

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática

**EXISTENCIA DE SOLUCIONES ÓPTIMAS DE
PROGRAMAS MATEMÁTICOS NO LINEALES**

TESIS

Presentada por:

Bach. HERNAN ENRIQUE LUPACA MAMANI

Para optar el Título Profesional de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TACNA - PERÚ

2026

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS No 352

En la ciudad de Tacna, a través de la plataforma Google Meet con Link: meet.google.com/pwr-zgym-pdz, usando los correos institucionales de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann de Tacna, debido a la Pandemia del Covid 19; siendo las **19:00** horas del día **27** de octubre del 2020, estando presente el Jurado Calificador nominado por Resolución de Facultad No **9756-2020-FACI-UN/JBG**, conformado por los siguientes Docentes:

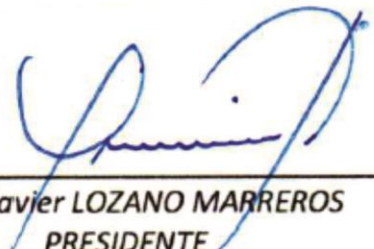
Dr. JAVIER LOZANO MARREROS	PRESIDENTE
Dr. DIONICIO MILTON CHÁVEZ MUÑOZ	SECRETARIO
DR. EDGARDO ROMÁN BERROSPI ZAMBRONO	MIEMBRO

Acto seguido, se dio lectura a la Resolución de facultad respectiva, y del mismo modo se dio lectura al Artículo 25 del Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias.

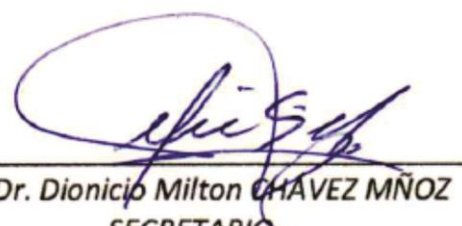
A continuación, el Presidente de Jurado invitó al Bachiller: **HERNAN ENRIQUE LUPACA MAMANI**, a exponer la Tesis titulada: **EXISTENCIA DE SOLUCIONES ÓPTIMAS DE PROGRAMAS MATEMÁTICOS NO LINEALES**.

Siendo las **19:55** horas, el bachiller concluye su exposición, luego se procedió a la formulación de preguntas por parte de los miembros del Jurado Calificador. Terminado este proceso, se invitó a que los miembros del Jurado emitan su calificación de acuerdo al reglamento. El promedio de la calificación dio el siguiente resultado: **Aprobado por unanimidad**, con la **calificación de (16)**, de acuerdo al Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias.

Siendo las **20:50** horas, se dio por concluido el acto de sustentación de la Tesis, firmando los señores miembros del Jurado Calificador, en señal de conformidad.



Dr. Javier LOZANO MARREROS
PRESIDENTE



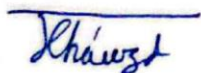
Dr. Dionicio Milton CHAVEZ MUÑOZ
SECRETARIO



Dr. Edgardo Román BERROSPI ZAMBRANO
MIEMBRO

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, **JHONY ALFONSO CHÁVEZ DELGADO**, en mi condición de Asesor acreditado por la Resolución de Facultad R.F. N°9603-2019-FACI-UN/JBG de la tesis titulada: **"EXISTENCIA DE SOLUCIONES ÓPTIMAS DE PROGRAMAS MATEMÁTICOS NO LINEALES "**, presentado por el Bachiller **HERNAN ENRIQUE LUPACA MAMANI** para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, habiendo cumplido con lo establecido en el reglamento de originalidad y de similitud de trabajos de investigación y producción intelectual, considerando que según la revisión, evaluación y análisis realizado a través del software de similitud textual TURNITIN (de fecha 26/12/2023), cuenta con el nivel de similitud cuyo porcentaje es **09%** por lo que **CERTIFICO LA SIMILARIDAD** de la tesis, la cual se ajusta al nivel **PERMITIDO**, a fin de continuar con los trámites correspondientes y su **publicación en el repositorio Institucional**.



Firma del Asesor

MSc. Jhony Alfonso Chávez Delgado

DNI:N°18124030



Firma del Tesista

Bach. Hernan Enrique Lupaca Mamani

DNI: N° 71583246

DEDICATORIA

Mis padres, Luz Marina y Hermilio, cuyo amor incondicional y sacrificio han sido la luz que ha guiado mi camino. Su apoyo constante y enseñanzas han cimentado las bases de mis logros.

A mis hermanos, Omar y Fernando, por su compañerismo y aliento inquebrantable. Su presencia en mi vida ha sido un constante recordatorio de la importancia de la familia y el apoyo mutuo.

A mi amada, Angie, por su amor, paciencia y comprensión. Tu apoyo incondicional ha sido una fuente de fortaleza en este viaje, y cada paso que he dado se ha visto enriquecido por nuestra conexión.

Gracias a todos por ser parte fundamental de este significativo capítulo de mi vida.

AGRADECIMIENTO

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han contribuido a la realización de esta tesis.

En primer lugar, agradezco a Dios, por guiarme y darme la fortaleza necesaria para superar los desafíos que encontré en el camino. Su presencia ha sido un pilar fundamental en este proceso.

Agradezco a mi asesor de tesis, MSc. Jhony Alfonso Chávez Delgado, por su invaluable apoyo, orientación y paciencia durante todo el proceso. Su conocimiento y dedicación han sido fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

A mis padres por ser mi pilar fundamental y haberme apoyado incondicionalmente, pese a las adversidades e inconvenientes que se presentaron.

Agradezco a los todos docentes que, con su sabiduría, conocimiento y apoyo me formaron como persona y profesional en la Escuela profesional de matemática de la Universidad Jorge Basadre Grohmann.

Tabla de contenido

CAPITULO 01: INTRODUCCIÓN	1
1.1. Descripción de la realidad problemática	1
1.2. Definición del problema de investigación.....	2
1.2.1. Problema general	2
1.2.2. Problema específico	2
1.3. Objetivos	2
1.3.1. Objetivo General	2
1.3.2. Objetivos específicos.....	2
1.4. Justificación.....	2
CAPITULO 02: FUNDAMENTOS TEÓRICOS	4
2.1. Antecedentes de la investigación.....	4
2.2. Bases Teóricas	5
2.2.1. Convexidad de conjuntos.....	5
2.2.2. Convexidad en funciones.....	11
2.2.3. Propiedades de las funciones cóncavas y convexas.....	16
2.3. Marco conceptual.....	21
2.3.1. Formulación de programas no lineales	21
2.3.2. Resolución Gráfica de Programas Matemáticos.....	24
2.3.3. Condiciones de globalidad para un programa matemático	41
2.3.4. Criterio de Máximos y Mínimos Globales para un programa matemático	41
CAPÍTULO 03: MATERIALES Y MÉTODOS	43
3.1. Materiales	43
3.2. Métodos	43
3.2.1. Procedimiento del Método Deductivo.....	43
CAPÍTULO 04: RESULTADOS	45
4.1. Programas Matemáticos no lineales en el plano	45
4.2. Criterio de Máximos y Mínimos globales en programas matemáticos	50
4.3. Aplicaciones.....	68
CAPÍTULO 05: DISCUSIÓN	74
CAPÍTULO 06: CONCLUSIONES.....	75
CAPÍTULO 07: RECOMENDACIONES	76
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	77
ANEXOS.....	79

Índice de figuras

Figura 2.1. Convexidad en $\mathbb{E}^2$	5
Figura 2.2. Convexidad en $\mathbb{E}^2$	6
Figura 2.3. Convexidad en $\mathbb{E}^2$	6
Figura 2.4. Conjunto convexo	7
Figura 2.5. Conjunto convexo	8
Figura 2.6. Intersección de conjuntos convexos.....	9
Figura 2.7. Unión de conjuntos convexos	10
Figura 2.8. Intersección de una familia de conjuntos convexos.....	11
Figura 2.9. Convexidad de funciones.....	12
Figura 2.10. Convexidad de funciones.....	13
Figura 2.11. Convexidad de funciones.....	13
Figura 2.12. Función ni cóncava ni convexa	13
Figura 2.13. Función cóncava y estrictamente cóncava.....	15
Figura 2.14. $\mathcal{A}_\ell$ conjunto convexo	16
Figura 2.15. $\mathcal{B}_\ell$ conjunto convexo	17
Figura 2.16. $\mathcal{A}_\ell$ y $\mathcal{B}_\ell$ conjuntos convexos	17
Figura 2.17. $\mathcal{A}_\ell$ y $\mathcal{B}_\ell$ conjuntos convexos	18
Figura 2.18. $\mathcal{A}_\ell$ y $\mathcal{B}_\ell$ conjuntos convexos	18
Figura 2.19. Imagen convexa.....	20
Figura 2.20. Curvas de nivel $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$	25
Figura 2.21. Curvas de nivel $g(x_1, x_2) = x_1 x_2$	26
Figura 2.22. Curvas de nivel $g(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$	27
Figura 2.23. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$	28
Figura 2.24. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$	29
Figura 2.25. $2x_1^2 + x_2^2 \leq 4$	29
Figura 2.26. $-x_1 + 2x_2 \leq 1$	30
Figura 2.27. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$	30
Figura 2.28. $x_2 + 4 \geq (x_1 + 3)^2$	31
Figura 2.29. $x_2 - 2x_1 \leq 3$	31
Figura 2.30. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$	32
Figura 2.31. Conjunto factible $\mathbb{C}_\xi$	34
Figura 2.32. Dibujo $1 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 2$	34
Figura 2.33. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$	35
Figura 2.34. Máximo y mínimo global del programa $(\mathbb{P}_1)$	35
Figura 2.35. Curvas de nivel $\mathbb{C}_\xi$	37

Figura 2.36. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$	37
Figura 2.37. Máximos y mínimos globales del programa $(\mathbb{P}_2)$	38
Figura 2.38. Curvas de nivel $\mathbb{C}_\xi$	39
Figura 2.39. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$	40
Figura 2.40. Máximo y mínimo del programa $(\mathbb{P}_3)$	40
Figura 2.41. Conjunto cerrado y la función continua	42
Figura 4.1. Curvas de nivel $\mathbb{C}_\xi$ del programa $(\mathbb{P}_5)$	47
Figura 4.2. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ del programa $(\mathbb{P}_5)$	47
Figura 4.3. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ del programa $(\mathbb{P}_5)$	48
Figura 4.4. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ del programa $(\mathbb{P}_5)$	48
Figura 4.5. Máximo y mínimo global del programa $(\mathbb{P}_5)$	49
Figura 4.6. $\mathbb{B}(x_1, \varepsilon) \cap \mathbb{C}_{\text{fac}}$	52
Figura 4.7. Función cerrada $\mathbb{h}_1^{-1}$	53
Figura 4.8. Función cerrada $\mathbb{h}_2^{-1}$	53
Figura 4.9. Función cerrada $\mathbb{h}_3^{-1}$	54
Figura 4.10. Función cerrada $\mathbb{h}_4^{-1}$	54
Figura 4.11. Curvas de nivel $\mathbb{C}_\xi$ del programa $(\mathbb{P}_6)$	55
Figura 4.12. Curvas de nivel $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ del programa $(\mathbb{P}_6)$	56
Figura 4.13. Máximo y mínimo del programa $(\mathbb{P}_6)$	57
Figura 4.14. Función cerrada $\mathbb{h}_1^{-1}$	59
Figura 4.15. Función cerrada $\mathbb{h}_2^{-1}$	60
Figura 4.16. Función cerrada $\mathbb{h}_3^{-1}$	60
Figura 4.17. Función cerrada $\mathbb{h}_4^{-1}$	61
Figura 4.18. Curvas de nivel $\mathbb{C}_\xi$ del programa $(\mathbb{P}_7)$	62
Figura 4.19. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ del programa $(\mathbb{P}_7)$	63
Figura 4.20. Máximo y mínimo del programa $(\mathbb{P}_7)$	64
Figura 4.21. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ del programa $(\mathbb{P}_9)$	69

Índice de tablas

Tabla 4.1. Programa ($\mathbb{P}_5$).....	49
Tabla 4.2. Programa ($\mathbb{P}_6$).....	57
Tabla 4.3. Programa ($\mathbb{P}_7$).....	64
Tabla 4.4. Programa ($\mathbb{P}_8$).....	66
Tabla 4.5. Programa ($\mathbb{P}_9$).....	69
Tabla 4.6. Programa ($\mathbb{P}_{10}$).....	71

RESUMEN

El objetivo de esta tesis es establecer los límites óptimos para la existencia de soluciones en programas matemáticos no lineales, teniendo en cuenta la restricción del procedimiento de resolución gráfica cuando la cantidad de variables de decisión es igual o mayor a tres, luego estuvieron disponible principios más absolutos para asegurar la realización de soluciones óptimas en programas no lineales que inevitablemente surgen en el uso de ingeniería, tales como diseño de estructuras mecánicas, ingeniería eléctrica, matriz equilibrada y asignación de tráfico. Se utiliza el método deductivo en el que se constituye una función real de una variable vectorial delimitada en un conjunto de soluciones factibles el cual es continua, acotada y cerrada, el programa no lineal tiene un óptimo global y se han utilizado programas matemáticos no lineales para contrastar la evidencia. Asimismo, cuando la cantidad de variables de decisión es mayor a dos, su enunciación y resolución se resolvió utilizando el software LINGO. En consecuencia, las condiciones óptimas se establecieron utilizando el teorema de Weierstrass para la existencia de soluciones globales mínimas y máximas. Asimismo, las situaciones bajo las cuales cada óptimo local es un óptimo global se establecieron utilizando el teorema de la programación convexa. Finalmente, las circunstancias óptimas fueron planteadas y resueltas por ordenador en programas matemáticos no lineales como LINGO.

Palabras clave: programación no lineal, soluciones globales, óptimos local y global.

ABSTRACT

The objective of this thesis is to establish the optimal limits for the existence of solutions in nonlinear mathematical programs, taking into account the restriction of the graphical resolution procedure when the number of decision variables is equal to or greater than three, then more absolute principles were available to ensure the realization of optimal solutions in nonlinear programs that inevitably arise in the use of engineering, such as mechanical structure design, electrical engineering, balanced matrix and traffic assignment. The deductive method is used in which a real function of a vector variable is constituted delimited in a set of feasible solutions which is continuous, bounded and closed, the nonlinear program has a global optimum and nonlinear mathematical programs have been used to contrast the evidence. Likewise, when the number of decision variables is greater than two, its enunciation and resolution was solved using the LINGO software. Consequently, the optimal conditions were established using the Weierstrass theorem for the existence of minimum and maximum global solutions. Furthermore, the situations under which each local optimum is a global optimum were established using the convex programming theorem. Finally, the optimal circumstances were posed and solved by computer in non-linear mathematical programs such as LINGO.

Keywords: nonlinear programming, global solutions, local and global optima.

CAPITULO 01: INTRODUCCIÓN

1.1. Descripción de la realidad problemática

La programación matemática no lineal forma parte de la investigación operativa y también tiene como objetivo, al igual que la programación lineal, de proporcionar los alimentos que permitan encontrar los puntos óptimos para una función objetivo. Esta función en programación matemática no lineal puede ser cóncava, convexa o ni cóncava ni convexa.

La programación matemática no lineal es un proceso de resolución de un sistema de igualdades y desigualdades sujeto a un conjunto de restricciones sobre un conjunto de variables reales desconocidas, con una función objetivo a optimizar, cuando una de las restricciones o la función objetivo es no lineal. Asimismo, los problemas de programación matemática no lineal se presentan de muchas formas diferentes. A diferencia del método simplex de programación lineal, aún no existe un algoritmo que pueda resolver eficientemente todos estos tipos de problemas.

Aunque las cuestiones de programación matemática lineal son muy comunes y cubren una amplia variedad de aplicaciones, en la vida real uno se enfrenta frecuentemente a otro tipo de cuestiones que no son lineales. Cuando el conjunto de restricciones, la función objetivo, o ambas, son no lineales, hablamos de una cuestión de programación no lineal. Asimismo, una cuestión de programación matemática no lineal se puede expresar como una cuestión de maximización o minimizaciones y las restricciones de inecuaciones se pueden escribir como

$$h_i(x) \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Ante una cuestión óptimo parece comprensible cuestionarse primero sobre que variables podemos tener. Una vez reconocidos las variables de resolución, nos cuestionamos que punto de vista nos permite seleccionar la mejor resolución según la finalidad a conseguir. Seguidamente, expresamos en términos matemáticos el problema que pretendemos resolver y preguntamos si tiene solución óptima y de ser así, ¿Dónde está un punto extremo de la región de viabilidad?

Cuando tenemos un programa no lineal con dos variables de resolución, su solución grafica puede darnos la respuesta.

Dado el inconveniente del procedimiento de solución grafica cuando la cantidad de variables de resolución es igual o mayor a tres, es necesario contar con puntos de vista más absolutos que garanticen la existencia de soluciones óptimas de los programas no lineales. Pero en todo esta circunstancia, es natural plantearse las siguientes preguntas.

1.2. Definición del problema de investigación

1.2.1. Problema general

¿Cómo establecer condiciones óptimas para la existencia de soluciones en programas matemáticos no lineales?

1.2.2. Problema específico

- a) ¿Cómo establecer condiciones óptimas para la existencia de soluciones mínimas y máximas globales en programas matemáticos no lineales?
- b) ¿Cómo formular y resolver condiciones óptimas por computadora en programas matemáticos no lineales?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Establecer condiciones óptimas para la existencia de soluciones en programas matemáticos no lineales.

1.3.2. Objetivos específicos

- a) Establecer condiciones óptimas para la existencia de soluciones mínimas y máximas globales en programas matemáticos no lineales.
- b) Formular y resolver condiciones óptimas por computadora en programas matemáticos no lineales

1.4. Justificación

Esta tesis de investigación plantea un problema de optimización de la existencia de soluciones en programas matemáticos no lineales, el cual se justifica porque accede a establecer propuestas que garanticen la existencia de óptimos globales, debido al inconveniente del procedimiento de resolución de gráficos cuando la cantidad de variables es mayor o igual a tres. Por otro lado,

la exploración está presente en nuestro día a día como aerolíneas, donde los vuelos se diseñan con la intención de minimizar costos y maximizar ganancias. En el ámbito de la salud, los tratamientos contra el cáncer pasan por un proceso de optimización con el límite de minimizar sus efectos adversos en los pacientes. Los inversores buscan minimizar los riesgos en sus decisiones garantizando al mismo tiempo rentabilidades satisfactorias. Finalmente, esta tesis forma parte de una línea de exploración en el campo de los programas matemáticos no lineales que se imparten en las Universidades.

CAPITULO 02: FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1. Antecedentes de la investigación

Castillo (2002), en su libro “Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia”, menciona que la finalidad del modelo es reproducir la objetividad lo más fielmente posible, tratando de entender cómo se comporta en un universo real y obteniendo las respuestas que se pueden esperar de ciertas acciones. En la práctica se utilizan muchos tipos de modelos, como modelos de inecuaciones diferenciales, modelos de ecuaciones funcionales, modelos en diferencias y elementos finitos y modelos de programación matemática.

