

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática

**EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES
GENERALIZADAS DE PROBLEMAS DE
CONTORNO EN ECUACIONES
DIFERENCIALES**

TESIS

Presentada por:

Bach. JULIO CESAR HUAYTA CENTENO

Para optar el Título Profesional de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TACNA – PERÚ

2023

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N° 392

En la ciudad de Tacna, en el auditorio de la Facultad de Ciencias, de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann; siendo las 16:00 horas del día lunes 15 de mayo del 2023, estando presente el jurado calificador nominado por Resolución de Facultad N° 10529-2023-FACI-UN/JBG, conformado por los siguientes docentes:

Dr. Luis Andrés Amaya Cedrón Presidente

Dr. Dionicio Milton Chávez Muñoz Secretario


Dr. Luis Cesar Méndez Avalos Miembro

Acto seguido, se dio lectura a la Resolución correspondiente, y del mismo modo se dio lectura al Artículo 22 del Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias.

A continuación, el Presidente del Jurado instó al Bachiller: Julio Cesar Huayta Centeno, a exponer la tesis titulada: EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES GENERALIZADAS DE PROBLEMAS DE CONTORNO EN ECUACIONES DIFERENCIALES.

Siendo las 17 horas con 10 minutos, el tesista concluye su exposición, luego se procedió a la formulación de las preguntas por parte de los miembros del jurado calificador. Terminado este proceso, se invitó a que los miembros del jurado emitan su calificación de acuerdo a reglamento. El promedio de la calificación dio el siguiente resultado: Aprobado por unanimidad, con el calificativo de dieciséis, de acuerdo al Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias.

Siendo las 17 horas con 40 minutos, se dio por concluido el acto de sustentación de la tesis, firmando los señores miembros del jurado calificador, en señal de conformidad.



Dr. Luis Andrés Amaya Cedrón
Presidente



Dr. Dionicio Milton Chávez Muñoz
Secretario



Dr. Luis Cesar Méndez Avalos
Miembro

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Jhony Alfonso Chávez Delgado, en mi condición de asesor acreditado por la Resolución de Facultad R.F. N° 10205-2022-FACI-UN/JBG de la tesis titulada: **“EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES GENERALIZADAS DE PROBLEMAS DE CONTORNO EN ECUACIONES DIFERENCIALES”**, presentado por el Bachiller Julio Cesar Huayta Centeno para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, habiendo cumplido con lo establecido en el reglamento de originalidad y de similitud de trabajos de investigación y producción intelectual, considerando que según la revisión, evaluación y análisis realizado a través del software de similitud textual TURNITIN cuenta con el nivel de similitud cuyo porcentaje es 10% por lo que **CERTIFICO LA SIMILARIDAD** de la tesis, la cual está de acuerdo al nivel **PERMITIDO**, para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio Institucional**.

Se emite el presente certificado con fines de continuar con los trámites respectivos para su obtención del título profesional.



Firma del Asesor

DNI:N°18124030

Nombre y Apellidos del asesor: Jhony Alfonso Chávez Delgado

AGRADECIMIENTOS

A Dios, primeramente, a mi familia y a todos los profesores, quienes con su ayuda me formaron en esta ciencia tan hermosa.

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTO	ii
ÍNDICE GENERAL.....	iii
RESUMEN	vi
ABSTRACT	vii
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
1.1. Antecedentes.....	1
1.2. Definición del problema de investigación.....	3
1.3. Objetivos.....	4
1.4. Justificación	5
CAPÍTULO II: FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	7
2.1. Antecedentes de la investigación	7
2.2. Bases teóricas	9
2.2.1. Espacio vectorial y subespacio vectorial	9
2.2.2. Espacios métricos (E, ρ)	10
2.2.3. Espacios normados	11
2.2.4. Los espacios L_p	15
2.2.5. Teoría de operadores.....	17

2.2.6. Conceptualización de Riesz Frigyes para funcionales en los Espacios de Hilbert David	22
2.2.7. Ecuaciones diferenciales.....	26
2.2.8. Distribuciones $D'(\Omega)$	31
2.2.9. Espacios de Sobolev Serguéi.....	33
CAPÍTULO III: MÉTODO O PROCEDIMIENTO	36
3.1. Enfoque metodológico.....	36
3.1.1. Procedimiento deductivo	36
CAPÍTULO IV: RESULTADOS	38
4.1. Descripción.....	38
4.1.1 Existencia de una representación única de un funcional lineal acotado y coercivo como una aplicación bilineal en espacios de Hilbert David	38
4.1.2. Existencia y unicidad de la solución extendida de problemas de contorno de ecuaciones diferenciales ordinarias.....	41
4.1.3. Existencia y unicidad de la solución extendida de problemas de contorno de una ecuación diferencial parciales elípticas lineal	43
4.1.4 Problema de contorno de la ecuación diferencial parcial elíptica general de segundo orden.....	45

CAPÍTULO V: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS	48
CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES	51
CAPÍTULO VII: RECOMENDACIONES	52
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53

RESUMEN

La finalidad de esta tesis es formalizar el resultado de un problema de contorno en una proximidad abstracta de los espacios de Hilbert David utilizando uno de los recursos más importantes de análisis funcional, el teorema de Lax Peter - Milgram Arthur, que es una extensión de la conceptualización de Riez Frigyes, que garantiza la existencia y unicidad de varios problemas asociados con ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias de sentido común con la solución extendida o generalizada en el espacio funcional. Es decir, en el espacio de distribución, los espacios L^p y el espacio de Sobolev Serguéi. Asimismo, se utilizó el método variacional, que es el más empleado debido a su versatilidad, lo que admitió el análisis y solución extendida de diversos tipos de problemas con valores de contorno para las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales parciales lineales.

Palabras claves: Lax Peter - Milgram Arthur, Espacios de Hilbert David, Espacios de Sobolev Serguéi.

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to formalize the result of a boundary problem in an abstract proximity of Hilbert David spaces using one of the most important resources of functional analysis, the Lax Peter - Milgram Arthur theorem, which is an extension of the Riez Frigyes' conceptualization, which guarantees the existence and uniqueness of several problems associated with common sense partial and ordinary differential equations with the extended or generalized solution in the functional space. That is, in the space of distribution, the spaces L^p and the space of Sobolev Sergei. Likewise, the variational method was used, which is the most used due to its versatility, which allowed the analysis and extended solution of various types of problems with contour values for ordinary differential equations and linear partial differential equations.

Keywords: Lax Peter - Milgram Arthur, Spaces by Hilbert David, Spaces by Sobolev Sergei.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

Una incertidumbre añadida a una ecuación diferencial está bien desarrollada si existe, es única y su solución depende continuamente de los datos en cuestión. Por solución de una ecuación diferencial, se entiende como una función diferenciable continua que satisface la ecuación, dependiendo esta última del tipo de ecuación a procesar. En tal caso, al menos todas las derivadas que se manifiestan en la ecuación existirán y serán continuas, aunque es posible que no existan algunas derivadas de orden superior. Esta idea de solución será lo que se conoce como solución típica de una ecuación diferencial. Para sintetizar estas ecuaciones, coexisten múltiples métodos: separación de variables, series enteras, métodos de transformación, etc. Con los que se puede encontrar una solución típica explícita.

La noción de solución típica es la que se exploró desde un principio en las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, hacia fines del siglo XVIII, estudiada por Jean le Rond D'Alembert, Daniel Bernoulli y Pierre

Simón Laplace. Sin embargo, la oportunidad surgió cuando esa idea cambió.

Determinadas ecuaciones diferenciales parciales se pueden resolver en el sentido típico, pero otras no. En general, se puede ver que hay ecuaciones que no tienen soluciones típicas, aunque estén bien enunciadas si retomamos la opinión de solución, en lo que se llama solución generalizada o extendida. Esta solución implica el concepto de derivada generalizada, que es un concepto más general que la derivada típica. Para esta definición moderna de solución, Serguéi Lvóvich Sobolev y Laurent Moise Schwartz implementaron el famoso espacio de Sobolev Serguéi. Este espacio funcional se basó en el concepto de la derivada generalizada o extendida. Eran funciones con derivadas extendidas también pertenecientes a dicho espacio. Estos espacios se han convertido en un marco original para analizar los resultados de ecuaciones diferenciales en un contexto generalizado o extendido.

Los matemáticos Arthur Norton Milgram y Peter David Lax en 1954 enunciaron primeramente el teorema de Lax Peter - Milgram Arthur con la intención de contribuir a la entonces próspera teoría de las ecuaciones diferenciales. Esta teoría utiliza en el método variacional para probar la existencia y unicidad, en sentido extendido, de varios problemas con valores de contorno que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias y

ecuaciones diferenciales parciales, en particular aquellas con características elípticas.

