    a2=b(1);
    b2=b(2);
    c2=b(3);
    D(i,1)=b2/(a1*b2-a2*b1);
    E(i,1)=-b1/(a1*b2-a2*b1);
    F(i,1)=(b1*c2-b2*c1)/(a1*b2-a2*b1);
    D(i,2)=-a2/(a1*b2-a2*b1);
    E(i,2)=a1/(a1*b2-a2*b1);
    F(i,2)=(a2*c1-a1*c2)/(a1*b2-a2*b1);

    x_uv=strrep(sprintf(' (%5.2f*u+%5.2f*v+%5.2f) ',D(i,1),E(i,1),F(i,1)
),'+-','-');

    y_uv=strrep(sprintf(' (%5.2f*u+%5.2f*v+%5.2f) ',D(i,2),E(i,2),F(i,2)
),'+-','-');
    xuv_yuv{i}={x_uv; y_uv};
end

```

### 3.15.18 Función feasmbl2

Esta función ensambla las matrices de elementos en la matriz del sistema y los vectores de elementos en el vector de sistema.

#### Código de la función

```

function [kk,ff]=feasmbl2(kk,ff,k,f,index)
%     kk: matriz del sistema

```

```

%     ff: vector del sistema
%     k: matriz de cada elemento
%     f: vector de cada elemento
%     index: d.o.f. vector asociado con un elemento

edof = length(index);
for i=1:edof
    ii=index(i);
    ff(ii)=ff(ii)+f(i);
    for j=1:edof
        jj=index(j);
        kk(ii,jj)=kk(ii,jj)+k(i,j);
    end
end

```

### 3.15.19 Función feasmb1

Esta función ensambla las matrices de elementos en la matriz del sistema

#### Código de la función

```

function [kk]=feasmb1(kk,k,index)
%nd: números de nodo de elemento cuyo sistema de grados de
%libertad (DOFS) están por determinar
%nnel: numero de nodos por elemento
%ndof: numero de grados de libertad (dofs) por nodo
%[index]=feeldof(nd,3,1)
%kk: matriz del sistema

edof=length(index);
for i=1:edof
    ii=index(i);
    for j=1:edof
        jj=index(j);
        kk(ii,jj)=kk(ii,jj)+k(i,j);
    end
end

```

### 3.15.20 Función feaplyc2

Esta función devuelve la matriz del sistema y el vector del sistema.

### Código de la función

```
function [kk ff]=feaplyc2(kk,ff,nodo_frontera,valor_frontera)
n=length(nodo_frontera);
sdof=size(kk);
for i=1:n
    c=nodo_frontera(i);
    for j=1:sdof
        kk(c,j)=0;
    end
    kk(c,c)=1;
    ff(c)=valor_frontera(i);
end
```

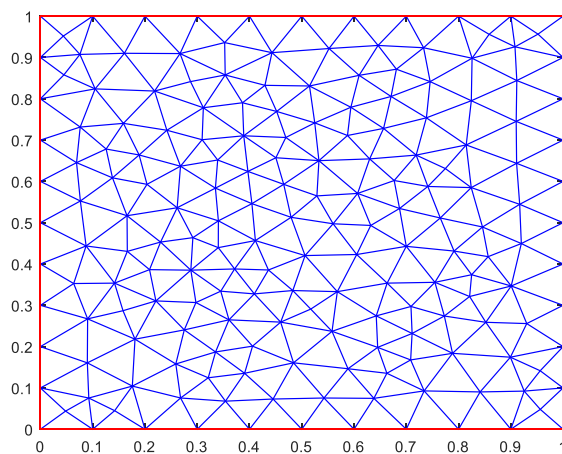
## 3.16 APLICACIONES DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

### Ejemplo 3.2.

Dada la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Definida en el dominio  $0 < x, y < 1$  y mostrado en la Figura 34



**Figura 34. Dominio discretizado del ejemplo 3.2**

Fuente: Elaboración propia

Con las condiciones de frontera:

$$\begin{cases} u(0; y; t) = u(1; y; t) = 0 \\ u(x; 0; t) = u(x; 1; t) = 0 \end{cases}$$

Y las condiciones iniciales:

$$u(x; y; 0) = 100 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y)$$

Hallar una solución aproximada aplicando el método de elementos finitos

**Solución:**

La solución exacta es:

$$u(x; y; t) = 100 e^{-2\pi^2 t} \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y)$$

La ecuación diferencial parcial parabólica está validada. En efecto,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -200\pi^2 e^{-2\pi^2 t} \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -100\pi^2 e^{-2\pi^2 t} \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -100\pi^2 e^{-2\pi^2 t} \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y)$$

Por lo tanto, se verifica que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

### Código de la función en el software MATLAB:

```
% u(x,y,t)= u_xx(x,y,t)+u_yy(x,y,t), 0<x,y<1
%Condiciones de frontera:
%u(0,y,t)=u(1,y,t)=0
%u(x,0,t)=u(x,1,t)=0
%Condiciones iniciales:
%u(x,y,0)=100*sin(pi*x)*sin(pi*y)

%-----
%La solucion exacta es:
%u(x,y,t)=100*exp(-2*(pi^2)*t)*sin(pi*x)*sin(pi*y) sobre el
dominio 0<x,y<1
%-----
%
%

clc
clear
D=0;
kc=1;
ux='0';
uy='0';
R=0;
Qxy='0';

[p,e,t]=initmesh('ejemplo1g');
[p,e,t]=refinemesh('ejemplo1g',p,e,t);
xy=p';

[tnodos ver]=size(xy);
tri=delaunay(xy(:,1),xy(:,2));
[nel nn]=size(tri);

nnel=3; %numero de nodos por elemento
ndof=1; %numero de dofs por nodo
sdof=tnodos*ndof; %totalde dofs del sistema
deltat=0.0001; %tamaño de paso de tiempo
tiempoi=0.0; %tiempo inicial
tiempof=0.1; %tiempo final
tiempo=fix((tiempof-tiempoi)/deltat);
%

k = boundary(xy(:,1),xy(:,2));
%

k=k(1:length(k)-1);
nfron=[k(:) zeros(length(k),1)];
```

```

%-----
%coordenadas y nodos
[gcoord nodos]=gcoord_nodos(xy);
%condiciones de frontera
[nodo_fron valor_fron]=cond_frontera(nfron);
%inicialización de matrices y vectores
ff=zeros(sdof,1);
fn=zeros(sdof,1);
fsol=zeros(sdof,1);
sol=zeros(2,tiempo+1);
kk=zeros(sdof,sdof);
mm=zeros(sdof,sdof);
index=zeros(nnel*ndof,1);
%-----

for i=1:nel
    nd(1)=nodos(i,1);
    nd(2)=nodos(i,2);
    nd(3)=nodos(i,3);
    x1=gcoord(nd(1),1); y1=gcoord(nd(1),2);
    x2=gcoord(nd(2),1); y2=gcoord(nd(2),2);
    x3=gcoord(nd(3),1); y3=gcoord(nd(3),2);
    [index]=feeldof(nd,nnel,ndof);
    k=matriz_Kuxuy(x1,y1,x2,y2,x3,y3,D,kc,ux,uy);
    m=matriz_M(x1,y1,x2,y2,x3,y3);
    f=matriz_F(x1,y1,x2,y2,x3,y3,R,Qxy);
    [kk,ff]=feasmb12(kk,ff,k,f,index);
    [mm]=feasmb11(mm,m,index);
End

fsol=100*sin(pi*xy(:,1)).*sin(pi*xy(:,2));
kn=2*mm + deltat*kk; %Crank Nicolson

for it=1:tiempo
    fn=deltat*ff + (2*mm-deltat*kk)*fsol; %Crank Nicolson
    [kn fn]=feaplyc2(kn,fn,nodo_fron,valor_fron);
    fsol=kn\fn; %Crank Nicolson
end
fprintf('Para t = %5.2f\n',it*deltat);
fprintf('%10.6f\n',fsol);
%-----

```

## Comparación entre la solución exacta y la solución aproximada

En la Tabla 7 se muestra la comparación entre la solución exacta y la aproximada obtenida con la simulación de la ecuación de difusión.

*Tabla 7*

### Comparación de la solución exacta y la simulación del ejemplo 3.2

Nodo	Coordenadas		Solución para t=0,1		Error relativo
	x	y	EXACTA	Simulación	
101	0,7884	0,1838	4,6764	4,662062	0,003066
102	0,9201	0,4496	3,4084	3,389975	0,005406
103	0,4451	0,0731	3,116	3,101107	0,004780
104	0,5522	0,9217	3,3376	3,322151	0,004629
105	0,0765	0,5525	3,2595	3,244136	0,004714
106	0,646	0,9292	2,7493	2,734732	0,005299
107	0,0691	0,6454	2,6867	2,672706	0,005209
108	0,354	0,068	2,6395	2,62559	0,005270
109	0,3351	0,1871	6,6908	6,657971	0,004907
110	0,2681	0,0757	2,4408	2,432977	0,003205
111	0,9304	0,2558	2,1682	2,159762	0,003892
112	0,1889	0,664	6,7589	6,725726	0,004908
113	0,0762	0,7316	2,4582	2,450476	0,003142
114	0,7331	0,9236	2,4564	2,448537	0,003201
115	0,6709	0,8056	6,8459	6,813465	0,004738
116	0,9255	0,0923	0,921	0,921667	0,000724
117	0,0756	0,9074	0,937	0,937726	0,000775
118	0,9079	0,9258	0,9146	0,914514	0,000094
119	0,0926	0,0755	0,9363	0,936845	0,000582
120	0,568	0,3331	11,7512	11,706406	0,003812
121	0,6999	0,4428	11,0587	11,01769	0,003708
122	0,9169	0,5445	3,5503	3,533347	0,004775
123	0,7385	0,7539	7,1029	7,070412	0,004574
124	0,389	0,7104	10,3044	10,264367	0,003885
125	0,2878	0,3851	10,2138	10,173398	0,003956
126	0,6299	0,6545	11,2785	11,218704	0,005302
127	0,9007	0,3468	3,7784	3,770742	0,002027
128	0,4113	0,4568	13,232	13,178632	0,004033
129	0,4655	0,5929	13,226	13,159575	0,005022
130	0,5148	0,831	7,0272	7,00024	0,003837
131	0,1658	0,5169	6,9014	6,874596	0,003884
132	0,4842	0,1608	6,7136	6,690391	0,003457

Fuente: Elaboración propia

### Ejemplo 3.3.

Dada la ecuación de advección-difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 200\pi e^{-2\pi^2 t} \text{sen}(\pi(x+y))$$

Definida en el dominio  $0 < x, y < 1$  mostrado en la Figura 35:



Figura 35. Dominio del ejemplo 3.3

Fuente: Elaboración propia

Con las condiciones de frontera:

$$\begin{cases} u(0; y; t) = u(1; y; t) = 0 \\ u(x; 0; t) = u(x; 1; t) = 0 \end{cases}$$

Y las condiciones iniciales:

$$u(x; y; 0) = 100 \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)$$

Hallar una solución aproximada aplicando el método de elementos finitos

**Solución:**

La solución exacta de la ecuación de advección-difusión es:

$$u(x; y; t) = 100e^{-2\pi^2 t} \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)$$

La ecuación diferencial parcial parabólica esta validada. En efecto,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -200\pi^2 e^{-2\pi^2 t} \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 100\pi e^{-2\pi^2 t} \cos(\pi x) \text{sen}(\pi y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 100\pi e^{-2\pi^2 t} \text{sen}(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -100\pi^2 e^{-2\pi^2 t} \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -100\pi^2 e^{-2\pi^2 t} \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)$$

Por lo tanto, se verifica que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 200\pi e^{-2\pi^2 t} \text{sen}(\pi(x+y))$$

Se aplica el método del elemento finito para  $t = 0,1$  entonces

$$Q(x; y) = 200\pi e^{-0,2\pi^2} \text{sen}(\pi(x+y))$$

**Código de la función en el software MATLAB:**

```
%Ut(x,y,t)+Ux(x,y,t)+Uy(x,y,t)=Uxx(x,y,t)+Uyy(x,y,t)+Q(x,y,t)
% , 0<x,y<1
% Ut(x,y,t)+Ux(x,y,t)+Uy(x,y,t) = Uxx(x,y,t)+Uyy(x,y,t)+
```

```

% + 200*pi*exp(-2*(pi^2)*t)*sin(pi*(x+y)),      0<x,y<1
% Entonces Q(x,y,t)=200*pi*exp(-2*(pi^2)*t)*sin(pi*(x+y))
%
%Condiciones de frontera:
%u(0,y,t)=u(1,y,t)=0
%u(x,0,t)=u(x,1,t)=0
%
%Condiciones iniciales:
%u(x,y,0)=100*sin(pi*x)*sin(pi*y) sobre el dominio
%
%-----
%La solucion exacta es:
%u(x,y,t)=100*exp(-2*(pi^2)*t)*sin(pi*x)*sin(pi*y) sobre el
dominio 0<x,y<1
%-----
%
clc
clear
D=0;
kc=1;
ux='1';
uy='1';
R=0;
Qxy='87.2804*sin(3.1416*(x+y))';

[p,e,t]=initmesh('ejemplo2g');
[p,e,t]=refinemesh('ejemplo2g',p,e,t);

xy=p';
[tnodos ver]=size(xy);
tri=delaunay(xy(:,1),xy(:,2));
[nel nn]=size(tri);

nnel=3; %numero de nodos por elemento
ndof=1; %numero de dofs por nodo
sdof=tnodos*ndof; %totalde dofs del sistema
dt=0.001; %tamaño de paso de tiempo
tiempoi=0.0; %tiempo inicial
tiempof=0.1; %tiempo final
tiempo=fix((tiempof-tiempoi)/dt);
%
k = boundary(xy(:,1),xy(:,2));
k=k(1:length(k)-1);
nfron=[k(:) zeros(length(k),1)];
%-----
%coordenadas y nodos
[gcoord nodos]=gcoord_nodos(xy);

```

```

%condiciones de frontera
[nodo_fron valor_fron]=cond_frontera(nfron);

%inicialización de matrices y vectores
ff=zeros(sdof,1);
fn=zeros(sdof,1);
fsol=zeros(sdof,1);
sol=zeros(2,tiempo+1);
kk=zeros(sdof,sdof);
mm=zeros(sdof,sdof);
index=zeros(nnel*ndof,1);
%-----

for i=1:nel
    nd(1)=nodos(i,1);
    nd(2)=nodos(i,2);
    nd(3)=nodos(i,3);
    x1=gcoord(nd(1),1); y1=gcoord(nd(1),2);
    x2=gcoord(nd(2),1); y2=gcoord(nd(2),2);
    x3=gcoord(nd(3),1); y3=gcoord(nd(3),2);
    [index]=feeldof(nd,nnel,ndof);
    k=matriz_Kuxuy(x1,y1,x2,y2,x3,y3,D,kc,ux,uy);
    m=matriz_M(x1,y1,x2,y2,x3,y3);
    f=matriz_F(x1,y1,x2,y2,x3,y3,R,Qxy);
    [kk,ff]=feasmb12(kk,ff,k,f,index);
    [mm]=feasmb11(mm,m,index);
end
kn=2*mm + dt*kk; %Crank Nicolson

for it=1:tiempo
    fn=dt*ff + (2*mm-dt*kk)*fsol; %Crank Nicolson
    [kn fn]=feaplyc2(kn,fn,nodo_fron,valor_fron);
    fsol=kn\fn; %Crank Nicolson
end
fprintf('Para t = %5.2f\n',it*dt);
fprintf('%10.6f\n',fsol);

```

*Tabla 8*

**Comparación de la solución exacta y la simulación del ejemplo 3.3**

Nodo	Coordenadas		Solución para t=0,1		Error relativo
	x	y	EXACTA	Simulación	
150	0,0637	0,3528	2,4704	2,616578	0,059172
151	0,638	0,0748	2,9333	2,937809	0,001537
152	0,3525	0,936	2,4804	2,49121	0,004358
153	0,4296	0,8326	6,8031	6,763839	0,005771
154	0,1662	0,4306	6,7654	7,042713	0,040990
155	0,7748	0,6311	8,2747	8,042973	0,028004
156	0,3211	0,1246	4,483	4,812378	0,073473
157	0,1258	0,6784	4,5289	4,644065	0,025429
158	0,6811	0,8716	4,5933	4,478695	0,024950
159	0,8567	0,4178	5,8456	5,757876	0,015007
160	0,142	0,0449	0,843	0,921433	0,093040
161	0,9562	0,1416	0,8203	0,821424	0,001370
162	0,8584	0,956	0,8227	0,800291	0,027238
163	0,045	0,8579	0,844	0,837138	0,008130
164	0,5172	0,2908	10,9823	11,167185	0,016835
165	0,7913	0,4314	8,2729	8,149049	0,014971
166	0,6425	0,2745	9,5082	9,540529	0,003400
167	0,6633	0,3537	10,8463	10,83428	0,001108
168	0,6768	0,6021	11,2003	10,958249	0,021611
169	0,3094	0,7009	9,2635	9,348402	0,009165

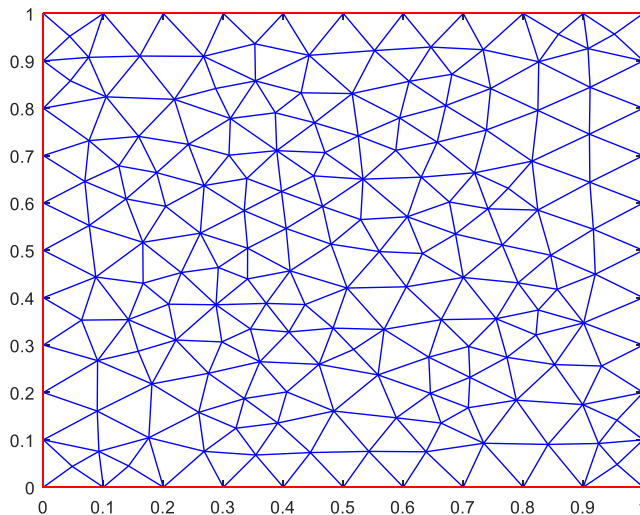
Fuente: Elaboración propia

### Ejemplo 3.4.

Dada la ecuación de advección-difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{10} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad 0 < x, y < 1$$

Cuyo dominio se muestra en la Figura 36



**Figura 36. Dominio discretizado del ejemplo 3.4.**

Fuente: Elaboración propia

Con las condiciones iniciales:

$$u(x, y; 0) = 100 \operatorname{sen}(x - y)$$

Y las condiciones de frontera de Dirichlet:

$$\begin{cases} u(0; y; t) = u(1; y; t) \\ u(x; 0; t) = u(x; 1; t) \end{cases}$$

Que se muestra en la Tabla 9. Simular la solución aproximada aplicando el método de elementos finitos.

**Tabla 9**  
**Condiciones de frontera del ejemplo 3.4.**

N°	Nodo	Valor	N°	Nodo	Valor	N°	Nodo	Valor
1	1	0	31	18	0,4699	61	4	-0,8248
2	186	0,049	32	201	0,4264	62	216	-0,7973
3	5	0,0979	33	19	0,3817	63	32	-0,7678
4	187	0,1465	34	202	0,3361	64	217	-0,7364
5	6	0,1947	35	20	0,2897	65	33	-0,7032
6	188	0,2425	36	203	0,2425	66	218	-0,6681
7	7	0,2897	37	21	0,1947	67	34	-0,6315
8	189	0,3361	38	204	0,1465	68	219	-0,5932
9	8	0,3817	39	22	0,0979	69	35	-0,5535
10	190	0,4264	40	205	0,049	70	220	-0,5123
11	9	0,4699	41	3	0	71	36	-0,4699
12	191	0,5123	42	206	-0,049	72	221	-0,4264
13	10	0,5535	43	23	-0,0979	73	37	-0,3817
14	192	0,5932	44	207	-0,1465	74	222	-0,3361
15	11	0,6315	45	24	-0,1947	75	38	-0,2897
16	193	0,6681	46	208	-0,2425	76	223	-0,2425
17	12	0,7032	47	25	-0,2897	77	39	-0,1947
18	194	0,7364	48	209	-0,3361	78	224	-0,1465
19	13	0,7678	49	26	-0,3817	79	40	-0,0979
20	195	0,7973	50	210	-0,4264	80	225	-0,049
21	2	0,8248	51	27	-0,4699			
22	196	0,7973	52	211	-0,5123			
23	14	0,7678	53	28	-0,5535			
24	197	0,7364	54	212	-0,5932			
25	15	0,7032	55	29	-0,6315			
26	198	0,6681	56	213	-0,6681			
27	16	0,6315	57	30	-0,7032			
28	199	0,5932	58	214	-0,7364			
29	17	0,5535	59	31	-0,7678			
30	200	0,5123	60	215	-0,7973			

Fuente: Elaboración propia

**Solución:**

La solución exacta de la ecuación de advección-difusión es:

$$u(x; y; t) = e^{-0,2t} \text{sen}(x - y)$$

Y la ecuación diferencial parcial parabólica está validada. En efecto,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -0,2e^{-0,2t} \text{sen}(x - y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-0,2t} \cos(x - y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-0,2t} \cos(x - y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{-0,2t} \text{sen}(x - y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-0,2t} \text{sen}(x - y)$$

Por lo tanto, se cumple:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = (0,1) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

**Código de la función en el software MATLAB.**

```
%Solucion exacta: U(x,y,t)=exp(-0.2*t)*sin(x-y)
%
%grafica en MATLAB:
%ezmesh('exp(-0.02)*sin(x-y)', [0 pi 0 pi])
%
```

```

%EDP parabolica:
%Ut(x,y,t)+Ux(x,y,t)+Uy(x,y,t)=(1/10)(Uxx(x,y,t)+Uyy(x,y,t))
%, 0<x,y<1
%
%Condiciones de frontera de Dirichlet:
%u(0,y,t)=u(1,y,t)
%u(x,0,t)=u(x,1,t)
%
%Condiciones iniciales:
%u(x,y,0)=100*sin(x-y) sobre el dominio
%
clc
clear
D=0.1;
kc=0.1;
ux='1';
uy='1';
R=0;
Qxy='0'; %Se utiliza t=0.1

[p,e,t]=initmesh('ejemplo2g');
[p,e,t]=refinemesh('ejemplo2g',p,e,t);