Gutiérrez (2022), en su tesis final pretende abordar el tema de “Programación no lineal”, en el que presenta un análisis detallado de la programación no lineal, conjuntos convexos, funciones y aplicaciones de ciertos algoritmos. La finalidad de esta teoría es que cualquier persona con algunos conceptos de programación lineal pueda comprender las técnicas de programación no lineal desarrolladas, centrándose más en la aplicación de determinadas técnicas.

Cantú (1995), en su investigación “Programación no lineal”, señala que muchas cuestiones del mundo real no pueden representarse o abordarse adecuadamente en forma del programa lineal debido a la naturaleza no lineal de la función objetivo o a una u otra de las restricciones. Los esfuerzos para resolver eficientemente estas cuestiones no lineales han llevado a un rápido progreso en las últimas tres décadas. Esta teoría presenta estos desarrollos de manera lógica e independiente.

Banda & Ríos (2015), en su investigación “Existencia de una solución en un problema de optimización no lineal con restricciones de no negatividad”, señalan que en su teoría se presenta una formulación matemática para la creación de portafolios de inversión óptimos en un mercado financiero, cuya solución está garantizada por la aplicación del teorema de Karush – Kuhn – Tucker. Este teorema ocasiona las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de cuestiones de optimización no lineal con restricciones de no negatividad.

2.2. Bases Teóricas

Para el análisis de nuestros estudios, introducimos la convexidad de conjuntos y convexidad de funciones. También se definen las propiedades de las funciones cóncavas y convexas. Algunos autores consultados aparecen citados en las referencias bibliográficas, como (Dantzig, 1990), (Balboa, 2001) y (Gutiérrez, 2022)

2.2.1. Convexidad de conjuntos

Definición 2.2.1.1. (Conjunto Convexo en $\mathbb{E}^n$)

Un subconjunto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{E}^n$ es convexo si $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, \forall \xi \in [0,1]$ se verifica

$$\xi x_1 + (1 - \xi)x_2 \in \mathcal{D}$$

Notación 2.2.1.1. El espacio euclidiano n dimensional, se denota por $\mathbb{E}^n$

Definición 2.2.1.2. (Segmento de recta)

Se denomina segmento de recta de extremos $x_1, x_2 \in \mathbb{E}^n$, al conjunto

$$[x_1, x_2] = \{x_3 \in \mathbb{E}^n: x_3 = \xi x_1 + (1 - \xi)x_2, 0 \leq \xi \leq 1\}$$

Definición 2.2.1.3. (Conjunto Convexo en $\mathbb{E}^n$)

Un conjunto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{E}^n$ es convexo si y solo si $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, \forall \xi \in [0,1]$ se tiene $[x_1, x_2] \subset \mathcal{D}$

Ejemplo 2.2.1.1. Dibuja conjuntos convexos y otros que no lo sean

Solución

Convexidad en $\mathbb{E}^2$

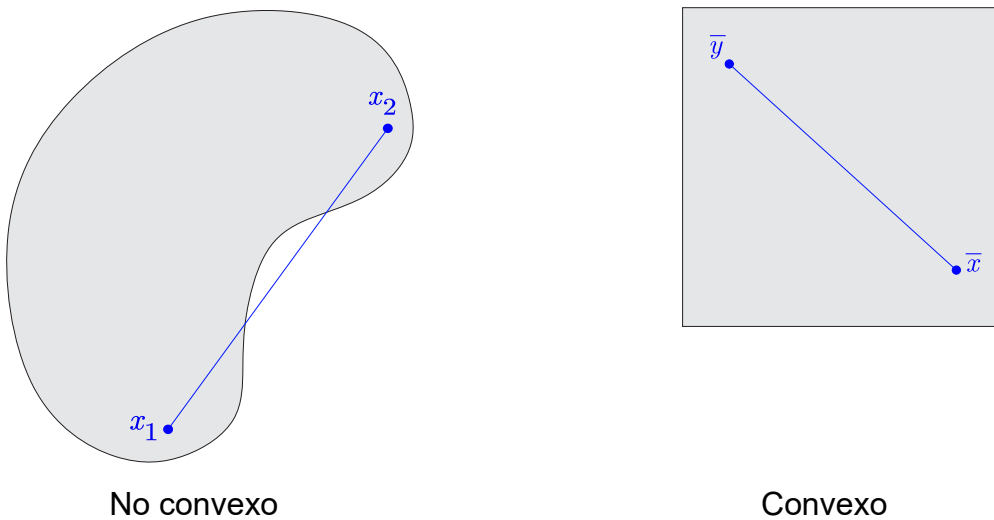
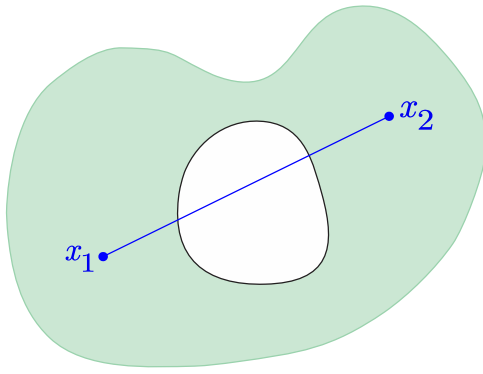
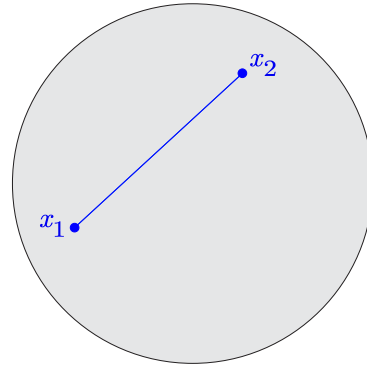


Figura 2.1. Convexidad en $\mathbb{E}^2$



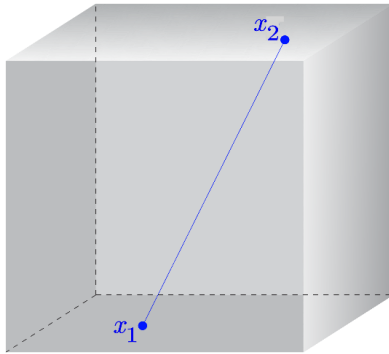
No convexo



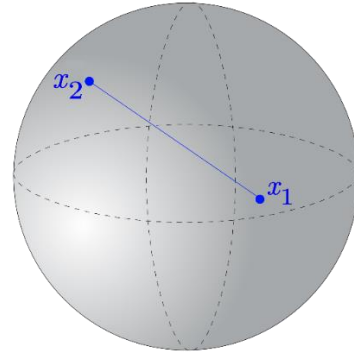
Convexo

Figura 2.2. Convexidad en $\mathbb{E}^2$

Convexidad en $\mathbb{E}^3$



Convexo



Convexo

Figura 2.3. Convexidad en $\mathbb{E}^3$

Definición 2.2.1.4. (Combinación en $\mathbb{E}^n$)

Un conjunto $\mathcal{D} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de elementos de $\mathbb{E}^n$ con $x = \delta_1 x_1, \dots, \delta_n x_n = \sum_{j=1}^n \delta_j x_j$. Se dice que $x \in \mathbb{E}^n$ es una combinación lineal de elementos de $\mathcal{D}$ si existen escalares $\delta_j \in \mathbb{E}^1, j = \overline{1, n}$.

Definición 2.2.1.5. (Combinación positiva)

Un conjunto $\mathcal{D} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de elementos de $\mathbb{E}^n$ con $x = \delta_1 x_1, \dots, \delta_n x_n = \sum_{j=1}^n \delta_j x_j$. Se dice que $x \in \mathbb{E}^n$ es una combinación lineal positiva de elementos de $\mathcal{D}$ si existen escalares $\delta_j \geq 0, j = \overline{1, n}$.

Definición 2.2.1.6. (Combinación convexa)

Un conjunto $\mathcal{D} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de elementos de $\mathbb{E}^n$ con $x = \delta_1 x_1, \dots, \delta_n x_n = \sum_{j=1}^n \delta_j x_j$. Se dice que $x \in \mathbb{E}^n$ es una combinación lineal convexa de los elementos $\mathcal{D}$ si existen escalares $\delta_j \in [0,1]$ tal que $\sum_{j=1}^n \delta_j = 1, j = \overline{1,n}$.

Ejemplo 2.2.1.2.

Analizar si $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x \geq y\}$ es un conjunto convexo.

Solución

Gráficamente

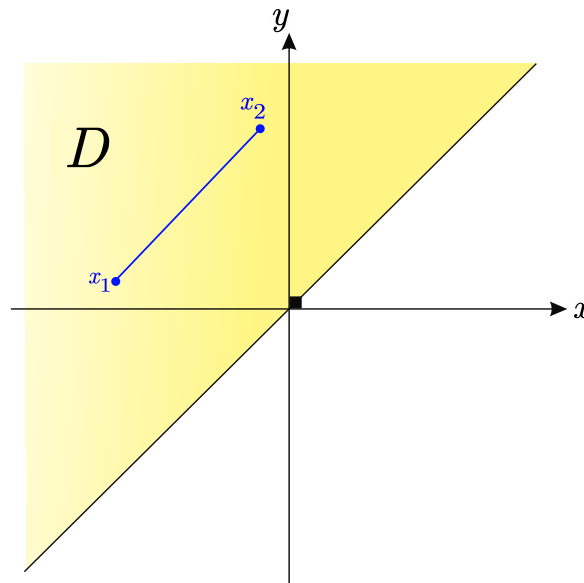


Figura 2.4. Conjunto convexo

Analíticamente

Sean $x_1 = (\overline{x}_1, \overline{x}_2), x_2 = (\overline{y}_1, \overline{y}_2)$ elementos de $\mathcal{D}$.

Afirmación $\forall \xi \in [0,1]$ tenemos que: $x_3 = \xi x_1 + (1 - \xi)x_2 \in \mathcal{D}$

En efecto, $x_3 = (x_1, x_2) = \xi(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + (1 - \xi)(\overline{y}_1, \overline{y}_2)$

$$\begin{aligned} &= (\xi \overline{x}_1, \xi \overline{x}_2) + ((1 - \xi)\overline{y}_1, (1 - \xi)\overline{y}_2) \\ &= (\xi \overline{x}_1 + (1 - \xi)\overline{y}_1, \xi \overline{x}_2 + (1 - \xi)\overline{y}_2) \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\begin{cases} \overline{z}_1 = \xi \overline{x}_1 + (1 - \xi)\overline{y}_1 \\ \overline{z}_2 = \xi \overline{x}_2 + (1 - \xi)\overline{y}_2 \end{cases}$$

Como $x_1 \in \mathcal{D} \Rightarrow \overline{x}_2 \geq \overline{x}_1$ y $x_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow \overline{y}_2 \geq \overline{y}_1$

Sabemos que si $x_1 \geq 0, (1 - \xi)x_2 \geq 0$ tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \xi \bar{x}_2 \geq \xi \bar{x}_1 \\ (1 - \xi) \bar{y}_2 \geq (1 - \xi) \bar{y}_1 \end{array} \right\}$$

$$\xi \bar{x}_2 + (1 - \xi) \bar{y}_2 \geq \xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1 \Rightarrow \bar{z}_2 \geq \bar{z}_1$$

Entonces $\mathcal{D}$ es convexo porque $x_3 \in \mathcal{D}$

Ejemplo 2.2.1.3.

Analizar si $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : y \geq x^2\}$ es un conjunto convexo.

Solución

Gráficamente

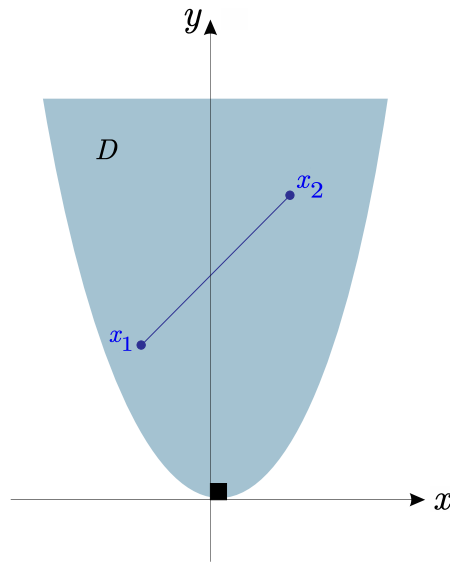


Figura 2.5. Conjunto convexo

Analíticamente

Sean $x_1 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2), x_2 = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ elementos de $\mathcal{D}$.

Afirmación $\forall \xi \in [0,1]$ tenemos que: $x_3 = \xi x_1 + (1 - \xi)x_2 \in \mathcal{D}$

En efecto, $x_3 = (x_1, x_2) = \xi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + (1 - \xi)(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$

$$\begin{aligned} \bar{z} = (z_1, z_2) &= \lambda(x_1, x_2) + (1 - \lambda)(y_1, y_2) \\ &= (\xi \bar{x}_1, \xi \bar{x}_2) + ((1 - \xi) \bar{y}_1, (1 - \xi) \bar{y}_2) \\ &= (\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1, \xi \bar{x}_2 + (1 - \xi) \bar{y}_2) \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\begin{cases} \bar{z}_1 = \xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1 \\ \bar{z}_2 = \xi \bar{x}_2 + (1 - \xi) \bar{y}_2 \end{cases}$$

Como $x_1 \in \mathcal{D} \Rightarrow \bar{x}_2 \geq \bar{x}_1^2$ y $x_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow \bar{y}_2 \geq \bar{y}_1^2$

Sabemos que si $x_1 \geq 0, (1 - \xi) x_2 \geq 0$ tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \xi \bar{x}_2 \geq \xi \bar{x}_1 \\ (1 - \xi) \bar{y}_2 \geq (1 - \xi) \bar{y}_1 \end{array} \right\}$$

$$\xi \bar{x}_2 + (1 - \xi) \bar{y}_2 \geq \xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1 \Rightarrow \bar{z}_1^2 \geq \bar{z}_2$$

Entonces $\mathcal{D}$ es convexo porque $x_3 \in \mathcal{D}$

Observación 2.2.1.1.

$$\begin{aligned} \xi \bar{x}_1^2 + (1 - \xi) \bar{y}_1^2 &\geq \xi^2 \bar{x}_1^2 + (1 - \xi)^2 \bar{y}_1^2 + 2\xi \bar{x}_1(1 - \xi) \bar{y}_1 \\ \xi \bar{x}_1^2 + (1 - \xi) \bar{y}_1^2 - \xi^2 \bar{x}_1^2 - (1 - \xi)^2 \bar{y}_1^2 - 2\xi \bar{x}_1(1 - \xi) \bar{y}_1 &\geq 0 \\ \xi \bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2 \left((1 - \xi) - (1 - \xi)^2 \right) - \xi^2 \bar{x}_1^2 - 2\xi \bar{x}_1(1 - \xi) \bar{y}_1 &\geq 0 \\ \xi \bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2 (1 - \xi - (1 - 2\xi + \xi^2)) - \xi^2 \bar{x}_1^2 - 2\xi \bar{x}_1(1 - \xi) \bar{y}_1 &\geq 0 \\ \xi \bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2 (\xi - \xi^2) - \xi^2 \bar{x}_1^2 - 2\xi \bar{x}_1(1 - \xi) \bar{y}_1 &\geq 0 \\ \bar{x}_1^2 (\xi - \xi^2) + \bar{y}_1^2 (\xi - \xi^2) - 2\xi \bar{x}_1(1 - \xi) \bar{y}_1 &\geq 0 \\ \bar{x}_1^2 \xi (1 - \xi) + \bar{y}_1^2 \xi (1 - \xi) - 2\xi \bar{x}_1(1 - \xi) \bar{y}_1 &\geq 0 \\ \xi (1 - \xi) (\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2 - 2\bar{x}_1 \bar{y}_1) &\geq 0 \\ \underbrace{\xi}_{\geq 0} \underbrace{(1 - \xi)}_{\geq 0} \underbrace{(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)^2}_{\geq 0} &\geq 0 \end{aligned}$$

Proposición 2.2.1.1. Sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ dos conjuntos convexos de $\mathbb{E}^n$. Entonces

$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ es un conjunto convexo

Demostración

Sean $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ dos conjuntos convexos de $\mathbb{E}^n$. Afirmación: $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ es un conjunto convexo.

En efecto

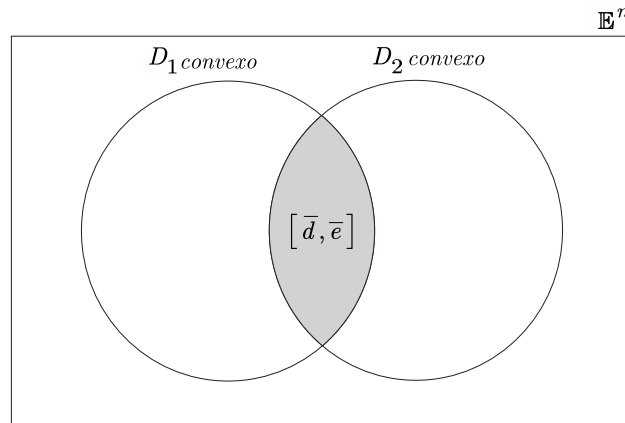


Figura 2.6. Intersección de conjuntos convexos

Sean $\bar{d}, \bar{e} \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$. Asimismo, $\bar{d}, \bar{e} \in \mathcal{D}_1$ y $\bar{d}, \bar{e} \in \mathcal{D}_2$, como $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ son convexos se verifica que $[\bar{d}, \bar{e}] \subset \mathcal{D}_1$ y $[\bar{d}, \bar{e}] \subset \mathcal{D}_2$. Entonces tenemos que $[\bar{d}, \bar{e}] = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$. Por lo tanto $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ es convexo.

Proposición 2.2.1.2. Si $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ son conjuntos convexos de $\mathbb{E}^n$ entonces $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 = \{\bar{d} \in \mathbb{R}^n / \exists \bar{d}_1 \in \mathcal{D}_1, \bar{d}_2 \in \mathcal{D}_2; \bar{d} = \bar{d}_1 + \bar{d}_2\}$ es un conjunto convexo

Demostración

Supongamos que $\bar{d}, \bar{e} \in \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ entonces $\exists \bar{d}_1, \bar{e}_1 \in \mathcal{D}_1$ y $\exists \bar{d}_2, \bar{e}_2 \in \mathcal{D}_2$ tal que $\bar{d} = \bar{d}_1 + \bar{d}_2, \bar{e} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$. Como $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ son convexos $\forall \xi \in [0,1]$ comprobamos que

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \xi \bar{d} + (1 - \xi) \bar{e} = \xi(\bar{d}_1 + \bar{d}_2) + (1 - \xi)(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) \\ &= \xi \bar{d}_1 + (1 - \xi) \bar{e}_1 + \xi \bar{d}_2 + (1 - \xi) \bar{e}_2 \\ &= \bar{d}_1 + \bar{d}_2 \in \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ es convexo.

Ejemplo 2.2.1.4.

Explicar que la unión de conjuntos convexos no es convexa

Solución

En $\mathbb{E}^1$ los intervalos son conjuntos convexos. Por ejemplo, sean $\mathcal{D}_1 = (0,3), \mathcal{D}_2 = (6,8)$ conjuntos convexos y sean $x_1 = 2, x_2 = 8, \xi = \frac{3}{4}$

Por definición de conjunto convexo, tenemos que:

$$[x_1, x_2] = \frac{3}{4}(2) + \left(1 - \frac{3}{4}\right)8 = \frac{7}{2} \notin \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$$



Figura 2.7. Unión de conjuntos convexos

Entonces $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ no es un conjunto convexo

Proposición 2.2.1.3.