1.2. Definición del problema de investigación

En la escuela de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, se han sugerido problemas variacionales con el objetivo de establecer resultados de existencia y unicidad en un marco de estudio indeterminado en espacios de Sobolev Serguéi. Es público que el teorema de Arthur Milgram - Peter Lax ha sido, desde su enunciación, un marco conceptual en el campo del análisis funcional y un implemento adjunto teórico sobre la existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales. Según los criterios de los diferentes estudios, este teorema interviene en un contexto de transición en el que interesa manifestar problemas en espacios conceptualizados, reflejando allí sus propiedades, si es posible, simplificando su planteamiento y solución. En todo este ambiente, es común expresar las siguientes dificultades de investigación.

1.2.1. Problema general

¿Es probable determinar la solución de un problema de contorno en un contexto abstracto de espacios de Hilbert y la aplicación a diversos problemas de ecuaciones diferenciales?

1.2.2. Problema específico

a) ¿Es probable determinar la existencia de una imagen única de un funcional lineal acotado y coercivo como una aplicación bilineal sobre espacios de Hilbert?

b) ¿Es probable determinar la existencia y unicidad de la solución extendida de problemas con valores de contorno de una ecuación diferencial ordinaria?

c) ¿Es probable determinar la existencia y unicidad de la solución extendida de problemas con valores de contorno en ecuaciones diferenciales parciales elípticas lineales?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Determinar la solución de un problema de contorno en un contexto abstracto de espacios de Hilbert y la aplicación a diversos problemas de ecuaciones diferenciales.

1.3.2. Objetivos específicos

a) Determinar la existencia de una imagen única de un funcional lineal acotado y coercivo como una aplicación bilineal sobre espacios de Hilbert.

b) Determinar la existencia y unicidad de la solución extendida de problemas con valores de contorno de una ecuación diferencial ordinaria.

c) Determinar la existencia y unicidad de la solución extendida de problemas con valores de contorno en ecuaciones diferenciales parciales elípticas lineales.

1.4. Justificación

Esta teoría establece la existencia y unicidad de la solución de un problema variacional indeterminado y la aplicación de problemas de valores de contorno para ecuaciones diferenciales. Un problema de contorno es una ecuación diferencial, añadida con la naturaleza impuestas a la función desconocida en el límite de su dominio; los resultados del problema de contorno satisfacen las condiciones de contorno dadas. Sin embargo, no siempre es posible obtener la existencia de soluciones típicas con los procedimientos y técnicas habituales (separación de variables, transformadas de Fourier, etc.). Este estudio sistemático se justifica porque el análisis de la existencia y unicidad de los resultados del problema variacional (solución generalizada o extendida) proporciona información cualitativa sobre la solución de la ecuación diferencial, lo que permite, en muchos casos y bajo ciertas condiciones, obtener el resultado deseado. Además, el propósito de esta materia es aplicar su aprendizaje en el futuro

a la existencia y unicidad de la resolución de problemas de contorno, práctica en diversos campos científicos como la ingeniería, la geología, la física y la biología. Así, en el método de elementos finitos, se utiliza para conceptualizar variables desconocidas que aparecen en los prototipos no lineales de reacción-difusión de la invasión del cáncer. Actualmente, el análisis de los problemas de variación continúa siendo un programa de trabajo en el campo de las ecuaciones diferenciales.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1. Antecedentes de la investigación

En 1952, el teorema de Lax Peter - Milgram Arthur, ideado por los matemáticos Peter David Lax y Arthur Norton Milgram, se expuso por primera vez en una disertación de tres días sobre ecuaciones diferenciales parciales celebrada en la ciudad de Nueva York en Harriman's Arden House. Fue divulgado dos años después (debido a una dilación en el anuncio) por prensa de la Universidad de Princeton como un lema, instrumento auxiliar en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales. Por su utilidad acabaron dándole el nombre de Teorema. El teorema de Lax Peter - Milgram Arthur se emplea en el método variacional para formalizar la existencia y la unicidad extendida de varios problemas de contorno que involucran ecuaciones diferenciales parciales, en particular aquellas del tipo elíptico (Lax y Milgram, 1954).

Como resultado de investigaciones preliminares, se han localizado soluciones extendidas para la existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales. Este es el caso de Eboli (2021), quien puso en práctica la exploración formulada como una pregunta de Siméon Denis Poisson en

dominios de las cúspides externas. En este ámbito, por un lado, se analiza la existencia y regularidad de los diferentes problemas de Poisson que surgen al considerar diferentes condiciones de contorno homogéneas, tanto de Carl Neumann como de Gustav Lejeune Dirichlet, y siguiendo el trabajo de Khelif, todas las pruebas de existencia, singularidad y regularidad para los diversos problemas propuestos en su investigación.

De igual manera, tenemos a Guillermo (2019), quien realizó un análisis de la extensión del teorema de Lax Peter - Milgram Arthur y una incertidumbre de la condición de contorno lineal elíptica donde concluye que la utilidad extendida del teorema de Lax Peter - Milgram Arthur es de gran ventaja, mecanismo que asegura la existencia y unicidad de soluciones en problemas de contorno lineal elíptica. Además, aplicó el teorema de la ecuación de calor usando el algoritmo freefem++, luego de obtener la forma bilineal, las restricciones de continuidad y la forma coercitiva para confirmar aún más la existencia y unicidad de la solución.

2.2. Bases teóricas

2.2.1. Espacio vectorial y subespacio vectorial

Tenemos en cuenta las definiciones de espacios vectoriales, así como subespacio vectorial. Algunas fuentes consultadas se citan en la bibliografía, como (Kreyszig, 1978) y (Lages, 1995).

Definición 2.2.1.1 (Espacio vectorial $(E; +; \mathbb{R}; \cdot)$)

Sea el cuaternario $(E; +; \mathbb{R}; \cdot)$, donde E es un conjunto no vacío llamado conjunto de vectores, \mathbb{R} es el conjunto de números reales, también llamados escalares, $+$ es la suma de vectores, llamada operación interna y \cdot es el producto de un vector por un escalar, llamada operación externa. El cuaternario es un espacio vectorial si se cumplen los siguientes diez axiomas.

- 1) $\forall x_1, x_2 \in E: x_1 + x_2 \in E$ (*Ley interna*)
- 2) $\forall x_1, x_2, x_3 \in E: (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$ (*La suma es asociativa*)
- 3) $\forall x_1, x_2 \in E: x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ (*La suma es conmutativa*)
- 4) $\forall x_1 \in E \exists 0 \in E: x_1 + 0 = 0 + x_1 = x_1$ (*Existencia del vector nulo*)
- 5) $\forall x_1 \in E, \exists (-x_1) \in E: x_1 + (-x_1) = (-x_1) + x_1 = 0$ (*Existencia elemento simétrico*)
- 6) $\forall x_1 \in E \wedge \alpha \in \mathbb{R} : \alpha x_1 \in E$ (*Ley externa*)

7) $\forall x_1, x_2 \in E \wedge \alpha \in \mathbb{R}: \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$ (*Distributividad del producto respecto a la suma de vectores*)

8) $\forall x_1 \in E \wedge \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}: x_1(\alpha_1 + \alpha_2) = x_1\alpha_1 + x_1\alpha_2$ (*Distributividad del producto respecto a la suma de escalares*)

9) $\forall x_1 \in E \wedge \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}: \alpha_1(\alpha_2 x_1) = (\alpha_1\alpha_2)x_1$ (*Asociatividad*)

10) $\forall x_1 \in E \exists 1 \in \mathbb{R}: 1x_1 = x_1$ (*Elemento neutro para el producto*)

Definición 2.2.1.2. (Subespacio Vectorial E_1)

Un subconjunto no vacío E_1 de un espacio vectorial se denomina subespacio de E si E_1 es un espacio vectorial con las mismas operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en E .

Proposición 2.2.1.1.

Sea $(E; +; \mathbb{R}; \cdot)$ un espacio vectorial, el conjunto E_1 es subespacio de E si y solo si se cumplen:

- i)** E_1 está incluido en E ,
- ii)** $\forall x_1, x_2 \in E_1: x_1 + x_2 \in E_1$,
- iii)** $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x_1 \in E_1: \alpha x_1 \in E_1$.

2.2.2. Espacios métricos (E, ρ)

Una de las formas más comunes de proporcionar topología a un conjunto es definir la topología en la expresión de distancia del conjunto.

Algunas fuentes consultadas se citan en la bibliografía, como (Kreyszig, 1978) y (Rudin, 1991).