%pdemesh(p,e,t); grafica de la discretizacion
xy=p';
[tnodos ver]=size(xy);
tri=delaunay(xy(:,1),xy(:,2));
[nel nn]=size(tri);
nnel=3; %numero de nodos por elemento
ndof=1; %numero de dofs por nodo
%tnodos=441; %numero total de nodos en el sistema ingreso
directo
sdof=tnodos*ndof; %totalde dofs del sistema
dt=0.01; %tamaño de paso de tiempo
tiempoi=0.0; %tiempo inicial
tiempof=0.1; %tiempo final
%incremento en el tiempo
tiempo=fix((tiempof-tiempoi)/dt);
%
contorno = boundary(xy(:,1),xy(:,2));

xx=xy(:,1);
yy=xy(:,2);

contorno=contorno(1:length(contorno)-1);
xf=xx(contorno);
yf=yy(contorno);

```

```

ud=exp(-0.2*0.1)*sin(xf-yf);
nfron=[contorno(:) ud];
%coordenadas y nodos
[gcoord nodos]=gcoord_nodos(xy);

%condiciones de frontera
[nodo_fron valor_fron]=cond_frontera(nfron);

%inicialización de matrices y vectores
ff=zeros(sdof,1);
fn=zeros(sdof,1);
fsol=zeros(sdof,1);
sol=zeros(2,tiempo+1);
kk=zeros(sdof,sdof);
mm=zeros(sdof,sdof);
index=zeros(nnel*ndof,1);
%-----

for i=1:nel
    nd(1)=nodos(i,1);
    nd(2)=nodos(i,2);
    nd(3)=nodos(i,3);
    x1=gcoord(nd(1),1); y1=gcoord(nd(1),2);
    x2=gcoord(nd(2),1); y2=gcoord(nd(2),2);
    x3=gcoord(nd(3),1); y3=gcoord(nd(3),2);
    [index]=feeldof(nd,nnel,ndof);
    k=matriz_Kuxuy(x1,y1,x2,y2,x3,y3,D,kc,ux,uy);
    m=matriz_M(x1,y1,x2,y2,x3,y3);
    f=matriz_F(x1,y1,x2,y2,x3,y3,R,Qxy);
    [kk,ff]=feasmb12(kk,ff,k,f,index);
    [mm]=feasmb11(mm,m,index);
end

fsol=sin(xy(:,1)-xy(:,2));

kn=2*mm + dt*kk; %Crank Nicolson

for it=1:tiempo
    fn=dt*ff + (2*mm-dt*kk)*fsol; %Crank Nicolson
    [kn fn]=feaplyc2(kn,fn,nodo_fron,valor_fron);
    fsol=kn\fn; %Crank Nicolson
end