Sea $\{\mathcal{D}_j / j \in \mathcal{J}\}$ una familia de subconjuntos convexos de $\mathbb{E}^n$. Entonces $\mathcal{D} = \bigcap_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{D}_j$ es un conjunto convexo.

Demostración

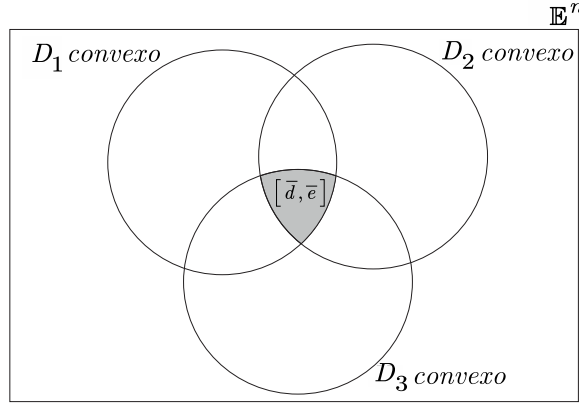


Figura 2.8. Intersección de una familia de conjuntos convexos

Sea $\bar{d}, \bar{e} \in \mathcal{D} = \bigcap_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{D}_j$, entonces $\forall j \in \mathcal{J}, \bar{d}, \bar{e} \in \mathcal{D}_j$. Pero como $\mathcal{D}_j$ es convexo se sigue que $[\bar{d}, \bar{e}] \subset \mathcal{D}_j, \forall j \in \mathcal{J}$. Por lo tanto, tenemos que $[\bar{d}, \bar{e}] = \bigcap_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{D}_j$. Entonces $\mathcal{D}$ es convexo.

2.2.2. Convexidad en funciones

Definición 2.2.2.1. (Función convexa)

Sea $\mathcal{D}$ un conjunto convexo no vacío de $\mathbb{E}^n$. La función $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^1$ es convexa si $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ y $\forall \xi \in [0,1]$ es verdadero:

$$g(\xi x_1 + (1 - \xi)x_2) \leq \xi g(x_1) + (1 - \xi)g(x_2)$$

Definición 2.2.2.2. (Función cóncava)

Sea $\mathcal{D}$ un conjunto convexo no vacío de $\mathbb{E}^n$. La función $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^1$ es cóncava si $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ y $\forall \xi \in [0,1]$ es verdadero:

$$g(\xi x_1 + (1 - \xi)x_2) \geq \xi g(x_1) + (1 - \xi)g(x_2)$$

Definición 2.2.2.3. (Función estrictamente convexa)

Sea $\mathcal{D}$ un conjunto convexo no vacío de $\mathbb{E}^n$. La función $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^1$ es estrictamente convexa si $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ con $x_1 \neq x_2, \forall \xi \in (0,1)$ se cumple:

$$g(\xi x_1 + (1 - \xi)x_2) < \xi g(x_1) + (1 - \xi)g(x_2)$$

Definición 2.2.2.4. (Función estrictamente cóncava)

Sea $\mathcal{D}$ un conjunto convexo no vacío de $\mathbb{E}^n$. La función $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^1$ es estrictamente cóncava si $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ con $x_1 \neq x_2, \forall \xi \in (0,1)$ se cumple:

$$g(\xi x_1 + (1 - \xi)x_2) > \xi g(x_1) + (1 - \xi)g(x_2)$$

Gráficamente, esta función se muestra en la Figura 2.9.

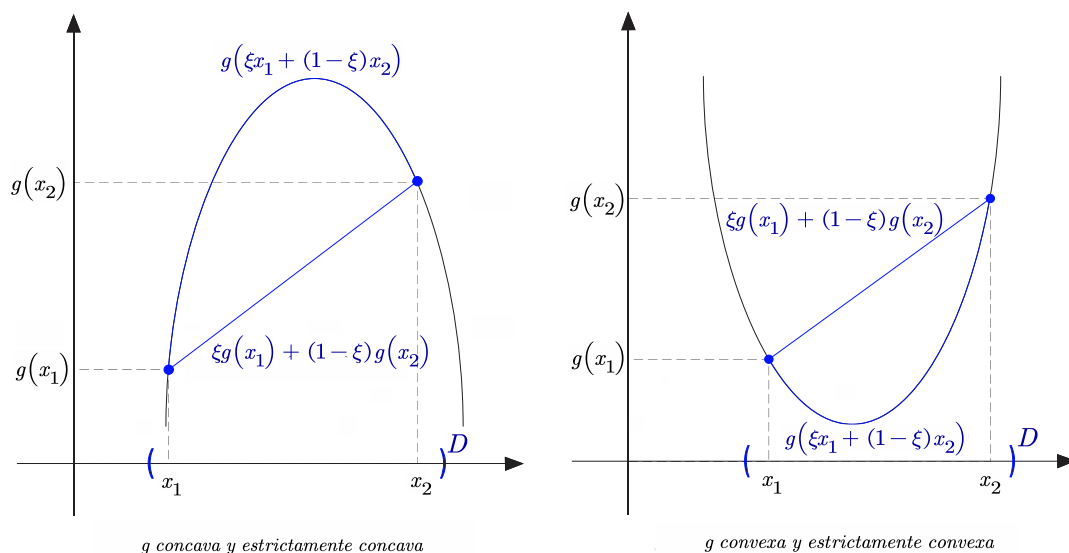


Figura 2.9. Convexidad de funciones

Proposición 2.2.2.1. Sea $h = f \circ g$ con $g: \mathcal{D}_1 \subset \mathbb{E}^n \rightarrow \mathcal{J}$ y $f: \mathcal{J} \subset \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^1$ donde $\mathcal{D}_1$ es convexo en $\mathbb{E}^n$, $\mathcal{J}$ un intervalo abierto en $\mathbb{E}^1$. Entonces tenemos:

- a) Si g es convexa y f es creciente y convexa entonces h es convexa
- b) Si g es convexa y f es decreciente y cóncava entonces h es cóncava
- c) Si g es cóncava y f es decreciente y convexa entonces h es convexa
- d) Si g es cóncava y f es creciente y cóncava entonces h es cóncava

Ejemplo 2.2.2.1.

Graficar una función que sea convexa pero no estrictamente convexa, una función que sea estrictamente convexa, una función que no sea ni cóncava ni convexa.

Solución

En los siguientes gráficos tenemos

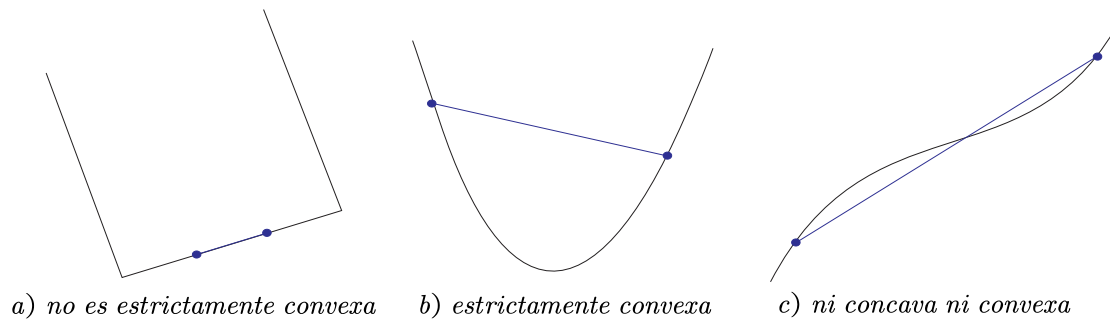


Figura 2.10. Convexidad de funciones

Ejemplo 2.2.2.2. Graficar una función cóncava pero no estrictamente cóncava, una función estrictamente cóncava y una función que no es ni convexa ni cóncava.

Solución

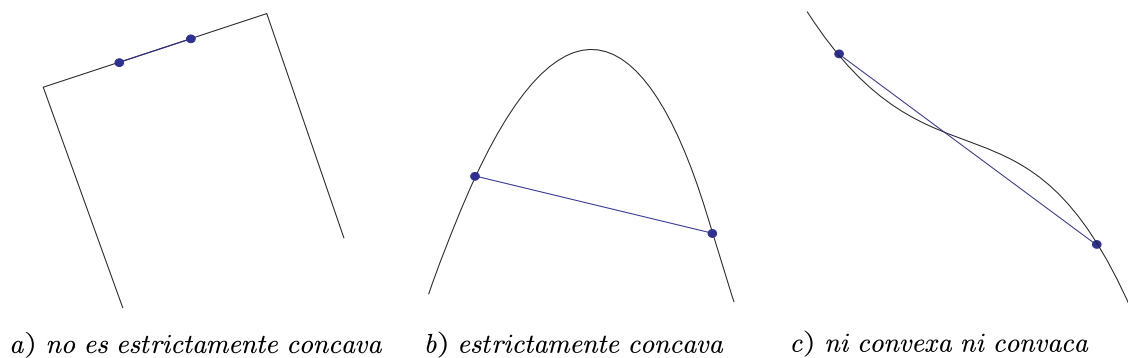


Figura 2.11. Convexidad de funciones

Ejemplo 2.2.2.3. Use la definición de convexidad de funciones en $g(\bar{x}_1) = \sin(\bar{x}_1)$ con $D = [0, 2\pi]$

Solución

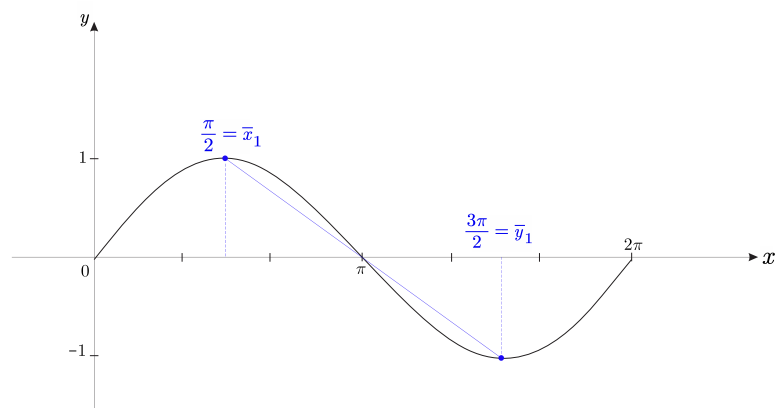


Figura 2.12. Función ni cóncava ni convexa

Afirmación: La función g no es cóncava ni convexa en $\mathcal{D}$

En efecto, existen $\bar{x}_1 = \frac{\pi}{2}, \bar{y}_1 = \frac{3\pi}{2}; \xi = \frac{1}{3}, \xi = \frac{3}{4} \in [0,1]$ tal que para

$$x_1 = \frac{1}{3}\bar{x}_1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\bar{y}_1, x_2 = \frac{3}{4}\bar{x}_1 + \left(1 - \frac{3}{4}\right)\bar{y}_1$$

Para $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g\left(\frac{1}{3}\bar{x}_1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\bar{y}_1\right) & x_1 &= \frac{1}{3}g(\bar{x}_1) + \left(1 - \frac{1}{3}\right)g(\bar{y}_1) \\ &= g\left(\frac{1}{3}\bar{x}_1 + \frac{2}{3}\bar{y}_1\right) & &= \frac{1}{3}g\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}g\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= g\left(\frac{1}{3}\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\frac{3\pi}{2}\right) & &= \frac{1}{3}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= g\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) & &= \frac{1}{3}(1) + \frac{2}{3}(-1) \\ &= g\left(\frac{7\pi}{6}\right) & &= -\frac{1}{3} \\ &= \text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por la definición **2.2.2.3.** tenemos

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{3}\bar{x}_1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\bar{y}_1\right) &< \frac{1}{3}g(\bar{x}_1) + \left(1 - \frac{1}{3}\right)g(\bar{y}_1) \\ -\frac{1}{2} &< -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Entonces g es estrictamente convexa.

Análogamente:

$$\begin{aligned} g(x_2) &= g\left(\frac{3}{4}\bar{x}_1 + \left(1 - \frac{3}{4}\right)\bar{y}_1\right) & x_2 &= \frac{3}{4}g(\bar{x}_1) + \left(1 - \frac{3}{4}\right)g(\bar{y}_1) \\ &= g\left(\frac{3}{4}\bar{x}_1 + \frac{1}{4}\bar{y}_1\right) & &= \frac{3}{4}g\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}g\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= g\left(\frac{3}{4}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\frac{3\pi}{2}\right) & &= \frac{3}{4}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= g\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{8}\right) & &= \frac{3}{4}(1) + \frac{1}{4}(-1) \\ &= g\left(\frac{3\pi}{4}\right) & &= \frac{1}{2} \\ &= \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Por la definición **2.2.2.4.** tenemos

$$\begin{aligned} g\left(\frac{3}{4}\bar{x}_1 + \left(1 - \frac{3}{4}\right)\bar{y}_1\right) &> \frac{3}{4} + \left(1 - \frac{3}{4}\right)g(\bar{y}_1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Entonces g es estrictamente cóncava. Concluimos que la función g no es cóncava ni convexa

Ejemplo 2.2.2.4. Usa la definición de convexidad de funciones en $g(\bar{x}_1) = \sqrt{\bar{x}_1}$ con $\mathcal{D} = \mathbb{R}_0^+$

Solución

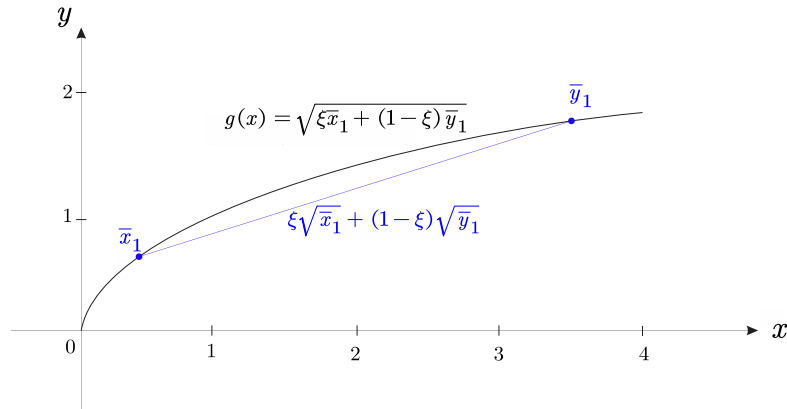


Figura 2.13. Función cóncava y estrictamente cóncava

Afirmación: La función $g(\bar{x}_1) = \sqrt{\bar{x}_1}$ es cóncava.

En efecto: $\forall \bar{x}_1, \bar{y}_1 \in \mathcal{D}; \xi \in [0, 1]$ se tiene $g(\xi\bar{x}_1 + (1 - \xi)\bar{y}_1) \geq \xi g(\bar{x}_1) + (1 - \xi)g(\bar{y}_1)$

es decir, $\sqrt{\xi\bar{x}_1 + (1 - \xi)\bar{y}_1} \geq \xi\sqrt{\bar{x}_1} + (1 - \xi)\sqrt{\bar{y}_1}$

$$\xi\bar{x}_1 + (1 - \xi)\bar{y}_1 \geq \left(\xi\sqrt{\bar{x}_1} + (1 - \xi)\sqrt{\bar{y}_1}\right)^2$$

$$\xi\bar{x}_1 + (1 - \xi)\bar{y}_1 - \left(\xi\sqrt{\bar{x}_1} + (1 - \xi)\sqrt{\bar{y}_1}\right)^2 \geq 0$$

$$\xi\bar{x}_1 + (1 - \xi)\bar{y}_1 - \xi^2\bar{x}_1 - (1 - \xi)^2\bar{y}_1 - 2\xi\sqrt{\bar{x}_1}(1 - \xi)\sqrt{\bar{y}_1} \geq 0$$

$$\xi(1 - \xi)\left(\bar{x}_1 + \bar{y}_1 - 2\sqrt{\bar{x}_1}\sqrt{\bar{y}_1}\right) = \xi(1 - \xi)(\sqrt{\bar{x}_1} - \sqrt{\bar{y}_1})^2 \geq 0$$

Entonces g es cóncava

Si $\bar{x}_1 \neq \bar{y}_1 \in \mathcal{D}$, $\xi \in (0,1)$, entonces

$$g(\xi\bar{x}_1 + (1-\xi)\bar{y}_1) > \xi g(\bar{x}_1) + (1-\xi)g(\bar{y}_1)$$

Por lo tanto g es cóncava y estrictamente cóncava.

2.2.3. Propiedades de las funciones cóncavas y convexas

Proposición 2.2.3.1. Sea $\mathcal{D}$ un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y una función $h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifican:

- a) Si h es una función convexa en $\mathcal{D}$ entonces $\mathcal{A}_\ell = \{\bar{x} \in \mathcal{D}: h(\bar{x}) \leq \ell, \ell \in \mathbb{R}\}$ es convexo
- b) Si h es una función cóncava en $\mathcal{D}$ entonces $\mathcal{B}_\ell = \{\bar{x} \in \mathcal{D}: h(\bar{x}) \geq \ell, \ell \in \mathbb{R}\}$ es convexo.