Definición 2.2.2.1. (Distancia $\rho: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$)

Dado un conjunto arbitrario E , una distancia es una aplicación $\rho: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia un número real $\rho(x_1, x_2)$ a cada par (x_1, x_2) en $E \times E$ y que cumple las siguientes condiciones:

- 1) $\rho(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in E$
- 2) $\rho(x_1, x_2) = 0$ si, y sólo si, $x_1 = x_2$ (*separación*)
- 3) $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in E$ (*simetría*)
- 4) $\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, x_3) + \rho(x_3, x_2) \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in E$ (*desigualdad triangular*).

Definición 2.2.2.2. (Espacio métrico (E, ρ))

Un espacio métrico es un par (E, ρ) , donde E es un conjunto y ρ es una distancia definida en E .

2.2.3. Espacios normados

Tomamos en cuenta las explicaciones de norma en espacios vectoriales, así como la de espacio de Banach Stefan. Algunas fuentes consultadas se citan en la bibliografía, como (Adams, 1975), (Kreyszig, 1978) y (Lages, 1995).

Definición 2.2.3.1. (Espacio normado $(E, \| \cdot \|)$)

El par $(E, \| \cdot \|)$, es un espacio normado formado por un espacio vectorial E y una aplicación $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$, que asocia un número real $\|x_1\|$ a cada x_1 en E llamado norma de x_1 , cuando se verifica:

- 1) $\|x_1\| \geq 0, \forall x_1 \in E$
- 2) $\|x_1\| = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$
- 3) $\|\alpha x_1\| = |\alpha| \|x_1\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, x_1 \in E$
- 4) $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \forall x_1, x_2 \in E$ (*desigualdad triangular*)

Definición 2.2.3.2. (Espacio de Banach Stefan)

Sea E un espacio vectorial normado, en el que se define la métrica $\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$, decimos que $(E, \| \cdot \|)$ es un espacio de Banach cuando (E, ρ) es completo, es decir, cuando toda sucesión de Cauchy en E es convergente.

2.2.3. Espacios de Hilbert David

Se incluyen los conceptos básicos necesarios para el desarrollo de estos fundamentos teóricos, como el producto escalar en espacios vectoriales, así como espacio pre-Hilbert y espacio de David Hilbert. También se definen los conjuntos ortogonal y ortonormal, y se expresan algunos resultados. En la bibliografía, se anotan algunas fuentes consultadas como (Conway, 1985), (Evans, 1997) y (Kreyszig, 1978).

Definición 2.2.3.1. (Producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$)

Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(x_1, x_2) \mapsto \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{R}$ es un producto interno (o escalar) en \mathbb{R} cuando cumple las siguientes propiedades:

- 1) $\langle x_1, x_1 \rangle \geq 0 \forall x_1 \in E$
- 2) $\langle x_1, x_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$
- 3) $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle \forall x_1, x_2 \in E$
- 4) $\langle x_1, x_2 + x_3 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_1, x_3 \rangle \forall x_1, x_2, x_3 \in E$
- 5) $\langle \alpha x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, \alpha x_2 \rangle = \alpha \langle x_1, x_2 \rangle \forall x_1, x_2 \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Definición 2.2.3.2. (Espacio pre-Hilbert $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$)

El par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio pre-Hilbert, donde E es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre E .

Definición 2.2.3.3. (Norma inducida por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

Sea E un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces cualquier producto interno induce una norma sobre el espacio en el que se define, dada por: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Definición 2.2.3.4. (Espacios de Hilbert David)

Un espacio pre-Hilbert $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se dice que es un espacio de Hilbert si es completo con la norma inducida por su producto escalar.

Definición 2.2.3.5. (Distancia cuadrática en los espacios pre-Hilbert)

Sea E un espacio pre-Hilbert y $\| \cdot \|$ la norma cuadrática correspondiente. Entonces la aplicación $\rho: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$ es una distancia en E .

Definición 2.2.3.6. (Ángulo entre dos vectores en los espacios pre-Hilbert)

Sea E un espacio pre-Hilbert y sean e_1 y e_2 elementos de E . El ángulo θ formado entre e_1 y e_2 viene dado por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{\|e_1\| \|e_2\|}\right), \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Definición 2.2.3.7. (Vectores ortogonales en los espacios pre-Hilbert)

Sea E un espacio pre-Hilbert y sea e_1 y e_2 elementos de E . Se dice que los vectores e_1 y e_2 son ortogonales si y solo si $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$. Además, si e_1 y e_2 son ortogonales, escribimos $e_1 \perp e_2$.

Definición 2.2.3.8. (Conjunto Ortogonal en los espacios pre-Hilbert)

Sea E un espacio pre-Hilbert y $E_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un conjunto de n vectores de E . E_1 es un conjunto ortogonal si y solo si $\forall e_i, e_j \in E_1$ es cierto que $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ cuando $i \neq j$.

Definición 2.2.3.9. (Conjunto ortonormal en los espacios pre-Hilbert)

Sea E un espacio pre-Hilbert y $E_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un conjunto de n vectores de E . E_1 es un conjunto ortonormal si y sólo si

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \forall e_i, e_j \in E_1$$

Proposición 2.2.3.10. (Desigualdad de Schwarz)

Un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y su correspondiente norma $\| \cdot \|$ satisfacen la desigualdad de Schwarz, es decir,

$$|\langle x_1, x_2 \rangle| \leq \|x_1\| \|x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in E.$$

2.2.4. Los espacios L^p

Para el examen de nuestras variables de estudio, introducimos algunas definiciones de espacio de medida, espacio de funciones medibles. En la bibliografía, se citan algunas fuentes consultadas, como (Adams, 1975), (Brezis, 2010), (Evans, 1997) y (Lax y Milgram, 2001).

Definición 2.2.4.1. (Espacio $\mathcal{L}(\Omega)$)

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. El espacio $\mathcal{L}(\Omega)$ se define como el espacio de μ -funciones medibles tales que $|u|$ es integrable.

Observación 2.2.4.1.

Se dice que dos funciones en $\mathcal{L}(\Omega)$ son μ -equivalentes si son iguales μ -c.t.p (casi en todas partes). Esta es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{L}(\Omega)$, donde se permite definir el conjunto de clases de equivalencia

$$L^1(\Omega) := \mathcal{L}(\Omega)/\sim.$$

Definición 2.2.4.2. (Espacio $L^p(\Omega)$)

Sea p un número real tal que $1 \leq p < +\infty$. El espacio $L^p(\Omega)$ consta de todas las funciones medibles tales que $|u|^p \in L^1(\Omega)$, es decir.

$$L^p(\Omega) := \left\{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}/u \text{ es medible y } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

con norma

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Observación 2.2.4.2.

Si $p = 2$ el espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto escalar definido por

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Además, usamos la notación: $\| \cdot \|_{L^2} = \| \cdot \|$.

Definición 2.2.4.3. (Espacio $L^\infty(\Omega)$)

El espacio de funciones esencialmente acotadas, denotado por $L^\infty(\Omega)$, es definido por

$$L^\infty(\Omega) := \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}/u \text{ es medible y } |u| \leq C \text{ c. t. p. en } \Omega\}$$

con norma

$$\|u\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf\{C: |u(x)| \leq C \text{ c. t. p. en } \Omega\}$$

Observación 2.2.4.3.

Si $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.

2.2.5. Teoría de operadores

Para el análisis de nuestras variables de estudio, introducimos algunas definiciones como operador lineal, operador lineal acotado, funcional lineal y espacio dual. También se definen las formas bilineales coercitivas. En la bibliografía, se anotan algunas fuentes consultadas, como (Brezis, 2010), (Conway, 1985) y (Kreyszig, 1978).

Definición 2.2.5.1. (Operador lineal A)

Un operador A es lineal si:

- i) El dominio $\operatorname{dom}(A)$ es un espacio vectorial y el rango $\operatorname{ran}(A)$ está en un espacio vectorial sobre el mismo campo K de escalares, donde $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .
- ii) Para todo $x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(A)$ y escalares λ ,

$$A(\lambda x_1 + x_2) = \lambda A(x_1) + A(x_2).$$

Definición 2.2.5.2. (Operador lineal acotado)

Sean E_1 y E_2 espacios normados y $A: \text{dom}(A) \subset E_1 \rightarrow E_2$ un operador lineal. Se dice que el operador A es acotado si existe un número real $\lambda > 0$ tal que

$$\|Ax_1\| \leq \lambda \|x_1\|, \forall x_1 \in \text{dom}(A).$$

Definición 2.2.5.3. (Operador acotado inferiormente)

Sean E_1 y E_2 espacios normados. Se dice una aplicación lineal $A: E_1 \rightarrow E_2$ está acotada inferiormente si existe una constante real $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda \|x_1\| \leq \|Ax_1\| \quad \forall x_1 \in E_1.$$

Definición 2.2.5.4. (Funcional lineal F)

Un funcional lineal F es un operador lineal con dominio en un espacio vectorial E y rango en el campo de escalares K de E es decir,

$$F: \text{dom}(F) \subset E \rightarrow K$$

Definición 2.2.5.5. (Espacio dual E^*)

El conjunto de todos los funcionales lineales y continuos definidos en un espacio vectorial E puede transformarse en un espacio vectorial.