fprintf('Para t = %5.2f\n',it*dt);
fprintf('%10.6f\n',fsol);

```

Tabla 10

Comparación de la solución exacta y la simulación del ejemplo 3.4

Nodo	Coordenadas		Solución para t=0,1		Error relativo
	x	y	EXACTA	Simulación dt=0,001	
160	0,142	0,0449	0,095	0,095418	0,0044000
161	0,9562	0,1416	0,713	0,707825	0,0072581
162	0,8584	0,956	-0,0955	-0,090288	0,0545759
163	0,045	0,8579	-0,712	-0,711632	0,0005169
164	0,5172	0,2908	0,22	0,228390	0,0381364
165	0,7913	0,4314	0,3452	0,345990	0,0022885
166	0,6425	0,2745	0,3527	0,364132	0,0324128
167	0,6633	0,3537	0,2987	0,303458	0,0159290
168	0,6768	0,6021	0,0732	0,066497	0,0915710
169	0,3094	0,7009	-0,374	-0,361548	0,0332941
170	0,2975	0,3067	-0,009	-0,008545	0,0505556
171	0,632	0,4934	0,1354	0,139862	0,0329542
172	0,4046	0,5461	-0,1382	-0,140647	0,0177062
173	0,4363	0,3855	0,0497	0,045402	0,0864789
174	0,7412	0,5877	0,1498	0,147722	0,0138718
175	0,2088	0,3864	-0,1731	-0,187520	0,0833044
176	0,3866	0,7904	-0,3851	-0,364469	0,0535731
177	0,8211	0,3213	0,4698	0,453750	0,0341635
178	0,3391	0,6518	-0,3015	-0,295275	0,0206468
179	0,4505	0,6573	-0,2012	-0,193624	0,0376541
180	0,3403	0,4396	-0,0972	-0,101391	0,0431173
181	0,3451	0,3342	0,0106	0,009664	0,0883019
182	0,5884	0,1465	0,4193	0,436950	0,0420940
183	0,5875	0,7111	-0,1209	-0,123400	0,0206782
184	0,529	0,5649	-0,0352	-0,032821	0,0675852
185	0,709	0,2972	0,3923	0,391227	0,0027352
186	0,05	0	0,049	0,048990	0,0002041
187	0,15	0	0,1465	0,146479	0,0001433
188	0,25	0	0,2425	0,242505	0,0000206
189	0,35	0	0,3361	0,336108	0,0000238
190	0,45	0	0,4264	0,426353	0,0001102

Fuente: Elaboración propia

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS

#### 4.1. ESTACIÓN DE MONITOREO DE CALIDAD DE AIRE Y METEOROLÓGICA

En las tablas 11 y 12 se describen las características técnicas de los equipos que se utilizaron y conforman la estación de monitoreo de calidad de aire y estación meteorológica. Esta estación de monitoreo (Figura 3.6) pertenece al Gobierno Regional de Tacna y fue prestado gentilmente para realizar el monitoreo correspondiente a este proyecto.

Tabla 11

#### Equipos meteorológicos utilizados durante el monitoreo

PARÁMETRO	SENSOR/EQUIPO	RANGO/PRECISIÓN
Velocidad y dirección del viento	Sensor de velocidad y dirección del aire - WINDSONIC I	Dirección del aire: 0-360° +/- 3% Velocidad del aire: 0-60m/s +/- 2%
Temperatura del aire	Sensor de temperatura del aire - PR20/HC2S3	-40 A +60 °C +/- 0,1°C (23°C)
Humedad relativa del aire	Sensor de humedad relativa - HC2S3	0 -100% +/- 0,8°C (23°C)
Radiación solar global	Sensor de radiación solar global - CPM 3	Irradiación máxima: 2000 w/m2 5 a 20 UV w/m2
Presión atmosférica	Sensor presión atmosférica - CS106	500-1100 mBar, Precisión: +/-0,3mBar@+20°C / +/-0,6 mBar@0° a 40°C / +/-1 mBar@-20° a +45°C / +/-1,5 mBar@-40° a +60°C
Precipitación	Sensor de precipitación - MetOne365	Precisión: +/-1 (0 a 30mm/h) +/-5%(30 a 120mm/h)

Fuente: Gobierno Regional de Tacna GRT- GRRN y GMA – Equipo de trabajo PIP MIA

Tabla 12

**Equipos de calidad de aire utilizados durante el monitoreo**

PARÁMETRO	EQUIPO	RANGO	MÉTODO DE ANÁLISIS
Material Particulado (PM <sub>10</sub> ) Material Particulado (PM <sub>2,5</sub> )	MONITOR TEOM 1405 DF (Tapered Element Oscilating Microbalance)	0-1000000 ug/m3	Método de microbalanza Oscilatoria (método automático)
Dióxido de Nitrógeno (NO <sub>2</sub> ) Monóxido de Nitrógeno (NO)	Analizador de Óxidos de Nitrógeno Thermo Scientific Modelo 42i	RP: 0-20 RE: 0-100 ppm	Quimiluminiscencia (Método automático)
Dióxido de Azufre (SO <sub>2</sub> ) Sulfuro de Hidrógeno (H <sub>2</sub> S)	Analizador de SO <sub>2</sub> /H <sub>2</sub> S Thermo Scientific Modelo 450i	0-10,000 ppm	Fluorescencia UV pulsante (Método automático)
Monóxido de Carbono (CO)	Analizador de Monóxido de Carbono Thermo Scientific Modelo 48i	0-10,000 ppm	Filtro de Correlación Infraroja (Método automático)
Ozono Troposférico (O <sub>3</sub> )	Analizador de Ozono Troposférico Thermo Scientific Modelo 49i	0-200 ppm	Fotometría UV (Método automático)

Fuente: Gobierno Regional de Tacna GRT- GRRN y GMA – Equipo de trabajo PIP MIA

#### 4.2. LUGAR Y FECHAS DE MONITOREO

La estación de monitoreo se instaló en el interior de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann, en la loza deportiva de la Escuela Profesional de Metalurgia (ESME). El monitoreo de calidad de aire (concentración de los PM<sub>10</sub>) se realizó, desde el 28 de marzo al 5 de abril del 2016, tal como se muestra en las tablas 13 y 14. Para la evaluación del modelo numérico se consideraron cuatro días; desde la 00:00 horas del día 29 de marzo del 2016 hasta las 23:00 horas del día 1 de abril del 2016, porque en estos días no hubo ninguna interrupción en el monitoreo.

**Tabla 13**  
**Lugar (punto) de monitoreo**

Estación de monitoreo	Descripción	Coordenadas UTM			Altura (msnm)
		Zona	Este	Norte	
E-01	Escuela Profesional de Metalurgia (ESME) - UNJBG	19K	367784	8006750	545

Fuente: Elaboración propia

**Tabla 14**  
**Fechas consideradas del monitoreo del material particulado PM<sub>10</sub> para la simulación**

Mes	N° de muestras	Fecha	Hora Inicial	Hora Final	Tiempo medido (horas)
MARZO	1	29/03/2016	00:00	23:00	24
	2	30/03/2016	00:00	23:00	24
	3	31/03/2016	00:00	23:00	24
ABRIL	4	01/04/2016	00:00	23:00	24

Fuente: Elaboración propia

#### **4.3. PARÁMETROS EVALUADOS POR EL EQUIPO**

- Material particulado menores de 10 micras (PM<sub>10</sub>)
- Material particulado menores de 2,5 micras (PM<sub>2,5</sub>)
- Dióxido de azufre (SO<sub>2</sub>)
- Sulfuro de hidrógeno (H<sub>2</sub>S)

- Óxidos de nitrógeno (NO<sub>x</sub>)
- Monóxido de carbono (CO)
- Ozono (O<sub>3</sub>)

#### **4.4. RESULTADOS DEL MONITOREO DE LA ESTACIÓN UBICADA EN LA ESCUELA PROFESIONAL DE METALURGIA (ESME) - UNJBG**

Los resultados del monitoreo de calidad de aire están expresados en microgramos por metro cúbico ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ). El análisis e interpretación de los resultados de los parámetros monitoreados están basados en su comparación con los estándares nacionales de calidad ambiental para aire (ECA) establecidos mediante D.S. N° 074-2001-PCM y D.S. N° 003-2008-MINAM.

Durante el monitoreo de calidad de aire en este punto se ha registrado el comportamiento horario de las concentraciones de los contaminantes PM<sub>10</sub>, PM<sub>2,5</sub>, CO, NO<sub>x</sub> (NO y NO<sub>2</sub>), SO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>S y O<sub>3</sub>. Además de los anteriores contaminantes, también se han tomado datos del comportamiento de los parámetros meteorológicos.

Las tablas 15, 16, 17 y 18 muestran los valores mínimos, máximos y promedios de los parámetros meteorológicos registrados durante el monitoreo; velocidad y dirección del viento, humedad

relativa, temperatura, precipitación, radiación solar, presión barométrica y radiación ultravioleta.

*Tabla 15*

**Datos meteorológicos de la estación de monitoreo ubicada en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG, del día martes 29 de marzo del 2016**

Hora	Presión atmosférica (mbar)	Temperatura (°C)			Humedad relativa (%)			Dirección del viento	Velocidad del viento		
		Prom	Max	Mín	Prom	Max	Mín		Prom	Max	Mín
00:00	953,60	19,82	19,94	19,7	69,06	74,89	68,68	148	0,49	1,34	0,02
01:00	953,30	19,62	19,9	19,39	68,35	70,45	68,07	80	0,67	1,67	0,00
02:00	952,77	19,22	19,6	18,55	73,67	73,74	67,73	286	0,56	1,44	0,03
03:00	952,44	18,48	18,77	18,28	69,83	75,14	69,72	75	0,40	1,44	0,01
04:00	952,14	18,69	18,84	18,56	70,13	71,49	69,39	80	0,87	2,13	0,01
05:00	952,19	18,51	18,7	18,29	69,93	71,25	69,49	220	0,68	1,77	0,03
06:00	952,78	18,02	18,33	17,82	72,17	74,07	69,93	48	0,53	1,12	0,06
07:00	953,33	18,46	19,68	18,02	67,82	76,88	67,75	63	1,36	3,13	0,12
08:00	953,90	21,02	21,74	19,61	65,37	83,9	63,61	197	0,97	2,69	0,01
09:00	954,18	22,32	23,33	21,26	61,09	67,46	59,71	158	1,37	3,08	0,09
10:00	953,92	23,84	24,9	22,92	61,01	62,75	55,6	209	1,51	4,34	0,02
11:00	953,56	25,24	26,63	23,85	52,4	61,85	50,91	217	1,88	4,68	0,02
12:00	953,28	26,46	27,98	25,17	53,69	92,1	39,4	248	2,47	5,19	0,01
13:00	952,81	26,84	27,61	25,98	48,88	67,54	44,14	209	3,16	7,06	0,67
14:00	952,30	26,48	27,24	25,81	51,29	58,47	43,63	221	3,21	7,26	0,46
15:00	951,73	26,34	27,33	25,4	52,8	66,08	47,18	217	3,11	6,75	0,27
16:00	951,39	25,69	26,72	24,59	52,34	71,5	47,45	205	2,92	6,41	0,12
17:00	951,54	24,65	25,85	23,71	55,49	76,92	47,63	213	2,80	5,44	0,13
18:00	952,24	22,73	24,13	21,66	62,4	67,21	54,51	223	2,27	4,92	0,19
19:00	952,88	21,67	21,93	21,3	64,19	77,4	59,32	328	1,21	2,72	0,05
20:00	953,35	21,49	21,64	21,27	62,83	68,63	61,75	281	0,76	1,66	0,02
21:00	953,56	21,51	21,61	21,41	63,75	70,9	61,81	313	0,69	1,48	0,04
22:00	953,50	21,44	21,58	21,27	65,37	97,2	60,97	332	0,85	1,67	0,17
23:00	953,49	21,26	21,44	21,04	71,86	100	58,05	47	0,53	1,82	0,01

Fuente: Elaboración propia

Tabla 16

**Datos meteorológicos de la estación de monitoreo ubicada en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG, del día miércoles 30 de marzo del 2016**

Hora	Presión atmosférica (mbar)	Temperatura (°C)			Humedad relativa (%)			Dirección del viento	Velocidad del viento		
		Prom	Máx	Mín	Prom	Máx	Mín		Prom	Máx	Mín
00:00	953,36	20,91	21,18	20,6	77,11	100	24,33	29	1,06	2,42	0,06
01:00	953,16	20,73	20,94	20,4	81,9	97,8	75,89	47	1,41	2,75	0,33
02:00	952,32	20,46	20,74	20,06	96,8	100	79,86	54	1,50	2,93	0,11
03:00	951,51	20,12	20,37	19,9	69,83	100	68,44	60	1,63	3,45	0,48
04:00	951,12	19,67	20,07	19,36	68,01	79,81	66,89	50	1,74	3,92	0,36
05:00	951,21	19,69	19,94	19,46	85,7	90,7	66,51	294	0,82	2,57	0,02
06:00	951,92	19,21	19,53	18,99	77,57	96,4	70,45	351	0,50	1,15	0,03
07:00	952,39	19,55	20,61	18,92	66,31	84,5	65,56	67	1,04	2,13	0,25
08:00	952,91	22,23	23,86	20,44	62	72,01	56,9	239	1,15	2,87	0,03
09:00	953,17	23,86	24,48	23,35	58,55	70,79	55,11	199	1,86	3,92	0,18
10:00	953,39	24,25	25,32	23,53	58,44	64,08	55,88	295	2,48	4,89	0,19
11:00	953,15	25,27	26,32	24,4	59,01	64,09	55,08	174	2,03	4,99	0,10
12:00	952,46	26,07	27,17	25,14	57,72	63,65	53,56	323	2,32	5,54	0,23
13:00	951,92	26,81	27,84	25,98	54,67	59,65	51,49	243	2,67	7,06	0,10
14:00	951,70	27,03	28,07	26,28	54,49	60,63	49,52	240	3,00	6,05	0,24
15:00	951,62	26,02	27,7	25	55,85	59,81	50,57	227	3,30	7,02	0,35
16:00	951,65	24,59	26,15	23,51	56,4	65,27	52,57	237	3,24	6,74	0,29
17:00	951,95	23,48	24,6	22,18	62,99	69,62	53,83	216	2,67	5,48	0,22
18:00	952,34	21,85	22,58	21,34	67,11	74,57	60,18	259	2,08	4,98	0,16
19:00	952,80	21,13	21,53	20,8	67,2	73,41	64,61	274	1,30	3,32	0,12
20:00	953,06	20,69	21,14	20,32	67,75	71,44	65,71	272	1,01	2,11	0,10
21:00	953,36	20,21	20,53	19,92	70,16	75,14	66,06	254	0,87	1,89	0,09
22:00	953,29	19,45	20,03	18,68	82,4	83,6	68,98	241	0,94	2,98	0,05
23:00	953,28	17,7	18,78	17,09	87,9	90,9	81,7	229	1,80	3,4	0,17

Fuente: Elaboración propia

Tabla 17

**Datos meteorológicos de la estación de monitoreo ubicada en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG, del día jueves 31 de marzo del 2016**

Hora	Presión atmosférica (mbar)	Temperatura (°C)			Humedad relativa (%)			Dirección del viento	Velocidad del viento		
		Prom	Máx	Mín	Prom	Máx	Mín		Prom	Máx	Mín
00:00	953,33	16,93	17,19	16,66	99,4	100	87	263	1,09	2,49	0,01
01:00	953,10	17,06	17,51	16,69	87,2	100	86,7	51	0,80	1,93	0,02
02:00	952,57	17,44	17,78	17,11	90,7	93,9	83,8	203	0,84	2,77	0,02
03:00	951,97	17,44	17,78	17,14	82,9	93	82,2	199	0,43	1,42	0,02
04:00	952,12	17,5	17,78	17,17	79,49	88,2	78,04	47	0,70	2,28	0,03
05:00	952,00	17,74	17,92	17,51	76,81	91,5	75,15	65	1,55	3,74	0,13
06:00	952,08	17,99	18,29	17,75	74,81	87,3	73,52	212	0,72	2,18	0,06
07:00	952,73	18,78	20,42	18,12	70,73	81,5	69,04	55	1,02	3,15	0,04
08:00	953,21	20,37	21,29	19,93	71,44	82,3	66,11	242	1,67	4	0,01
09:00	953,53	20,44	21,52	19,9	66,6	86,1	65,22	194	1,98	4,46	0,03
10:00	953,10	22,82	23,97	20,91	61,83	79,04	56,08	38	0,88	2,58	0,01
11:00	952,62	24,51	25,88	23,65	68,76	74,55	62,36	177	1,63	3,79	0,05
12:00	952,39	26,13	27,37	24,83	64,46	71,64	62,9	215	1,85	4,51	0,03
13:00	951,74	27,16	28,18	26,12	58,39	72,88	53,48	200	2,58	6,28	0,28
14:00	951,30	26,27	27,77	24,66	71,1	83,1	56,02	230	3,79	7,51	0,11
15:00	951,20	24,94	26,02	23,95	64,02	79,09	59,85	183	3,36	6,75	0,28
16:00	951,24	24,45	25,51	23,61	58,8	70,56	56,33	203	2,48	5,32	0,22
17:00	951,61	23,4	24,43	22,58	67,06	72,33	56,94	223	2,56	5,92	0,04
18:00	952,50	21,68	23,19	20,71	75,48	77,85	62,45	222	2,41	5,21	0,40
19:00	953,66	20,43	20,98	19,78	79,98	83,5	72,69	253	1,65	4,36	0,12
20:00	954,54	19,77	20,05	19,48	86,2	88,7	77,89	29	1,03	2,63	0,08
21:00	954,58	19,6	19,73	19,43	80,5	94,3	76	241	0,68	2,2	0,02
22:00	954,78	19,22	19,56	18,95	82	88,1	77,4	283	0,90	2,57	0,05
23:00	954,66	18,83	19,09	18,58	83,6	100	79,57	47	0,60	1,53	0,02

Fuente: Elaboración propia

Tabla 18

**Datos meteorológicos de la estación de monitoreo ubicada en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG, del día viernes 1 de abril del 2016**

Hora	Presión atmosférica (mbar)	Temperatura (°C)			Humedad relativa (%)			Dirección del viento	Velocidad del viento		
		Prom	Máx	Mín	Prom	Máx	Mín		Prom	Máx	Mín
00:00	954,19	18,53	18,71	18,34	88,9	99,6	77,33	290	0,79	1,85	0,07
01:00	953,96	18,4	18,55	18,28	100	100	77,78	57	0,56	1,25	0,05
02:00	953,68	18,39	18,53	18,26	99	100	0,39	72	0,80	1,81	0,03
03:00	953,46	18,17	18,4	17,82	79,77	100	0,39	63	1,12	2,87	0,07
04:00	953,33	17,94	18,09	17,78	74,81	100	72,1	58	1,47	2,77	0,08
05:00	953,34	17,61	17,85	17,24	73,02	89,3	71,46	62	1,65	2,98	0,37
06:00	953,47	17,45	17,68	17,28	72,2	86	71,39	57	1,75	3,33	0,74
07:00	954,03	18,19	19,65	17,34	74,64	83,1	68,91	67	1,62	2,74	0,12
08:00	954,91	20,92	22,08	19,61	0,39	100	0,39	160	1,07	2,75	0,08
09:00	955,25	22,48	23,43	21,59	0,39	0,762	0,39	209	0,87	2,33	0,04
10:00	955,24	23,5	24,48	22,48	0,389	0,83	0,356	158	1,50	3,43	0,08
11:00	955,01	25,05	26,02	24,22	0,389	0,796	0,389	222	1,59	5,04	0,08
12:00	954,18	26,75	27,9	25,65	0,389	100	0,389	239	1,97	5,19	0,10
13:00	953,59	27,53	28,58	26,72	0,389	0,762	0,389	196	2,53	5,35	0,06
14:00	953,07	27,07	28,74	25,57	0,389	0,762	0,389	227	3,99	8,24	0,46
15:00	952,75	26,15	26,79	25,47	0,626	0,762	0,389	333	2,85	7,77	0,23
16:00	952,44	25,79	26,79	24,56	0,389	0,762	0,389	209	3,16	6,31	0,15
17:00	952,84	23,8	25,31	22,62	0,39	0,762	0,389	227	3,36	6,13	0,61
18:00	953,50	22,19	23,13	21,42	0,39	0,762	0,39	219	2,35	4,49	0,41
19:00	954,05	21,3	21,8	20,86	0,39	0,796	0,39	200	1,89	4,21	0,31
20:00	954,56	20,89	21,2	20,63	0,39	0,763	0,39	238	1,31	2,76	0,05
21:00	954,79	20,51	20,69	20,22	0,39	0,797	0,39	351	0,82	2	0,08
22:00	954,93	20,3	20,43	20,16	0,39	0,797	0,39	299	0,59	1,79	0,02
23:00	954,60	20,2	20,37	20,04	0,39	0,763	0,39	261	0,49	1,36	0,02

Fuente: Elaboración propia

Las concentraciones se expresan en microgramos por metro cúbico estándar a 25°C y 1 atm. Las tablas 19, 20, 21 y 22 muestran las concentraciones por cada hora y como promedio de 24 horas, registradas en la estación de calidad de aire en la Escuela Profesional de Metalurgia (ESME). Cabe mencionar que durante la medición se produjo cortes de fluido eléctrico; por tanto, de los nueve días en que la estación de monitoreo estuvo instalado (tabla 6), se han considerado sólo cuatro días: martes 29, miércoles 30 y jueves 31 de marzo y 1 de abril del 2016, porque en esta suceción de días no hubo ningún corte de fluido eléctrico (Tabla 14).

Tabla 19

**Resultados del monitoreo de la estación ubicada en la Escuela de Metalurgia - UNJBG obtenido con el equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF, el día martes 29/03/2016**

Fecha de registro: Día martes	Hora	Concentración de Material Particulado menor que 10 micras (PM <sub>10</sub> )	
		PM <sub>10</sub> ug/m <sup>3</sup> ECA=150	
		1 hora	24 horas
29/03/2016	00:00	27,3991	0
29/03/2016	01:00	26,7703	0
29/03/2016	02:00	33,6074	0
29/03/2016	03:00	31,4979	0
29/03/2016	04:00	17,5049	0
29/03/2016	05:00	50,192	0
29/03/2016	06:00	65,8488	0
29/03/2016	07:00	62,3389	0
29/03/2016	08:00	78,66	0
29/03/2016	09:00	94,3431	0
29/03/2016	10:00	113,531	0
29/03/2016	11:00	74,1461	0
29/03/2016	12:00	53,4706	0
29/03/2016	13:00	74,4705	0
29/03/2016	14:00	59,4349	0
29/03/2016	15:00	43,3401	0
29/03/2016	16:00	38,2873	0
29/03/2016	17:00	32,673	0
29/03/2016	18:00	34,0386	0
29/03/2016	19:00	35,2565	46,7492
29/03/2016	20:00	33,7255	49,2592
29/03/2016	21:00	31,0561	48,8945
29/03/2016	22:00	31,314	48,8004
29/03/2016	23:00	23,6219	48,6054

Fuente: Elaboración propia

*Tabla 20*

**Resultados del monitoreo de la estación ubicada en la Escuela de Metalurgia - UNJBG obtenido con el equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF, el día miércoles 30/03/2016**

Fecha de registro: Día miércoles	Hora	Concentración de Material Particulado menor que 10 micras (PM <sub>10</sub> )	
		PM <sub>10</sub> ug/m <sup>3</sup> ECA=150	
		1 hora	24 horas
30/03/2016	00:00	30,4869	48,734
30/03/2016	01:00	49,9711	49,7007
30/03/2016	02:00	55,9643	50,6322
30/03/2016	03:00	42,282	51,0816
30/03/2016	04:00	39,41	51,9943
30/03/2016	05:00	35,2126	51,3702
30/03/2016	06:00	30,1894	49,8844
30/03/2016	07:00	38,5651	48,8938
30/03/2016	08:00	74,0844	48,7031
30/03/2016	09:00	85,5141	48,3353
30/03/2016	10:00	77,5882	46,8376
30/03/2016	11:00	36,815	45,2822
30/03/2016	12:00	32,2436	44,3977
30/03/2016	13:00	42,2067	43,0534
30/03/2016	14:00	37,4998	42,1394
30/03/2016	15:00	44,5173	42,1885
30/03/2016	16:00	60,8465	43,126
30/03/2016	17:00	40,8816	43,4764
30/03/2016	18:00	35,5109	43,5358
30/03/2016	19:00	37,7547	43,6403
30/03/2016	20:00	44,6412	44,0946
30/03/2016	21:00	56,5072	45,159
30/03/2016	22:00	42,4717	45,6149
30/03/2016	23:00	45,5663	46,5264

Fuente: Elaboración propia

*Tabla 21*

**Resultados del monitoreo de la estación ubicada en la Escuela de Metalurgia - UNJBG obtenido con el equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF, el día jueves 31/03/2016**

Fecha de registro: Día jueves	Hora	Concentración de Material Particulado menor que 10 micras (PM <sub>10</sub> )	
		PM <sub>10</sub> ug/m <sup>3</sup> ECA=150	
		1 hora	24 horas
31/03/2016	00:00	34,4723	46,6952
31/03/2016	01:00	23,9794	45,6192
31/03/2016	02:00	20,1479	44,1287
31/03/2016	03:00	25,966	43,4437
31/03/2016	04:00	31,5026	43,1135
31/03/2016	05:00	42,4348	43,4129
31/03/2016	06:00	47,365	44,1268
31/03/2016	07:00	52,8797	44,7264
31/03/2016	08:00	64,8597	44,3549
31/03/2016	09:00	87,4755	44,4401
31/03/2016	10:00	55,5625	43,5192
31/03/2016	11:00	35,2003	43,4371
31/03/2016	12:00	45,777	44,0002
31/03/2016	13:00	43,6027	44,0621
31/03/2016	14:00	42,2081	44,2563
31/03/2016	15:00	93,3409	46,2933
31/03/2016	16:00	67,4545	46,5687
31/03/2016	17:00	38,4281	46,4587
31/03/2016	18:00	35,2862	46,4493
31/03/2016	19:00	40,4774	46,5628
31/03/2016	20:00	41,2778	46,4226
31/03/2016	21:00	32,501	45,4266
31/03/2016	22:00	24,6224	44,6828
31/03/2016	23:00	26,2193	43,8767

Fuente: Elaboración propia

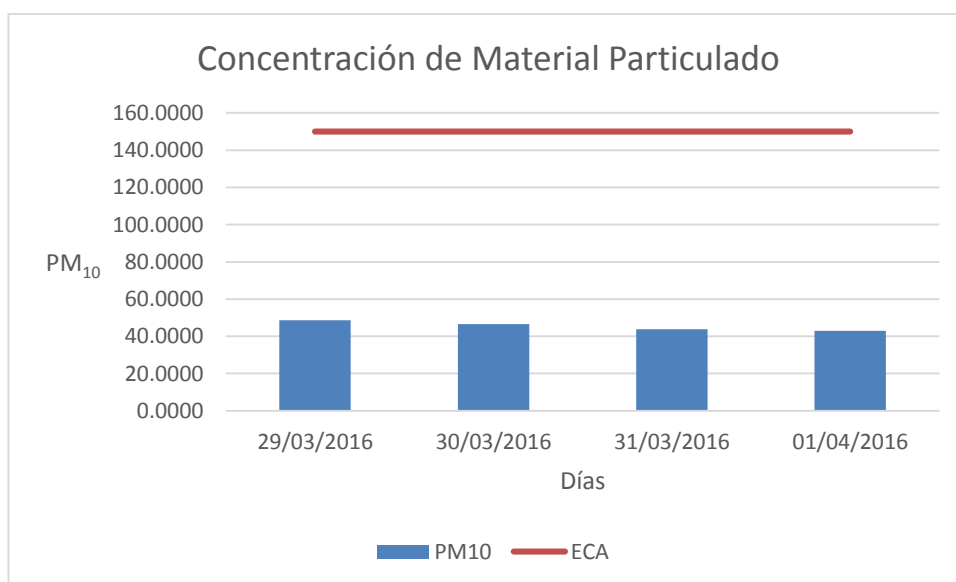
*Tabla 22*

**Resultados del monitoreo de la estación ubicada en la Escuela de Metalurgia - UNJBG obtenido con el equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF, el día viernes 1/04/2016**

Fecha de registro: Día viernes	Hora	Concentración de Material Particulado menor que 10 micras (PM <sub>10</sub> )	
		PM <sub>10</sub> ug/m <sup>3</sup> ECA=150	
		1 hora	24 horas
01/04/2016	00:00	23,0631	43,4013
01/04/2016	01:00	19,099	43,198
01/04/2016	02:00	13,0263	42,9012
01/04/2016	03:00	18,1502	42,5756
01/04/2016	04:00	29,4001	42,488
01/04/2016	05:00	36,9489	42,2594
01/04/2016	06:00	41,9365	42,0332
01/04/2016	07:00	47,5235	41,81
01/04/2016	08:00	57,1154	41,4874
01/04/2016	09:00	78,0814	41,0959
01/04/2016	10:00	48,5448	40,8035
01/04/2016	11:00	44,434	41,1883
01/04/2016	12:00	49,8113	41,3564
01/04/2016	13:00	58,6106	41,9817
01/04/2016	14:00	49,8165	42,2987
01/04/2016	15:00	109,2547	42,9618
01/04/2016	16:00	55,9375	42,4819
01/04/2016	17:00	48,9858	42,9218
01/04/2016	18:00	42,8962	43,2389
01/04/2016	19:00	39,1145	43,1821
01/04/2016	20:00	35,2999	42,933
01/04/2016	21:00	31,5341	42,8927
01/04/2016	22:00	22,8984	42,8209