Demostración

a)

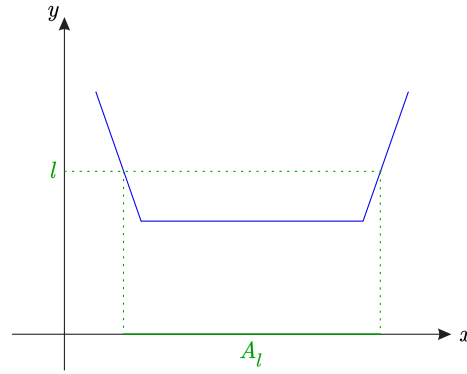


Figura 2.14. $\mathcal{A}_\ell$ conjunto convexo

Sea $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{A}_\ell \neq \emptyset$, supongamos que $\bar{x}_1, \bar{y}_1 \in \mathcal{A}_\ell$ y $\xi \in [0,1]$. Entonces, dado que $h(\bar{x}_1) \leq \ell, h(\bar{y}_1) \leq \ell$, $\bar{x}_1, \bar{y}_1 \in \mathcal{D}$ y h una función convexa en un conjunto convexo $\mathcal{D}$ comprobamos que

$$h(x) = h(\xi\bar{x}_1 + (1-\xi)\bar{y}_1) \leq \xi h(\bar{x}_1) + (1-\xi)h(\bar{y}_1) \leq \xi\ell + (1-\xi)\ell = \ell, \text{ donde} \\ x = \xi\bar{x}_1 + (1-\xi)\bar{y}_1 \in \mathcal{D}$$

Es decir,

$$h(x) \leq \ell$$

Entonces $x \in \mathcal{A}_\ell$ y $\mathcal{A}_\ell$ es un conjunto convexo

b)

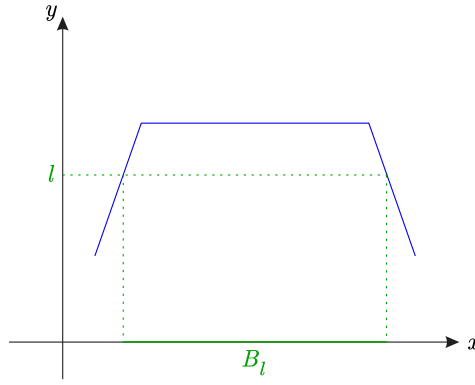


Figura 2.15. $\mathcal{B}_\ell$ conjunto convexo

Sea $\ell \in \mathbb{E}^1$ tal que $\mathcal{B}_\ell \neq \emptyset$. Supongamos que $\bar{x}_1, \bar{y}_1 \in \mathcal{B}_\ell$ y $\xi \in [0,1]$. Entonces, dado que $h(\bar{x}_1) \geq \ell, h(\bar{y}_1) \geq \ell$, $\bar{x}_1, \bar{y}_1 \in \mathcal{D}$ y h es una función cóncava en un conjunto convexo $\mathcal{D}$ comprobamos que

$$x = \xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1 \in \mathcal{D}$$

$$h(\bar{z}) = h(\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1) \geq \xi h(\bar{x}_1) + (1 - \xi) h(\bar{y}_1) \geq \xi \ell + (1 - \xi) \ell = \ell, \text{ donde}$$

$$x = \xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1 \in \mathcal{D}$$

Es decir,

$$h(\bar{z}) \geq \ell$$

Por lo tanto $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_\ell$ es un conjunto convexo

Ejemplo 2.2.3.1. Determinar $\mathcal{A}_k$ y $\mathcal{B}_k$ para la siguiente función $h(x_1) = \ln(x_1), x_1 > 0$

Solución

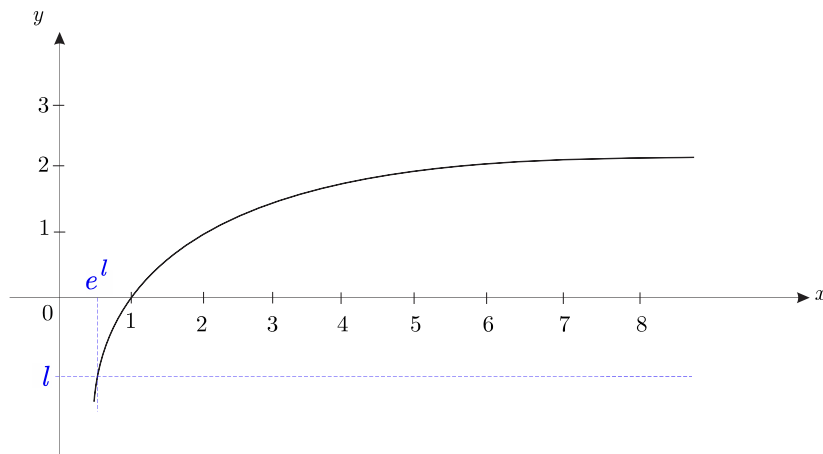


Figura 2.16. $\mathcal{A}_\ell$ y $\mathcal{B}_\ell$ conjuntos convexos

$\mathcal{A}_\ell = \{x_1 \in \mathbb{E}^1 / \ln(x_1) \leq \ell\} = (0, e^\ell]$ es un conjunto convexo

$\mathcal{B}_\ell = \{x_1 \in \mathbb{E}^1 / \ln(x_1) \geq \ell\} = [e^\ell, +\infty)$ es un conjunto convexo

Ejemplo 2.2.3.2. Determinar $\mathcal{A}_\ell$ y $\mathcal{B}_\ell$ de la siguiente función $h(x_1) = \frac{1}{x_1}, x_1 > 0$

Solución

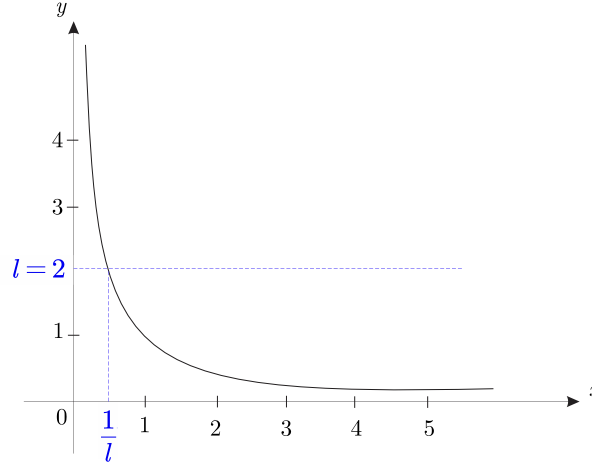


Figura 2.17. $\mathcal{A}_\ell$ y $\mathcal{B}_\ell$ conjuntos convexos

$\mathcal{A}_\ell = \{x_1 \in \mathbb{E}^1: 1/x_1 \leq \ell\} = (-\infty, 1/\ell]$ es un conjunto convexo

$\mathcal{B}_\ell = \{x_1 \in \mathbb{E}^1: 1/x_1 \geq \ell\} = [1/\ell, +\infty)$ es un conjunto convexo

Ejemplo 1.3.3.

Determinar $\mathcal{A}_\ell$ y $\mathcal{B}_\ell$ para la siguiente función $h(x_1) = \sqrt{x_1}, x_1 \geq 0$

Solución

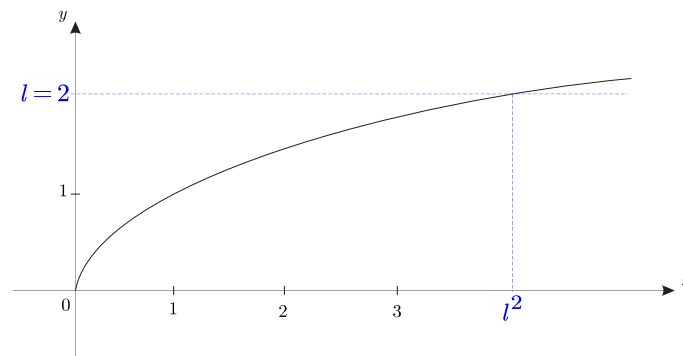


Figura 2.18. $\mathcal{A}_\ell$ y $\mathcal{B}_\ell$ conjuntos convexos

$\mathcal{A}_\ell = \{x_1 \in \mathbb{E}^1: \sqrt{x_1} \leq \ell\} = [0, \ell^2]$ es un conjunto convexo

$\mathcal{B}_\ell = \{x_1 \in \mathbb{E}^1: 1/x_1 \geq \ell\} = [1/\ell, +\infty)$ es un conjunto convexo

Proposición 2.2.3.2. Sea $\mathcal{D}$ un subconjunto convexo en $\mathbb{E}^n$ y $h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^1$ una función definida en $\mathcal{D}$, se verifican:

- a) Si h es una función convexa en $\mathcal{D}$ entonces la función $-h$ es una función cóncava.
- b) Si h es una función cóncava en $\mathcal{D}$ entonces la función $-h$ es una función convexa.
- c) Si h es una función convexa en $\mathcal{D}$ y $\eta \geq 0$ entonces la función ηh es convexa.
- d) Si h es una función convexa en $\mathcal{D}$ y $\eta \leq 0$ entonces la función ηh es cóncava.

Demostración

- a) Por hipótesis $\mathcal{D}$ es convexa, entonces $\bar{x}_1, \bar{y}_1 \in \mathcal{D}$; $\xi \in [0,1]$ tal que

$$x = \xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1 \in \mathcal{D}$$

Como h es una función convexa en $\mathcal{D}$ suponemos que:

$$h(\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1) \leq \xi h(\bar{x}_1) + (1 - \xi) h(\bar{y}_1)$$

Definiendo

$$-h(x) = (-h)(x), \forall x \in \mathcal{D}, \text{ tenemos:}$$

$$-h(\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1) \geq -(\xi h(\bar{x}_1) + (1 - \xi) h(\bar{y}_1))$$

$$(-h)(\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1) \geq \xi (-h)(\bar{x}_1) + (1 - \xi) (-h)(\bar{y}_1)$$

Por lo tanto, $-h$ es una función cóncava en $\mathcal{D}$

- b) Por hipótesis $\mathcal{D}$ es convexa, entonces existen $\bar{x}_1, \bar{y}_1 \in \mathcal{D}$; $\xi \in [0,1]$ tal que

$$x = \xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1 \in \mathcal{D}$$

Como h es una función cóncava en $\mathcal{D}$, suponemos que:

$$h(\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1) \geq \xi h(\bar{x}_1) + (1 - \xi) h(\bar{y}_1). \text{ Definiendo}$$

$$-h(x) = (-h)(x), \forall x \in \mathcal{D}, \text{ tenemos}$$

$$-h(\xi \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bar{y}_1) \leq -(\xi h(\bar{x}_1) + (1 - \xi) h(\bar{y}_1))$$

$$(-h)(\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1) \leq \xi (-h)(\bar{x}_1) + (1 - \xi) (-h)(\bar{y}_1)$$

Entonces, $-h$ es una función convexa en $\mathcal{D}$

- c) Por hipótesis $\mathcal{D}$ es convexa, entonces existen $\bar{x}_1, \bar{y}_1 \in \mathcal{D}$, $\xi \in [0,1]$ tal que

$$x = \xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1 \in \mathcal{D}$$

Como h es una función convexa en $\mathcal{D}$, suponemos que:

$$h(\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1) \leq \xi h(\bar{x}_1) + (1 - \xi) h(\bar{y}_1)$$

Definiendo

$\eta h(\bar{x}) = (\eta h)(x), \forall x \in \mathcal{D}$, tenemos

$$\eta h(\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1) \leq \eta \xi (h(\bar{x}_1) + (1 - \xi) h(\bar{y}_1))$$

$$(\eta h)(\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1) \leq \eta \xi h(\bar{x}_1) + \eta (1 - \xi) h(\bar{y}_1)$$

$$(\eta h)(\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1) \leq \xi (\eta h)(\bar{x}_1) + (1 - \xi) (\eta h)(\bar{y}_1)$$

Entonces, ηh es una función convexa en $\mathcal{D}$

d) Por hipótesis $\mathcal{D}$ es convexa, entonces existen $\bar{x}_1, \bar{y}_1 \in \mathcal{D}, \xi \in [0,1]$

$$x = \xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1 \in \mathcal{D}$$

Como h es una función convexa en $\mathcal{D}$, suponemos que:

$$h(\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1) \leq \xi h(\bar{x}_1) + (1 - \xi) h(\bar{y}_1). \text{ Definiendo}$$

$\eta h(x) = (\eta h)(x), \forall x \in \mathcal{D}$, tenemos

$$\eta h(\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1) \geq \eta (\xi h(\bar{x}_1) + (1 - \xi) h(\bar{y}_1)), \eta \leq 0$$

$$(\eta h)(\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1) \geq \eta \xi h(\bar{x}_1) + \eta (1 - \xi) h(\bar{y}_1)$$

$$(\eta h)(\xi \bar{x}_1 + (1 - \xi) \bar{y}_1) \geq \xi (\eta h)(\bar{x}_1) + (1 - \xi) (\eta h)(\bar{y}_1)$$

Entonces, ηh es una función cóncava en $\mathcal{D}$

Ejemplo 2.2.3.4.

Sea $\mathcal{D}$ un subconjunto convexo de $\mathbb{E}^n$ y g una aplicación lineal. Probar que el conjunto imagen $g(\mathcal{D})$ es convexo.

Solución

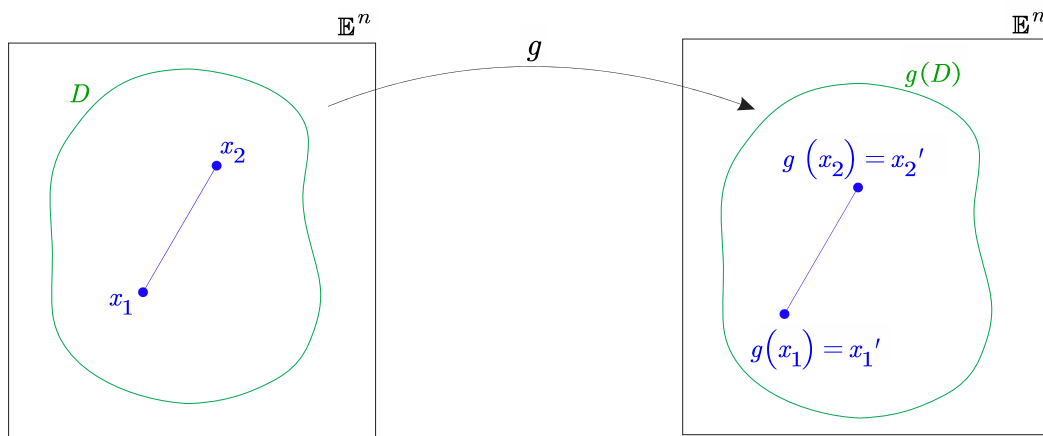


Figura 2.19. Imagen convexa

Por hipótesis $\mathcal{D}$ un conjunto convexo, entonces: $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ y $\xi \in [0,1]$ se cumple que: $x = \xi x_1 + (1 - \xi)x_2$

$$\forall x'_1, x'_2 \in \mathcal{g}(\mathcal{D}), \exists x_1, x_2 \in \mathcal{D}: \mathcal{g}(x_1) = x'_1, \mathcal{g}(x_2) = x'_2$$

Si $\mathcal{g}$ es una aplicación lineal entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{g}(x) &= \mathcal{g}(\xi x_1 + (1 - \xi)x_2) \\ &= \mathcal{g}(\xi x_1) + \mathcal{g}((1 - \xi)x_2) \\ &= \xi \mathcal{g}(x_1) + (1 - \xi)\mathcal{g}(x_2) \\ &= \xi x'_1 + (1 - \xi)x'_2 \\ &= x' \in \mathcal{g}(\mathcal{D}) \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{g}(\mathcal{D})$ es convexo.

2.3. Marco conceptual

Para el análisis de nuestras variables de estudio, introducimos algunas formulaciones de programas no lineales y resolución gráfica de programas matemáticos en el plano. También se establecen condiciones de globalidad para un programa matemático. En las referencias bibliográficas se citan algunos textos consultados como (Balbolla, 2001). (Mordecai, 2003). (Chávez, 2020) y (Gutiérrez, 2022)

2.3.1. Formulación de programas no lineales

Los problemas que se tratan son los del tipo general de programación no lineal de la forma

$$(\mathbb{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Opt } f(x) \\ \text{sujeto a} \\ \mathbb{g}_1(x) = 0 \\ \mathbb{g}_2(x) = 0 \\ \vdots \\ \mathbb{g}_m(x) = 0 \\ \mathbb{h}_1(x) \leq 0 \\ \mathbb{h}_2(x) \leq 0 \\ \vdots \\ \mathbb{h}_p(x) \leq 0 \\ x \in \Omega \subset \mathbb{E}^n \end{array} \right.$$

donde $m \leq n$ y las funciones $f, \mathbb{g}_i, \mathbb{h}_j: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p}$ son continuas con valores reales de la variable vectorial: $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Elementos de un programa no lineal:

- a) Variable de decisión: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- b) Función objetivo del problema no lineal: $f(x)$.
- c) Optimizar la función f , que consiste encontrar un valor máximo o mínimo de x es decir,

$$\text{Opt } f(x) \Leftrightarrow \max f(x) \vee \min f(x).$$

- d) Restricciones funcionales de igualdad: $g_i(x) = 0$
- e) Restricciones funcionales de desigualdad: $h_j(x) \leq 0$
- f) Restricción de conjunto: $x \in \Omega \subset \mathbb{E}^n$

Ejemplo 2.3.11. Una empresa produce 2 capitales con producto homogéneo donde p_1, p_2 son los precios respectivos y la función de costos de la empresa viene dada por:

$$C(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2$$

donde x_1, x_2 son las cantidades producidas a partir de los 2 capitales. Formular el programa matemático cuya solución permita calcular la producción de la empresa que maximiza el beneficio.

Solución

Las variables de decisión: $x_1 \equiv$ cantidad producida por el capital 1 y

$x_2 \equiv$ cantidad producida por el capital 2

Maximizar la función ganancia

$$\text{Ganancia} = \text{Ingreso} - \text{Costos}$$

$$G(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2 - 2x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2$$

Entonces el programa es:

$$\begin{cases} \text{Max } G(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2 - 2x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 \\ \text{sujeto a} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2.3.1.2. La función demanda de mercado de una empresa viene dada por $4p + q - 16 = 0$. La función de costo es

$$C_{me}(q) = \frac{4}{q} + 2 - 0.3q + 0.15q^2, q \neq 0$$

Formular el programa no lineal que produzca el valor de demanda que proporcione el máximo ingreso máximo, el costo marginal mínimo y la ganancia máxima.

Solución

Ingreso máximo:

La variable de decisión es: $q \equiv$ Cantidad demandada

Maximizar función ingreso:

$$I(q) = p q = \left(\frac{16 - q}{4} \right) q = 4q - 0.25q^2$$

Entonces el programa es:

$$\begin{cases} \text{Max } I(q) = 4q - 0.25q^2 \\ \text{sujeto a} \\ q \geq 0 \end{cases}$$

Costo marginal mínimo:

La variable de decisión es: $q \equiv$ cantidad demandada

Minimizar la función marginal:

$$\begin{aligned} Cma(q) &= \frac{d(Ct(q))}{dq} = \frac{d(Cme(q) \cdot q)}{dq} \\ Cma(q) &= \frac{d\left(\left(\frac{4}{2} + 2 - 0.3q + 0.15q^2\right)q\right)}{dq} = 2 - 2(0.3q) + 3(0.15)q^2 \end{aligned}$$

Entonces el programa es:

$$\begin{cases} \text{Min } Cma(q) = 2 - 2(0.3q) + 3(0.15)q^2 \\ \text{sujeto a} \\ q \geq 0 \end{cases}$$

Ganancia máxima

Variable de decisión: $q \equiv$ cantidad demandada

Maximizar la función ganancia: $Ganancia = Ingreso - Costo total$

$$\mathbb{G}(\mathbb{Q}) = \mathbb{I}(\mathbb{Q}) - \mathbb{Ct}(\mathbb{Q})$$

$$\begin{aligned}\mathbb{G}(\mathbb{Q}) &= 4\mathbb{Q} - 0.25\mathbb{Q}^2 - \left(\left(\frac{4}{2} + 2 - 0.3\mathbb{Q} + 0.15\mathbb{Q}^2 \right) \mathbb{Q} \right) \\ &= -4 + 2\mathbb{Q} + 0.05\mathbb{Q}^2 - 0.15\mathbb{Q}^3\end{aligned}$$

Entonces el programa es:

$$\begin{cases} \text{Max } \mathbb{G}(\mathbb{Q}) = -4 + 2\mathbb{Q} + 0.05\mathbb{Q}^2 - 0.15\mathbb{Q}^3 \\ \text{sujeto a} \\ \mathbb{Q} \geq 0 \end{cases}$$

2.3.2. Resolución Gráfica de Programas Matemáticos

Definición 2.3.2.1. (Conjuntos de nivel de $x \in \Omega$)

Dada la función $g: \Omega \subset \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $\xi \in \mathbb{R}$, se define el conjunto de nivel

$$\mathbb{C}_\xi = \{x \in \Omega / g(x) = \xi\}$$

es decir, $\mathbb{C}_\xi$ es el conjunto de todos los puntos de x que pertenecen al dominio Ω de g en el que la imagen es un valor ξ .

Observación 2.3.2.1.