Este espacio se denota por E^* y se denomina espacio topológico dual de E o, para abreviar, dual de E .

Definición 2.2.5.6. (Forma Bilineal $T: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$)

Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una forma bilineal (o funcional) es una aplicación

$$T: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

Lo que verifica que: para todo $x_1, x_2, x_3 \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

a) $T(x_1 + x_2, x_3) = T(x_1, x_3) + T(x_2, x_3)$

b) $T(x_1, x_2 + x_3) = T(x_1, x_2) + T(x_1, x_3)$

c) $T(\alpha x_1, x_2) = \alpha T(x_1, x_2)$

d) $T(x_1, \alpha x_2) = \alpha T(x_1, x_2)$

Definición 2.2.5.7. (Formas bilineales acotadas en E)

Si E es un espacio vectorial normado de norma $\| \cdot \|$ y existe un número real $\alpha > 0$, tal que para todo $x_1, x_2 \in E$ se cumple lo siguiente:

$$|T(x_1, x_2)| \leq \alpha \|x_1\| \|x_2\|,$$

se dice que T es acotado y su norma está definida por

$$\|T\| = \sup_{x_1, x_2 \in E - \{0\}} \frac{|T(x_1, x_2)|}{\|x_1\| \|x_2\|}.$$

Definición 2.2.5.8. (Forma bilineal coerciva en E)

Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y $T: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Se dice que T es coerciva si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$T(x_1, x_1) \geq \alpha \|x_1\|^2 \quad \forall x_1 \in E.$$

Observación 2.2.5.1.

El producto interno de la aplicación es una forma bilineal, acotada y coerciva.

Proposición 2.2.5.1.

Sean E_1 y E_2 espacios normados. Una transformación lineal $T: E_1 \rightarrow E_2$ acotada inferiormente admite una inversa continua $T^{-1}: \text{ran}(T) \subset E_2 \rightarrow E_1$.

Demostración. Suponemos que T está acotada inferiormente. Entonces existe una constante $\lambda > 0$, tal que

$$\lambda \|x_1\| \leq \|Tx_1\| \quad \forall x_1 \in E_1 \tag{2.1}$$

Entonces, haciendo uso de (2.1) se tiene que $x_1 \in N(T) \Leftrightarrow Tx_1 = 0_{E_2} \Leftrightarrow \|Tx_1\| = 0 \Leftrightarrow \|x_1\| = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0_{E_1}$, luego $N(T) = 0$ y en consecuencia T es inyectiva. Por lo tanto, existe $T^{-1}: \text{ran}(T) \subset E_2 \rightarrow E_1$.

Además, (2.1) es equivalente a

$$\|T^{-1}x_2\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x_2\| \quad \forall x_2 \in E_2.$$

Es decir, T^{-1} está acotada y, por lo tanto, es continua.

Proposición 2.2.5.2.

Sea E un espacio de Banach y $T: E \rightarrow E$ un operador lineal y continuo. Si T es acotado inferiormente, entonces $\text{ran}(T) \subset E_1$ es cerrado en E

Demostración. Sea (y_n) sucesión en $\text{ran}(T)$ tal que $y_n \rightarrow y$, $y \in E_2$. Al ser T acotado por debajo, por la proposición 2.2.5.1 se sabe que T es inyectivo, por lo que existe una única sucesión (x_n) en E_1 tal que $y_n = T(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$. Usando una vez más la proposición 2.2.5.1 se tiene

$$\|y_n - y_m\| = \|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| \geq \lambda \|x_n - x_m\|.$$

Pero (y_n) es Cauchy, y de la desigualdad anterior se sigue que (x_n) también es Cauchy.

Luego, como E_1 es de Hilbert, (x_n) converge a algún $x \in E_1$; y como T es continua

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = Tx.$$

Es decir, $y \in \text{ran}(T)$ y por lo tanto, $\text{ran}(T)$ es cerrado.

2.2.6. Conceptualización de Riesz Frigyes para funcionales en los Espacios de Hilbert David

Para el análisis de las variables de nuestro estudio, introducimos algunas definiciones como la suma directa. También la conceptualización de Frigyes Riesz. Algunas fuentes consultadas son citadas en la bibliografía, como (Adams, 1975) y (Brezis, 2010).

Definición 2.2.6.1. (Suma directa de dos subespacios E_1 y E_2)

Un espacio vectorial E se dice que tiene suma directa de dos subespacios E_1 y E_2 de E , y se escribe $E = E_1 \oplus E_2$, si cada $x \in E$ tiene una representación única

$$x = x_1 + x_2 \text{ con } x_1 \in E_1, x_2 \in E_2.$$

Observación 2.2.6.1.

E_2 se llama complemento algebraico de E_1 en E y viceversa; E_1 y E_2 es llamado el par complementario de subespacios en E .

En el caso de un espacio de Hilbert E , el interés radica en las representaciones de E como una suma directa de un subespacio cerrado E_1 y su complemento ortogonal

$$E_1^\perp = \{x_2 \in E / x_2 \perp E_1\},$$

que es el conjunto de todos los vectores ortogonales a E_1 .

Teorema 2.2.6.1. (Suma directa de dos subespacios cerrados)

Sea E_1 cualquier subespacio cerrado de un espacio de Hilbert E .

Entonces

$$E = E_1 \oplus E_2,$$

Con $E_2 = E_1^\perp$.

Demostración. Como E es completo y E_1 es cerrado, entonces E_1 es completo. Además E_1 es convexo, lo que implica que para todo $x \in E$ existe un $x_1 \in E_1$ tal que $x_2 = x - x_1$ es ortogonal a E_1 entonces

$$x = x_1 + x_2,$$

Donde $x_2 \in E_2 = E_1^\perp$. Para probar la unicidad, se asume que

$$x = x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2,$$

donde $x_1, x'_1 \in E_1$ y $x_2, x'_2 \in E_2$. Entonces $x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2$. Como $x_1 - x'_1 \in E_1$ y $x'_2 - x_2 \in E_2$, se ve que $x_1 - x'_1 \in E_1 \cap E_2 = \{0_{E_1}\}$. Esto implica que $x_1 = x'_1$. Así, se tiene que $x_2 = x'_2$.

Proposición 2.2.6.1. (Teorema de conceptualización de Riesz Frigyes para funcionales en los espacios de Hilbert David)

Cada funcional lineal acotado f en un espacio de Hilbert E se puede simbolizar en términos del producto interno, más precisamente

$$f(x_1) = \langle x_1, x_3 \rangle \tag{2.2}$$

donde x_3 depende de f , esta determinada únicamente por f y tiene norma

$$\|x_3\| = \|f\|. \quad (2.3)$$

Demostración. La prueba de la proposición se realiza en 3 partes:

a) f tiene una conceptualización única dada por (2.2),

b) x_3 en (2.2) es único,

c) la formula (2.3) se cumple.

a) Si $f = 0$ en E , entonces haciendo $x_3 = 0$, se tiene que

$$f(x_1) = 0 = \langle x_1, 0_E \rangle \text{ y } \|f\| = 0 = \|x_3\|.$$

Por lo tanto, se cumple (2.2) y (2.3).

Si $f \neq 0$. Se nota que $x_3 \neq 0$, ya que si $\langle x_1, x_3 \rangle = 0$ para todo x , se tendría que $f(x_1) = 0$. Además, si x_3 tiene la propiedad de que $\langle x_1, x_3 \rangle = 0$ para todo x , se tendría que $f(x_1) = 0$, entonces se deduce que $x_3 \perp N(f)$, donde $N(f)$ es el núcleo de f .

Como $f \neq 0$ implica que existe $x_1 \in E$ tal que $f(x_1) \neq 0$, así $N(f) \neq E$.

Además, se tiene que $N(f)$ es un espacio vectorial cerrado. Entonces, por el teorema 2.2.6.1. se concluye que $N(f)^\perp \neq \{0\}$. Así, $N(f)^\perp$ contiene un $x_0 \neq 0_E$.