01/04/2016	23:00	28,3486	42,9096

Fuente: Elaboración propia

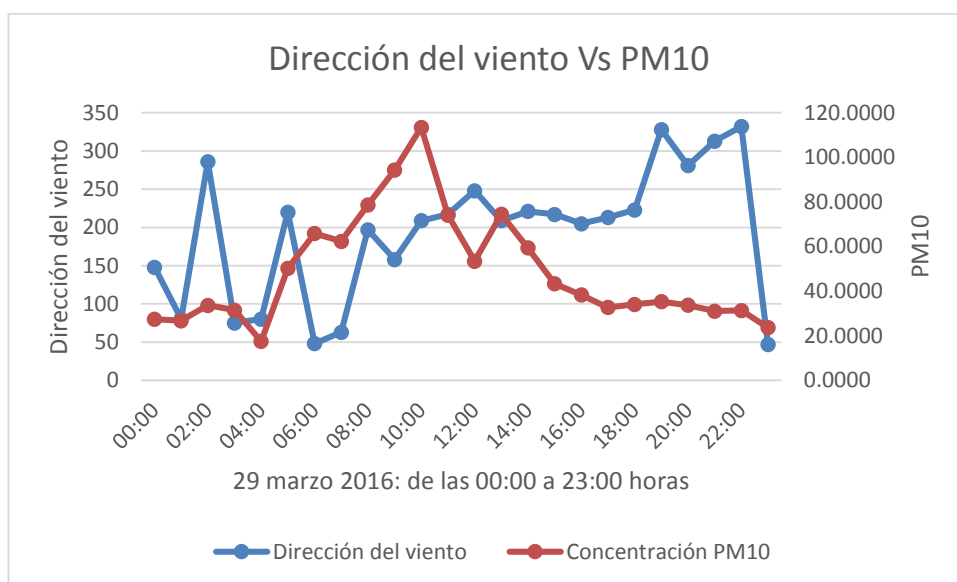
Como se puede observar en las tablas 19, 20, 21 y 22, las concentraciones de partículas PM<sub>10</sub>, registradas en la estación de monitoreo de la Escuela Profesional de Metalurgia, durante los cuatro días de muestreo, oscilan entre 13,02 ug/m<sup>3</sup> y 113,53 ug/m<sup>3</sup>, encontrándose por debajo de los 150 ug/m<sup>3</sup>, valor establecido en el Estándar Nacional de Calidad Ambiental de acuerdo al D. S. N° 074-2001-PCM, presentando la mayor concentración el martes 29 de marzo a las 10:00 horas. Según los datos obtenidos las horas donde se nota un incremento más resaltante de la concentración de PM<sub>10</sub> es de 7:00 a 10:00 horas. La data completa se presenta en el Anexo C.



**Figura 37. Niveles de PM<sub>10</sub> en la estación de monitoreo de la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG**

Fuente: Elaboración propia

También se puede observar en las tablas 15 y 19 que la dirección del viento registrada en la estación de monitoreo de la Escuela Profesional de Metalurgia, durante el día martes 29 de marzo desde las 00:00 a 23:00 horas es uno de los parámetros que también influyen en el nivel de concentración de los PM<sub>10</sub>.



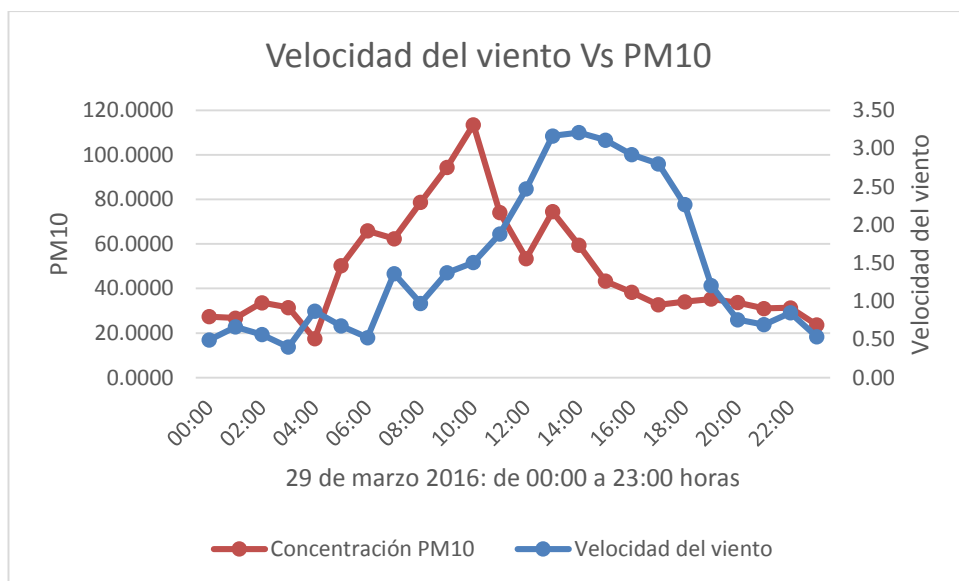
**Figura 38. Gráfica de los puntos dirección del viento versus la concentración de PM<sub>10</sub> en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG**

Fuente: Elaboración propia

### Interpretación y análisis

En la Figura 38 se muestra el comportamiento del PM<sub>10</sub> con respecto a la dirección del viento donde se observa que las horas en que se registran los mayores cambios en la dirección del viento, la concentración de PM<sub>10</sub> es menor.

También se puede observar en las tablas 15 y 19 que la velocidad del viento registrada en la estación de monitoreo, durante el día martes 29 de marzo desde las 00:00 a 23:00 horas es el parámetro que más influye en el nivel de concentración de los PM<sub>10</sub>.



**Figura 39. Gráfica de los puntos velocidad del viento versus la concentración de PM<sub>10</sub> en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG**

Fuente: Elaboración propia

### Interpretación y análisis

En la Figura 39 se muestra el comportamiento de la concentración de los PM<sub>10</sub> con respecto a la velocidad del viento donde se observa que las horas en que se registran los mayores valores para la velocidad del viento, la concentración de PM<sub>10</sub> es menor, ya que la dispersión de este contaminante en la atmósfera es mayor.

## **4.5. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO**

El modelo matemático que se utilizó en el presente trabajo y que representa la concentración de  $PM_{10}$  que se dispersa, es la ecuación de advección-difusión mostrada en la ecuación (3.11).

### **4.5.1. Datos de entrada**

Para obtener los resultados de la simulación de la concentración de material particulado menor que 10 micras ( $PM_{10}$ ) se deben tener en cuenta los siguientes datos de entrada:

- 1) Las coordenadas UTM, las geográficas y cartesianas en donde se realizó el monitoreo, ver tablas 24, 25 y 26.
- 2) Datos meteorológicos de la estación en la Escuela de Metalurgia (ESME) – UNJBG: La presión atmosférica (mbar), la temperatura ( $^{\circ}C$ ), la dirección del viento (grados sexagesimales) y la velocidad del viento (m/s), dadas en las tablas 15, 16, 17 y 18.
- 3) La concentración de  $PM_{10}$  de la estación en la Escuela Profesional de Metalurgia (ESME) – UNJBG, dadas en las tablas 19, 20, 21 y 22.
- 4) El coeficiente difusivo turbulento. Este coeficiente se determinará utilizando la estimación del coeficiente difusivo por medio del número de Schmidt. Con este número es posible relacionar las ecuaciones

de Navier- Stokes, discretizadas por medio de los métodos de solución LES o RANS, con la ecuación de transporte de sustancias.

El número de Schmidt turbulento, llamado así en honor a Ernst Schmidt, es un número adimensional definido como el cociente entre el coeficiente de difusión turbulento de cantidad de movimiento y el coeficiente de difusión de masa turbulento. Este número de Schmidt se define como (Tominaga & Stathopoulos, 2007), (Mitrovic, Le, & Papavassiliou, 2004):

$$Sc_t = \frac{\mu_T}{Kc}$$

Donde  $Sc_t$ , es el número de Schimdt turbulento;  $\mu_T$  es la viscosidad turbulenta y  $Kc$  es el coeficiente de difusión de masa debido a la turbulencia.

El número de Schmidt ha sido estudiado ampliamente por varios investigadores, los cuales han desarrollado diferentes métodos de cálculo que se encuentran relacionados con las vorticidades, las difusiones moleculares y la distancia a las superficies sólidas. Un ejemplo es la siguiente ecuación formulada usando el método estándar Monin-Obukhov por Sawford and Guest en 1988 (Flesch, Prueger, & Hatfield, 2002).

$$Sc_t = \frac{\mu_T}{Kc} = \frac{(K_v u_* z / \phi_m)}{2(\sigma_w^4 + u_*^4) / (C_0 \varepsilon)} = \frac{K_v u_* z \varepsilon}{2(\sigma_w^4 + u_*^4) \phi_m} C_0$$

Donde  $K_v$ , es la constante de von Karman,  $\phi_m$  es la cizalladura del viento adimensional,  $\sigma_w$  es la desviación estándar de la fluctuación en la velocidad vertical del fluido,  $\varepsilon$  es la disipación de energía cinética turbulenta,  $C_0$  es una constante universal turbulenta,  $u_*$  es la velocidad de fricción y  $z$  es la dimensión vertical.

Para el caso del transporte de sustancias contaminantes sobre los entornos urbanos también se han desarrollado varios estudios para calcular el número de Schmidt. Algunos de los números de Schmidt calculados y normalmente usados en este caso de transporte de masa se presentan en la Tabla 23 (Tominaga & Stathopoulos, 2007).

Tabla 23

**Números de Schmidt usados en estudios de transporte de contaminantes sobre entornos urbanos**

$Sc_t$	Autor	Año
0.63	Lien et al.	2006
0.7	Li y Stathopoulos	1997
0.7	Wang y McNamara	2006
0.77	Zhang et al.	1996
0.8	Brzoska et al.	1997
0.9	Delaunay	1996
0.9	Baik et al.	2003
0.9	Kim et al.	2003
0.9	Santiago et al.	2007

Fuente: Tominaga & Stathopoulos, 2007

La difusividad (también llamado coeficiente de difusión) es la constante de proporcionalidad que aparece en la ley de Fick de la difusión. Chapman y Enskog (Hirschfelder, 1954) trabajando en forma independiente, relacionaron las propiedades de los gases con las fuerzas que actúan entre las moléculas. Usando el potencial de Lennard Jones para relacionar las fuerzas de atracción y repulsión entre los átomos, Hirschfelder, Bird y Spotz (HBS) en 1949 desarrollaron la siguiente ecuación para predecir la difusividad para pares de gases no polares:

$$D = \frac{0,0018583T^{3/2}}{P\sigma_{AB}^2\Omega_D} \left( \frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B} \right)^{1/2}$$

Donde  $T$  está en  $K$ ;  $P$  en atmósferas;  $M$  es el peso molecular en  $Kg / Kmol$ ;  $\sigma_{AB}$  es el diámetro de colisión en  $A$  (un parámetro de Lennard Jones) y  $\Omega_D$  es la integral de colisión. La integral de colisión correspondiente a la difusión es una función adimensional de la temperatura y del campo potencial intermolecular correspondiente a una molécula de  $A$  y una de  $B$ .  $\Omega_D$  es función de

$$T^* = \frac{K_B T}{\varepsilon_{AB}}$$

$K_B$  es la constante de Boltzman ( $1,8 \cdot 10^{-16}$  ergios / K); y  $\varepsilon_{AB}$  es la energía de la interacción molecular que corresponde al sistema binario  $AB$  (un parámetro de Lennard Jones), en ergios.

$$\sigma_{AB} = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2}$$

$$\frac{\varepsilon_{AB}}{K_B} = \sqrt{\frac{\varepsilon_A}{K_B} \frac{\varepsilon_B}{K_B}}$$

$$T^* = \frac{T}{\varepsilon_{AB}/K_B}$$

$$\Omega_D = \frac{1,06036}{(T^*)^{0,1561}} + \frac{0,193000}{\exp(0,47635T^*)} + \frac{1,03587}{\exp(1,52996T^*)} + \frac{1,76474}{\exp(3,89411T^*)}$$

Algunos parámetros son valores ya establecidos (anexo D).

*Tabla 24*

**Coordenadas UTM y geográficas del punto de monitoreo en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG**

N°	Puntos	Coordenadas UTM			Coordenadas Geográficas	
		Zona	X		Latitud	Longitud
			Coordenada Este	Coordenada Norte		
1	Origen: Ovalo Cusco	19K	367547.00 m E	8006307.00 m S	-18.027883°	-70.251068°
2	Estación de monitoreo	19K	367605.00 m E	8006400.00 m S	-18.027883°	-70.251068°

Fuente: Elaboración propia

*Tabla 25*

**Dominio de la simulación en coordenadas cartesianas en la zona aledaña al Ovalo Cusco**

N°	Puntos	Coordenadas Cartesianas	
		X	Y
		(Coordenada Este)	(Coordenada Norte)
1	Punto 1	-1160	-930
2	Punto 2	1160	-930
3	Punto 3	1160	930
4	Punto 4	-1160	930

Fuente: Elaboración propia

*Tabla 26*

**Punto de monitoreo en la simulación en coordenadas cartesianas ubicado en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG**

N°	Puntos	Coordenadas Cartesianas	
		X	Y
		(Coordenada Este)	(Coordenada Norte)
1	Origen: Ovalo Cusco	0	0
2	Punto de monitoreo	58	93

Fuente: Elaboración propia

#### **4.5.2. Código del programa principal**

El código del programa que soluciona la ecuación diferencial parcial parabólica de advección-difusión, utilizando el método del elemento finito, y que da como resultado la concentración de los PM<sub>10</sub>, se encuentra en el Anexo A. En las tablas 27, 28, 29 y 30 se muestran los resultados de las concentraciones obtenidas del equipo y de la simulación del modelo numérico.

*Tabla 27*

**Concentración de material particulado PM<sub>10</sub> obtenido con el equipo y con la simulación del modelo numérico propuesto. Martes 29 de marzo del 2016**

Fecha de registro: Día Martes	Hora	Concentración de material particulado menor que 10 micras (PM <sub>10</sub> )	
		Equipo	Simulación
29/03/2016	00:00	27,3991	27,3598
29/03/2016	01:00	26,7703	26,7318
29/03/2016	02:00	33,6074	33,5592
29/03/2016	03:00	31,4979	31,4527
29/03/2016	04:00	17,5049	17,4797
29/03/2016	05:00	50,1920	50,1199
29/03/2016	06:00	65,8488	65,7542
29/03/2016	07:00	62,3389	62,2493
29/03/2016	08:00	78,6600	78,5470
29/03/2016	09:00	94,3431	94,2076
29/03/2016	10:00	113,5310	113,3679
29/03/2016	11:00	74,1461	74,0396
29/03/2016	12:00	53,4706	53,3937
29/03/2016	13:00	74,4705	74,3636
29/03/2016	14:00	59,4349	59,3495
29/03/2016	15:00	43,3401	43,2778
29/03/2016	16:00	38,2873	38,2323
29/03/2016	17:00	32,6730	32,6261
29/03/2016	18:00	34,0386	33,9897
29/03/2016	19:00	35,2565	35,2058
29/03/2016	20:00	33,7255	33,6771
29/03/2016	21:00	31,0561	31,0115
29/03/2016	22:00	31,3140	31,2690
29/03/2016	23:00	23,6219	23,5879

Fuente: Elaboración propia

Tabla 28

**Concentración de material particulado PM<sub>10</sub> obtenido con el equipo y con la simulación del modelo numérico propuesto. Miércoles 30 de marzo del 2016**

Fecha de registro: Día miércoles	Hora	Concentración de Material Particulado	
		menor que 10 micras (PM <sub>10</sub> ) en ug/m <sup>3</sup>	
		Equipo	Simulación
30/03/2016	00:00	30,4869	30,4431
30/03/2016	01:00	49,9711	49,8993
30/03/2016	02:00	55,9643	55,8839
30/03/2016	03:00	42,2820	42,2213
30/03/2016	04:00	39,4100	39,3534
30/03/2016	05:00	35,2126	35,1620
30/03/2016	06:00	30,1894	30,1460
30/03/2016	07:00	38,5651	38,5097
30/03/2016	08:00	74,0844	73,9780
30/03/2016	09:00	85,5141	85,3912
30/03/2016	10:00	77,5882	77,4768
30/03/2016	11:00	36,8150	36,7621
30/03/2016	12:00	32,2436	32,1973
30/03/2016	13:00	42,2067	42,1460
30/03/2016	14:00	37,4998	37,4459
30/03/2016	15:00	44,5173	44,4533
30/03/2016	16:00	60,8465	60,7591
30/03/2016	17:00	40,8816	40,8230
30/03/2016	18:00	35,5109	35,4599
30/03/2016	19:00	37,7547	37,7004
30/03/2016	20:00	44,6412	44,5771
30/03/2016	21:00	56,5072	56,4260
30/03/2016	22:00	42,4717	42,4107
30/03/2016	23:00	45,5663	45,5008

Fuente: Elaboración propia

Tabla 29

**Concentración de material particulado PM<sub>10</sub> obtenido con el equipo y con la simulación del modelo numérico propuesto. Jueves 31 de marzo del 2016**

Fecha de registro: Día jueves	Hora	Concentración de Material Particulado menor que 10 micras (PM <sub>10</sub> ) en ug/m <sup>3</sup>	
		Equipo	Simulación
31/03/2016	00:00	34,4723	34,4228
31/03/2016	01:00	23,9794	23,9449
31/03/2016	02:00	20,1479	20,1190
31/03/2016	03:00	25,9660	25,9287
31/03/2016	04:00	31,5026	31,4574
31/03/2016	05:00	42,4348	42,3738
31/03/2016	06:00	47,3650	47,2969
31/03/2016	07:00	52,8797	52,8038
31/03/2016	08:00	64,8597	64,7664
31/03/2016	09:00	87,4755	87,3498
31/03/2016	10:00	55,5625	55,4827
31/03/2016	11:00	35,2003	35,1497
31/03/2016	12:00	45,7770	45,7112
31/03/2016	13:00	43,6027	43,5401
31/03/2016	14:00	42,2081	42,1475
31/03/2016	15:00	93,3409	93,2068
31/03/2016	16:00	67,4545	67,3576
31/03/2016	17:00	38,4281	38,3729
31/03/2016	18:00	35,2862	35,2355
31/03/2016	19:00	40,4774	40,4192
31/03/2016	20:00	41,2778	41,2185
31/03/2016	21:00	32,5010	32,4543
31/03/2016	22:00	24,6224	24,5871
31/03/2016	23:00	26,2193	26,1816

Fuente: Elaboración propia

*Tabla 30*

**Concentración de material particulado PM<sub>10</sub> obtenido con el equipo y con la simulación del modelo numérico propuesto. Viernes 1 de abril del 2016**

Fecha de registro: Día viernes	Hora	Concentración de Material Particulado	
		menor que 10 micras (PM <sub>10</sub> ) en ug/m <sup>3</sup>	
		Equipo	Simulación
01/04/2016	00:00	23,0631	23,0300
01/04/2016	01:00	19,0990	19,0715
01/04/2016	02:00	13,0263	13,0076
01/04/2016	03:00	18,1502	18,1241
01/04/2016	04:00	29,4001	29,3579
01/04/2016	05:00	36,9489	36,8958
01/04/2016	06:00	41,9365	41,8763
01/04/2016	07:00	47,5235	47,4552
01/04/2016	08:00	57,1154	57,0334
01/04/2016	09:00	78,0814	77,9692
01/04/2016	10:00	48,5448	48,4750
01/04/2016	11:00	44,4340	44,3702
01/04/2016	12:00	49,8113	49,7397
01/04/2016	13:00	58,6106	58,5264
01/04/2016	14:00	49,8165	49,7449
01/04/2016	15:00	109,2547	109,0977
01/04/2016	16:00	55,9375	55,8571
01/04/2016	17:00	48,9858	48,9154
01/04/2016	18:00	42,8962	42,8346
01/04/2016	19:00	39,1145	39,0583
01/04/2016	20:00	35,2999	35,2492
01/04/2016	21:00	31,5341	31,4888
01/04/2016	22:00	22,8984	22,8655
01/04/2016	23:00	28,3486	28,3079

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 31 se muestra la concentración de los PM<sub>10</sub>, a las 00:00 horas del día 29 de marzo del 2016, en 120 de los 1681 nodos. En el nodo 884 y coordenadas (58;93) el resultado con la simulación es 27,3598.

*Tabla 31*

**Concentración de material particulado PM<sub>10</sub> obtenido con la simulación del modelo numérico propuesto en 1681 nodos**

Nodo	X	Y	PM <sub>10</sub>	Nodo	X	Y	PM <sub>10</sub>
882	58	0	27,3598	909	116	-651	27,3590
883	58	46,5	27,3598	910	116	-604,5	27,3638
884	58	93	27,3598	911	116	-558	27,3614
885	58	139,5	27,3598	912	116	-511,5	27,3602
886	58	186	27,3598	913	116	-465	27,3599
887	58	232,5	27,3598	914	116	-418,5	27,3598
888	58	279	27,3598	915	116	-372	27,3598
889	58	325,5	27,3598	916	116	-325,5	27,3598
890	58	372	27,3598	917	116	-279	27,3598
891	58	418,5	27,3597	918	116	-232,5	27,3598
892	58	465	27,3597	919	116	-186	27,3598
893	58	511,5	27,3599	920	116	-139,5	27,3598
894	58	558	27,3608	921	116	-93	27,3598
895	58	604,5	27,3631	922	116	-46,5	27,3598
896	58	651	27,3583	923	116	0	27,3598
897	58	697,5	27,2969	924	116	46,5	27,3598
898	58	744	26,9990	925	116	93	27,3598
899	58	790,5	26,0104	926	116	139,5	27,3598
900	58	837	22,9091	927	116	186	27,3598
901	58	883,5	15,4693	928	116	232,5	27,3598
902	58	930	0,0000	929	116	279	27,3598
903	116	-930	0,0000	930	116	325,5	27,3598
904	116	-883,5	15,0272	931	116	372	27,3598
905	116	-837	22,6519	932	116	418,5	27,3598
906	116	-790,5	25,8857	933	116	465	27,3597
907	116	-744	26,9757	934	116	511,5	27,3595
908	116	-697,5	27,2958	935	116	558	27,3592

Nodo	X	Y	PM <sub>10</sub>	Nodo	X	Y	PM <sub>10</sub>
936	116	604,5	27,3582	969	174	232,5	27,3598
937	116	651	27,3446	970	174	279	27,3598
938	116	697,5	27,2517	971	174	325,5	27,3598
939	116	744	26,8492	972	174	372	27,3598
940	116	790,5	25,5943	973	174	418,5	27,3598
941	116	837	22,2935	974	174	465	27,3599
942	116	883,5	14,9563	975	174	511,5	27,3599
943	116	930	0,0000	976	174	558	27,3601
944	174	-930	0,0000	977	174	604,5	27,3594
945	174	-883,5	14,7261	978	174	651	27,3452
946	174	-837	22,2617	979	174	697,5	27,2452
947	174	-790,5	25,5809	980	174	744	26,8245
948	174	-744	26,8358	981	174	790,5	25,4861
949	174	-697,5	27,2514	982	174	837	21,8388
950	174	-651	27,3443	983	174	883,5	14,1001
951	174	-604,5	27,3585	984	174	930	0,0000
952	174	-558	27,3593	985	232	-930	0,0000
953	174	-511,5	27,3595	986	232	-883,5	14,9525
954	174	-465	27,3597	987	232	-837	22,3969
955	174	-418,5	27,3597	988	232	-790,5	25,7190
956	174	-372	27,3598	989	232	-744	26,8940
957	174	-325,5	27,3598	990	232	-697,5	27,2615
958	174	-279	27,3598	991	232	-651	27,3497
959	174	-232,5	27,3598	992	232	-604,5	27,3611
960	174	-186	27,3598	993	232	-558	27,3606
961	174	-139,5	27,3598	994	232	-511,5	27,3600
962	174	-93	27,3598	995	232	-465	27,3599
963	174	-46,5	27,3598	996	232	-418,5	27,3598
964	174	0	27,3598	997	232	-372	27,3598
965	174	46,5	27,3598	998	232	-325,5	27,3598
966	174	93	27,3598	999	232	-279	27,3598
967	174	139,5	27,3598	1000	232	-232,5	27,3598
968	174	186	27,3598	1001	232	-186	27,3598

Fuente: Elaboración propia

## CAPÍTULO V

### DISCUSIÓN

#### 5.1. COMPARACIÓN ENTRE EL RESULTADO ANALÍTICO DE UNA ECUACIÓN DE ADVECCIÓN - DIFUSIÓN Y LA SIMULACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

##### 5.1.1. Resultado analítico de una ecuación de advección-difusión (EDP parabólica)

Dada la ecuación de advección-difusión (EDP parabólica):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 200\pi e^{-2\pi^2 t} \text{sen}(\pi(x+y))$$

Definida en el dominio (cuadrado):  $0 < x, y < 1$

Con las condiciones de frontera: 
$$\begin{cases} u(0; y; t) = u(1; y; t) = 0 \\ u(x; 0; t) = u(x; 1; t) = 0 \end{cases}$$

Y las condiciones iniciales:  $u(x; y; 0) = 100\text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y)$

La solución exacta de la EDP es:  $u(x; y; t) = 100e^{-2\pi^2 t}\text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y)$

Para  $t = 0,1$ :  $Q(x; y) = 200\pi e^{-0,2\pi^2}\text{sen}(\pi(x+y))$

El resultado exacto y la simulación aplicando el elemento finito se muestran en las tablas 32 y 33.

Tabla 32

**Solución exacta de la ecuación de advección-difusión**

Nodos	x	y	Exacta	Nodos	x	y	Exacta
41	0,4795	0,5131	13,8507	73	0,7111	0,2318	7,2869
42	0,0481	0,0439	0,2873	74	0,3117	0,7783	7,3971
43	0,9564	0,048	0,2854	75	0,2209	0,3107	7,3602
44	0,0439	0,9519	0,2874	76	0,5426	0,0756	3,2393
45	0,952	0,9565	0,2846	77	0,443	0,9116	3,746
46	0,7547	0,3557	8,6979	78	0,0874	0,4437	3,708
47	0,3608	0,2649	9,3035	79	0,7189	0,6637	9,3455
48	0,268	0,6367	9,4205	80	0,911	0,6438	3,4482
49	0,6565	0,7283	9,2288	81	0,9102	0,7453	2,7736
50	0,0898	0,1607	1,8698	82	0,1759	0,1045	2,3502
51	0,1607	0,9101	1,8721	83	0,8258	0,8982	2,2727
52	0,9114	0,8441	1,795	84	0,1047	0,824	2,3563
53	0,8412	0,0903	1,8606	85	0,8991	0,1744	2,2545
54	0,452	0,7694	9,1026	86	0,6051	0,423	12,7581
55	0,5579	0,237	9,2586	87	0,397	0,6242	12,1804
56	0,2298	0,4531	9,0815	88	0,3715	0,388	11,9921
57	0,6871	0,5344	11,4929	89	0,8242	0,585	7,0279
58	0,8146	0,6883	6,3432	90	0,825	0,374	6,6975
59	0,259	0,158	4,8098	91	0,5249	0,7417	10,0439
60	0,8521	0,2589	4,5214	92	0,4596	0,2593	10,0248
61	0,1588	0,7405	4,8384	93	0,2616	0,5362	10,1089
62	0,7456	0,8416	4,7534	94	0,6069	0,5709	12,7918
63	0,7341	0,0928	2,9605	95	0,6628	0,1354	4,9999
64	0,2672	0,9095	2,8999	96	0,1418	0,3537	5,3636
65	0,0903	0,2672	2,8947	97	0,3535	0,8577	5,3807
66	0,8458	0,4896	6,4661	98	0,8244	0,7953	4,3661
67	0,3405	0,5046	12,1818	99	0,1809	0,218	4,7301
68	0,4829	0,3358	12,0657	100	0,2184	0,8187	4,7453
69	0,5328	0,6502	12,3072	101	0,7884	0,1838	4,6764
70	0,6097	0,8568	5,6855	102	0,9201	0,4496	3,4084
71	0,3906	0,1355	5,3999	103	0,4451	0,0731	3,116
72	0,1379	0,6086	5,4949	104	0,5522	0,9217	3,3376

Fuente: Elaboración propia

### 5.1.2. Resultado numérico de ecuación de advección-difusión

El código del programa, se encuentra en el Anexo B.

*Tabla 33*