1. Sea $g: \Omega \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y ξ una constante. La ecuación

$$(x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2)$$

$g(x_1, x_2) = \xi$ representa curvas en $\mathbb{E}^2$, llamadas curvas de nivel

2. Sea $g: \Omega \subset \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y ξ una constante. La ecuación

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

$g(x_1, x_2, x_3) = \xi$ representa superficies en $\mathbb{E}^3$, llamadas superficies de nivel

Ejemplo 2.3.2.1. Graficar las curvas de nivel de la siguiente función $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$

Solución

Para cada $\xi \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\mathbb{C}_\xi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / g(x_1, x_2) = \xi\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / x_1^2 - x_2 = \xi\}$$

$$\xi = 0: x_1^2 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1^2$$

$$\xi = 1: x_1^2 - x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = x_1^2 - 1$$

$$\xi = 2: x_1^2 - x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = x_1^2 - 2$$

⋮

$$\xi = -1: x_1^2 - x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = x_1^2 + 1$$

$$\xi = -2: x_1^2 - x_2 = -2 \Rightarrow x_2 = x_1^2 + 2$$

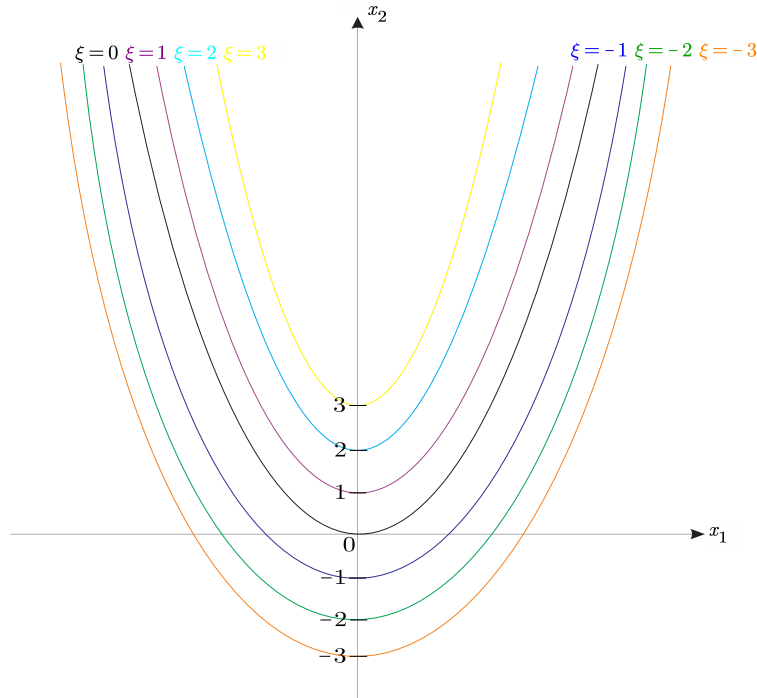


Figura 2.20. Curvas de nivel $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$

Ejemplo 2.3.2.2. Graficar las curvas de nivel de la siguiente función $g(x_1, x_2) =$

$$x_1 x_2$$

Solución

Para cada $\xi \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\mathbb{C}_\xi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / g(x_1, x_2) = \xi\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / x_1 x_2 = \xi\}$$

$$\xi = 0: x_1 x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \vee x_1 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \xi = 1: x_1 x_2 = 1 &\Rightarrow x_2 = 1/x_1, x_1 \neq 0 \\ \xi = 2: x_1 x_2 = 2 &\Rightarrow x_2 = 2/x_1, x_1 \neq 0 \\ \xi = 3: x_1 x_2 = 3 &\Rightarrow x_2 = 3/x_1, x_1 \neq 0 \end{aligned} \right\} I, III \text{ cuadrante}$$

⋮

$$\left. \begin{aligned} \xi = -1: x_1 x_2 = -1 &\Rightarrow x_2 = -1/x_1, x_1 \neq 0 \\ \xi = -2: x_1 x_2 = -2 &\Rightarrow x_2 = -2/x_1, x_1 \neq 0 \\ \xi = -3: x_1 x_2 = -3 &\Rightarrow x_2 = -3/x_1, x_1 \neq 0 \end{aligned} \right\} II, IV \text{ cuadrante}$$

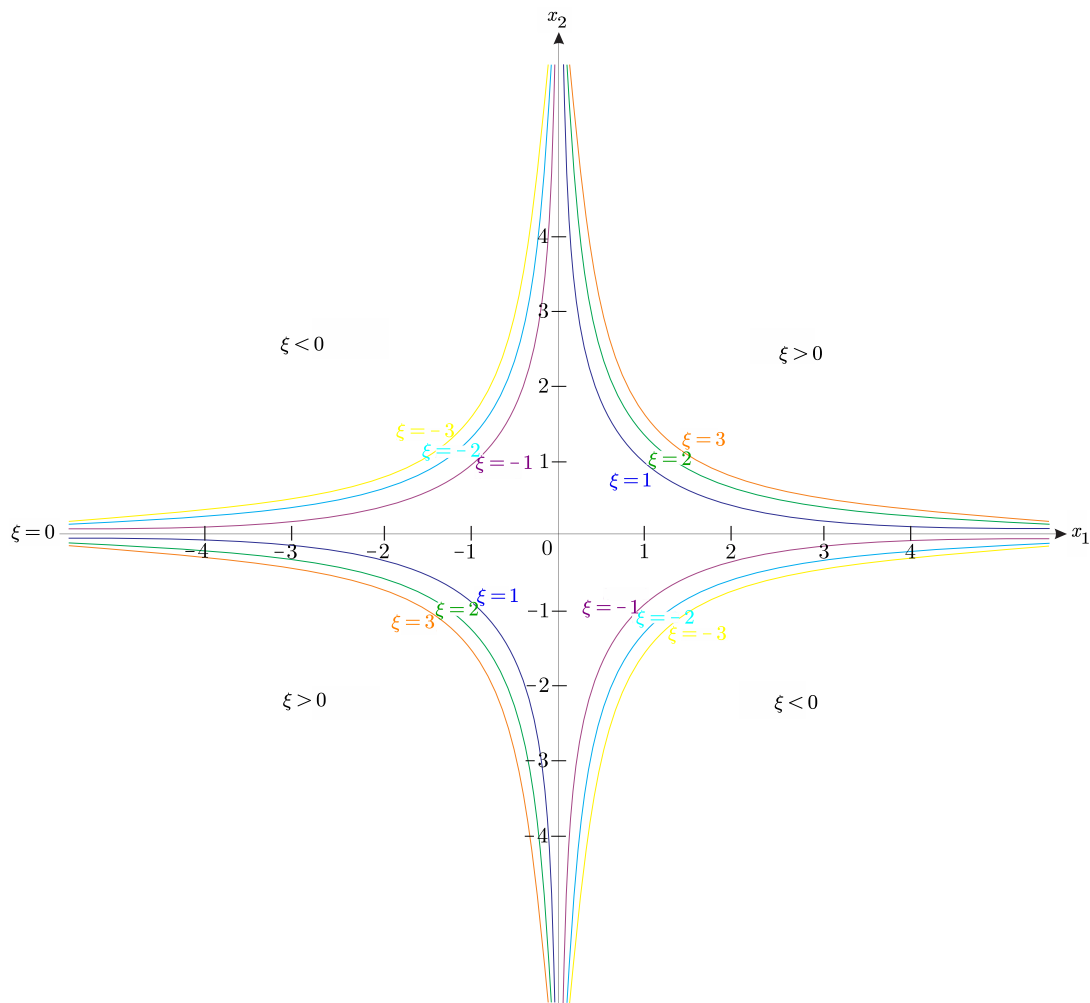


Figura 2.21. Curvas de nivel $g(x_1, x_2) = x_1 x_2$

Ejemplo 2.3.2.3. Graficar las curvas de nivel de la siguiente función $g(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$

Solución

Para cada $\xi \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\mathbb{C}_\xi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / g(x_1, x_2) = \xi\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / e^{x_1+x_2} = \xi\}$$

$$\begin{aligned} e^{x_1+x_2} &= \xi \\ \ln e^{x_1+x_2} &= \ln(\xi) \\ x_1 + x_2 &= \ln(\xi) \\ x_2 &= \ln(\xi) - x_1, \xi > 0 \end{aligned}$$

$$\xi = e^0: x_1 + x_2 = \ln(1) \Rightarrow x_2 = -x_1$$

$$\xi = e^1: x_1 + x_2 = \ln(e) \Rightarrow x_2 = 1 - x_1$$

$$\begin{aligned}
\xi = e^2: x_1 + x_2 = \ln(e^2) &\Rightarrow x_2 = 2 - x_1 \\
\xi = e^3: x_1 + x_2 = \ln(e^3) &\Rightarrow x_2 = 3 - x_1 \\
&\vdots \\
\xi = e^{-1}: x_1 + x_2 = \ln(e^{-1}) &\Rightarrow x_2 = -1 - x_1 \\
\xi = e^{-2}: x_1 + x_2 = \ln(e^{-2}) &\Rightarrow x_2 = -2 - x_1 \\
\xi = e^{-3}: x_1 + x_2 = \ln(e^{-3}) &\Rightarrow x_2 = -3 - x_1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

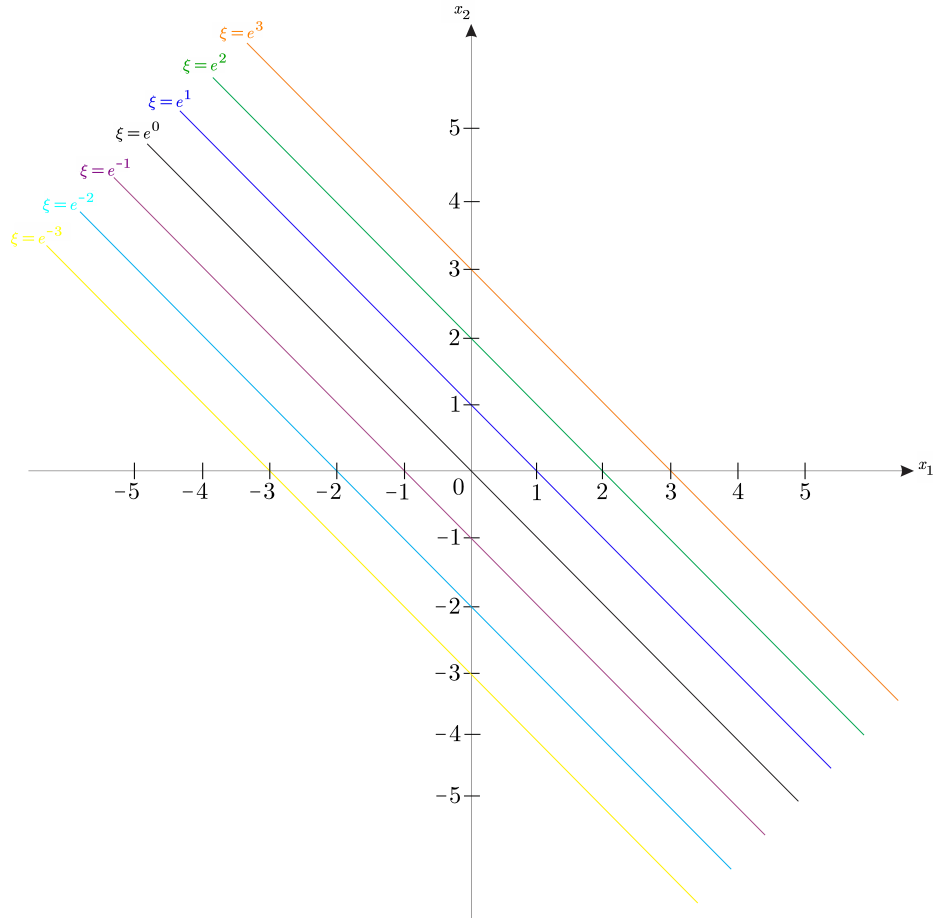


Figura 2.22. Curvas de nivel $g(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$

Definición 2.3.2.2. (Conjunto factible en un programa ($\mathbb{P}$))

El conjunto factible del programa ($\mathbb{P}$) se define como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{E}^n$, que satisfacen la restricción del programa, es decir;

$$\mathbb{C}_{\text{fac}} = \{ x \in \mathbb{E}^n, / g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, m}; h_j(x_1, \dots, x_p) \leq 0, j = \overline{1, p} \}$$

Ejemplo 2.3.2.4. Grafica el siguiente conjunto factible

$$\mathbb{C}_{\text{fac}} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / 3x_1 - x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \}$$

Solución

$$3x_1 - x_2 \leq 2$$

Para $x_1 = 0$ e $x_2 = -2$ tenemos el punto $(0, -2)$

$$x_2 = 3x_1 - 2$$

Para $x_2 = 0$ e $x_1 = 2/3$ tenemos el punto $(2/3, 0)$

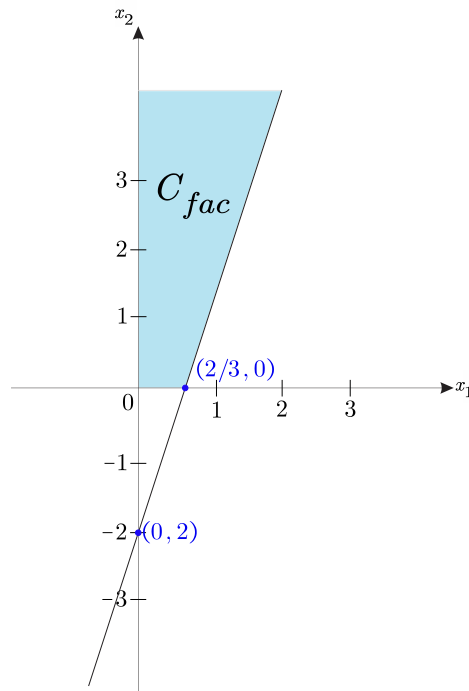


Figura 2.23. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$

Ejemplo 2.3.2.5. Graficar el siguiente conjunto factible

$$\mathbb{C}_{\text{fac}} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / 4x_2 - x_1 \geq 1, x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \}$$

Solución

$$4x_2 - x_1 \geq 1$$

$$4x_2 \geq 1 + x_1$$

$$x_2 \geq \frac{1 + x_1}{4}$$

$$x_2 = \frac{1 + x_1}{4}$$

Para $x_1 = 0$ e $x_2 = 1/4$ tenemos el punto $(0, 1/4)$

Para $x_2 = 0$ e $x_1 = -1$ tenemos el punto $(-1, 0)$

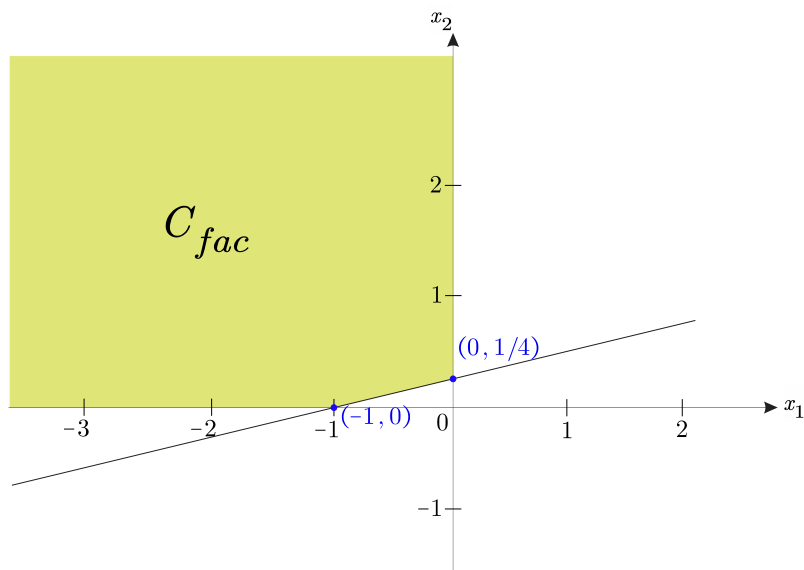


Figura 2.24. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$

Ejemplo 2.3.2.6. Grafica el siguiente conjunto factible

$$\mathbb{C}_{\text{fac}} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / 2x_1^2 + x_2^2 \leq 4, -x_1 + 2x_2 \leq 1 \}$$

Solución

$$2x_1^2 + x_2^2 = 4$$

$$\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{4} = 1$$

$$\frac{x_1^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{x_2^2}{2^2} \leq 1$$

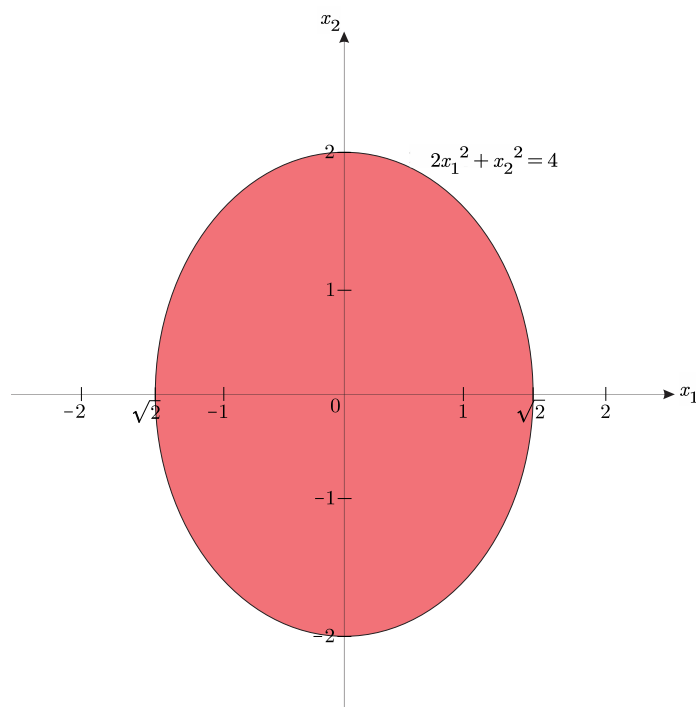


Figura 2.25. $2x_1^2 + x_2^2 \leq 4$

$$-x_1 + 2x_2 = 1$$

Para $x_1 = 0$ e $x_2 = 1/2$ tenemos el punto $(0, 1/2)$

Para $x_2 = 0$ e $x_1 = -1$ tenemos el punto $(-1,0)$

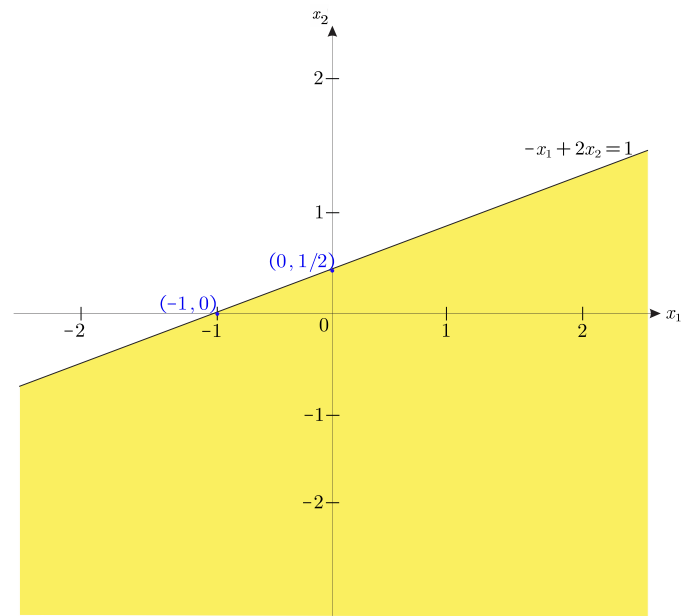


Figura 2.26. $-x_1 + 2x_2 \leq 1$

De la superposición de figuras 2.25. y 2.26. tenemos:

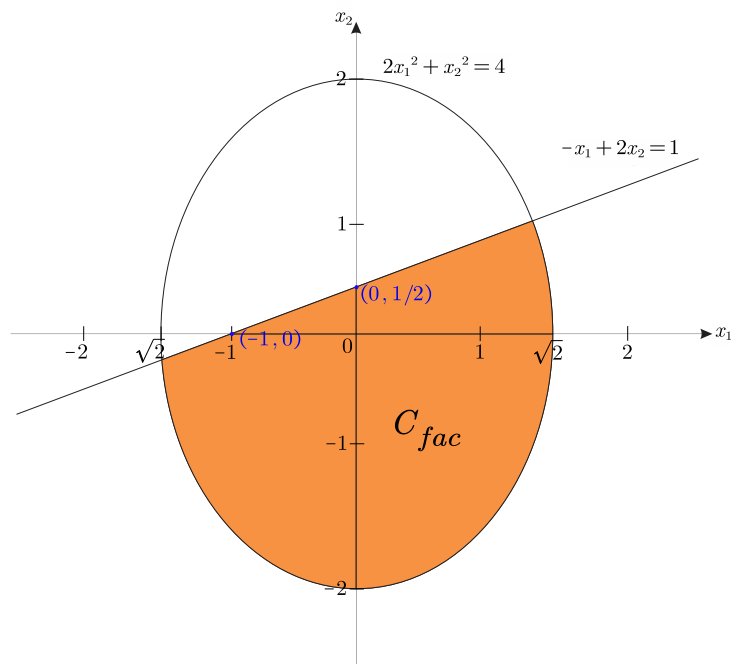


Figura 2.27. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$

Ejemplo 2.3.2.7. Grafica el siguiente conjunto factible

$$\mathbb{C}_{\text{fac}} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / x_2 + 4 \geq (x_1 + 3)^2, x_2 - 2x_1 \leq 3 \}$$

Solución

$$x_2 + 4 \geq (x_1 + 3)^2$$

$$x_2 + 4 = (x_1 + 3)^2$$

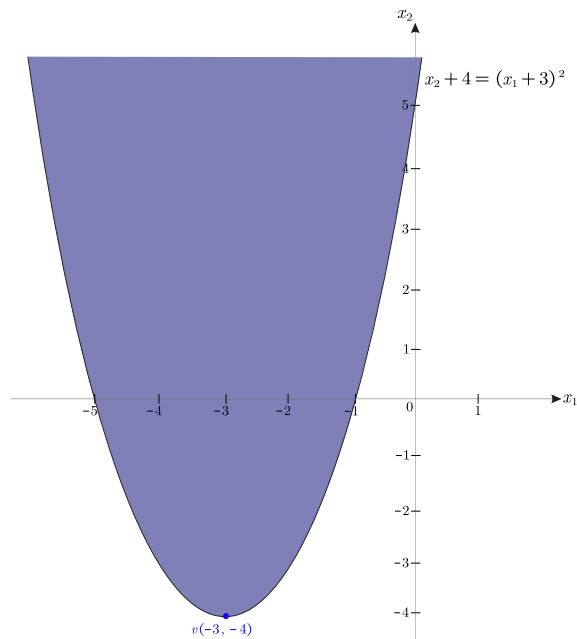


Figura 2.28. $x_2 + 4 \geq (x_1 + 3)^2$

$$x_2 - 2x_1 \leq 3$$

$$x_2 - 2x_1 = 3$$

Para $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$ tenemos el punto $(0,3)$

Para $x_2 = 0$ y $x_1 = -3/2$ tenemos el punto $(-3/2, 0)$

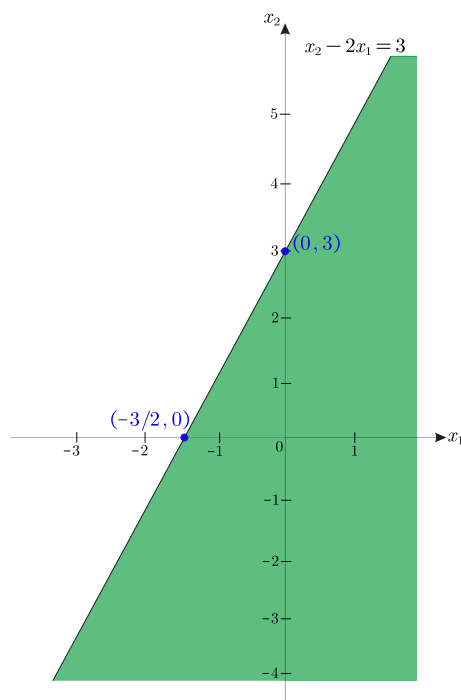


Figura 2.29. $x_2 - 2x_1 \leq 3$

De la superposición de figuras 2.28. y 2.29. tenemos:

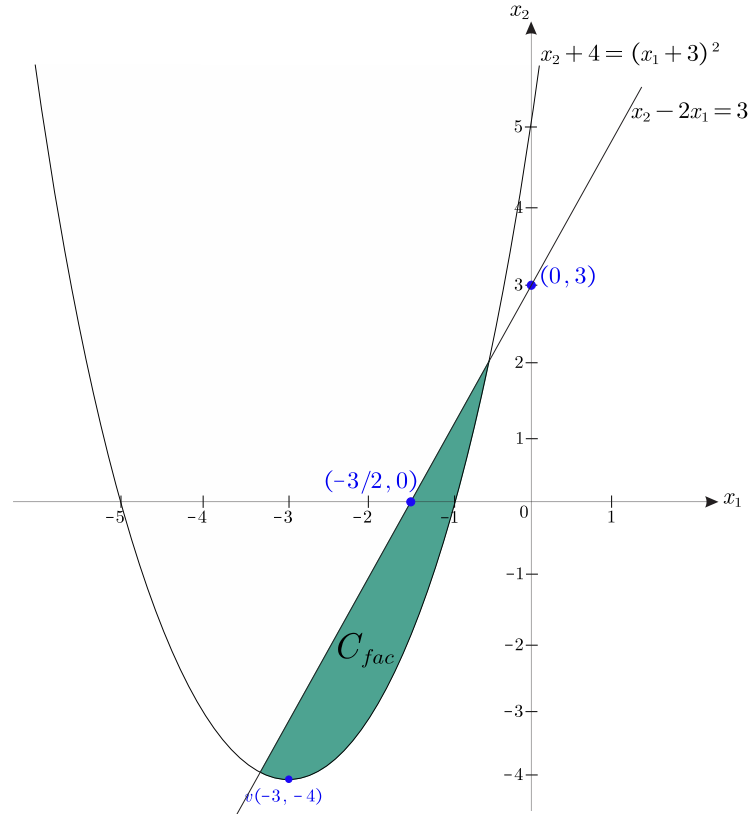


Figura 2.30. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$

Definición 2.3.2.3. (Máximo y Mínimo global en un programa $(\mathbb{P})$)

En el programa matemático

$$(\mathbb{P}) \begin{cases} \text{Opt } f(x) \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}_{\text{fac}} \subset \mathbb{E}^n \end{cases}$$

- 1) $x^* \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un máximo global del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow f(x) \leq f(x^*), \forall x \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$
- 2) $x^\circ \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un mínimo global del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x^\circ), \forall x \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$
- 3) $x^* \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un máximo global estricto del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow f(x) < f(x^*), \forall x \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$
- 4) $x^\circ \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un mínimo global estricto del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow f(x) > f(x^\circ), \forall x \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$

Definición 2.3.2.4. (Máximo y Mínimo local en un programa $(\mathbb{P})$)

En el programa matemático

$$(\mathbb{P}) \begin{cases} \text{Opt } f(x) \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}_{\text{fac}} \subset \mathbb{E}^n \end{cases}$$

- 1) $x^* \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un máximo local del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x^*), \forall x \in \mathbb{B}(x^*, \delta) \cap \mathbb{C}_{\text{fac}}$
- 2) $x^\circ \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un mínimo local del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x^\circ), \forall x \in \mathbb{B}(x^\circ, \delta) \cap \mathbb{C}_{\text{fac}}$
- 3) $x^* \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un máximo local estricto del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(x^*), \forall x \in \mathbb{B}(x^*, \delta) \cap \mathbb{C}_{\text{fac}}, x \neq x^*$
- 4) $x^\circ \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un mínimo local estricto del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(x^\circ), \forall x \in \mathbb{B}(x^\circ, \delta) \cap \mathbb{C}_{\text{fac}}, x \neq x^\circ$

Ejemplo 2.3.2.8. Dado el programa matemático lineal

$$(\mathbb{P}_1) \begin{cases} \text{Opt } f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} \\ 1 \leq x_1 \leq 2 \\ 1 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}$$

, determinar soluciones óptimas de $(\mathbb{P}_1)$

Solución

a) Curvas de nivel del programa $(\mathbb{P}_1)$

$$\mathbb{C}_\xi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / 2x_1 + 2x_2 = \xi, \xi \in \mathbb{R}\}$$

$$\xi = 0: 2x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1$$

$$\xi = 1: 2x_1 + 2x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - 2x_1/2$$

$$\xi = 2: 2x_1 + 2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 - 2x_1/2$$

$$\xi = 3: 2x_1 + 2x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 3 - 2x_1/2$$

$\vdots$

$$\xi = -1: 2x_1 + 2x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = -1 - 2x_1/2$$

$$\xi = -2: 2x_1 + 2x_2 = -2 \Rightarrow x_2 = -2 - 2x_1/2$$

$$\xi = -3: 2x_1 + 2x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -3 - 2x_1/2$$

$\vdots$

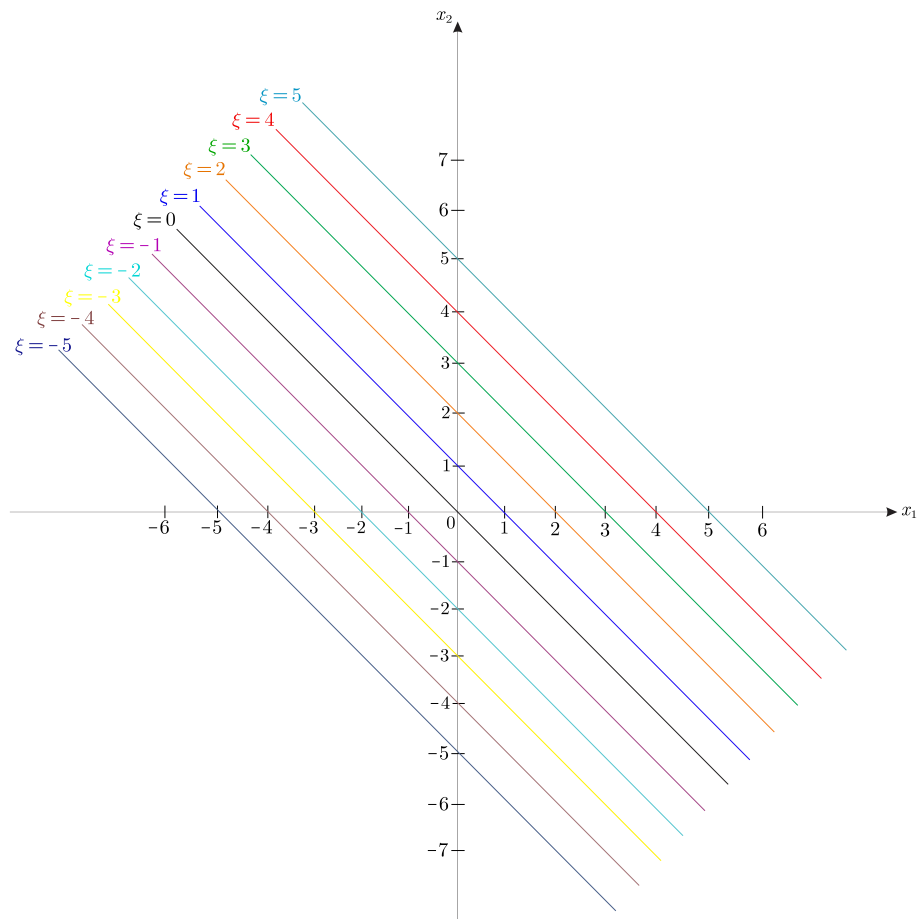


Figura 2.31. Conjunto factible $\mathbb{C}_\xi$

b) Conjunto de soluciones factibles del programa ($\mathbb{P}_1$)

$$\mathbb{C}_{\text{fac}} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / 1 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 2\}$$

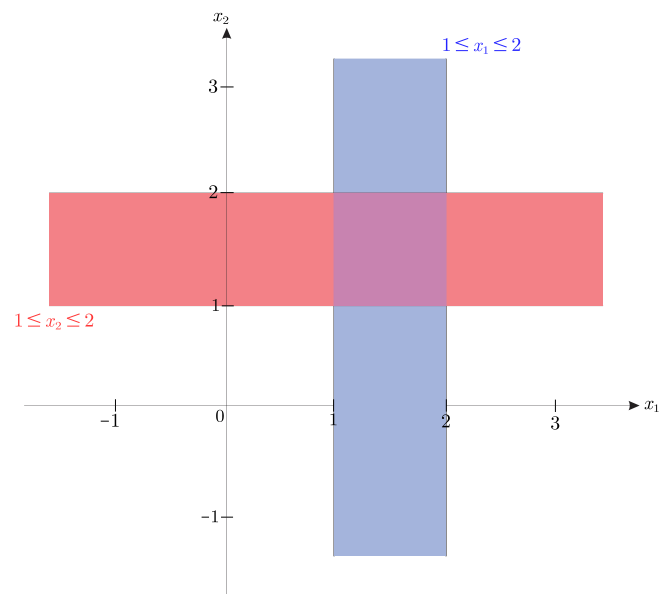


Figura 2.32. Dibujo $1 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 2$

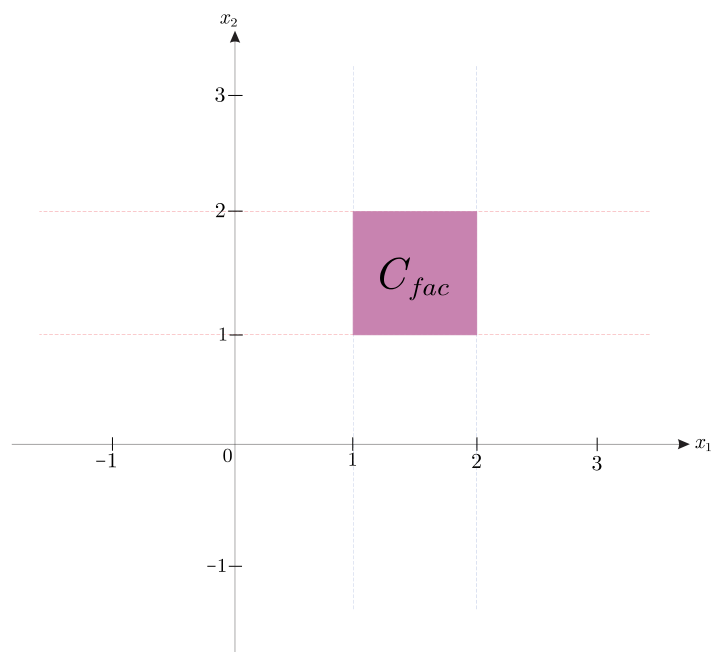


Figura 2.33. Conjunto factible $\mathbb{C}_{fac}$

c) Superposición de las gráficas para determinar puntos máximos y mínimos del programa ($\mathbb{P}_1$)

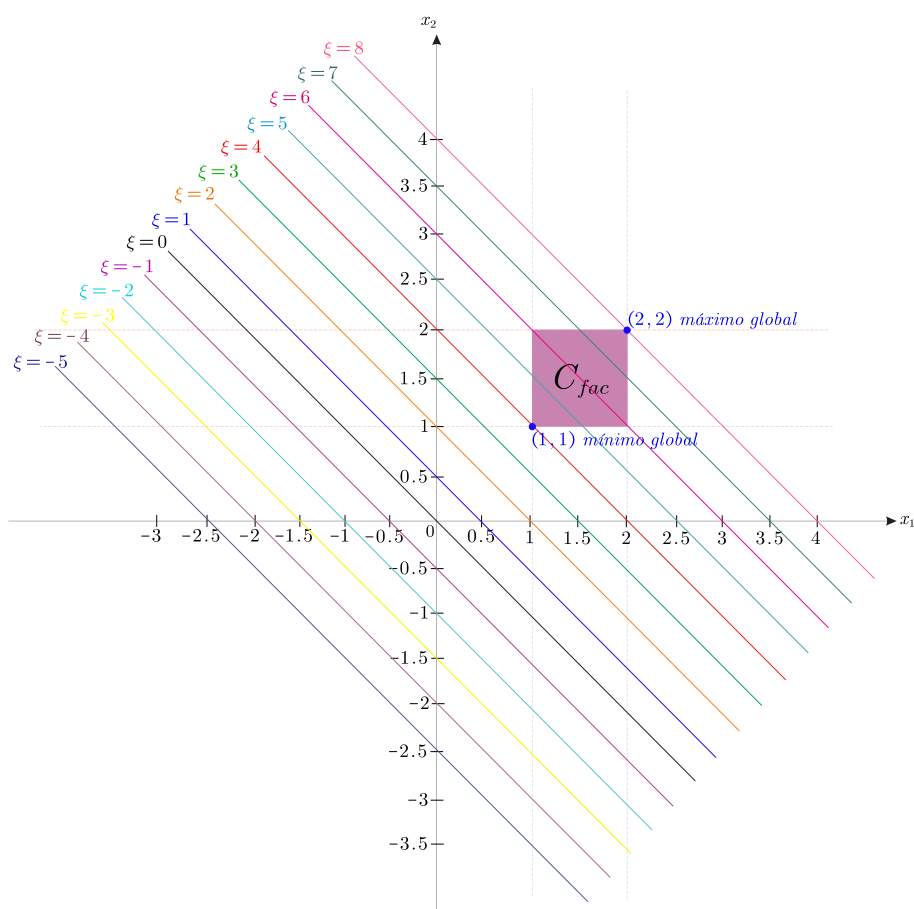


Figura 2.34. Máximo y mínimo global del programa ($\mathbb{P}_1$)

El punto (1,1) es un mínimo global del programa ($\mathbb{P}_1$) y el valor de la función objetivo es $f(1,1) = 2(1) + 2(1) = 4$

El punto (2,2) es un máximo global del programa ($\mathbb{P}_1$) y el valor de la función objetivo es $f(2,2) = 2(2) + 2(2) = 8$

Ejemplo 2.3.2.9.

Dado el programa matemático lineal

$$(\mathbb{P}_2) \begin{cases} \text{Opt } f(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a} \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

, determinar soluciones óptimas de ($\mathbb{P}_2$).