Considerando el elemento

$$x_4 = f(x_1)x_0 - f(x_0)x_1, \quad x_0 \in N(f)^\perp,$$

donde $x_1 \in E$ es arbitrario. Aplicando f a x_4 , se tiene que

$$\begin{aligned}
f(x_4) &= f(f(x_1)x_0 - f(x_0)x_1) \\
&= f(f(x_1)x_0) - f(f(x_0)x_1) \\
&= f(x_1)f(x_0) - f(x_0)f(x_1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $x_4 \in N(f)$. Como $x_0 \in N(f)^\perp$ tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \langle x_4, x_0 \rangle \\
&= \langle f(x_1)x_0 - f(x_0)x_1, x_0 \rangle \\
&= \langle f(x_1)x_0, x_0 \rangle - \langle f(x_0)x_1, x_0 \rangle \\
&= f(x_1)\langle x_0, x_0 \rangle - f(x_0)\langle x_1, x_0 \rangle \\
&= f(x_1)\|x_0\|^2 - \langle f(x_0)x_1, x_0 \rangle.
\end{aligned}$$

Tenga en cuenta que $\|x_0\|^2 \neq 0$, entonces

$$f(x_1) = \frac{f(x_0)}{\|x_0\|^2} \langle x_1, x_0 \rangle$$

$$f(x_1) = \langle x_1, \frac{f(x_0)}{\|x_0\|^2} x_0 \rangle$$

Por lo tanto, si establecemos $x_2 = \frac{f(x_0)}{\|x_0\|^2} x_0$ entonces, dado que x_1 fue elegido arbitrariamente, podemos concluir que

$$f(x_1) = \langle x_1, x_2 \rangle \quad \forall x_1 \in E.$$

(b) Se probará que x_2 es único. Asumiendo que para todo $x_1 \in E$,

$$f(x_1) = \langle x_1, x'_2 \rangle = \langle x_1, x''_2 \rangle,$$

entonces

$$\langle x_1, x_2' \rangle - \langle x_1, x_2'' \rangle = 0$$

$$\langle x_1, x_2' - x_2'' \rangle = 0$$

Escogiendo en particular $x_1 = x_2' - x_2''$, se tiene

$$\langle x_2' - x_2'', x_2' - x_2'' \rangle = \|x_2' - x_2''\|^2 = 0.$$

Así, $x_2' - x_2'' = 0_E$ y, por lo tanto, $x_2' = x_2''$.

(c) Sea $f \neq 0$. Entonces $x_2 \neq 0$. Utilizando (2.2), con $x_1 = x_2$ por ser f acotado se tiene

$$\|x_2\|^2 = \langle x_2, x_2 \rangle = f(x_2) \leq \|f\| \|x_2\|,$$

Como $\|x_2\| \neq 0$, entonces dividiendo por $\|x_2\|$,

$$\|x_2\| \leq \|f\|$$

Por otro lado, de (2.2) y la desigualdad de Schwarz se tiene

$$|f(x_1)| = |\langle x_1, x_2 \rangle| \leq \|x_1\| \|x_2\|.$$

Aplicando el supremo en el conjunto $\{x_1 \in E / \|x_1\| = 1\}$,

$$\|f\| = \sup_{\|x_1\|=1} \frac{|\langle x_1, x_2 \rangle|}{\|x_1\| \|x_2\|} \leq \|x_2\|.$$

Así, $\|f\| = \|x_2\|$.

2.2.7. Ecuaciones diferenciales

Para el análisis de nuestras variables de estudio, introducimos algunas definiciones como la ecuación diferencial ordinaria y la ecuación

diferencial parcial de segundo orden y sus clasificaciones. En la bibliografía, se citan algunas fuentes consultadas, como (Guedes, 1997), (Lório, 1999) y (Sotomayor, 1979).

Definición 2.2.7.1. (Ecuación diferencial)

Una ecuación que contiene las derivadas de una (o más variables dependientes) con respecto a una variable independiente es una ecuación diferencial ordinaria (o parcial, respectivamente).

Definiciones 2.2.7.2. (Ecuación diferencial parcial, orden y linealidad)

Una ecuación diferencial parcial (EDP) es una relación de la forma

$$G(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1}^{m_1}, \dots, u_{x_n}^{m_n}) = 0,$$

Donde $u = u(x_1, \dots, x_n)$, $u_{x_i}^{m_i} = \frac{\partial^{m_i} u}{\partial x_i^{m_i}}$ son las derivadas parciales de u y $m_1 + \dots + m_n < \infty$.

El orden de una EDP es el orden de la derivada más grande que aparece en la ecuación

La EDP es lineal si es lineal en la función desconocida y todas sus derivadas, con coeficientes que dependen de las variables independientes.

Ejemplo 2.2.7.1.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2x_1 x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + u = 1$

$$2. \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} + x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 8u = 5x_2$$

$$3. \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^3 + 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} = x_1$$

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1$$

Las EDP 1 y 2 son lineales, mientras las EDP 3 y 4 no lo son. Las EDP 1, 2 y 4 son de segundo orden, mientras que la EDP 3 es de tercer orden.

Definición 2.2.7.3. (Forma general de una ecuación diferencial parcial de segundo orden)

La forma general de una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) de segundo orden con dos variables independientes, x_1 y x_2 es

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + d \frac{\partial u}{\partial x_1} + e \frac{\partial u}{\partial x_2} - fu = g,$$

En donde a, b, c, \dots, g son funciones de x_1 y x_2 .

Cuando $g(x_1, x_2) = 0$, se dice que la ecuación es homogénea; de lo contrario no homogénea.

Definición 2.2.7.4. (Clasificación de una ecuación en derivadas parciales de segundo orden)

La ecuación en derivadas parciales lineal y de segundo orden

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + d \frac{\partial u}{\partial x_1} + e \frac{\partial u}{\partial x_2} - fu = 0,$$

donde a, b, c, d, e y f son constantes reales, es

Hiperbólica si $b^2 - 4ac > 0$,

Parabólica si $b^2 - 4ac = 0$,

Elíptica si $b^2 - 4ac < 0$.

Definición 2.2.7.5. (Solución de una ecuación diferencial)

Cuando una función $x_2 = g(x_1)$, definida en un dominio Ω , se sustituye en una ecuación diferencial y transforma esta ecuación en una identidad, se dice que es una solución de la ecuación diferencial en el dominio Ω . Además, decimos que $x_2 = g(x_1)$ satisface la ecuación diferencial.

2.2.7.1. Problemas de valor Inicial

A menudo, interesa resolver una ecuación diferencial sujeta a condiciones prescritas, que son las condiciones impuestas sobre la función o sobre sus derivadas. Algunas fuentes consultadas se citan en la bibliografía, como (Brezis, 2010) y (Gilbarg y Trudinger, 2001).

Definición 2.2.7.1.1. (Problemas de valor inicial)

Dado el intervalo I , que contiene x_0 , el problema:

$$\text{Resolver: } \frac{d^n y}{dx^n} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

sujeta a: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$

donde y_0, y_1, \dots, y_{n-1} son constantes reales especificadas arbitrariamente, se denomina problema de valor inicial. Los valores dados de la función desconocida $y(x)$, y de sus $n - 1$ primeras derivadas en un solo punto x_0 : $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ se denominan condiciones iniciales.

2.2.7.2. Condiciones de Gustav Lejeune Dirichlet y Carl Neumann

Para el análisis de nuestras variables de estudio, introducimos algunas definiciones condiciones de Gustav Dirichlet y Carl Neumann. En la bibliografía se citan algunas fuentes consultadas, como (Brezis, 2010) y (Iório, 1999).

Definición 2.2.7.2.1. (Condiciones de Gustav Lejeune Dirichlet)

Cuando las condiciones de borde (o de contorno) solo implican restricciones sobre la función desconocida y no se requiere ninguna condición sobre los valores de borde de sus derivadas, entonces estas condiciones se denominan condiciones de Gustav Dirichlet.

Definición 2.2.7.2.2. (Condiciones de Carl Neumann)

Cuando las condiciones de borde implican solo restricciones sobre las derivadas de la función desconocida y no se requiere ninguna condición

sobre los valores de borde de la función, entonces estas condiciones se denominan condiciones de Carl Neumann.

2.2.8. Distribuciones $D'(\Omega)$

En esta sección encontrará las definiciones y propiedades relativas a las variables de estudio que son las distribuciones, necesarias en esta teoría. En la bibliografía, se citan algunas fuentes consultadas, como (Dijk, 2013), (Duistermaat y Kolk, 2010), (Hounie, 1979) y (Kinnunen, 2020).

A partir de ahora, Ω expresará un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n con $n = 1, 2, \dots, n$.