#### **Resultado numérico (simulación) de la de ecuación de advección-difusión**

<b>Nodos</b>	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>Simulación</b>
41	0,4795	0,5131	13,9535
42	0,0481	0,0439	0,3182
43	0,9564	0,048	0,2871
44	0,0439	0,9519	0,2797
45	0,952	0,9565	0,2706
46	0,7547	0,3557	8,6406
47	0,3608	0,2649	9,6887
48	0,268	0,6367	9,5645
49	0,6565	0,7283	8,9918
50	0,0898	0,1607	2,0850
51	0,1607	0,9101	1,8660
52	0,9114	0,8441	1,7079
53	0,8412	0,0903	1,9111
54	0,452	0,7694	9,0357
55	0,5579	0,237	9,3937
56	0,2298	0,4531	9,4253
57	0,6871	0,5344	11,2845
58	0,8146	0,6883	6,1722
59	0,259	0,158	5,1911
60	0,8521	0,2589	4,5888
61	0,1588	0,7405	4,9364
62	0,7456	0,8416	4,6462
63	0,7341	0,0928	3,0354
64	0,2672	0,9095	2,8893
65	0,0903	0,2672	3,1649
66	0,8458	0,4896	6,2478
67	0,3405	0,5046	12,4380
68	0,4829	0,3358	12,3175
69	0,5328	0,6502	12,2460
70	0,6097	0,8568	5,5756
71	0,3906	0,1355	5,7119
72	0,1379	0,6086	5,6374

Fuente: Elaboración propia

### 5.1.3. Comparación entre los resultados analítico y numérico de la ecuación de advección-difusión

Tabla 34

Comparación entre los resultados analítico y numérico (simulación) de la ecuación de advección-difusión

Nodos	x	y	Simulación	Analítica
41	0,4795	0,5131	13,9535	13,8507
42	0,0481	0,0439	0,3182	0,2873
43	0,9564	0,048	0,2871	0,2854
44	0,0439	0,9519	0,2797	0,2874
45	0,952	0,9565	0,2706	0,2846
46	0,7547	0,3557	8,6406	8,6979
47	0,3608	0,2649	9,6887	9,3035
48	0,268	0,6367	9,5645	9,4205
49	0,6565	0,7283	8,9918	9,2288
50	0,0898	0,1607	2,0850	1,8698
51	0,1607	0,9101	1,8660	1,8721
52	0,9114	0,8441	1,7079	1,795
53	0,8412	0,0903	1,9111	1,8606
54	0,452	0,7694	9,0357	9,1026
55	0,5579	0,237	9,3937	9,2586
56	0,2298	0,4531	9,4253	9,0815
57	0,6871	0,5344	11,2845	11,4929
58	0,8146	0,6883	6,1722	6,3432
59	0,259	0,158	5,1911	4,8098
60	0,8521	0,2589	4,5888	4,5214
61	0,1588	0,7405	4,9364	4,8384
62	0,7456	0,8416	4,6462	4,7534
63	0,7341	0,0928	3,0354	2,9605
64	0,2672	0,9095	2,8893	2,8999
65	0,0903	0,2672	3,1649	2,8947
66	0,8458	0,4896	6,2478	6,4661
67	0,3405	0,5046	12,4380	12,1818
68	0,4829	0,3358	12,3175	12,0657
69	0,5328	0,6502	12,2460	12,3072
70	0,6097	0,8568	5,5756	5,6855

<b>Nodos</b>	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>Simulación</b>	<b>Analítica</b>
71	0,3906	0,1355	5,7119	5,3999
72	0,1379	0,6086	5,6374	5,4949
73	0,7111	0,2318	7,3324	7,2869
74	0,3117	0,7783	7,4547	7,3971
75	0,2209	0,3107	7,8078	7,3602
76	0,5426	0,0756	3,2676	3,2393
77	0,443	0,9116	3,7399	3,746
78	0,0874	0,4437	3,8609	3,708
79	0,7189	0,6637	9,1004	9,3455
80	0,911	0,6438	3,3465	3,4482
81	0,9102	0,7453	2,6969	2,7736
82	0,1759	0,1045	2,5966	2,3502
83	0,8258	0,8982	2,2302	2,2727
84	0,1047	0,824	2,3873	2,3563
85	0,8991	0,1744	2,3083	2,2545
86	0,6051	0,423	12,7693	12,7581
87	0,397	0,6242	12,2581	12,1804
88	0,3715	0,388	12,3455	11,9921
89	0,8242	0,585	6,7828	7,0279
90	0,825	0,374	6,6602	6,6975
91	0,5249	0,7417	9,9286	10,0439
92	0,4596	0,2593	10,2752	10,0248
93	0,2616	0,5362	10,3863	10,1089
94	0,6069	0,5709	12,6790	12,7918
95	0,6628	0,1354	5,0465	4,9999
96	0,1418	0,3537	5,6576	5,3636
97	0,3535	0,8577	5,4138	5,3807
98	0,8244	0,7953	4,2386	4,3661
99	0,1809	0,218	5,1606	4,7301
100	0,2184	0,8187	4,7721	4,7453
101	0,7884	0,1838	4,7760	4,6764
102	0,9201	0,4496	3,3170	3,4084

Fuente. Elaboración propia

### 5.1.4. Prueba estadística ANDEVA entre los resultados exacto y la simulación

La prueba estadística de análisis de varianza se realizó con el software libre InfoStat.

Caso	Nodos	x	y	Simulación	Analítica
1	71	0.3906	0.1355	5.7119	5.3999
2	72	0.1379	0.6086	5.6374	5.4949
3	73	0.7111	0.2318	7.3324	7.2869
4	74	0.3117	0.7783	7.4547	7.3971
5	75	0.2209	0.3107	7.8078	7.3602
6	76	0.5426	0.0756	3.2676	3.2393
7	77	0.4430	0.9116	3.7399	3.7460
8	78	0.0874	0.4437	3.8609	3.7080
9	79	0.7189	0.6637	9.1004	9.3455
10	80	0.9110	0.6438	3.3465	3.4482
11	81	0.9102	0.7453	2.6969	2.7736
12	82	0.1759	0.1045	2.5966	2.3502
13	83	0.8258	0.8982	2.2302	2.2727

Real    Registros: 34\*5    n=1    Suma = 3.2393    Media = 3.23930    D.E. = 0.0000    Min = 3.2393    Max = 3.2393

**Figura 40. Resultados de la solución numérica y analítica de la ecuación de advección-difusión**

Fuente: Elaboración propia

**Numérica**

Variable	N	R <sup>2</sup>	R <sup>2</sup> Aj	CV
Numérica	34	0.00	0.00	53.71

Datos desbalanceados en celdas.  
Para otra descomposición de la SC especifique los contrastes apropiados.. !!

**Cuadro de Análisis de la Varianza (SC tipo I)**

F.V.	SC	gl	CM	F	p-valor
Modelo.	0.00	0	0.00	0.00	>0.9999
Codigo	0.00	0	0.00	sd	sd
Error	358.01	33	10.85		
Total	358.01	33			

**Analítica**

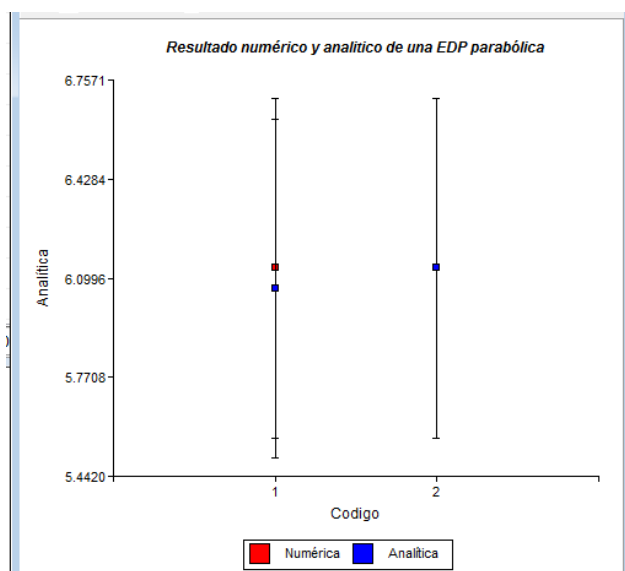
Variable	N	R <sup>2</sup>	R <sup>2</sup> Aj	CV
Analítica	68	1.1E-04	0.00	53.89

**Cuadro de Análisis de la Varianza (SC tipo III)**

F.V.	SC	gl	CM	F	p-valor
Modelo.	0.08	1	0.08	0.01	0.9320
Codigo	0.08	1	0.08	0.01	0.9320
Error	712.94	66	10.80		
Total	713.02	67			

**Figura 41. Nivel de confianza de la comparación entre el resultado numérico y analítico de la ecuación de advección-difusión**

Fuente: Elaboración propia



**Figura 42. Niveles entre el resultado numérico y analítico de la ecuación de advección-difusión**

Fuente: Elaboración propia

## **Interpretación y análisis**

En la Figura 41 se muestra el comportamiento del PM<sub>10</sub> obtenido con el equipo y el obtenido con la simulación del modelo numérico donde se observa que la correlación es fuerte entre ambas variables dependientes; por tanto, los datos obtenidos son similares en cada punto. Se concluye que por ser  $p=0.9320$ , la diferencia entre los resultados obtenidos con el equipo y la simulación del modelo numérico de los PM<sub>10</sub> en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG, no son significativas.

### **5.2. COMPARACIÓN ENTRE EL RESULTADO OBTENIDO CON EL EQUIPO THERMO SCIENTIFIC TEOM 1405-DF Y LA SIMULACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO**

La comparación entre los resultados (concentración de material particulado PM<sub>10</sub>) obtenidos con el equipo Thermo Scientific TEOM 1405-DF y de la simulación del modelo numérico propuesto se muestran en las tablas 27, 28, 29 y 30. La similitud de los resultados con el equipo y con la simulación se determina con la prueba estadística ANDEVA.

#### **5.2.1. Prueba estadística ANDEVA**

La prueba estadística de análisis de varianza se realizó con el *software* libre InfoStat. Los datos que se van a utilizar están en las tablas 27, 28, 29 y 30, correspondientes a resultados

de cuatro días: 29 de marzo, 30 de marzo, 31 de marzo y 1 de abril, obtenidas con el equipo y con la simulación.

### 5.2.2. Prueba estadística ANDEVA entre los resultados del equipo y la simulación correspondientes al 29 de marzo del 2016

Caso	Hora	Simulación	Equipo	Codigo
1	00:00	27.36	27.40	1
2	01:00	26.73	26.77	1
3	02:00	33.56	33.61	1
4	03:00	31.45	31.50	1
5	04:00	17.48	17.50	1
6	05:00	50.12	50.19	1
7	06:00	65.75	65.85	1
8	07:00	62.25	62.34	1
9	08:00	78.55	78.66	1
10	09:00	94.21	94.34	1
11	10:00	113.37	113.53	1
12	11:00	74.04	74.15	1
13	12:00	53.39	53.47	1
14	13:00	74.36	74.47	1
15	14:00	59.35	59.43	1
16	15:00	43.28	43.34	1
17	16:00	38.23	38.29	1
18	17:00	32.63	32.67	1
19	18:00	33.99	34.04	1
20	19:00	35.21	35.26	1
21	20:00	33.68	33.73	1
22	21:00	31.01	31.06	1
23	22:00	31.27	31.31	1
Real	Registros: 48*4	n=1 Suma = 27.36 Media = 27.360 D.E. = 0.00 Min = 27		

**Figura 43. Concentración de PM<sub>10</sub> obtenidos con el equipo y la simulación del modelo numérico en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG**

Fuente: Elaboración propia

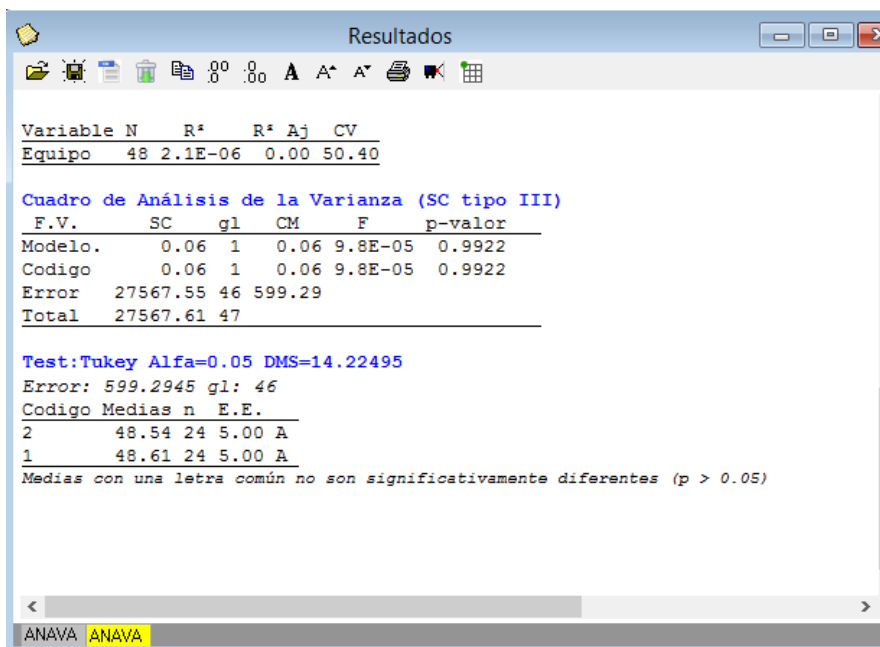


Figura 44. Nivel de confianza de la comparación entre los resultados obtenidos con el equipo y la simulación del modelo numérico de los PM<sub>10</sub> en el punto de monitoreo ubicado en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG

Fuente: Elaboración propia

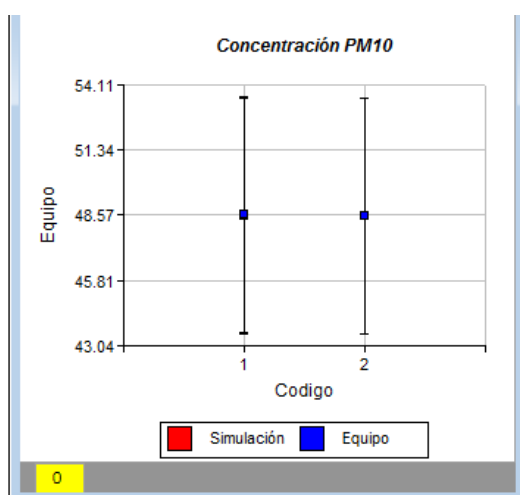


Figura 45. Niveles de PM<sub>10</sub> entre los resultados obtenidos con el equipo y la simulación del modelo numérico de los PM<sub>10</sub> en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG

Fuente: Elaboración propia

## **Interpretación y análisis**

En la Figura 44 se muestra el comportamiento del PM<sub>10</sub> obtenido con el equipo y el de la simulación del modelo numérico, donde se observa que la correlación es fuerte entre ambas variables dependientes; por tanto, los datos obtenidos son similares en cada punto. Se concluye que por ser  $p=0.9922$ , la diferencia entre los resultados obtenidos con el equipo y la simulación del modelo numérico de los PM<sub>10</sub> en el punto de monitoreo ubicado en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG, no son significativas.

## CONCLUSIONES

### Primera

Los parámetros atmosféricos (meteorológicos) que influyen en el nivel de concentración de material particulado  $PM_{10}$ , en la zona urbana aledaña al Ovalo Cusco de la ciudad de Tacna, Perú, son la dirección y la velocidad del viento.

### Segunda

Por ser  $p=0,9922$ , la diferencia entre los resultados obtenidos con el equipo y la simulación del modelo numérico de los  $PM_{10}$ , en el punto de monitoreo ubicado en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG (zona aledaña al Ovalo Cusco), no son significativas.

### Tercera

La solución de una integral doble sobre múltiples triángulos se puede calcular más rápido transformando cualquier triángulo en el plano, en un triángulo con vértices  $(0;0)$ ,  $(1;0)$  y  $(1;1)$ .

Cuarta

Se utilizó el modelo 2D de advección-difusión, que es una ecuación diferencial parcial parabólica, y se elaboró un programa codificado en el lenguaje de programación MATLAB para hallar su solución.

## RECOMENDACIONES

### Primera

Se necesita tener una base de datos con resultados de monitoreo en una gran cantidad de puntos para identificar mejor el comportamiento de los parámetros atmosféricos (meteorológicos), y la concentración de material particulado  $PM_{10}$ , o de otros gases contaminantes, los que permitirán tener mejores resultados al utilizar un *software*.

### Segunda

Los resultados que se han obtenido son similares, tanto los obtenidos de la simulación del modelo numérico que estima la concentración de material particulado  $PM_{10}$ , como los datos obtenidos de un equipo de muestreo de partículas  $PM_{10}$ . Pero podrían haber sido mejores si se hubiese contado con una base de datos con parámetros meteorológicos y concentración de  $PM_{10}$ .

### Tercera

Se pueden adecuar los programas, codificados en el MATLAB, para hallar resultados de concentraciones de otros gases contaminantes.

#### Cuarta

Se debe trabajar con los PM<sub>2,5</sub>, porque según los resultados, en el punto de monitoreo ubicado en la Escuela Profesional de Metalurgia – UNJBG (zona aledaña al Ovalo Cusco), en algunos días la concentración supera el ECA permitido.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abril, G., & Diez, S. (2010). Modelado de la dispersión de material particulado PM10 mediante la estimación de las tasas de emisión considerando la influencia de la meteorología local.
- Alvarado, R. R., Montiel, J. P., & Deluque, J. (2011). Análisis comparativo de las mediciones de material particulado PM 10 Comparative analysis of PM 10 particulate matter. 27-35.
- Alvarado, S. A., Silva, C. S., & Cáceres, D. D. (2010). Modelación de episodios críticos de contaminación por material particulado (PM10) en Santiago de Chile. Comparación de la eficiencia predictiva de los modelos paramétricos y no paramétricos. *Gaceta Sanitaria*, 24(6), 466-472. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.gaceta.2010.07.008>
- Angulo, L. C., Huertas, J. I., & Restrepo, G. M. (2011). Caracterización de Partículas Suspendidas (PST) y Partículas Respirables (PM 10) producidas en Áreas de Explotación Carbonífera a Cielo Abierto. *Información tecnológica*, 22(4), 23-34. doi: 10.4067/s0718-07642011000400004
- Arciniégas Suárez, C. A. (2012). Diagnosis and control of particulate matter: Total suspended particles PM10 breathable fraction. *Luna Azul*(34), 195-213.
- Baik, J.-J., Kim, J.-J., & Fernando, H. J. (2003). A CFD model for simulating urban flow and dispersion. *Journal of Applied Meteorology*, 42(11), 1636-1648.
- Barna, M. G., & Gimson, N. R. (2002). Dispersion modelling of a wintertime particulate pollution episode in Christchurch, New Zealand. *Atmospheric Environment*, 36(21), 3531-3544. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S1352-2310\(02\)00296-0](http://dx.doi.org/10.1016/S1352-2310(02)00296-0)
- Bell, M. L., Samet, J. M., & Dominici, F. (2004). Time-series studies of particulate matter. *Annu. Rev. Public Health*, 25, 247-280.
- Bennett, A. F. (2005). *Inverse modeling of the ocean and atmosphere*: Cambridge University Press.

- Billet, S., Garçon, G., Dagher, Z., Verdin, A., Ledoux, F., Cazier, F., . . . Shirali, P. (2007). Ambient particulate matter (PM 2.5): physicochemical characterization and metabolic activation of the organic fraction in human lung epithelial cells (A549). *Environmental research*, 105(2), 212-223.
- Bono Cabré, R. (2012). Diseños cuasi-experimentales y longitudinales. *Departamento de Metodología de las Ciencias del Comportamiento. Facultad de Psicología. Universidad de Barcelona.*
- Burns, T. P., & Higashi, M. (1991). *Theoretical studies of ecosystems*: Cambridge University Press.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). Métodos numéricos para ingenieros (pp. 977): McGraw-Hill. ISBN.
- Chen, M. L., Mao, I. F., & Lin, I. K. (1999). The PM2.5 and PM10 particles in urban areas of Taiwan. *Science of The Total Environment*, 226(2-3), 227-235. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0048-9697\(98\)00407-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0048-9697(98)00407-0)
- Choi, H., & Choi, D. S. (2008). Concentrations of PM10, PM2.5, and PM1 influenced by atmospheric circulation and atmospheric boundary layer in the Korean mountainous coast during a duststorm. *Atmospheric Research*, 89(4), 330-337. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.atmosres.2008.03.018>
- DIGESA, D. G. d. S. A. (2005). Protocolo de Monitoreo de la Calidad del Aire y Gestión de Datos.
- Fang, G.-C., Chang, C.-N., Chu, C.-C., Wu, Y.-S., Fu, P. P.-C., Yang, I.-L., & Chen, M.-H. (2003). Characterization of particulate, metallic elements of TSP, PM 2.5 and PM 2.5-10 aerosols at a farm sampling site in Taiwan, Taichung. *Science of the Total Environment*, 308(1), 157-166.
- Gaines Wilson, J., & Zawar-Reza, P. (2006). Intraurban-scale dispersion modelling of particulate matter concentrations: Applications for exposure estimates in cohort studies. *Atmospheric Environment*, 40(6), 1053-1063. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.atmosenv.2005.11.026>
- Galeano Vargas, J. D. (2013). Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. 58.

- García, F. (2002). Determinación de la Concentración de Fondo y Distribución Espacial de PST en Santa Marta. *Grupo de Control de la Contaminación Ambiental. Universidad del Magdalena, Colombia.*[Links].
- INEI. (2009). Estadísticas Ambientales Diciembre 2009. *Informe Técnico del Instituto Nacional de Estadística e Informática - Perú.*
- INEI. (2016). Estadísticas Ambientales Febrero 2016. *Resumen Ejecutivo del Instituto Nacional de Estadística e Informática - Perú.*
- Jiménez, C., & Carlos, R. (2010). Evaluación de PM10 y PM2.5 en la Ciudad de Riobamba Afectada por el Volcán Tungurahua y Validación del Método de Análisis.
- Kauhaniemi, M., Karppinen, A., Härkönen, J., Kousa, A., Alaviippola, B., Koskentalo, T., . . . Kukkonen, J. (2008). Evaluation of a modelling system for predicting the concentrations of PM2.5 in an urban area. *Atmospheric Environment*, 42(19), 4517-4529. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.atmosenv.2008.01.071>
- Ketzel, M., Omstedt, G., Johansson, C., Düring, I., Pohjola, M., Oettl, D., . . . Berkowicz, R. (2007). Estimation and validation of PM2.5/PM10 exhaust and non-exhaust emission factors for practical street pollution modelling. *Atmospheric Environment*, 41(40), 9370-9385. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.atmosenv.2007.09.005>
- Kiely, G. (1999). *Ingeniería ambiental: fundamentos, entornos, tecnologías y sistemas de gestión*: McGraw-Hill.
- Limbeck, A., Handler, M., Puls, C., Zbiral, J., Bauer, H., & Puxbaum, H. (2009). Impact of mineral components and selected trace metals on ambient PM10 concentrations. *Atmospheric Environment*, 43(3), 530-538. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.atmosenv.2008.10.012>
- Liu, P.-W. G. (2009). Simulation of the daily average PM10 concentrations at Ta-Liao with Box-Jenkins time series models and multivariate analysis. *Atmospheric Environment*, 43(13), 2104-2113. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.atmosenv.2009.01.055>
- Lozano, D. A. G. (2012). Modelado numérico de la dispersión de contaminantes asociada al flujo atmosférico dentro de un entorno urbano específico de la Ciudad de Bogotá.

- Manjarrés García, G., Manjarrés Pinzón, G., & Linero Cueto, J. (2005). Composición y concentración de material particulado en el aire de un sector del área urbana de Santa Marta (Magdalena, Colombia). 23-33.
- Massey, D., Kulshrestha, A., Masih, J., & Taneja, A. (2012). Seasonal trends of PM10, PM5.0, PM2.5 & PM1.0 in indoor and outdoor environments of residential homes located in North-Central India. *Building and Environment*, 47(0), 223-231. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.buildenv.2011.07.018>
- Peláez, A., & Mejía, S. (2009). Conceptos básicos de modelación matemática y simulación computacional de sistemas biológicos. *CES Odontología*, 13(1), 51-55.
- Querol, X. (2008). Calidad del aire, partículas en suspensión y metales. *Revista Española de Salud Pública*, 82(5), 447-454.
- Seinfeld, J. H., & Pandis, S. N. (2012). *Atmospheric chemistry and physics: from air pollution to climate change*: John Wiley & Sons.
- Tanji, K. (1994). Hydrochemical Modeling. *Class Notes, Land, Air and Water Resources, University of California at Davis*.
- Tiitta, P., Raunemaa, T., Tissari, J., Yli-Tuomi, T., Leskinen, A., Kukkonen, J., . . . Karppinen, A. (2002). Measurements and modelling of PM2.5 concentrations near a major road in Kuopio, Finland. *Atmospheric Environment*, 36(25), 4057-4068. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S1352-2310\(02\)00309-6](http://dx.doi.org/10.1016/S1352-2310(02)00309-6)
- Unal, Y. S., Toros, H., Deniz, A., & Incecik, S. (2011). Influence of meteorological factors and emission sources on spatial and temporal variations of PM10 concentrations in Istanbul metropolitan area. *Atmospheric Environment*, 45(31), 5504-5513. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.atmosenv.2011.06.039>
- Wang, W. C., Chen, K. S., Wang, S. K., Lee, H. C., & Tsai, M. Y. (2009). Modeling atmospheric PM10 concentrations during severe pollution events in southern Taiwan. *Atmospheric Research*, 92(2), 159-171. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.atmosres.2008.09.012>
- Watson, J. G., & Chow, J. C. (2000). Reconciling urban fugitive dust emissions inventory and ambient source contribution estimates:

Summary of current knowledge and needed research. *DRI document*(6110.4), 240.

Zienkiewicz, O., & Taylor, R. (1994). El método de los elementos finitos. Volumen 1: Formulación básica y problemas lineales: CIMNE, Barcelona.

Zoras, S., Triantafyllou, A. G., & Deligiorgi, D. (2006). Atmospheric stability and PM10 concentrations at far distance from elevated point sources in complex terrain: Worst-case episode study. *Journal of Environmental Management*, 80(4), 295-302. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jenvman.2005.09.010>

## **ANEXOS**

## ANEXO A

### Código del programa, en el software MATLAB, que encuentra la concentración de PM<sub>10</sub> (solución de la ecuación advección-difusión)