Solución

a) Curvas de nivel de la función objetivo

$$\mathbb{C}_\xi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / 3x_1 + 3x_2 = \xi, \xi \in \mathbb{R}\}$$

$$\xi = 0: 3x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1$$

$$\xi = 1: 3x_1 + 3x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - 3x_1/3$$

$$\xi = 2: 3x_1 + 3x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 - 3x_1/3$$

$$\xi = 3: 3x_1 + 3x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 3 - 3x_1/3$$

⋮

$$\xi = -1: 3x_1 + 3x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = -1 - 3x_1/3$$

$$\xi = -2: 3x_1 + 3x_2 = -2 \Rightarrow x_2 = -2 - 3x_1/3$$

$$\xi = -3: 3x_1 + 3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -3 - 3x_1/3$$

⋮

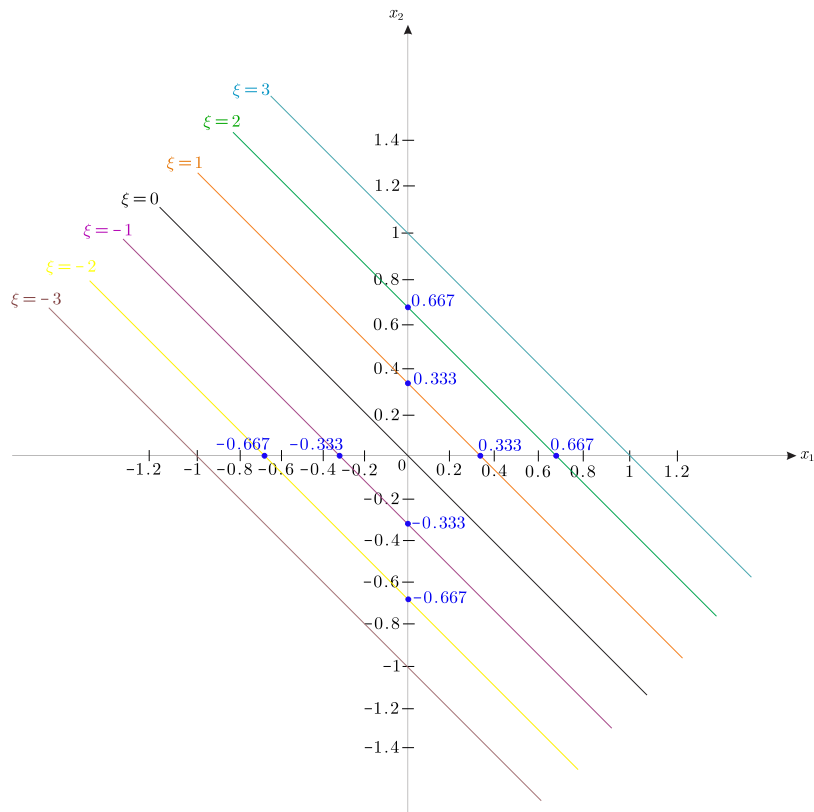


Figura 2.35. Curvas de nivel $\mathbb{C}_\xi$

b) Conjunto de soluciones factibles del programa ($\mathbb{P}_2$)

$$\mathbb{C}_{\text{fac}} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$x_1 + x_2 = 1$ Para $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ se tiene el punto (0,1)

$x_2 = 1 - x_1$ Para $x_2 = 0$ y $x_1 = 1$ se tiene el punto (1,0)

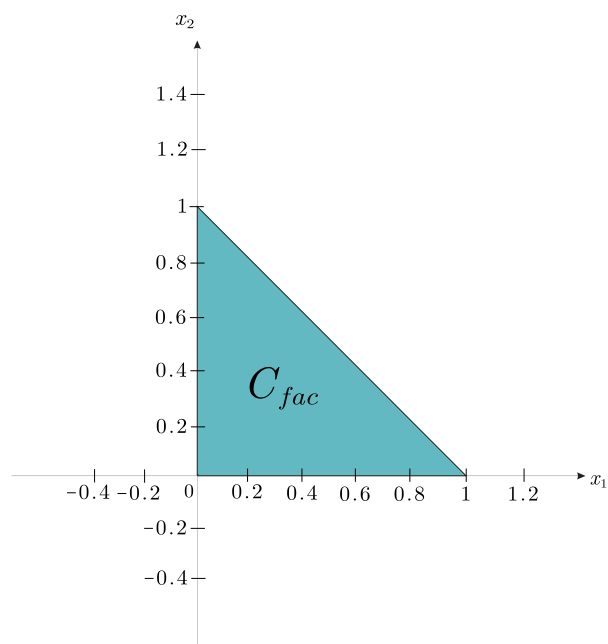


Figura 2.36. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$

c) Superposición de las gráficas para determinar puntos máximos y mínimos del programa ($\mathbb{P}_2$)

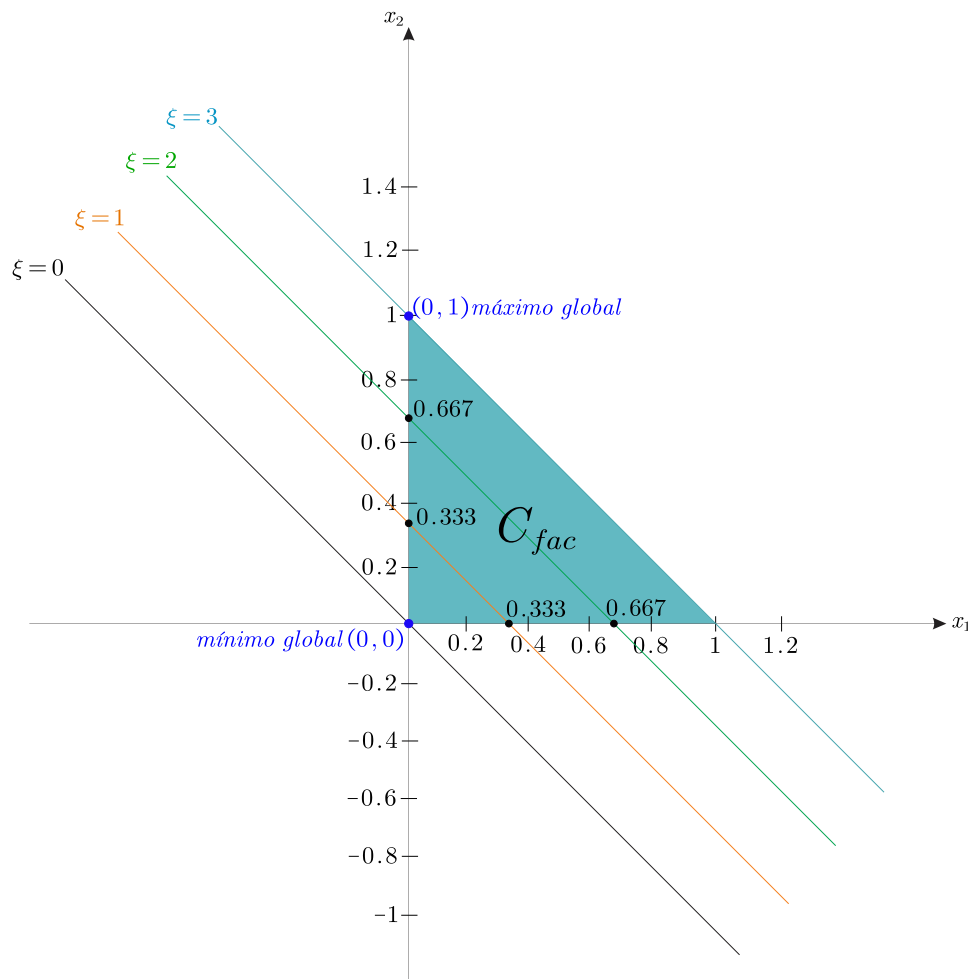


Figura 2.37. Máximos y mínimos globales del programa ($\mathbb{P}_2$)

El punto $(0,0)$ es un mínimo global del programa ($\mathbb{P}_2$) y el valor de la función objetivo es $f(0,0) = 3(0) + 3(0) = 0$

El punto $(0,1)$ es un máximo global del programa ($\mathbb{P}_2$) y el valor de la función objetivo es $f(0,1) = 3(0) + 3(1) = 3$

Ejemplo 2.3.2.10.

En el programa matemático no lineal

$$(\mathbb{P}_3) \begin{cases} \text{Opt } f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{sujeto a} \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

, determinar soluciones óptimas de ($\mathbb{P}_3$)

Solución

a) Curvas de nivel del programa ($\mathbb{P}_3$)

$$\mathbb{C}_\xi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = \xi, \xi \in \mathbb{R}_0^+\}$$

$$\xi = 0: (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 0$$

$$\xi = 1: (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 1$$

$\vdots$

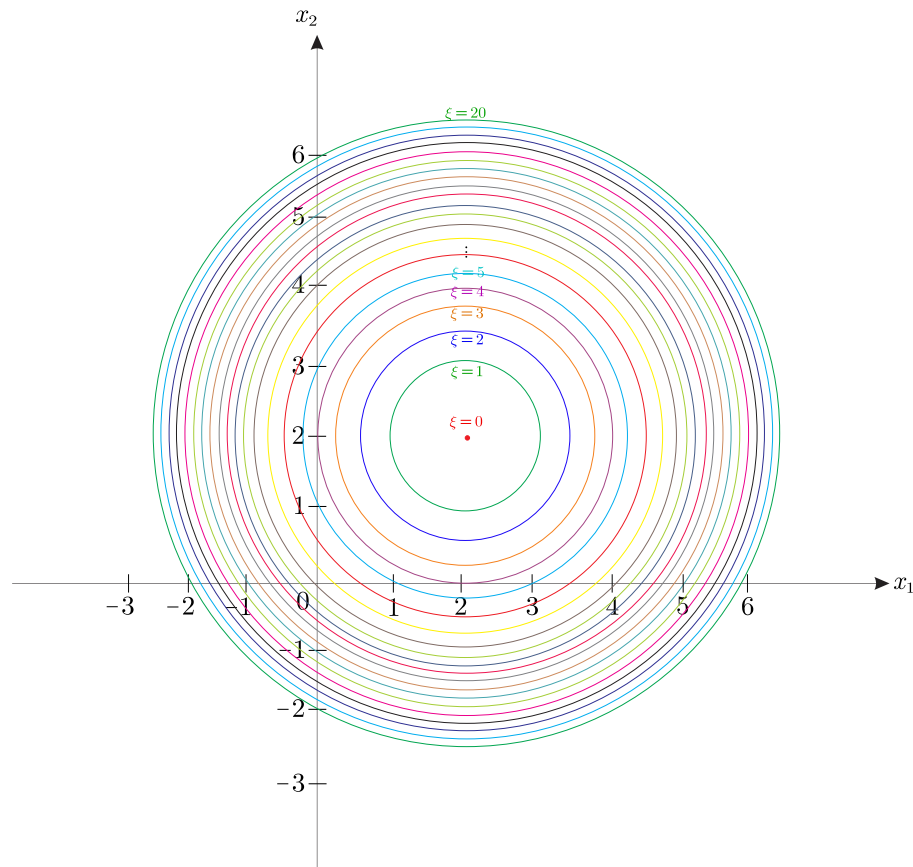


Figura 2.38. Curvas de nivel $\mathbb{C}_\xi$

b) Conjunto de soluciones factibles del programa ($\mathbb{P}_3$)

$$\mathbb{C}_{\text{fac}} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / 3x_1 + 2x_2 \geq 6, 6x_1 + 4x_2 \leq 24, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$

Para $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$ se tiene el punto (0,3)

Para $x_2 = 0$ y $x_1 = 2$ se tiene el punto (2,0)

$$6x_1 + 4x_2 = 24$$

Para $x_1 = 0$ y $x_2 = 6$ se tiene el punto (0,6)

Para $x_2 = 0$ y $x_1 = 4$ se tiene el punto (4,0)

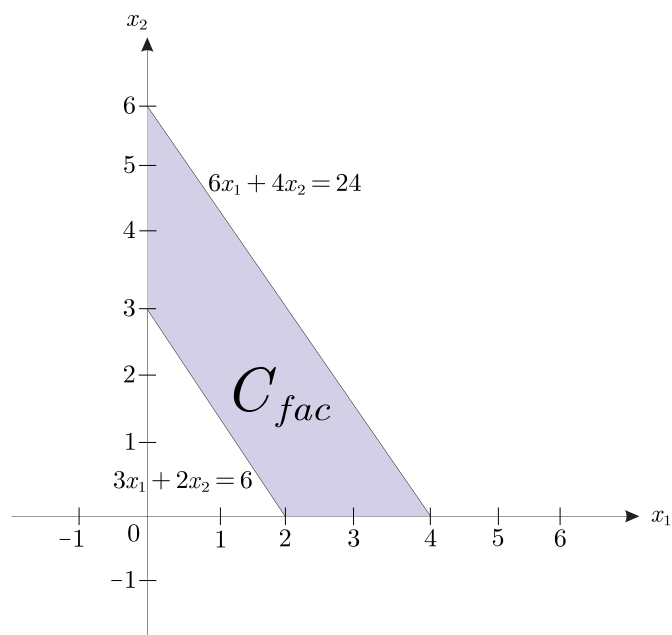


Figura 2.39. Conjunto factible C_{fac}

c) Superposición de las figuras para determinar puntos máximos y mínimos del programa ($\mathbb{P}$)

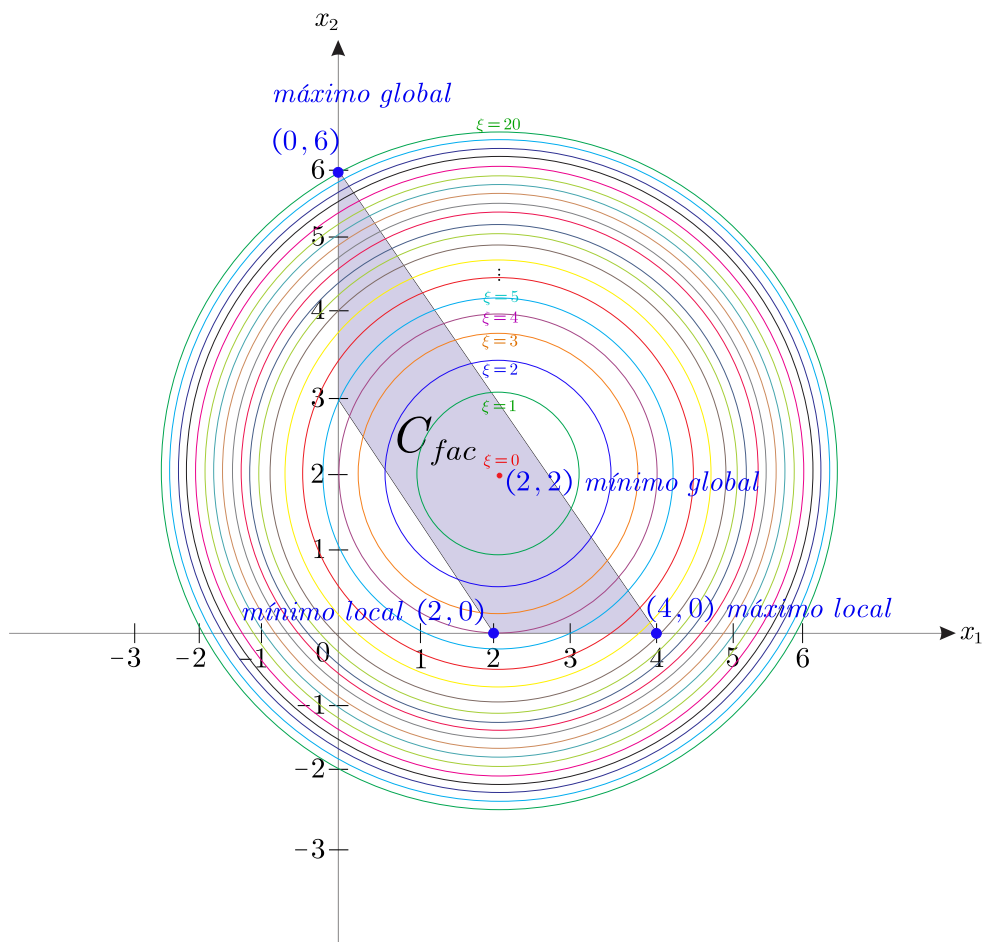


Figura 2.40. Máximo y mínimo del programa ($\mathbb{P}_3$)

El punto (2,2) es un mínimo global del programa ($\mathbb{P}_3$) y el valor de la función objetivo es $f(2,2) = (2-2)^2 + (2-2)^2 = 0$

El punto (0,6) es un máximo global del programa ($\mathbb{P}_3$) y el valor de la función objetivo es $f(0,6) = (0-2)^2 + (6-2)^2 = 20$

El punto (2,0) es un mínimo local del programa ($\mathbb{P}_3$) y el valor de la función objetivo es $f(2,0) = (2-2)^2 + (0-2)^2 = 4$

El punto (4,0) es un máximo local del programa ($\mathbb{P}_3$) y el valor de la función objetivo es $f(4,0) = (4-2)^2 + (0-2)^2 = 8$

2.3.3. Condiciones de globalidad para un programa matemático

Definición 2.3.3.1. (Conjunto acotado)

Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ es acotado si existe un número real $\gamma > 0$ tal que $\|\bar{z}\| = (\sum_{j=1}^n z_j^2)^{1/2} < \gamma, \forall \bar{z} \in \Omega$, donde

$$\left(\sum_{j=1}^n z_j^2 \right)^{1/2} = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2}$$

Definición 2.3.3.2. (Conjunto Abierto)

Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ es abierto si y solo si $\forall \bar{z} \in \Omega, \exists \varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{B}(\bar{z}, \varepsilon) \subset \Omega$.

Definición 2.3.3.3. (Conjunto Cerrado)

Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ es cerrado si su complemento es abierto en $\mathbb{E}^n$.

2.3.4. Criterio de Máximos y Mínimos Globales para un programa matemático

Propiedad 2.3.4.1. Sea Ω es cerrado y acotado y $g: \Omega \subset \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$ una función continua en Ω . Entonces existen $z^*, z^\circ \in \Omega$ tal que $g(z^*) \leq g(z), \forall z \in \Omega; g(z^\circ) \geq g(z), \forall z \in \Omega$ es decir, z^* es un mínimo global de g en Ω y z° es un máximo global de g en Ω .

Propiedad 2.3.4.2. La función $g: \Omega \subset \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$ es continua $\Leftrightarrow g^{-1}(\Omega)$ es abierto en Ω . Para todo Ω abierto en $\mathbb{E}^1$.

Proposición 2.3.4.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ un conjunto cerrado, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{E}^1$ es una función continua $\Leftrightarrow g^{-1}(\mathcal{F})$ es cerrado en $\Omega \forall \mathcal{F}$ cerrado en $\mathbb{E}^1$.