Definición 2.2.8.1. (Operador diferencial D^β)

Sea $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ un multiíndice de orden

$$|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n.$$

El operador diferencial D^β está definido por

$$D^\beta \phi(x) = \frac{\partial^{|\beta|} \phi(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} = \partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n} \phi(x)$$

Definición 2.2.8.2. (Soporte de una función $sop(\phi)$)

Sea $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Defina el soporte de ϕ , $sop(\phi)$, como el conjunto

$$sop(\phi) = \overline{\{x \in \Omega / \phi(x) \neq 0\}}.$$

Si $\text{supp}(\phi)$ está acotado, se sigue que es compacto, en cuyo caso decimos que ϕ tiene soporte compacto.

Definición 2.2.8.3. (Espacio de funciones test $D(\Omega)$)

Una función test $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en Ω . El conjunto de todas las funciones test se denota como $D(\Omega)$.

Definición 2.2.8.4. (Convergencia en $D(\Omega)$)

Sean ϕ_j y ϕ contenidos en $D(\Omega)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Decimos que la sucesión (ϕ_j) converge a ϕ en $D(\Omega)$, si existe un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\text{supp}(\phi_j) \subset K$ para toda j y si para cada multiíndice α la sucesión $(D^\alpha \phi_j)$ converge uniformemente a $D^\alpha \phi$ en K . Esta convergencia se denota $\phi_j \rightarrow \phi$ en $D(\Omega)$.

Definición 2.2.8.5. (Distribución $D'(\Omega)$)

Se dice una funcional lineal $T: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es una distribución en Ω , si T es continua en $D(\Omega)$, en el siguiente sentido:

$$\phi_j \rightarrow \phi \text{ en } D(\Omega) \text{ implica } T(\phi_j) \rightarrow T(\phi).$$

2.2.8.1. Derivadas de distribuciones $D^\beta T$

Las funciones localmente integrables se utilizarán para construir ciertas propiedades de las distribuciones en general. Recuerde que si la

función $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una primera derivada continua en Ω , entonces la derivada de g es localmente integrable.

Sea Ω un conjunto abierto y acotado, entonces si $\phi \in D(\Omega)$, integrando por partes, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\phi) = \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \phi(x) dx = g(x)\phi(x)|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} g(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = -g \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right).$$

Definición 2.2.8.1.1. (Derivada distribucional $D^\beta T$)

Considere $T: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una distribución y $\beta \in \mathbb{N}^n$. La derivada distribucional $D^\beta T$ se define como

$$D^\beta T: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi \mapsto D^\beta T(\phi) = (-1)^{|\beta|} T(D^\beta \phi).$$

2.2.9. Espacios de Sobolev Serguéi

Para el análisis de nuestro estudio, se incluyen algunas descripciones como la derivada extendida, los espacios de Sobolev Serguéi, y así mismo, la desigualdad de Henry Poincaré. En la bibliografía, se citan algunas fuentes consultadas, como (Adams, 1975), (Brezis, 2010), (Evans, 1997), (Kinnunen, 2020) y (Lax y Milgram, 2001).

Definición 2.2.9.1. (Derivada generalizada o extendida)

Sean $u, v \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$ y β un multiíndice. Decimos que v es la β –ésima derivada parcial extendida de u , si u y v verifica la siguiente igualdad:

$$\int_{\Omega} u D^{\beta} \phi \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} v \phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty},$$

y se escribe $D^{\beta}u = v$ en sentido extendido.

Observación 2.2.9.1.

Por simplicidad, se usa la misma notación para la derivada extendida y clásica, a menos que esto cause cierta confusión.

Definición 2.2.9.2. (Espacios de Sobolev Serguéi $W^{m,p}(\Omega)$)

Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq +\infty$ y m un entero no negativo. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ consta de todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$ tales que, para cualquier multiíndice β con $|\beta| \leq m$, $D^{\beta}u$ en el sentido generalizado pertenece a $L^p(\Omega)$, es decir,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^{\beta}u \in L^p, \forall \beta \text{ con } |\beta| \leq m\},$$

que es un espacio normado para la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{0 \leq |\beta| \leq m} \|D^{\beta}u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq +\infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max_{0 \leq |\beta| \leq m} \|D^\beta u\|_{L^\infty}.$$

Observación 2.2.9.2.

- 1) Si $1 \leq p \leq +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.
- 2) Se espacio $W^{m,2}(\Omega)$ se denota por $H^m(\Omega)$ y está dotado del producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{0 \leq |\beta| \leq m} \langle D^\beta u, D^\beta v \rangle_{L^2}$$

Por tanto, $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Definición 2.2.9.3. (Espacios de Sobolev Serguéi $W_0^{1,p}(\Omega)$)

Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq +\infty$. El espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ se define como la clausura de $C_0^1(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$. Se escribe $H_0^1(\Omega)$ en lugar de $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Proposición 2.2.9.1 (Desigualdad de Henry Poincaré)

Sea $1 \leq p \leq +\infty$ y Ω un conjunto abierto y acotado. Entonces existe una constante C (dependiente de Ω y p) tal que

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Observación 2.2.9.3.

La expresión $\|\nabla u\|_{L^p}$ es una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y es equivalente a la norma $\|u\|_{W^{1,p}}$.

CAPÍTULO III

MÉTODO O PROCEDIMIENTO

3.1. Enfoque metodológico

En el desarrollo de esta tesis, se usó el método deductivo para demostrar la existencia y unicidad de una solución universal en problemas de contorno y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales. Este método consiste en definir primero un marco funcional para obtener una solución extendida en lugar de una solución tradicional, así se prueba la existencia y unicidad de una solución universal. De manera similar, el teorema de Lax Peter - Milgram Arthur se usa como modelo para probar y lograr los propósitos de los problemas de contorno.

3.1.1. Procedimiento deductivo

a) Deducción

Constituyen las definiciones y enunciados de problemas variacionales, así como las reglas lógico-matemáticas. Del mismo modo, ajustamos los problemas a las restricciones de contorno de Gustav Lejeune Dirichlet y Carl Neumann.

b) Revisión bibliográfica

Libros, revistas especializadas y artículos científicos han sido objeto de una revisión exhaustiva que, gracias a su fiabilidad, ha validado los conceptos y un conjunto de propuestas sobre la existencia y unicidad de la solución de dificultades de contorno en las ecuaciones diferenciales.

c) Generalización

La solución del problema variacional se extendió en forma de proposición, es decir, sobre la base de las reglas lógico-matemáticas, se constituyó la existencia y la unicidad.

d) Analogía

Las nociones de solución tradicional de la ecuación diferencia y solución extendida en espacios de Sobolev Serguéi están vinculadas.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

4.1. Descripción

4.1.1 Existencia de una representación única de un funcional lineal acotado y coercivo como una aplicación bilineal en espacios de Hilbert David

Proposición 4.1.1.1 (Teorema de Lax Peter-Milgram Arthur en espacios de Hilbert David)

Sea H un espacio real de Hilbert y $T: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, acotada y coerciva. Si $\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal acotado, entonces existe $v_0 \in H$ único tal que

$$T(u, v_0) = \varphi(u) \quad \forall u \in H. \quad (4.1)$$

Además, si T es simétrica, entonces v_0 está representado por

$$\frac{1}{2}T(v_0, v_0) - \varphi(v_0) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}T(v, v) - \varphi(v) \right\}. \quad (4.2)$$

Demostración. Fijando $v \in H$ definimos la aplicación $T_v: H \rightarrow \mathbb{R}$ como $T_v(u) = T(u, v)$. Como T es lineal y continuo, T_v es lineal y continuo. Según el teorema de conceptualización de Frigyes Riesz, encontramos un único elemento $z \in H$ tal que

$$T(u, v) = T_v(u) = \langle u, z \rangle \quad \forall u \in H. \quad (4.3)$$

Este procedimiento se puede realizar para cada $v \in H$, entonces el operador $A: H \rightarrow H$ se puede definir dado por $A(v) = z$, donde z está determinado por (4.3).