```
%Programa programa_pm10_uno.m
%Programed by MsC. Javier Lozano Marreros
%Metodo del elemento Finito Ecuacion de advección-difusion
%
%Ut(x,y,t)+Ux(x,y,t)+Uy(x,y,t)=Uxx(x,y,t)+Uyy(x,y,t)+Q(x,y,t),
%0<x,y<1
%
%Condiciones de frontera:
%u(0,y,t)=u(1,y,t)=0
%u(x,0,t)=u(x,1,t)=0
%
%Condiciones iniciales:
%u(x,y,0)=0 sobre el dominio
%
clc
clear

% ----- Hora 1: 00:00 horas
D=1.3406;
kc=8.9483;
ux='-0.2607';
uy='0.4172';
Qxy=' 29.3171';
R=0;

a=-1160:58:1160;
b=-930:46.5:930;

[x,y]=meshgrid(a,b);
tri=delaunay(x,y);
xy=[x(:), y(:)];
[tnodos ver]=size(xy);
[nel nn]=size(tri);

nnel=3; %numero de nodos por elemento
ndof=1; %numero de dofs por nodo
sdof=tnodos*ndof; %totalde dofs del sistema
dt=1; %tamaño de paso de tiempo
tiempoi=0.0; %tiempo inicial
tiempof=60; %tiempo final
tiempo=fix((tiempof-tiempoi)/dt);
%
kb = boundary(xy(:,1),xy(:,2),0.1);
kb=kb(1:length(kb)-1);
```