Se verifica que A es un operador lineal acotado. En efecto, si $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2 \in H$, se tiene que para todo $u \in H$:

$$\begin{aligned} \langle A(\lambda_1 v_1 + v_2), u \rangle &= T(\lambda_1 v_1 + v_2, u) \\ &= \lambda_1 T(v_1, u) + T(v_2, u) \\ &= \lambda_1 \langle A(v_1), u \rangle + \langle A(v_2), u \rangle \\ &= \langle \lambda_1 A(v_1) + A(v_2), u \rangle. \end{aligned}$$

Además, como T es acotada existe la constante $\lambda_2 > 0$

$$\|A(v)\|^2 = \langle A(v), A(v) \rangle = T(v, A(v)) \leq \lambda_2 \|v\| \|A(v)\|,$$

por tanto

$$\|A(v)\| \leq \lambda_2 \|v\| \quad \forall v \in H, \text{ y en consecuencia } A \text{ es acotada.}$$

Por otra parte, como T es coerciva, existe una constante $\lambda_3 > 0$ tal que

$$\lambda_3 \|v\|^2 \leq T(v, v) = \langle A(v), v \rangle \leq \|A(v)\| \|v\|,$$

luego, $\lambda_3 \|v\| \leq \|A(v)\|$, en consecuencia A es acotado por debajo. Así, por la proposición 2.2.5.1. se tiene que A tiene inversa continua. Además, $\text{ran}(A)$ es cerrado por la proposición 2.2.5.2.

Comprobamos que $\text{ran}(A) = H$. Supongamos que $\text{ran}(A)$ no está contenido en H . Entonces como $\text{ran}(A)$ es cerrado, existiría un elemento $w \neq 0 \in H$, con $w \in R(A)^\perp$, entonces $\lambda_3 \|w\|^2 \leq T(w, w) = \langle A(w), w \rangle = 0$, por lo que w debe ser cero, lo cual es una contradicción. Así, $\text{ran}(A) = H$. Ahora, nuevamente por el teorema de conceptualización de Riesz Frigyes, encontramos un único elemento $z \in H$ tal que

$$\varphi(u) = \langle u, z \rangle \quad \forall u \in H.$$

Pero, como $\text{ran}(A) = H$ y A es invertible, existe un único $v_0 \in H$ tal que $A(v_0) = z$, entonces

$$T(u, v_0) = \langle u, A(v_0) \rangle = \langle u, z \rangle = \varphi(u) \quad \forall u \in H,$$

es decir, (4.1) se cumple.

Para el segundo segmento de la proposición, suponga que es T simétrica, es decir, $T(u, v) = T(v, u) \quad \forall u, v \in H$. Sean $u \in H$ y $\lambda_4 \in \mathbb{R}$, y definimos el funcional $J: H \rightarrow \mathbb{R}$ por $J(u) = \frac{1}{2}T(u, u) - \varphi(u)$, entonces

$$\begin{aligned} J(\lambda_4 u + v_0) &= \frac{1}{2}T(\lambda_4 u + v_0, \lambda_4 u + v_0) - \varphi(\lambda_4 u + v_0) \\ &= \frac{1}{2}T(v_0, v_0) + T(\lambda_4 u, v_0) + \frac{\lambda_4^2}{2}T(u, u) - \lambda_4 \varphi(u) - \varphi(v_0) \\ &= J(v_0) + \lambda_4 [T(u, v_0) - \varphi(u)] + \frac{\lambda_4^2}{2}T(u, u). \end{aligned}$$

En particular, cuando $\lambda_4 = 1$ obtenemos

$$J(u + v_0) = J(v_0) + \frac{1}{2}T(u, u) \geq J(v_0) \quad \forall u \in H,$$

lo que nos dice que v_0 minimiza J , es decir,

$$\frac{1}{2}T(v_0, v_0) - \varphi(v_0) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}T(v, v) - \varphi(v) \right\}.$$

4.1.2. Existencia y unicidad de la solución extendida de problemas de contorno de ecuaciones diferenciales ordinarias

Sea el intervalo $I =]0,1[$ y considere el problema de contorno homogéneo, del tipo Gustav Lejeune Dirichlet:

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{en } I \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

donde $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de $L^2(I)$.

Proposición 4.1.2.1. En el problema (4.4), existe $u \in H_0^1(I)$ única solución extendida. Además, u esta dada por

$$\frac{1}{2} \int_I (u'^2 + u^2) dx - \int_I f u dx = \min_{v \in H_0^1(I)} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) dx - \int_I f v dx \right\}$$

Demostración. Multiplicando ambos lados de la ecuación (4.4), por una función $v \in H_0^1(I)$, obtenemos que

$$-u''v + uv = fv.$$

Entonces, integrando en el intervalo I , obtenemos

$$\int_I -u''v dx + \int_I uv dx = \int_I fv dx,$$

y al integrar por partes en la primera integral, tenemos que

$$\int_I u'v' dx + \int_I u v dx = \int_I f v dx.$$

Así, en la representación variacional de (4.4) se plantea el problema: Sea f una función de $L^2(I)$. Encuentre una función $u \in H_0^1(I)$ tal que:

$$\int_I u'v' dx + \int_I u v dx = \int_I f v dx, \forall v \in H_0^1(I). \quad (4.5)$$

La función u que resuelve esta dificultad se denomina solución generalizada o extendida de la ecuación (4.4).

Acordarse que el espacio $H_0^1(I)$ está dotado del producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_I u'v' dx + \int_I u v dx.$$

Así, definimos la estructura de T como

$$T(u, v) = \langle u, v \rangle_{H_0^1(I)}, \quad (4.6)$$

la cual, por proceso, es bilineal, continua y coerciva.

Ahora, el funcional $\varphi \in (H_0^1(I))^*$ está definido por

$$\begin{aligned} \varphi: H_0^1(I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow \varphi(v) = \int_I f v dx \end{aligned}$$

Con la forma bilineal en (4.6), la representación variacional se escribe

$$T(u, v) = \varphi(v). \quad (4.7)$$

Por la proposición 4.1.1.1., entonces en el problema (4,7) existe un único $u \in H_0^1(I)$. Además, dado que T es simétrico, u viene dado por.

$$\frac{1}{2} \int_I (u'^2 + u^2) dx - \int_I f u dx = \min_{v \in H_0^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) dx - \int_I f v dx \right\}$$

Esto prueba la proposición 4.1.2.1., es decir, la existencia, unicidad y su correspondiente representación de la solución extendida del problema (4.4).

4.1.3. Existencia y unicidad de la solución extendida de problemas de contorno de una ecuación diferencial parciales elípticas lineal

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y con borde regular y considere el problema de contorno homogéneo del tipo Gustav Lejeune Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) = g(x) \text{ en } \Omega \\ u(x) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.8)$$

donde $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de $L^2(\Omega)$.

Proposición 4.1.3.1. El problema (4.8), existe $u \in H_0^1(\Omega)$ única solución extendida. Además, u está dada por

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx - \int_{\Omega} g u dx = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) dx - \int_{\Omega} g v dx \right\}$$

Demostración. Procediendo análogamente a la Proposición 4.1.2.1 y multiplicando ambos lados de la ecuación (4.8) por una función $v \in H_0^1(\Omega)$, obtenemos que

$$-\Delta uv + uv = gv.$$

Entonces, integrando sobre el conjunto Ω , obtenemos

$$\int_{\Omega} -\Delta uv \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} gv \, dx,$$

y al integrar por partes en la primera integral, tenemos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} gv \, dx.$$

Así, en la representación variacional de (4.8) se plantea el problema: Sea $g \in L^2(\Omega)$. Encuentre una función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} gv \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.9)$$

La función u que resuelve esta dificultad se denomina solución extendida de la ecuación (4.8).

Acordarse que el espacio $H_0^1(\Omega)$ está dotado del producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx.$$

Así definimos la estructura T como

$$T(u, v) = \langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} \quad (4.10)$$

la cual, por proceso, es bilineal, continua y coerciva.

Ahora, el funcional $\varphi \in (H_0^1(\Omega))^*$ está definido por

$$\varphi: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow \varphi(v) = \int_{\Omega} gv \, dx$$

Con la forma bilineal en (4.10), la representación variacional se escribe

$$T(u, v) = \varphi(v). \quad (4.11)$$

Por la proposición 4.1.1.1., entonces en el problema (4.11) existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$. Además, dado que T es simétrico, u viene dado por

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx - \int_{\Omega} g u dx = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) dx - \int_{\Omega} g v dx \right\}$$

Esto prueba la proposición 4.1.3.1., es decir, la existencia, unicidad y su correspondiente representación de la solución extendida del problema (4.8).