```

nfron=[kb(:) zeros(length(kb),1)];

[gcoord nodos]=gcoord_nodos(xy);
%condiciones de frontera
[nodo_fron valor_fron]=cond_frontera(nfron);

%inicialización de matrices y vectores
ff=zeros(sdof,1);
fn=zeros(sdof,1);
fsol=zeros(sdof,1);
sol=zeros(2,tiempo+1);
kk=zeros(sdof,sdof);
mm=zeros(sdof,sdof);
index=zeros(nnel*ndof,1);
%-----

for i=1:nel
    nd(1)=nodos(i,1);
    nd(2)=nodos(i,2);
    nd(3)=nodos(i,3);
    x1=gcoord(nd(1),1); y1=gcoord(nd(1),2);
    x2=gcoord(nd(2),1); y2=gcoord(nd(2),2);
    x3=gcoord(nd(3),1); y3=gcoord(nd(3),2);
    [index]=feeldof(nd,nnel,ndof);
    k=matriz_Kuxuy(x1,y1,x2,y2,x3,y3,D,kc,ux,uy);
    m=matriz_M(x1,y1,x2,y2,x3,y3);
    f=matriz_F(x1,y1,x2,y2,x3,y3,R,Qxy);
    [kk,ff]=feasmb12(kk,ff,k,f,index);
    [mm]=feasmb11(mm,m,index);
end

for in=1:sdof
    fsol(in)=0.0;
end

kn=2*mm + dt*kk; %Crank Nicolson

for it=1:tiempo
    fn=dt*ff + (2*mm-dt*kk)*fsol;
    [kn fn]=feaplyc2(kn,fn,nodo_fron,valor_fron);
    fsol=kn\fn;
end

fprintf('Para PM10 (Emission) = %8.4f, D = %6.4f ,kc = %6.4f
\n',str2num(Qxy),D,kc);
fprintf('Solucion: = \n');
fprintf('Para t = %5.2f el PM10 es %12.6f
\n\n',it*dt,fsol(47)./10);
fprintf('%12.8f\n',fsol./10);

trimesh(tri,x,y)

```

## ANEXO B

**Código del programa, en el software MATLAB, para calcular la solución de una ecuación advección-difusión, que es una ecuación diferencial parcial parabólica**

```
%-----  
%Programed by MsC. Javier Lozano Marreros  
%Metodo del elemento Finito Ecuacion de advección diffusion  
%Ut(x,y,t)+Ux(x,y,t)+Uy(x,y,t)=Uxx(x,y,t)+Uyy(x,y,t)+Q(x,y,t),  
%0<x,y<1  
% Ut(x,y,t)+Ux(x,y,t)+Uy(x,y,t) = Uxx(x,y,t)+Uyy(x,y,t)+  
% + 200*pi*exp(-2*(pi^2)*t)*sin(pi*(x+y)), 0<x,y<1  
% Entonces Q(x,y,t)=200*pi*exp(-2*(pi^2)*t)*sin(pi*(x+y))  
%Condiciones de frontera:  
%u(0,y,t)=u(1,y,t)=0  
%u(x,0,t)=u(x,1,t)=0  
%Condiciones iniciales:  
%u(x,y,0)=100*sin(pi*x)*sin(pi*y) sobre el dominio  
%-----  
%La solucion exacta es:  
%u(x,y,t)=100*exp(-2*(pi^2)*t)*sin(pi*x)*sin(pi*y) sobre el  
dominio 0<x,y<1  
%-----  
clc  
clear  
D=0;  
kc=1;  
ux='1';  
uy='1';  
R=0;  
%  
%Funcion Q(x,y,t)=200*pi*exp(-2*(pi^2)*t)*sin(pi*(x+y))  
%Si t=0.1 entonces 200*pi*exp(-0.2*(pi^2))=87.2804  
Qxy='87.2804*sin(3.1416*(x+y))';  
[p,e,t]=initmesh('ejemplo2g');  
[p,e,t]=refinemesh('ejemplo2g',p,e,t);  
xy=p';  
[tnodos ver]=size(xy);  
tri=delaunay(xy(:,1),xy(:,2));  
[nel nn]=size(tri);  
nnel=3; %numero de nodos por elemento  
ndof=1; %numero de dofs por nodo  
sdof=tnodos*ndof; %totalde dofs del sistema  
dt=0.001; %tamaño de paso de tiempo  
tiempoi=0.0; %tiempo inicial  
tiempof=0.1; %tiempo final  
%incremento en el tiempo
```

```

tiempo=fix((tiempof-tiempoi)/dt);
%
k = boundary(xy(:,1),xy(:,2));
%
k=k(1:length(k)-1);
nfron=[k(:) zeros(length(k),1)];
%-----
%coordenadas y nodos
[gcoord nodos]=gcoord_nodos(xy);
%condiciones de frontera
[nodo_fron valor_fron]=cond_frontera(nfron);
%inicialización de matrices y vectores
ff=zeros(sdof,1);
fn=zeros(sdof,1);
fsol=zeros(sdof,1);
sol=zeros(2, tiempo+1);
kk=zeros(sdof, sdof);
mm=zeros(sdof, sdof);
index=zeros(nnel*ndof,1);
%-----

for i=1:nel
    nd(1)=nodos(i,1);
    nd(2)=nodos(i,2);
    nd(3)=nodos(i,3);
    x1=gcoord(nd(1),1); y1=gcoord(nd(1),2);
    x2=gcoord(nd(2),1); y2=gcoord(nd(2),2);
    x3=gcoord(nd(3),1); y3=gcoord(nd(3),2);
    [index]=feeldof(nd,nnel,ndof);
    k=matriz_Kuxuy(x1,y1,x2,y2,x3,y3,D,kc,ux,uy);
    m=matriz_M(x1,y1,x2,y2,x3,y3);
    f=matriz_F(x1,y1,x2,y2,x3,y3,R,Qxy);
    [kk,ff]=feasmb12(kk,ff,k,f,index);
    [mm]=feasmb11(mm,m,index);
end

fsol=100*sin(pi*xy(:,1)).*sin(pi*xy(:,2));

kn=2*mm + dt*kk; %Crank Nicolson

for it=1:tiempo
    fn=dt*ff + (2*mm-dt*kk)*fsol; %Crank Nicolson
    [kn fn]=feaplyc2(kn,fn,nodo_fron,valor_fron);
    fsol=kn\fn; %Crank Nicolson
end

fprintf('Para t = %5.2f\n',it*dt);
fprintf('%10.6f\n',fsol);