4.1.4 Problema de contorno de la ecuación diferencial parcial elíptica general de segundo orden.

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto acotado y $h \in L^2(\Omega)$. Dadas las funciones $a_{ij}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq n$, satisfaciendo la condición de elipticidad

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j \geq \alpha |\varepsilon|^2, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^n \text{ con } \alpha > 0.$$

Dado $a_0 \in C(\bar{\Omega})$, con $a_0 \geq 0$, se plantea el problema: encontrar una función $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ el cual satisface

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0 u = h \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.12)$$

Proposición 4.1.4.1. En el problema (4.12) existe $u \in H_0^1(\Omega)$ única solución extendida. Además, si la matriz (a_{ij}) es simétrica, u está dada por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u^2 \right) dx - \int_{\Omega} h u \, dx \\ & = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 v^2 \right) dx - \int_{\Omega} h v \, dx \right\} \end{aligned}$$

Demostración. Al igual que en el problema de contorno homogéneo, se puede conseguir la siguiente representación variacional:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0 u v \, dx = \int_{\Omega} h v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (4.13)$$

y se dice que una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface (4.13) es una solución extendida de (4.12).

Como $a_0 \geq 0$ en Ω , se puede definir la forma bilineal y acotada

$$T(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0 u v \, dx.$$

La coerciva de T se sigue del supuesto de elipticidad, de $a_0 \geq 0$ y de la proposición 2.2.9.1.

Ahora, el funcional $\varphi \in (H_0^1(\Omega))^*$ está definido por:

$$\varphi: H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \varphi(v) = \int_{\Omega} h v \, dx$$

Con la forma bilineal en (4.13), la representación variacional se escribe

$$T(u, v) = \varphi(v). \quad (4.14)$$

Por la proposición 4.1.1.1. entonces en el problema (4.14) existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$. Además, como la matriz (a_{ij}) es simétrica entonces T es simétrica, u viene dado por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u^2 \right) dx - \int_{\Omega} h u \, dx \\ & = \min_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 v^2 \right) dx - \int_{\Omega} h v \, dx \right\} \end{aligned}$$

Esto prueba la proposición 4.1.4.1., es decir, la existencia, unicidad y su correspondiente representación de la solución extendida del problema (4.12).

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

El propósito de esta tesis fue aplicar el teorema de Lax Peter - Milgram Arthur a ecuaciones diferenciales. Para la demostración del teorema, se obtuvo la minimización de algunos funcionales, lo cual fue útil para su aplicación. En esta relación, las formas bilineales son simétricas, lo que es particularmente interesante en el teorema. Lo coercivo es necesario para que dicho mínimo sea único del funcional. Este resultado es consistente con los obtenidos en este campo de investigación por otros matemáticos, por ejemplo, (Adams, 1975), (Brezis, 2010), (Collantes y Coronel, 2010), (Eboli, 2021), (Gilbarg y Trudinger, 2001) y (Lax, 2001).

En la ecuación homogénea del tipo Gustav Lejeune Dirichlet, es un problema de valores de contorno bien definido, es decir que tiene solución y es única. En el caso del presente estudio, obtuvimos que el problema admite solución extendida en el espacio de Sobolev Serguéi de orden uno de las funciones que se anula en el contorno $H_0^1(\Omega)$. Por otro lado, para lograr esto, se siguió el siguiente procedimiento. inicialmente, para la elaboración del problema variacional se utilizaron funciones en espacios de

Serguéi Sobolev de orden uno, que permitían la integración por partes. Por lo tanto, se determinó la formulación variacional. En el segundo paso, se construye una forma bilineal continuo y coercivo, en un espacio de Sobolev Serguéi de orden uno que se anulan en la frontera, y se define una forma lineal en el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$. Luego, se aplica el teorema de Lax Peter - Milgram Arthur, que prueba la existencia de una solución única en el espacio de Sobolev Serguéi de orden uno. Obtenemos así la existencia y unicidad de una solución extendida.

Para el problema de contorno de la ecuación diferencial elíptica lineal de segundo orden, la elipticidad de este estudio significa que, para cada punto del conjunto abierto, la matriz simétrica es definida positiva. En el caso del presente problema de contorno, obtuvimos que la solución admite una solución generalizada en el espacio de Sobolev Serguéi de orden uno de las funciones que se anulan en la frontera, $H_0^1(\Omega)$. Por otro lado, para lograr esto, se siguió con el siguiente procedimiento. Inicialmente, para la elaboración del problema variacional se utilizaron las funciones en los espacios de Sobolev Serguéi que permiten la integración por partes, multiplicando los dos miembros de la ecuación por funciones en los espacios de Sobolev Serguéi de orden 1. Por tanto, la formulación variacional es determinado. En el segundo paso, se define una forma bilineal acotada, en el espacio de Sobolev Serguéi de orden uno que se

anula en su contorno, la cual es coerciva por la hipótesis de elipticidad y la desigualdad de Henry Poincaré. De la misma manera, se ha definido una forma lineal en el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$, luego se aplica el teorema de Lax Peter - Milgram Arthur, que prueba la existencia de una solución única en el espacio de Sobolev Serguéi de orden 1. Así la existencia y unicidad de la solución extendida.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

Primera. El teorema de Lax Peter - Milgram Arthur es una ampliación del teorema de conceptualización de Riesz Frigyes que establece una imagen única de un funcional lineal acotado y coercivo como una aplicación bilineal sobre los espacios de Hilbert David.

Segunda. En la proposición 4.1.2.1, el teorema de Lax Peter - Milgram Arthur verifica la existencia, unicidad y representación de la solución extendida para los problemas con valores de contorno de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Tercera. En la proposición 4.1.3.1. y la proposición 4.1.4.1, el teorema de Lax Peter - Milgram Arthur se usa para argumentar la existencia, unicidad y representación de la solución extendida de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas lineales de segundo orden.

CAPÍTULO VII

RECOMENDACIONES

Primera. Hay generalizaciones del teorema de Lax Peter - Milgram Arthur que podrían haberse desarrollado, por lo que se recomienda estudiar extensiones de este teorema para obtener mejores resultados cuando se aplica a las ecuaciones diferenciales.

Segunda. La teoría resultó ser amplia, por lo que, para desarrollar la secuencia de encontrar soluciones a un problema variacional indefinido de ecuaciones diferenciales, es necesario contar con mecanismos suficientes como el análisis funcional, espacios de Hilbert David, etc.

Tercera. Se espera que esta investigación se indague con el tránsito de los años, debido a sus variadas aplicaciones, por lo que se aconseja no focalizar únicamente en el teorema de Lax Peter - Milgram Arthur como apoyo para el estudio de resultados cualitativos de ecuaciones diferenciales, y estudiar otros tratamientos que conducen a los mismos resultados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adams, R. (1975). *Sobolev space*. Academic press. Nueva York.
- Brezis, H. (2010). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer. Science & Business Media.
- Collantes, L. y Coronel, A. (2010). *Formulación variacional de ecuaciones diferenciales parciales*. Universidad Industrial de Santander. Revista Integración, 28(2). pág. 133-152.
- Conway, J. (1985). *A course in functional analysis*, Springer.
- Dijk, G. (2013). *Distribution theory*. Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston.
- Duistermaat, J. y Kolk, J. (2010). *Distribution, theory and applicattions*. Springer Science+Business Media, LCC.
- Eboli, M. (2021). *El problema de poisson en dominios con una cúspide exterior*. [Tesis de licenciatura, Universidad de Buenos Aires]. Repositorio UBA.
http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/Eboli_Malena.pdf
- Evans, L. (1997). *Partial differential equations*. Graduate Estudios in Mathematics. Volume 19. American Mathematical Society.
- Gilbarg, D. y Trudinger, N. (2001). *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York.

- Guedes, D. (1997). *Equações diferenciais aplicadas*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro.
- Hounie, J. (1979). *Teoria elementar das distribuições*. Rio de Janeiro. Colóqui Brasileiro de Matemática.
- Kinnunen, J. (2020). *Sobolev spaces*. Aalto University, Department of Mathematics and Systems Analysis.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. Wiley New York.
- Lages, E. (1995). *Álgebra linear*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro.
- Lax, P. (2001). *Functional analysis*. Courant Institute. Wiley-Interscience. Nueva York.
- Lax, P. and Milgram A. (1954). *Parabolic equations*. Contributions to the theory of partial differential equations. Series: Annals of Mathematics Studies. Volumen 33. Princeton University Press.
- Iório, V. (1999). *EDP Un curso de graduación*. Instituto de Matemática y Ciencias Afines. UNI. Lima.
- Ruas, V. (1979). *Introdução aos problemas variacionais*. Guanabara Dois. Rio de Janeiro.
- Rudin, W. (1991). *Functional analysis*. University of Wisconsin. McGraw-Hill, Inc.

Sotomayor, J. (1979). *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada IMPA. Projeto Euclides.

Sucasaire, G. (2019). *Generalización del teorema de Lax-Milgram y un problema de condiciones de frontera lineales elípticos*. [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Federico Villareal]. Repositorio UNFV. <https://repositorio.unfv.edu.pe/handle/UNFV/3602?locale-attribute=es>