%-----

```

## ANEXO C

### Resultados de la estación de monitoreo de calidad de aire ubicada en la Escuela de Metalurgia – UNJBG (zona aledaña al Ovalo Cusco)

TOA5	MATERIAL PARTICULADO				PRESION			
	PM2.5 1 hora	PM2.5 24 horas	PM10 1 hora	PM10 24 horas	CR1000	57625	CR1000.Std. 26	CPU:emap_grt_rev3_En c.CR1
TIMESTAMP	TeomA_1h_conc	TeomA_24h_conc	Dichot_1h_conc	Dichot_24h_conc	BP_mbar	BP_mbar	BP_mbar_Max	BP_mbar_Min
TS	Avg	Avg	Avg	Avg	Smp	Avg	Max	Min
28/03/2016 13:00	0	0	0	0	951,7179	949,8847	951,8917	504,7143
28/03/2016 14:00	0	0	0	0	950,7418	950,9441	951,717	950,0916
28/03/2016 15:00	0	0	0	0	950,2542	950,5929	951,2294	949,9291
28/03/2016 16:00	0	0	0	0	950,599	950,8785	951,5698	950,1729
28/03/2016 17:00	0	0	0	0	951,3007	951,4084	952,1949	950,6103
28/03/2016 18:00	0	0	0	0	952,0205	951,9368	952,8338	951,1381
28/03/2016 19:00	0	0	0	0	952,8269	952,8542	953,8032	951,8578
28/03/2016 20:00	16,81298	0	40,92915	0	954,2101	953,6207	954,2915	952,827
28/03/2016 21:00	19,97917	0	39,8086	0	953,7811	954,1289	954,8389	953,3152
28/03/2016 22:00	13,7071	0	33,5732	0	954,1135	954,0792	954,8349	953,4184
28/03/2016 23:00	12,65901	0	28,30228	0	954,12	953,8256	954,4455	953,1433
29/03/2016 00:00	12,70075	0	27,39913	0	953,4689	953,5995	954,2827	952,9806
29/03/2016 01:00	9,806436	0	26,77027	0	952,5737	953,2952	953,9572	952,5737
29/03/2016 02:00	14,2021	0	33,60743	0	952,004	952,7728	953,4689	952,004
29/03/2016 03:00	11,11032	0	31,49792	0	951,8243	952,4352	953,0634	951,6544
29/03/2016 04:00	6,137993	0	17,50485	0	951,6584	952,1443	952,8075	951,4961
29/03/2016 05:00	20,30283	0	50,19195	0	951,9928	952,1859	952,9679	951,4912
29/03/2016 06:00	32,95391	0	65,84876	0	952,7272	952,7825	953,5413	951,9931
29/03/2016 07:00	32,46471	0	62,33888	0	953,5763	953,3325	954,2352	952,483
29/03/2016 08:00	35,14595	0	78,66003	0	954,5653	953,8959	954,6041	953,0436
29/03/2016 09:00	37,46857	0	94,34309	0	954,3941	954,1805	954,791	953,5034
29/03/2016 10:00	28,82867	0	113,531	0	953,6788	953,9238	954,7156	953,1912
29/03/2016 11:00	20,66503	0	74,1461	0	953,7489	953,5571	954,2455	952,9362
29/03/2016 12:00	16,41197	0	53,47059	0	953,4238	953,2792	953,9927	952,5298
29/03/2016 13:00	15,95784	0	74,47053	0	952,8434	952,8115	953,5051	952,0242
29/03/2016 14:00	12,2625	0	59,43487	0	951,4652	952,3004	953,0913	951,4652
29/03/2016 15:00	8,162237	0	43,34008	0	951,8041	951,7278	952,5945	950,9109
29/03/2016 16:00	7,095057	0	38,28732	0	951,5522	951,3929	952,0399	950,8279
29/03/2016 17:00	6,39445	0	32,67298	0	951,4071	951,5366	952,2198	950,902
29/03/2016 18:00	11,96244	0	34,03856	0	953,0656	952,242	953,1329	951,2568
29/03/2016 19:00	11,44576	16,29485	35,25646	46,74922	953,2301	952,8764	953,7145	952,174
29/03/2016 20:00	11,4235	17,05201	33,72552	49,25918	953,3966	953,3505	954,0475	952,6614
29/03/2016 21:00	10,97944	16,67702	31,05612	48,8945	953,8848	953,5591	954,2101	952,9898
29/03/2016 22:00	12,25849	16,61666	31,31402	48,80036	953,1525	953,5031	954,1288	952,8271
29/03/2016 23:00	6,46919	16,35876	23,62185	48,60535	953,7817	953,485	954,0531	952,8586
30/03/2016 00:00	9,253592	16,21512	30,48689	48,734	953,2292	953,3631	954,123	952,7222

TOA5	MATERIAL PARTICULADO				PRESION			
	PM2.5 1 hora	PM2.5 24 horas	PM10 1 hora	PM10 24 horas	CR1000	57625	CR1000.Std. 26	CPU:emap_grt_rev3_En c.CR1
TIMESTAMP	TeomA_1h_conc	TeomA_24h_conc	Dichot_1h_conc	Dichot_24h_conc	BP_mbar	BP_mbar	BP_mbar_Max	BP_mbar_Min
TS	Avg	Avg	Avg	Avg	mbar	mbar	mbar	mbar
					Smp	Avg	Max	Min
30/03/2016 01:00	17,62194	16,54077	49,97114	49,7007	952,8224	953,157	953,7988	952,4155
30/03/2016 02:00	21,67546	16,85216	55,9643	50,63224	952,176	952,3158	953,3997	951,3591
30/03/2016 03:00	18,26883	17,15043	42,28204	51,08158	950,9948	951,5052	952,3366	950,8059
30/03/2016 04:00	20,27666	17,73954	39,41002	51,9943	950,7018	951,1172	951,8142	950,5301
30/03/2016 05:00	16,96219	17,60035	35,2126	51,37016	951,8412	951,2103	952,004	950,5391
30/03/2016 06:00	12,30777	16,74009	30,18937	49,88435	952,5776	951,9213	952,6627	951,1088
30/03/2016 07:00	14,26414	15,98174	38,56512	48,89378	953,1437	952,3904	953,2253	951,6796
30/03/2016 08:00	25,40403	15,57582	74,08436	48,70312	953,0994	952,9062	953,5557	952,1669
30/03/2016 09:00	27,20424	15,14814	85,51405	48,33525	953,4148	953,1733	953,7913	952,5209
30/03/2016 10:00	24,28736	14,95892	77,58823	46,83763	953,6772	953,3873	953,9749	952,6831
30/03/2016 11:00	12,48975	14,61693	36,81498	45,28217	953,2612	953,146	953,9003	952,3672
30/03/2016 12:00	13,22345	14,48111	32,24363	44,39771	952,5298	952,4587	953,3425	951,5545
30/03/2016 13:00	16,10595	14,48728	42,20668	43,05338	951,9305	951,9155	952,7736	951,2019
30/03/2016 14:00	8,179555	14,31716	37,49978	42,13942	951,5553	951,6976	952,4082	950,9907
30/03/2016 15:00	7,453707	14,28763	44,5173	42,18847	951,8514	951,6172	952,2905	950,99
30/03/2016 16:00	15,79531	14,65001	60,84652	43,12603	951,3105	951,6517	952,3647	951,0572
30/03/2016 17:00	11,68006	14,87349	40,88164	43,47637	952,1113	951,9543	952,7582	951,148
30/03/2016 18:00	11,36313	14,84884	35,51091	43,53583	952,1031	952,3372	952,9973	951,7048
30/03/2016 19:00	17,17166	15,0871	37,7547	43,64034	952,8271	952,8021	953,4774	952,022
30/03/2016 20:00	24,53376	15,63337	44,64117	44,09457	953,3152	953,0579	953,722	952,4203
30/03/2016 21:00	32,10857	16,51847	56,5072	45,15902	953,3792	953,3629	954,1842	952,5017
30/03/2016 22:00	22,34594	16,93177	42,47171	45,61494	952,89	953,2944	954,0328	952,7407
30/03/2016 23:00	19,30363	17,46437	45,56625	46,52644	953,4689	953,2769	953,9572	952,6549
31/03/2016 00:00	14,42606	17,68105	34,47229	46,69521	953,332	953,3333	953,9572	952,7336
31/03/2016 01:00	13,6044	17,51667	23,97935	45,61924	952,9401	953,0959	953,7303	952,3702
31/03/2016 02:00	10,63197	17,05783	20,14793	44,12866	951,9131	952,5671	953,4348	951,6689
31/03/2016 03:00	12,16142	16,80202	25,96597	43,44367	951,506	951,9734	952,7272	951,3433
31/03/2016 04:00	16,18081	16,63218	31,5026	43,11346	952,0759	952,1217	952,8086	951,506
31/03/2016 05:00	22,79101	16,87378	42,43478	43,41288	952,2388	952,0004	952,5644	951,3433
31/03/2016 06:00	20,78365	17,2253	47,36495	44,12677	952,9714	952,082	952,9714	951,3433
31/03/2016 07:00	26,29096	17,72724	52,87972	44,7264	953,4423	952,7255	953,605	951,9131
31/03/2016 08:00	26,16016	17,7628	64,85966	44,35494	953,0715	953,2117	953,887	952,452
31/03/2016 09:00	30,26703	17,89083	87,47545	44,44008	953,4877	953,5325	954,1398	952,9185
31/03/2016 10:00	19,20286	17,67788	55,56252	43,51921	952,9352	953,0976	953,813	952,2849
31/03/2016 11:00	11,79309	17,64885	35,20031	43,43709	952,6111	952,6211	953,3692	951,9609
31/03/2016 12:00	16,05273	17,76731	45,77695	44,00022	952,3495	952,3941	953,0987	951,5469
31/03/2016 13:00	16,24244	17,77402	43,60267	44,0621	951,3142	951,7376	952,5968	950,8255

TOA5	MATERIAL PARTICULADO				PRESION			
	PM2.5 1 hora	PM2.5 24 horas	PM10 1 hora	PM10 24 horas	CR1000	57625	CR1000.Std. 26	CPU:emap_grt_rev3_En
TIMESTAMP	TeomA_1h_conc	TeomA_24h_conc	Dichot_1h_conc	Dichot_24h_conc	BP_mbar	BP_mbar	BP_mbar_Max	BP_mbar_Min
TS					mbar	mbar	mbar	mbar
	Avg	Avg	Avg	Avg	Smp	Avg	Max	Min
31/03/2016 14:00	9,375742	17,82088	42,20813	44,25631	950,9783	951,2974	951,9666	950,5651
31/03/2016 15:00	17,81482	18,25251	93,3409	46,29334	951,5544	951,2033	951,8795	950,5762
31/03/2016 16:00	16,45715	18,28009	67,45449	46,56868	951,7169	951,2371	951,8795	950,5791
31/03/2016 17:00	9,740106	18,19752	38,42812	46,45867	952,3564	951,6118	952,4377	950,7416
31/03/2016 18:00	11,31287	18,19543	35,28617	46,4493	952,5907	952,5029	953,4036	951,5433
31/03/2016 19:00	13,00983	18,02201	40,4774	46,56275	954,6169	953,6568	954,6169	952,5161
31/03/2016 20:00	14,20563	17,59168	41,27779	46,42261	954,1124	954,5449	955,1611	953,6406
31/03/2016 21:00	11,60145	16,73982	32,501	45,42655	955,0951	954,575	955,1812	953,8911
31/03/2016 22:00	8,521943	16,16382	24,62239	44,68282	955,2593	954,7806	955,4221	954,1188
31/03/2016 23:00	11,10333	15,82214	26,21928	43,8767	954,4455	954,6595	955,3407	953,9572
01/04/2016 00:00	9,852532	15,63158	23,06311	43,40132	953,9727	954,1854	954,9338	953,4729
01/04/2016 01:00	9,481127	15,45978	19,099	43,19798	953,5831	953,9603	954,5367	953,2471
01/04/2016 02:00	5,410104	15,2422	13,02633	42,90124	953,4573	953,6778	954,4207	952,9651
01/04/2016 03:00	6,537614	15,00787	18,15015	42,57558	953,2157	953,4551	954,2731	952,8079
01/04/2016 04:00	13,44908	14,89405	29,40012	42,48798	953,2971	953,3268	954,0298	952,6458
01/04/2016 05:00	17,65585	14,68009	36,94885	42,2594	953,3785	953,3378	953,9484	952,7272
01/04/2016 06:00	18,99387	14,60551	41,93652	42,03321	953,8669	953,4737	954,1112	952,8086
01/04/2016 07:00	22,95042	14,46632	47,5235	41,81004	954,9088	954,0253	955,0743	953,1343
01/04/2016 08:00	22,58341	14,31729	57,11538	41,48736	955,0103	954,9149	955,8391	953,9828
01/04/2016 09:00	27,34079	14,19536	78,08141	41,09594	955,5294	955,2477	955,9078	954,635
01/04/2016 10:00	14,38373	13,99457	48,54476	40,80353	954,9103	955,2377	955,8921	954,6216
01/04/2016 11:00	10,81732	13,95391	44,43398	41,18827	954,4803	955,0073	955,7838	954,1553
01/04/2016 12:00	14,3192	13,88168	49,81126	41,35637	954,249	954,1814	955,0493	953,3705
01/04/2016 13:00	17,45296	13,93212	58,61058	41,98169	952,7323	953,5898	954,4899	952,7304
01/04/2016 14:00	15,25308	14,17701	49,81651	42,29871	953,4274	953,0698	953,8636	952,2787
01/04/2016 15:00	11,87367	13,92946	109,2547	42,96178	951,9727	952,7465	953,6194	951,9727
01/04/2016 16:00	12,30593	13,75649	55,93752	42,48191	953,0104	952,4361	953,163	951,803
01/04/2016 17:00	13,13469	13,89793	48,98581	42,92181	953,6526	952,84	953,7252	952,0392
01/04/2016 18:00	11,85648	13,92058	42,89623	43,2389	953,4854	953,4974	954,4551	952,6805
01/04/2016 19:00	6,889617	13,66558	39,11446	43,18211	954,3724	954,0515	954,8593	953,1603
01/04/2016 20:00	9,545371	13,4714	35,2999	42,93303	955,2678	954,558	955,3491	953,803
01/04/2016 21:00	11,25172	13,45683	31,53413	42,89274	954,4736	954,7869	955,45	954,1288
01/04/2016 22:00	6,809951	13,38549	22,89844	42,82091	955,3448	954,9299	955,5059	954,2869
01/04/2016 23:00	11,77505	13,41348	28,34857	42,90963	954,0375	954,5979	955,3499	953,7877
02/04/2016 00:00	16,76328	13,70143	38,07677	43,5352	953,7944	954,0145	954,9337	953,1433
02/04/2016 01:00	15,17786	13,93879	37,23743	44,29097	952,8178	953,3505	954,2013	952,4923
02/04/2016 02:00	12,14713	14,2195	32,3297	45,09528	953,062	952,9152	953,4689	952,2482

TOA5	MATERIAL PARTICULADO				PRESION			
	PM2.5 1 hora	PM2.5 24 horas	PM10 1 hora	PM10 24 horas	CR1000	57625	CR1000.Std. 26	CPU:emap_grt_rev3_En
TIMESTAMP	TeomA_1h_conc	TeomA_24h_conc	Dichot_1h_conc	Dichot_24h_conc	BP_mbar	BP_mbar	BP_mbar_Max	BP_mbar_Min
TS	Avg	Avg	Avg	Avg	Smp	Avg	Max	Min
02/04/2016 03:00	13,211	14,49756	31,22672	45,64013	952,0346	952,6754	953,5503	951,8508
02/04/2016 04:00	15,12494	14,56739	24,25297	45,42567	951,9945	952,3013	952,9713	951,6582
02/04/2016 05:00	6,705964	14,11114	16,37159	44,56828	952,1573	952,2484	952,8086	951,6689
02/04/2016 10:00	0	0	0	0	952,5391	952,6047	953,2522	951,9832
02/04/2016 11:00	0	0	0	0	952,2047	952,2627	953,1091	951,5545
02/04/2016 12:00	2,084836	0	9,501527	0	951,6357	951,8215	952,5298	950,9856
02/04/2016 13:00	10,39564	0	36,91612	0	950,2542	951,0854	952,1234	950,1729
02/04/2016 14:00	8,954719	7,971381	40,14076	34,07296	949,7665	950,2841	951,1481	949,4414
02/04/2016 15:00	11,73564	10,77906	55,28616	49,14872	950,0103	949,7358	950,4979	948,9537
02/04/2016 16:00	10,25626	10,68918	46,35475	54,52522	950,1812	949,6381	950,2648	948,9537
02/04/2016 17:00	8,531999	10,20326	30,98877	35,59704	950,7296	950,0109	950,7296	949,2058
02/04/2016 18:00	4,964914	5,192954	23,97714	25,676	950,8834	950,6238	951,5338	949,7546
02/04/2016 19:00	7,783649	5,926121	28,29359	25,42671	952,6644	951,52	952,6644	950,5581
02/04/2016 20:00	9,55557	8,672397	30,24039	30,2875	952,2571	952,3051	953,1521	951,6068
02/04/2016 21:00	12,01468	10,19732	27,71746	26,69386	953,7788	952,9568	953,7885	952,1011
02/04/2016 22:00	10,2776	13,04179	30,57737	31,61691	953,4022	953,4738	954,0545	952,8002
02/04/2016 23:00	10,39167	10,14149	34,65073	32,96375	953,7995	953,6299	954,2925	952,9066
03/04/2016 00:00	11,51381	11,50838	33,17602	35,85166	953,9308	953,6824	954,2877	952,9633
03/04/2016 01:00	12,64347	11,35728	31,52273	29,59124	952,4923	953,2214	953,9397	952,4109
03/04/2016 02:00	13,84643	12,59709	33,82592	32,81982	952,655	952,7252	953,3875	952,1667
03/04/2016 03:00	11,03407	13,54329	26,21829	31,59405	952,6567	952,5569	953,2247	951,7619
03/04/2016 04:00	9,799991	10,18417	20,36193	22,245	952,4515	952,1584	952,8328	951,5356
03/04/2016 05:00	9,128597	8,595446	19,94429	18,76757	952,9714	952,3207	953,1343	951,6438
03/04/2016 06:00	12,38429	9,517948	29,99809	21,46735	953,6227	952,9576	953,8669	952,1573
03/04/2016 07:00	26,92462	21,396	57,19907	47,81868	954,2051	953,5201	954,2967	952,7272
03/04/2016 08:00	21,25196	27,0423	53,77232	59,71539	954,5361	954,38	955,2685	953,4699
03/04/2016 09:00	13,09722	15,58833	35,68214	44,16141	955,0527	954,867	955,6025	954,1831
03/04/2016 10:00	11,49032	11,32606	27,59859	28,38135	954,3016	954,6443	955,366	953,8842
03/04/2016 11:00	9,839514	9,78341	28,64253	26,8144	953,9114	954,1316	955,0436	953,1799
03/04/2016 12:00	12,19318	10,85791	35,08683	31,40414	953,3424	953,3583	954,1553	952,4484
03/04/2016 13:00	9,44777	10,73631	29,73793	33,62479	951,5657	952,4821	953,3424	951,4844
03/04/2016 14:00	11,20255	13,3435	38,55515	32,49731	952,1759	951,895	952,5395	951,153
03/04/2016 15:00	8,662059	6,288469	71,98947	59,58811	951,8795	951,8767	952,4484	951,2292
03/04/2016 16:00	10,08281	11,39641	38,64382	56,5698	951,8007	951,9643	952,6954	951,2292
03/04/2016 17:00	6,953669	10,17026	24,86661	31,54333	952,9266	952,5859	953,6583	951,5557
03/04/2016 18:00	5,868988	3,400048	19,69623	18,32563	954,3777	953,568	954,6195	952,6827

TOA5	MATERIAL PARTICULADO				PRESION			
	PM2.5 1 hora	PM2.5 24 horas	PM10 1 hora	PM10 24 horas	CR1000	57625	CR1000.Std. 26	CPU:emap_grt_rev3_En
TIMESTAMP	TeomA_1h_conc	TeomA_24h_conc	Dichot_1h_conc	Dichot_24h_conc	BP_mbar	BP_mbar	BP_mbar_Max	BP_mbar_Min
TS	Avg	Avg	Avg	Avg	Smp	Avg	Max	Min
03/04/2016 19:00	7,516572	7,477668	20,92121	20,73346	954,4542	954,4575	955,2677	953,6466
03/04/2016 20:00	8,036452	7,256634	21,94258	21,49389	955,3279	954,8157	955,4811	954,1288
03/04/2016 21:00	8,400018	8,451465	21,69913	20,41233	955,1146	955,3323	956,0772	954,5166
03/04/2016 22:00	9,68778	9,255108	26,98587	26,8188	955,4213	955,2693	955,8966	954,6035
03/04/2016 23:00	9,107122	10,64346	25,77985	26,29869	954,3603	954,6521	955,5782	953,7826
04/04/2016 00:00	10,20183	7,226715	30,1918	26,36904	953,6317	954,2436	954,9338	953,4689
04/04/2016 01:00	15,47274	14,65618	38,4269	36,25991	953,7944	953,7954	954,6083	952,9806
04/04/2016 02:00	12,35332	14,71188	30,23269	35,55349	953,3875	953,198	954,0386	952,3295
04/04/2016 03:00	14,73238	8,696145	24,80187	21,89425	952,8896	952,7356	953,4689	951,9938
04/04/2016 04:00	20,74707	22,82315	29,54943	31,26101	952,6458	952,4654	953,1343	951,8317
04/04/2016 05:00	18,88414	18,79634	29,94745	29,08654	953,2971	952,5872	953,2971	951,8317
04/04/2016 06:00	23,44079	22,49879	39,62427	35,37392	953,6227	953,0576	953,8669	952,3202
04/04/2016 07:00	36,10021	23,4328	64,61869	44,856	954,6978	953,8133	954,7822	952,89
04/04/2016 08:00	35,0757	42,8615	86,42049	86,6699	954,7811	954,7601	955,761	953,821
04/04/2016 09:00	22,9723	29,07676	71,57429	82,18669	954,8625	955,4275	956,1001	954,7803
04/04/2016 10:00	15,01861	15,63304	44,62644	48,58706	955,6099	955,3832	956,0164	954,7242
04/04/2016 11:00	11,51541	13,73429	40,82067	46,55764	954,3479	954,7605	955,8538	953,5398
04/04/2016 12:00	8,374517	9,901081	33,03688	35,11782	953,6676	953,6267	954,5808	952,7736
04/04/2016 13:00	11,4562	8,196717	43,12185	36,15447	953,3425	953,0977	953,9114	952,3672
04/04/2016 14:00	11,3775	12,7191	42,29985	44,50645	952,6923	952,7139	953,5051	951,8796
04/04/2016 15:00	7,801947	8,833221	41,68709	40,24321	951,1442	952,0051	953,0175	951,0669
04/04/2016 16:00	9,03664	10,52023	56,7218	52,59334	952,2112	952,0037	952,9361	951,0663
04/04/2016 17:00	11,7872	9,768553	53,10315	53,04678	952,7641	952,9223	953,7397	951,9673
04/04/2016 18:00	9,633009	9,151959	37,25099	46,17212	953,1754	953,3098	953,9888	952,6146
04/04/2016 19:00	10,33176	11,58056	32,32369	32,53458	953,9661	953,9796	954,861	953,0254
04/04/2016 20:00	7,961252	8,846053	27,23541	31,52953	954,6983	954,3422	955,1051	953,6406
04/04/2016 21:00	4,240232	6,249385	19,23272	21,224	954,1859	954,7341	955,4869	953,8033
04/04/2016 22:00	6,018178	3,625719	22,5324	21,05865	955,6871	955,113	955,9144	954,1854
04/04/2016 23:00	7,786644	9,659824	22,50825	25,51082	954,771	955,1126	955,8717	954,12
05/04/2016 00:00	10,34285	7,109579	26,16417	21,19791	953,4689	954,228	955,178	953,3062
05/04/2016 01:00	15,9032	13,40549	33,22716	30,44165	952,1667	953,2896	954,12	952,1667
05/04/2016 02:00	13,51674	15,07234	32,95095	33,70387	952,1667	952,2841	953,2247	951,5157
05/04/2016 03:00	11,3171	12,37568	31,97148	31,96237	952,1667	951,8014	952,5737	951,1902
05/04/2016 04:00	13,33098	11,41497	34,58738	33,1717	951,6409	951,6385	952,3295	950,9044
05/04/2016 05:00	14,97017	14,7691	34,71329	34,6623	951,506	951,2588	951,8304	950,6678
05/04/2016 06:00	15,22908	15,61755	39,19802	38,12868	951,6685	951,4361	952,1554	950,7733
05/04/2016 07:00	15,96883	14,71899	36,90926	36,60083	951,8566	951,704	952,422	951,0173

TOA5	TEMPERATURA DEL AIRE				HUMEDAD			Dirección del viento	VELOCIDAD DEL VIENTO		
TIMESTAMP	AirTC	AirTC_Avg	AirTC_Max	AirTC_Min	RH	RH_Max	RH_Min	WindDir	WS_ms_Avg	WS_ms_Max	WS_ms_Min
TS	Deg C	Deg C	Deg C	Deg C	%	%	%	degrees	m/s	m/s	m/s
	Smp	Avg	Max	Min	Smp	Max	Min	Smp	Avg	Max	Min
28/03/2016 13:00	25,65	NAN	NAN	NAN	72,86	NAN	NAN	228	2,703	7,19	0,16
28/03/2016 14:00	26,53	25,73	26,63	24,73	46,85	98,5	46,85	237	2,924	6,59	0,29
28/03/2016 15:00	25,14	25,21	26,69	24,19	52	54,71	46,68	258	3,285	6,52	0,19
28/03/2016 16:00	23,41	23,94	25,31	22,67	57,28	59,69	51,32	217	3,207	6,8	0,37
28/03/2016 17:00	22,42	22,94	23,89	21,94	60,96	62,58	55,53	247	2,356	5,29	0,09
28/03/2016 18:00	21,49	22,02	23,09	21,38	64,37	64,74	58,66	217	1,82	4,07	0,02
28/03/2016 19:00	20,8	21,14	21,66	20,69	67,14	68,56	63,79	234	1,664	3,23	0,17
28/03/2016 20:00	20,49	20,58	20,86	20,36	68,15	70,46	66,66	237	1,215	2,82	0,03
28/03/2016 21:00	19,96	20,14	20,49	19,82	70,23	70,5	68,05	239	1,206	2,77	0,16
28/03/2016 22:00	19,83	19,73	19,92	19,62	70,79	72	70,09	321	0,584	1,76	0,01
28/03/2016 23:00	19,94	19,95	20,07	19,77	70,38	71,19	69,8	36	0,557	1,35	0,01
29/03/2016 00:00	19,8	19,82	19,94	19,7	69,06	74,89	68,68	148	0,492	1,34	0,02
29/03/2016 01:00	19,56	19,62	19,9	19,39	68,35	70,45	68,07	80	0,665	1,67	0
29/03/2016 02:00	18,58	19,22	19,6	18,55	73,67	73,74	67,73	286	0,564	1,44	0,03
29/03/2016 03:00	18,7	18,48	18,77	18,28	69,83	75,14	69,72	75	0,401	1,44	0,01
29/03/2016 04:00	18,67	18,69	18,84	18,56	70,13	71,49	69,39	80	0,87	2,13	0,01
29/03/2016 05:00	18,33	18,51	18,7	18,29	69,93	71,25	69,49	220	0,678	1,77	0,03
29/03/2016 06:00	18,19	18,02	18,33	17,82	72,17	74,07	69,93	48	0,525	1,12	0,06
29/03/2016 07:00	19,64	18,46	19,68	18,02	67,82	76,88	67,75	63	1,362	3,13	0,12
29/03/2016 08:00	21,26	21,02	21,74	19,61	65,37	83,9	63,61	197	0,972	2,69	0,01
29/03/2016 09:00	23,03	22,32	23,33	21,26	61,09	67,46	59,71	158	1,373	3,08	0,09
29/03/2016 10:00	23,95	23,84	24,9	22,92	61,01	62,75	55,6	209	1,507	4,34	0,02
29/03/2016 11:00	25,61	25,24	26,63	23,85	52,4	61,85	50,91	217	1,879	4,68	0,02
29/03/2016 12:00	26,59	26,46	27,98	25,17	53,69	92,1	39,4	248	2,47	5,19	0,01
29/03/2016 13:00	26,35	26,84	27,61	25,98	48,88	67,54	44,14	209	3,164	7,06	0,67
29/03/2016 14:00	27,03	26,48	27,24	25,81	51,29	58,47	43,63	221	3,208	7,26	0,46
29/03/2016 15:00	25,94	26,34	27,33	25,4	52,8	66,08	47,18	217	3,109	6,75	0,27
29/03/2016 16:00	25,78	25,69	26,72	24,59	52,34	71,5	47,45	205	2,919	6,41	0,12
29/03/2016 17:00	23,92	24,65	25,85	23,71	55,49	76,92	47,63	213	2,8	5,44	0,13
29/03/2016 18:00	21,72	22,73	24,13	21,66	62,4	67,21	54,51	223	2,265	4,92	0,19
29/03/2016 19:00	21,41	21,67	21,93	21,3	64,19	77,4	59,32	328	1,207	2,72	0,05
29/03/2016 20:00	21,54	21,49	21,64	21,27	62,83	68,63	61,75	281	0,758	1,66	0,02
29/03/2016 21:00	21,47	21,51	21,61	21,41	63,75	70,9	61,81	313	0,693	1,48	0,04
29/03/2016 22:00	21,34	21,44	21,58	21,27	65,37	97,2	60,97	332	0,85	1,67	0,17
29/03/2016 23:00	21,11	21,26	21,44	21,04	71,86	100	58,05	47	0,534	1,82	0,01
30/03/2016 00:00	20,81	20,91	21,18	20,6	77,11	100	24,33	29	1,059	2,42	0,06
30/03/2016 01:00	20,5	20,73	20,94	20,4	81,9	97,8	75,89	47	1,411	2,75	0,33
30/03/2016 02:00	20,1	20,46	20,74	20,06	96,8	100	79,86	54	1,499	2,93	0,11
30/03/2016 03:00	19,93	20,12	20,37	19,9	69,83	100	68,44	60	1,632	3,45	0,48
30/03/2016 04:00	19,87	19,67	20,07	19,36	68,01	79,81	66,89	50	1,735	3,92	0,36
30/03/2016 05:00	19,49	19,69	19,94	19,46	85,7	90,7	66,51	294	0,819	2,57	0,02
30/03/2016 06:00	18,99	19,21	19,53	18,99	77,57	96,4	70,45	351	0,501	1,15	0,03

TOA5	TEMPERATURA DEL AIRE				HUMEDAD			Dirección del viento	VELOCIDAD DEL VIENTO		
TIMESTAMP	AirTC	AirTC_Avg	AirTC_Max	AirTC_Min	RH	RH_Max	RH_Min	WindDir	WS_ms_Avg	WS_ms_Max	WS_ms_Min
TS	Deg C	Deg C	Deg C	Deg C	%	%	%	degrees	m/s	m/s	m/s
	Smp	Avg	Max	Min	Smp	Max	Min	Smp	Avg	Max	Min
30/03/2016 07:00	20,48	19,55	20,61	18,92	66,31	84,5	65,56	67	1,035	2,13	0,25
30/03/2016 08:00	23,46	22,23	23,86	20,44	62	72,01	56,9	239	1,154	2,87	0,03
30/03/2016 09:00	24,24	23,86	24,48	23,35	58,55	70,79	55,11	199	1,862	3,92	0,18
30/03/2016 10:00	24,95	24,25	25,32	23,53	58,44	64,08	55,88	295	2,484	4,89	0,19
30/03/2016 11:00	25,54	25,27	26,32	24,4	59,01	64,09	55,08	174	2,026	4,99	0,1
30/03/2016 12:00	26,19	26,07	27,17	25,14	57,72	63,65	53,56	323	2,322	5,54	0,23
30/03/2016 13:00	27	26,81	27,84	25,98	54,67	59,65	51,49	243	2,669	7,06	0,1
30/03/2016 14:00	27,16	27,03	28,07	26,28	54,49	60,63	49,52	240	3	6,05	0,24
30/03/2016 15:00	25	26,02	27,7	25	55,85	59,81	50,57	227	3,295	7,02	0,35
30/03/2016 16:00	24,36	24,59	26,15	23,51	56,4	65,27	52,57	237	3,236	6,74	0,29
30/03/2016 17:00	22,25	23,48	24,6	22,18	62,99	69,62	53,83	216	2,666	5,48	0,22
30/03/2016 18:00	21,52	21,85	22,58	21,34	67,11	74,57	60,18	259	2,079	4,98	0,16
30/03/2016 19:00	20,93	21,13	21,53	20,8	67,2	73,41	64,61	274	1,297	3,32	0,12
30/03/2016 20:00	20,36	20,69	21,14	20,32	67,75	71,44	65,71	272	1,006	2,11	0,1
30/03/2016 21:00	19,99	20,21	20,53	19,92	70,16	75,14	66,06	254	0,866	1,89	0,09
30/03/2016 22:00	18,75	19,45	20,03	18,68	82,4	83,6	68,98	241	0,938	2,98	0,05
30/03/2016 23:00	17,12	17,7	18,78	17,09	87,9	90,9	81,7	229	1,797	3,4	0,17
31/03/2016 00:00	16,86	16,93	17,19	16,66	99,4	100	87	263	1,085	2,49	0,01
31/03/2016 01:00	17,37	17,06	17,51	16,69	87,2	100	86,7	51	0,798	1,93	0,02
31/03/2016 02:00	17,24	17,44	17,78	17,11	90,7	93,9	83,8	203	0,839	2,77	0,02
31/03/2016 03:00	17,72	17,44	17,78	17,14	82,9	93	82,2	199	0,427	1,42	0,02
31/03/2016 04:00	17,68	17,5	17,78	17,17	79,49	88,2	78,04	47	0,703	2,28	0,03
31/03/2016 05:00	17,78	17,74	17,92	17,51	76,81	91,5	75,15	65	1,549	3,74	0,13
31/03/2016 06:00	18,26	17,99	18,29	17,75	74,81	87,3	73,52	212	0,72	2,18	0,06
31/03/2016 07:00	20,32	18,78	20,42	18,12	70,73	81,5	69,04	55	1,017	3,15	0,04
31/03/2016 08:00	20,08	20,37	21,29	19,93	71,44	82,3	66,11	242	1,668	4	0,01
31/03/2016 09:00	20,91	20,44	21,52	19,9	66,6	86,1	65,22	194	1,977	4,46	0,03
31/03/2016 10:00	23,62	22,82	23,97	20,91	61,83	79,04	56,08	38	0,879	2,58	0,01
31/03/2016 11:00	25,34	24,51	25,88	23,65	68,76	74,55	62,36	177	1,631	3,79	0,05
31/03/2016 12:00	26,83	26,13	27,37	24,83	64,46	71,64	62,9	215	1,85	4,51	0,03
31/03/2016 13:00	27,06	27,16	28,18	26,12	58,39	72,88	53,48	200	2,584	6,28	0,28
31/03/2016 14:00	25,07	26,27	27,77	24,66	71,1	83,1	56,02	230	3,786	7,51	0,11
31/03/2016 15:00	24,05	24,94	26,02	23,95	64,02	79,09	59,85	183	3,36	6,75	0,28
31/03/2016 16:00	24,26	24,45	25,51	23,61	58,8	70,56	56,33	203	2,479	5,32	0,22
31/03/2016 17:00	23,23	23,4	24,43	22,58	67,06	72,33	56,94	223	2,555	5,92	0,04
31/03/2016 18:00	20,78	21,68	23,19	20,71	75,48	77,85	62,45	222	2,413	5,21	0,4
31/03/2016 19:00	19,98	20,43	20,98	19,78	79,98	83,5	72,69	253	1,646	4,36	0,12
31/03/2016 20:00	19,52	19,77	20,05	19,48	86,2	88,7	77,89	29	1,032	2,63	0,08
31/03/2016 21:00	19,53	19,6	19,73	19,43	80,5	94,3	76	241	0,684	2,2	0,02
31/03/2016 22:00	18,99	19,22	19,56	18,95	82	88,1	77,4	283	0,902	2,57	0,05
31/03/2016 23:00	18,71	18,83	19,09	18,58	83,6	100	79,57	47	0,598	1,53	0,02
01/04/2016 00:00	18,48	18,53	18,71	18,34	88,9	99,6	77,33	290	0,787	1,85	0,07

TOA5	TEMPERATURA DEL AIRE				HUMEDAD			Dirección del viento	VELOCIDAD DEL VIENTO		
TIMESTAMP	AirTC	AirTC_Avg	AirTC_Max	AirTC_Min	RH	RH_Max	RH_Min	WindDir	WS_ms_Avg	WS_ms_Max	WS_ms_Min
TS	Deg C	Deg C	Deg C	Deg C	%	%	%	degrees	m/s	m/s	m/s
	Smp	Avg	Max	Min	Smp	Max	Min	Smp	Avg	Max	Min
01/04/2016 01:00	18,32	18,4	18,55	18,28	100	100	77,78	57	0,559	1,25	0,05
01/04/2016 02:00	18,33	18,39	18,53	18,26	99	100	0,39	72	0,8	1,81	0,03
01/04/2016 03:00	17,85	18,17	18,4	17,82	79,77	100	0,39	63	1,118	2,87	0,07
01/04/2016 04:00	17,78	17,94	18,09	17,78	74,81	100	72,1	58	1,469	2,77	0,08
01/04/2016 05:00	17,51	17,61	17,85	17,24	73,02	89,3	71,46	62	1,653	2,98	0,37
01/04/2016 06:00	17,31	17,45	17,68	17,28	72,2	86	71,39	57	1,747	3,33	0,74
01/04/2016 07:00	19,61	18,19	19,65	17,34	74,64	83,1	68,91	67	1,623	2,74	0,12
01/04/2016 08:00	21,78	20,92	22,08	19,61	0,39	100	0,39	160	1,073	2,75	0,08
01/04/2016 09:00	23,16	22,48	23,43	21,59	0,39	0,762	0,39	209	0,867	2,33	0,04
01/04/2016 10:00	24,26	23,5	24,48	22,48	0,389	0,83	0,356	158	1,497	3,43	0,08
01/04/2016 11:00	25,65	25,05	26,02	24,22	0,389	0,796	0,389	222	1,59	5,04	0,08
01/04/2016 12:00	27,73	26,75	27,9	25,65	0,389	100	0,389	239	1,966	5,19	0,1
01/04/2016 13:00	27,42	27,53	28,58	26,72	0,389	0,762	0,389	196	2,526	5,35	0,06
01/04/2016 14:00	26,41	27,07	28,74	25,57	0,389	0,762	0,389	227	3,987	8,24	0,46
01/04/2016 15:00	26,52	26,15	26,79	25,47	0,626	0,762	0,389	333	2,847	7,77	0,23
01/04/2016 16:00	24,73	25,79	26,79	24,56	0,389	0,762	0,389	209	3,162	6,31	0,15
01/04/2016 17:00	22,92	23,8	25,31	22,62	0,39	0,762	0,389	227	3,356	6,13	0,61
01/04/2016 18:00	21,59	22,19	23,13	21,42	0,39	0,762	0,39	219	2,35	4,49	0,41
01/04/2016 19:00	21,03	21,3	21,8	20,86	0,39	0,796	0,39	200	1,888	4,21	0,31
01/04/2016 20:00	20,66	20,89	21,2	20,63	0,39	0,763	0,39	238	1,313	2,76	0,05
01/04/2016 21:00	20,26	20,51	20,69	20,22	0,39	0,797	0,39	351	0,816	2	0,08
01/04/2016 22:00	20,26	20,3	20,43	20,16	0,39	0,797	0,39	299	0,589	1,79	0,02
01/04/2016 23:00	20,14	20,2	20,37	20,04	0,39	0,763	0,39	261	0,492	1,36	0,02
02/04/2016 00:00	19,9	20,07	20,27	19,8	0,39	0,831	0,39	38	0,504	1,36	0,02
02/04/2016 01:00	19,66	19,79	20	19,6	0,39	0,797	0,39	237	0,535	1,56	0,01
02/04/2016 02:00	18,99	19,37	19,73	18,99	0,39	0,763	0,39	277	0,847	2,36	0,03
02/04/2016 03:00	18,14	18,35	18,99	18,04	0,39	0,831	0,356	52	0,541	2,29	0,02
02/04/2016 04:00	18,46	18,38	18,53	18,14	0,39	0,797	0,39	56	0,434	1,62	0,03
02/04/2016 05:00	18,02	18,31	18,53	17,95	0,39	0,763	0,356	64	0,975	2,83	0,05
02/04/2016 10:00	24,07	23,86	25,29	22,79	0,39	0,796	0,39	221	2,036	4,7	0,15
02/04/2016 11:00	25	24,77	25,71	23,86	0,389	0,762	0,356	256	2,501	5,27	0,21
02/04/2016 12:00	24,93	25,05	25,95	24,12	0,389	0,762	0,389	209	2,675	6,43	0,18
02/04/2016 13:00	25,95	25,62	26,66	24,7	0,389	0,796	0,389	225	2,638	5,29	0,1
02/04/2016 14:00	25,17	25,84	26,83	25,07	0,389	0,762	0,389	224	3,394	7,06	0,19
02/04/2016 15:00	24,19	24,82	26,09	23,88	0,389	0,796	0,389	217	3,638	7,04	0,74
02/04/2016 16:00	23,82	23,99	24,76	23,38	0,389	0,762	0,389	208	3,022	6,18	0,18
02/04/2016 17:00	22,08	23,28	24,06	21,97	0,39	0,762	0,389	247	2,645	5,43	0,25
02/04/2016 18:00	20,84	21,68	22,45	20,71	0,39	0,762	0,39	239	2,363	4,77	0,27
02/04/2016 19:00	19,44	20,11	20,98	19,44	0,39	0,797	0,39	214	2,021	3,92	0,04
02/04/2016 20:00	19,45	19,3	19,61	18,97	0,39	0,797	0,39	21	0,874	2,74	0,03
02/04/2016 21:00	20,07	19,81	20,14	19,38	0,593	0,797	0,39	88	0,907	2,42	0,06

TOA5	TEMPERATURA DEL AIRE				HUMEDAD			Dirección del viento	VELOCIDAD DEL VIENTO		
	AirTC	AirTC_Avg	AirTC_Max	AirTC_Min	RH	RH_Max	RH_Min		WS_ms_ Avg	WS_ms_ Max	WS_ms_ Min
TIMESTAMP	Deg C	Deg C	Deg C	Deg C	%	%	%	degrees	m/s	m/s	m/s
TS	Smp	Avg	Max	Min	Smp	Max	Min	Smp	Avg	Max	Min
02/04/2016 22:00	20,03	20,04	20,2	19,86	0,39	0,831	0,39	65	1,634	3,52	0,06
02/04/2016 23:00	20,06	20,03	20,16	19,89	0,39	0,797	0,356	296	1,294	3	0,23
03/04/2016 00:00	20,03	20,07	20,2	19,93	0,39	0,831	0,39	137	0,86	2,27	0,01
03/04/2016 01:00	19,7	19,79	20,07	19,63	0,39	0,797	0,356	36	0,77	2,55	0,01
03/04/2016 02:00	18,65	19,2	19,7	18,55	0,39	0,763	0,39	226	0,64	2,7	0
03/04/2016 03:00	18,31	18,3	18,68	17,97	0,39	0,797	0,39	152	0,752	1,63	0,03
03/04/2016 04:00	18,05	18,26	18,46	18,05	0,492	0,831	0,39	266	0,544	1,38	0,03
03/04/2016 05:00	18,06	17,97	18,16	17,82	0,39	0,831	0,39	57	0,525	2,46	0,02
03/04/2016 06:00	17,99	17,98	18,09	17,85	0,39	0,797	0,39	54	1,385	2,63	0,47
03/04/2016 07:00	19,63	18,66	19,63	17,99	0,39	0,797	0,39	154	1,157	2,49	0,08
03/04/2016 08:00	20,66	20,02	20,97	19,26	0,39	0,763	0,39	175	1,308	2,59	0,04
03/04/2016 09:00	22,35	21,7	22,42	20,66	0,39	0,763	0,39	16	0,88	2,3	0,03
03/04/2016 10:00	24,27	23,39	24,84	22,28	0,389	0,796	0,389	171	1,279	3,79	0,02
03/04/2016 11:00	25,54	25,02	26,15	23,73	0,389	0,796	0,389	184	1,737	4,01	0,07
03/04/2016 12:00	26,22	25,97	26,73	24,9	0,389	0,796	0,389	140	2,278	5,62	0,2
03/04/2016 13:00	26,62	26,72	27,9	25,88	0,593	0,796	0,356	194	2,396	6,4	0,1
03/04/2016 14:00	25,13	26,33	27,9	25,06	0,457	0,796	0,389	243	3,539	7,25	0,25
03/04/2016 15:00	24,6	25,12	26,52	24,16	0,423	0,796	0,389	233	3,318	6,56	0,14
03/04/2016 16:00	23,75	24,39	25,41	23,68	0,389	0,796	0,356	215	3,22	6,48	0,15
03/04/2016 17:00	23,03	23,54	24,12	22,82	0,39	0,762	0,389	190	2,608	5,42	0,15
03/04/2016 18:00	21,11	22,11	23,19	20,94	0,39	0,762	0,39	216	2,645	5,12	0,45
03/04/2016 19:00	19,98	20,5	21,22	19,92	0,39	0,797	0,39	237	1,902	4,11	0,14
03/04/2016 20:00	19,65	19,66	19,98	19,44	0,39	0,763	0,39	254	0,719	2,52	0,02
03/04/2016 21:00	19,49	19,54	19,72	19,32	0,39	0,797	0,39	240	0,756	1,95	0,03
03/04/2016 22:00	20,07	19,88	20,17	19,42	0,39	0,797	0,356	132	0,613	1,75	0,04
03/04/2016 23:00	19,6	19,88	20,14	19,53	0,39	0,797	0,39	224	0,703	1,82	0,01
04/04/2016 00:00	19,73	19,66	19,8	19,53	0,39	0,797	0,39	89	0,486	1,27	0,04
04/04/2016 01:00	19,63	19,61	19,87	19,33	0,39	0,797	0,39	85	1,127	3,17	0,08
04/04/2016 02:00	17,36	18,01	19,7	17,32	0,627	0,763	0,39	248	0,985	2,16	0,06
04/04/2016 03:00	17,34	17,06	17,43	16,8	100	100	0,39	133	0,836	2,64	0
04/04/2016 04:00	17,65	17,54	17,72	17,31	0,39	100	0,39	167	0,755	1,8	0,03
04/04/2016 05:00	17,65	17,72	17,89	17,51	0,39	0,831	0,39	68	0,813	1,98	0,02
04/04/2016 06:00	17,89	17,75	17,95	17,62	0,39	0,797	0,39	105	1,306	2,36	0,38
04/04/2016 07:00	18,62	18,28	18,73	17,85	0,39	0,797	0,39	208	0,688	2,17	0,01
04/04/2016 08:00	20,08	19,21	20,08	18,45	0,39	0,797	0,39	208	1,456	2,9	0,1
04/04/2016 09:00	21,54	20,79	22,27	19,64	0,39	0,797	0,39	220	1,206	3,18	0
04/04/2016 10:00	22,89	22,17	23,26	21	0,39	0,762	0,39	219	1,786	4,43	0,14
04/04/2016 11:00	24,57	23,61	24,74	22,65	0,389	0,796	0,389	213	1,936	4,71	0,07
04/04/2016 12:00	25,51	25,14	26,15	24,16	0,389	0,796	0,389	226	2,548	6,58	0,05
04/04/2016 13:00	24,53	25,18	26,02	24,53	0,389	0,796	0,389	222	2,672	6,12	0,11
04/04/2016 14:00	24,8	25,21	26,05	24,46	0,694	0,796	0,356	206	2,571	5,49	0,08
04/04/2016 15:00	24,19	25,01	25,98	23,85	0,389	0,796	0,389	218	3	6,66	0,15

TOA5	TEMPERATURA DEL AIRE				HUMEDAD			Dirección del viento	VELOCIDAD DEL VIENTO		
TIMESTAMP	AirTC	AirTC_Avg	AirTC_Max	AirTC_Min	RH	RH_Max	RH_Min	WindDir	WS_ms_Avg	WS_ms_Max	WS_ms_Min
TS	Deg C	Deg C	Deg C	Deg C	%	%	%	degrees	m/s	m/s	m/s
	Smp	Avg	Max	Min	Smp	Max	Min	Smp	Avg	Max	Min
04/04/2016 16:00	22,03	23,48	25,24	21,97	0,39	0,796	0,389	243	3,424	7,32	0,4
04/04/2016 17:00	21,5	22,06	22,72	21,2	0,39	0,762	0,39	313	2,447	6,13	0,11
04/04/2016 18:00	20,61	20,97	21,67	20,44	0,39	0,796	0,39	199	2,416	4,95	0,57
04/04/2016 19:00	19,71	20,24	20,83	19,68	0,39	0,763	0,39	300	1,875	4,19	0,05
04/04/2016 20:00	19,92	19,79	20,05	19,44	0,39	0,797	0,39	142	0,607	2,23	0,01
04/04/2016 21:00	20,16	20,17	20,33	19,92	0,39	0,763	0,39	126	0,896	2,41	0,05
04/04/2016 22:00	18,3	19,25	20,3	18,06	0,39	0,763	0,356	222	1,499	4,04	0,05
04/04/2016 23:00	18,38	18,24	18,44	18	0,39	0,763	0,356	58	0,548	1,51	0,03
05/04/2016 00:00	19,39	18,87	19,43	18,38	0,39	0,831	0,39	138	0,521	1,92	0,03
05/04/2016 01:00	19,16	19,05	19,46	18,71	0,39	0,763	0,39	52	0,567	1,48	0,04
05/04/2016 02:00	19,22	19,47	19,9	19,09	0,39	0,797	0,39	247	0,762	2,28	0,02
05/04/2016 03:00	18,34	18,72	19,29	18,24	0,39	0,797	0,39	251	0,747	2,63	0,01
05/04/2016 04:00	18,22	18,32	18,45	18,17	0,56	0,763	0,39	127	0,338	0,93	0,01
05/04/2016 05:00	17,78	18,22	18,5	17,78	0,39	0,797	0,39	227	0,579	1,66	0,01
05/04/2016 06:00	17,92	17,78	18,02	17,55	0,39	0,763	0,39	56	0,652	1,39	0,09
05/04/2016 07:00	19,94	18,69	20,01	17,89	0,39	0,797	0,39	68	1,226	3,51	0,05

Fuente: Estación de monitoreo de calidad de aire (propiedad del Gobierno Regional de Tacna)

## ANEXO D

### Parámetros de Lennard-Jones y otras propiedades

Sustancia	$M$	$\sigma$	$\varepsilon / \kappa$	$T_c$	$P_c$	$\tilde{V}_c$	$\mu$
	(g/mol)	(Å)	(K)	(K)	(bar)	(cm <sup>3</sup> /mol)	(debye)
H <sub>2</sub>	2.016	2.827	59.7	33.2	13.0	65.1	0.0
He	4.003	2.551	10.22	5.19	2.27	57.4	0.0
Ne	20.183	2.820	32.8	44.4	27.6	41.6	0.0
Ar	39.948	3.542	93.3	150.8	48.7	74.9	0.0
Kr	83.800	3.655	178.9	209.4	55.0	91.2	0.0
Xe	131.300	4.047	231.0	289.7	58.4	118.4	0.0
Aire	28.964	3.711	78.6	132.4	37.0	86.7	0.0
N <sub>2</sub>	28.013	3.798	71.4	126.2	33.9	89.8	0.0
O <sub>2</sub>	31.999	3.467	106.7	154.6	50.4	73.4	0.0
H <sub>2</sub> O	18.015	2.649	356	647.3	221.2	57.1	1.8
CO	28.010	3.690	91.7	132.9	35.0	93.2	0.1
CO <sub>2</sub>	44.010	3.941	195.2	304.1	73.8	93.9	0.0
COS	60.070	4.130	336.0	378.8	63.5	136.3	0.7
CS <sub>2</sub>	76.131	4.483	467.0	552	79.0	160	0.0
C <sub>2</sub> N <sub>2</sub>	52.035	4.361	348.6	400	59.8	-	0.2
NH <sub>3</sub>	17.031	2.900	558.3	405.5	113.5	72.5	1.5
NO	30.006	3.492	116.7	180	64.8	57.7	0.2
N <sub>2</sub> O	44.013	3.828	232.4	309.6	72.4	97.4	0.2
SO <sub>2</sub>	64.063	4.112	335.4	430.8	78.8	122.2	1.6
F <sub>2</sub>	37.997	3.357	112.6	144.3	52.2	66.3	0.0
Cl <sub>2</sub>	70.906	4.217	316.0	416.9	79.8	123.8	0.0
Br <sub>2</sub>	159.808	4.296	507.9	588	103	127.2	0.2

Sustancia	$M$	$\sigma$	$\epsilon / \kappa$	$T_c$	$P_c$	$V_c$	$\mu$
	(g/mol)	(Å)	(K)	(K)	(bar)	(cm <sup>3</sup> /mol)	(debye)
I <sub>2</sub>	253.82	5.160	474.2	819	-	-	1.3
HF	20.006	3.148	330.0	461	64.8	69.2	1.9
HCl	36.461	3.339	344.7	324.7	83.1	80.9	1.1
HBr	80.912	3.353	449.0	363.2	85.5	-	0.8
HI	127.912	4.211	288.7	424.0	83.1	-	0.5
HCN	27.026	3.630	569.1	456.7	53.9	138.8	3.0
H <sub>2</sub> S	34.080	3.623	301.1	373.2	89.4	98.6	0.9
SF <sub>6</sub>	146.054	5.128	222.1	318.7	37.6	198.8	0.0
UF <sub>6</sub>	352.018	5.967	236.8	505.8	46.6	250.0	0.0
Hg	200.61	2.969	750.0	1765	1510	42.7	0.0
CH <sub>4</sub>	16.043	3.758	148.6	190.4	46.0	99.2	0.0
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	30.070	4.443	215.7	305.4	48.8	148.3	0.0
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	28.054	4.163	224.7	282.4	50.4	130.4	0.0
C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	26.038	4.033	231.8	308.3	61.4	112.7	0.0
C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	44.094	5.118	237.1	369.8	42.5	203	0.0
CH <sub>3</sub> -CH=CH <sub>2</sub>	42.081	4.678	298.9	364.9	46.0	181	0.4
CH <sub>3</sub> -C≡CH	40.065	4.761	251.8	402.4	56.3	164	0.7
n-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58.124	4.687	531.4	425.2	38.0	255	0.0
iso-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58.124	5.278	330.1	408.2	36.5	263	0.1
n-C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	72.151	5.784	341.1	469.7	33.7	304	0.0
C(CH <sub>3</sub> ) <sub>4</sub>	72.151	6.464	193.4	433.8	32.0	303	0.0
n-C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	86.178	5.949	399.3	507.5	30.1	370	0.0
ciclopropano	42.081	4.807	248.9	397.8	54.9	163	0.0
ciclohexano	84.162	6.182	297.1	553.5	40.7	308	0.3
benceno	78.114	5.349	412.3	562.2	48.9	259	0.0
CH <sub>3</sub> -OH	32.042	3.626	481.8	512.6	80.9	118.0	1.7
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -OH	46.069	4.530	362.6	513.9	61.4	167.1	1.7
CH <sub>3</sub> -CO-CH <sub>3</sub>	58.080	4.600	560.2	508.1	47.0	209	2.9
CH <sub>3</sub> -O-CH <sub>3</sub>	46.069	4.307	395.0	400.0	52.4	178	1.3
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -O-C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	74.123	5.678	313.8	466.7	36.4	280	1.3
CH <sub>3</sub> Cl	50.488	4.182	350.0	416.3	67.0	138.9	1.9
CH <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	84.933	4.898	356.3	510	63	-	1.8
CHCl <sub>3</sub>	119.378	5.389	340.2	536.4	53.7	238.9	1.1
CCl <sub>4</sub>	153.823	5.947	322.7	556.4	45.6	275.9	0.0
CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	120.914	5.116	280.0	385.0	41.4	216.7	0.5
SiH <sub>4</sub>	32.122	4.084	207.6	269.7	48.4	-	0.0
SiF <sub>4</sub>	104.09	4.880	171.9	259.0	37.2	-	0.0

### Integral de colisión (Lennard-Jones)

$T^*$	$\Omega_{\mu}=\Omega_k$	$\Omega_{\sigma}$	$T^*$	$\Omega_{\mu}=\Omega_k$	$\Omega_{\sigma}$	$T^*$	$\Omega_{\mu}=\Omega_k$	$\Omega_{\sigma}$
0.25	3.0353	2.8611	1.65	1.2633	1.1544	4.1	0.9637	0.8801
0.30	2.8458	2.6502	1.70	1.2486	1.1412	4.2	0.9587	0.8753
0.35	2.6791	2.4705	1.75	1.2347	1.1287	4.3	0.9539	0.8708
0.40	2.5316	2.3164	1.80	1.2216	1.1168	4.4	0.9493	0.8664
0.45	2.4003	2.1832	1.85	1.2092	1.1056	4.5	0.9448	0.8622
0.50	2.2831	2.0675	1.90	1.1975	1.0950	4.6	0.9406	0.8581
0.55	2.1781	1.9664	1.95	1.1865	1.0849	4.7	0.9365	0.8541
0.60	2.0839	1.8776	2.00	1.1760	1.0754	4.8	0.9326	0.8503
0.65	1.9991	1.7993	2.1	1.1565	1.0576	4.9	0.9288	0.8467
0.70	1.9226	1.7299	2.2	1.1388	1.0413	5.0	0.9252	0.8431
0.75	1.8535	1.6680	2.3	1.1227	1.0265	6.0	0.8948	0.8128
0.80	1.7909	1.6127	2.4	1.1079	1.0129	7.0	0.8719	0.7895
0.85	1.7341	1.5630	2.5	1.0943	1.0004	8.0	0.8535	0.7707
0.90	1.6825	1.5181	2.6	1.0817	0.9888	9.0	0.8382	0.7551
0.95	1.6354	1.4774	2.7	1.0700	0.9781	10	0.8249	0.7419
1.00	1.5925	1.4405	2.8	1.0591	0.9681	12	0.8026	0.7201
1.05	1.5533	1.4067	2.9	1.0489	0.9588	14	0.7844	0.7026
1.10	1.5173	1.3758	3.0	1.0394	0.9500	16	0.7690	0.6879
1.15	1.4843	1.3474	3.1	1.0304	0.9418	18	0.7556	0.6753
1.20	1.4539	1.3212	3.2	1.0220	0.9341	20	0.7439	0.6643
1.25	1.4259	1.2971	3.3	1.0141	0.9268	25	0.7196	0.6416
1.30	1.4000	1.2746	3.4	1.0066	0.9199	30	0.7003	0.6236
1.35	1.3760	1.2538	3.5	0.9995	0.9133	35	0.6844	0.6087
1.40	1.3538	1.2344	3.6	0.9927	0.9071	40	0.6710	0.5962
1.45	1.3331	1.2163	3.7	0.9864	0.9012	50	0.6491	0.5758
1.50	1.3139	1.1993	3.8	0.9803	0.8956	75	0.6111	0.5405
1.55	1.2959	1.1834	3.9	0.9745	0.8902	100	0.5855	0.5167
1.60	1.2791	1.1685	4.0	0.9690	0.8850	150	0.5512	0.4850

Valores calculados con las correlaciones de Neufeld citadas en Reid *et al.*, 1987.