Demostración

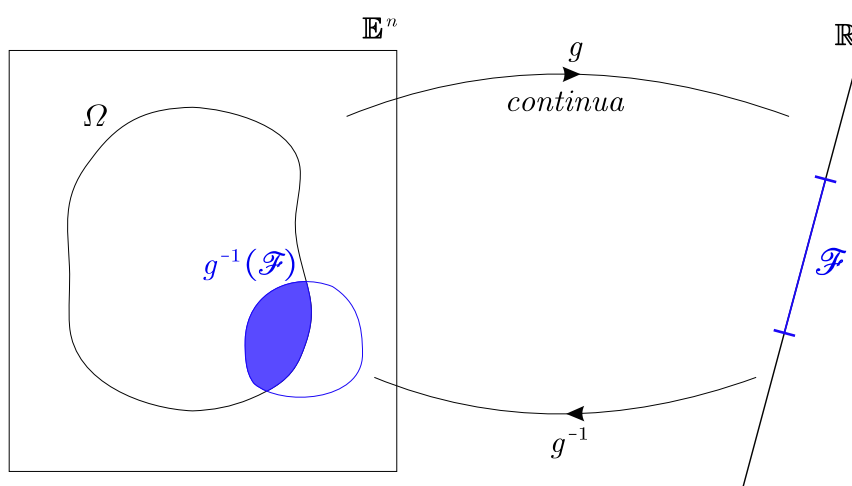


Figura 2.41. Conjunto cerrado y la función continua

$\Rightarrow$) $\mathcal{F}$ es cerrado en $\mathbb{E}^1 \Rightarrow \mathbb{B} = \mathcal{CF}$ abierto

$g^{-1}(\mathbb{B})$ es abierta en Ω por ser g continua (Propiedad 2.2.7.2.)

$$g^{-1}(\mathcal{F}) = g^{-1}(\mathcal{C}(\mathbb{B})) = \mathcal{C}(g^{-1}(\mathbb{B})) = \underbrace{\Omega - g^{-1}(\mathbb{B})}_{\text{cerrado}}$$

Por lo tanto $g^{-1}(\mathcal{F})$ es cerrado.

$\Leftarrow$) $\mathcal{F}$ es cerrado en $\mathbb{E}^1 \Rightarrow \mathbb{B} = \mathcal{CF}$ abierto

$g^{-1}(\mathcal{F})$ es cerrado en Ω

$$g^{-1}(\mathbb{B}) = g^{-1}(\mathcal{C}(\mathcal{F})) = \mathcal{C}(g^{-1}(\mathcal{F})) = \underbrace{\Omega - g^{-1}(\mathcal{F})}_{\text{abierto}}$$

Por lo tanto g es continua.

CAPÍTULO 03: MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Materiales	La tesis de investigación sobre existencia de soluciones optimas en programas no lineales según el desenlace que se persigue es de tipo básica, lo que nos lleva a explotar nuevos conocimientos en programación no lineal con restricciones de desigualdad. En nuestra teoría se consideran como material de estudio funciones continuas y al menos una función no lineal.
3.2. Métodos	En la elaboración de la tesis se utilizó el método lógico inductivo y deductivo para establecer condiciones óptimas para la existencia de soluciones mínimas y máximas globales en programas matemáticas no lineales, se utilizó el método deductivo para demostrar las condiciones del criterio de Weierstrass y la programación convexa y se comparó con el método inductivo utilizando ejemplos de programas no lineales. Asimismo, se utilizó el software Lingo como modelo de contraste y verificación.
3.2.1. Procedimiento del Método Deductivo	1) Revisión bibliográfica Se examinaron exhaustivamente libros, revistas especializadas y artículos científicos que, gracias a su confiabilidad, permitieron validar los conceptos y posteriormente proponer un conjunto de proposiciones sobre existencia de soluciones optimas en programas matemáticos no lineales en búsqueda de una solución.
	2) Deducción

	Se han determinado reglas de deducción y definiciones de la existencia de soluciones optimas en programas matemáticos no lineales. De manera similar pasamos de una función continua cerrada y acotada a una función que tiene valores máximo y mínimo en una región factible y se introducen nuevos términos y proposiciones.
	3) Analogía Las condiciones del teorema de Weierstrass se compararon con las condiciones de la programación convexa
	4) Generalización Se generalizo sobre la existencia de soluciones optimas en programas matemáticos no lineales, es decir basados en las reglas de deducción lógica y a partir de las proposiciones se demostró si en un conjunto factible hay un mínimo local entonces tenemos un mínimo global del programa matemático

CAPÍTULO 04: RESULTADOS

4.1. Programas Matemáticos no lineales en el plano

En el plano, la resolución grafica de los programas matemáticos no lineales admite generalmente la siguiente formula

$$(\mathbb{P}) \begin{cases} \text{Opt } f(x_1, x_2) \\ \text{sujeto a} \\ h_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ h_2(x_1, x_2) \geq 0 \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{C}_{\text{fac}} \subset \mathbb{E}^2 \end{cases}$$

donde las funciones $f, h_1, h_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, son continuas con valores reales de la variable vectorial x_1, x_2 .

Definición 4.1.1. (Máximo y Mínimo global en un programa $(\mathbb{P})$)

En un programa matemático

$$(\mathbb{P}) \begin{cases} \text{Opt } f(x_1, x_2) \\ \text{sujeto a} \\ h_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ h_2(x_1, x_2) \geq 0 \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{C}_{\text{fac}} \end{cases}$$

- 1) $x^* \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un máximo global del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow f(x) \leq f(x^*), \forall x \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$
- 2) $x^\circ \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un mínimo global del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x^\circ), \forall x \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$
- 3) $x^* \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un máximo global estricto del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow f(x) < f(x^*), \forall x \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$
- 4) $x^\circ \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un mínimo global estricto del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow f(x) > f(x^\circ), \forall x \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$

Definición 4.1.2. (Máximo y Mínimo local en un programa $(\mathbb{P})$)

En un programa matemático

$$(\mathbb{P}) \begin{cases} \text{Opt } f(x_1, x_2) \\ \text{sujeto a} \\ h_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ h_2(x_1, x_2) \geq 0 \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{C}_{\text{fac}} \end{cases}$$

- 1) $x^* \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un máximo local del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x^*), \forall x \in \mathbb{B}(x^*, \delta) \cap \mathbb{C}_{\text{fac}}$
- 2) $x^\circ \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un mínimo local del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x^\circ), \forall x \in \mathbb{B}(x^\circ, \delta) \cap \mathbb{C}_{\text{fac}}$
- 3) $x^* \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un máximo local estricto del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(x^*), \forall x \in \mathbb{B}(x^*, \delta) \cap \mathbb{C}_{\text{fac}}, x \neq x^*$
- 4) $x^\circ \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ se dice que es un mínimo local estricto del programa $(\mathbb{P}) \Leftrightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(x^\circ), \forall x \in \mathbb{B}(x^\circ, \delta) \cap \mathbb{C}_{\text{fac}}, x \neq x^\circ$

Ejemplo 4.1.1. En el programa matemático no lineal

$$(\mathbb{P}_5) \begin{cases} \text{Opt } f(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2 \\ \text{sujeto a} \\ (x_1 - 1)(x_2 - 2) \geq 0 \\ 2 \leq x_1 \leq 4 \end{cases}$$

Resuélvelo de forma gráfica y con el software LINGO

Solución

Resultados gráficos del programa $(\mathbb{P}_5)$

a) Curvas de nivel del programa $(\mathbb{P}_5)$

$$\mathbb{C}_\xi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / x_1 - x_2^2 = \xi, \xi \in \mathbb{R}\}$$

$$\xi = 0: x = y^2$$

$$\xi = 1: x = y^2 + 1$$

$$\xi = 2: x = y^2 + 2$$

$$\xi = 3: x = y^2 + 3$$

$\vdots$

$$\xi = -1: x = y^2 - 1$$

$$\xi = -2: x = y^2 - 2$$

$$\xi = -3: x = y^2 - 3$$

$\vdots$

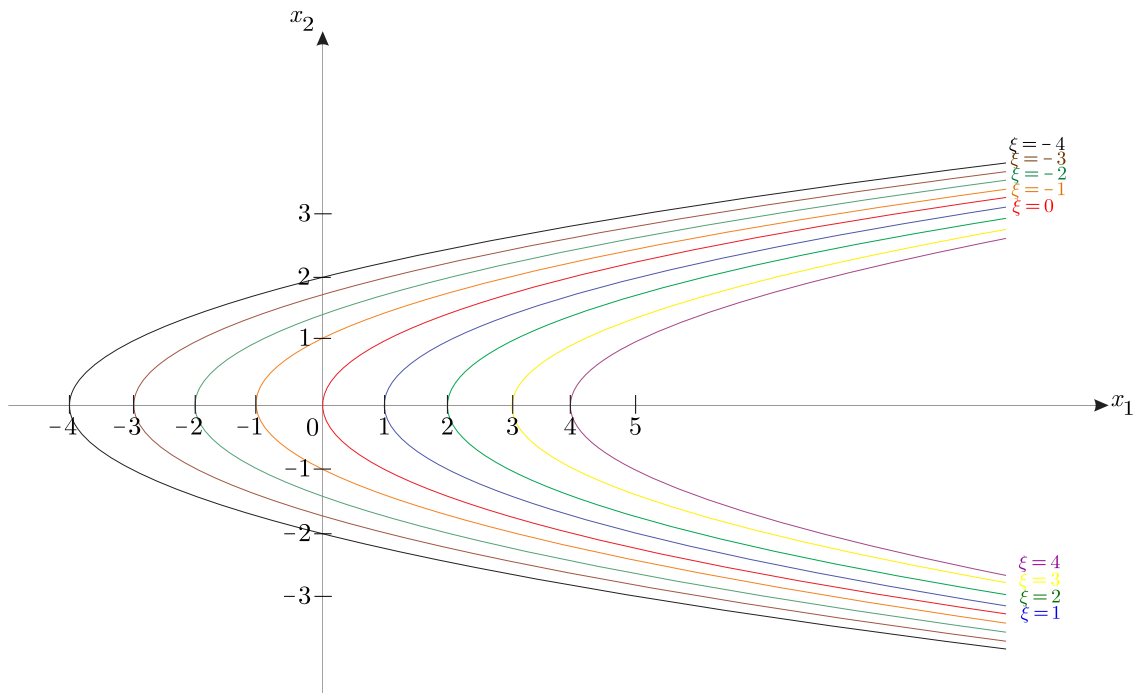


Figura 4.1. Curvas de nivel $\mathbb{C}_\xi$ del programa $(\mathbb{P}_5)$

b) Conjunto de las soluciones factibles del programa $(\mathbb{P}_5)$

$$\mathbb{C}_{\text{fac}} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / (x_1 - 1)(x_2 - 2) \geq 0; 2 \leq x_1 \leq 4\}$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 2) \geq 0 \Leftrightarrow (x_1 - 1) \geq 0 \wedge (x_2 - 2) \geq 0$$

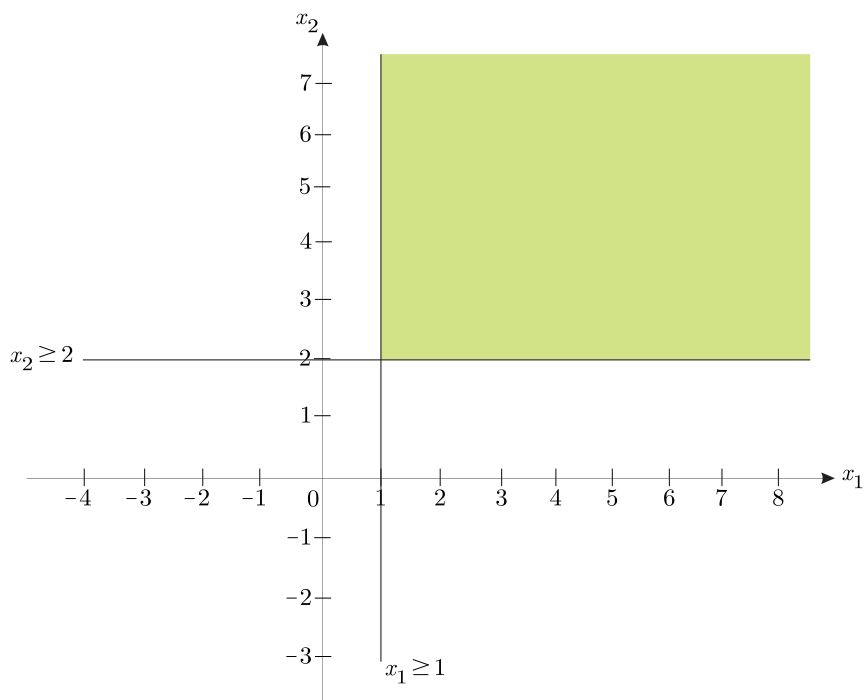


Figura 4.2. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ del programa $(\mathbb{P}_5)$

$$2 \leq x_1 \leq 4 \Leftrightarrow x_1 \geq 2 \wedge x_1 \leq 4$$

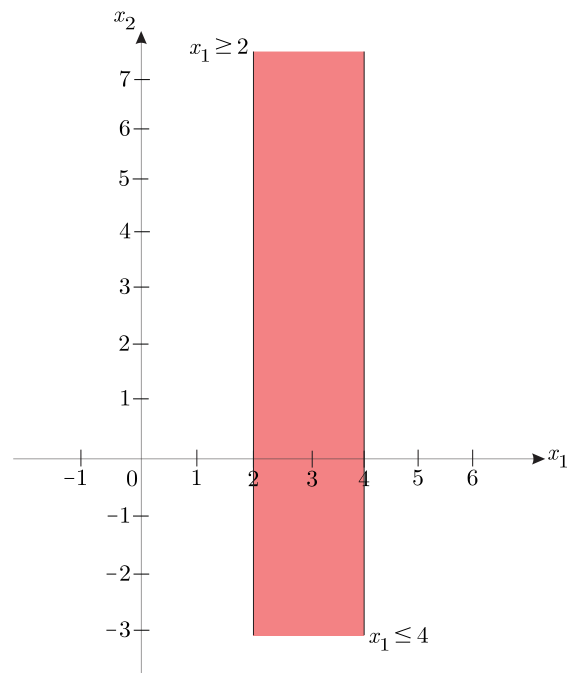


Figura 4.3. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ del programa $(\mathbb{P}_5)$

Así, tenemos el conjunto de soluciones factibles de la superposición de las Figuras 4.8. y 4.9.

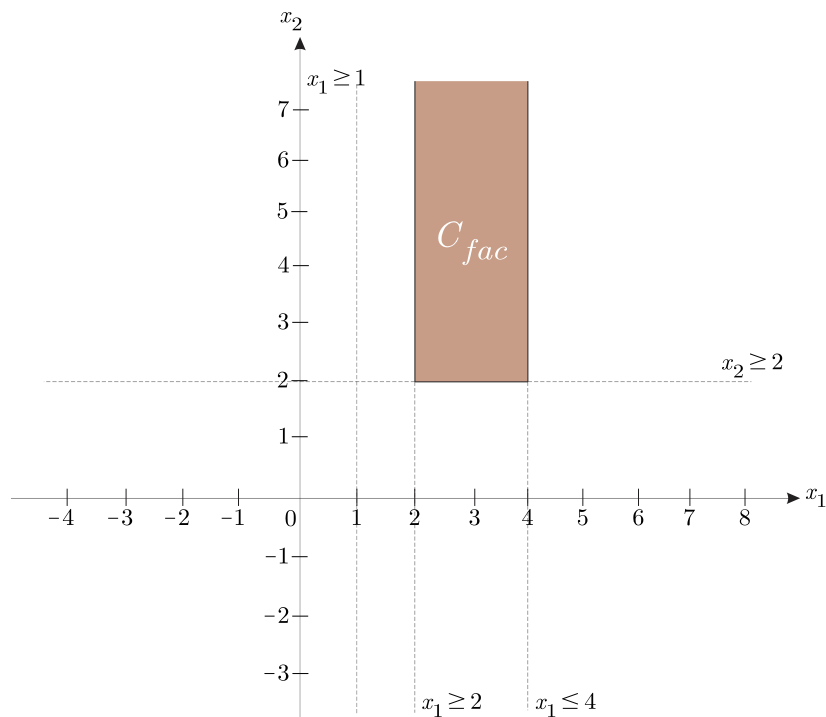


Figura 4.4. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ del programa $(\mathbb{P}_5)$

c) Superposición de las figuras para determinar puntos máximos y mínimos para el programa $(\mathbb{P}_5)$

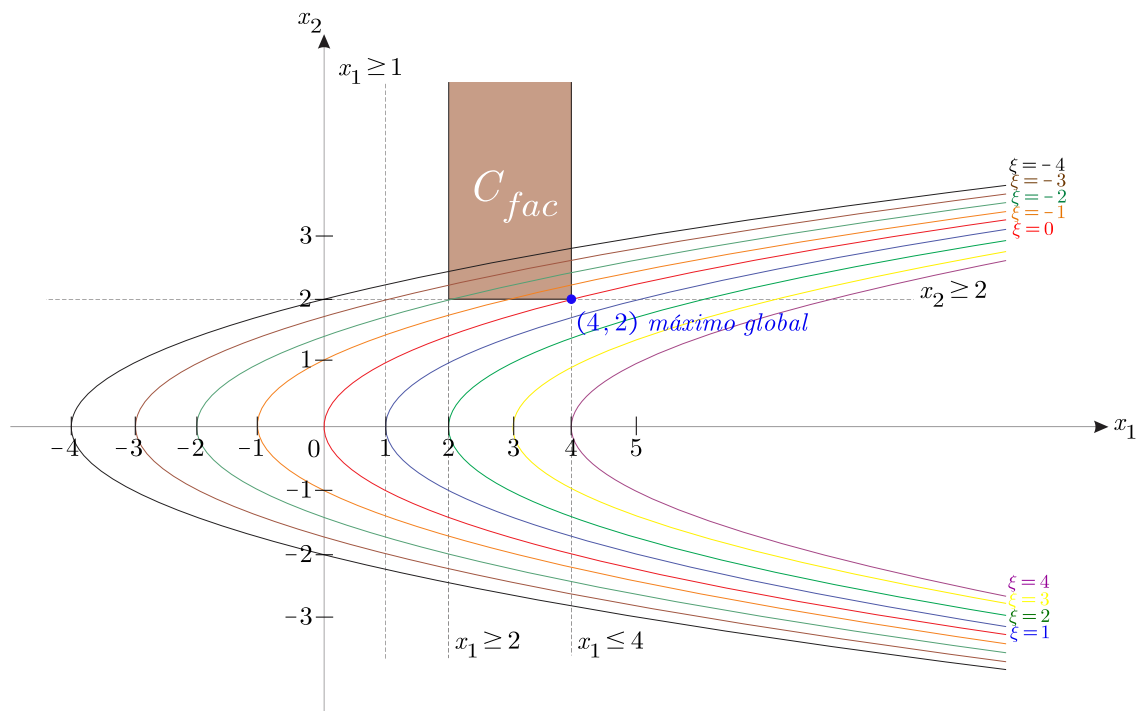


Figura 4.5. Máximo y mínimo global del programa $(\mathbb{P}_5)$

Resolviendo el programa $(\mathbb{P}_5)$ gráficamente, obtenemos un máximo global en el punto $x^* = (4, 2)$ y el valor de la función objetivo es

$$f(4, 2) = 4 - (2)^2 = 0$$

No existe una solución mínima del programa $(\mathbb{P}_5)$ porque el conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ es limitado, es decir,

$$\nexists \eta > 0 \text{ tal que } \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \eta$$

Resultados con el software LINGO del programa $(\mathbb{P}_5)$:

Tabla 4.1. Programa $(\mathbb{P}_5)$

PROGRAMA MATEMÁTICO NO LINEAL
$\text{MAX} = x_1 - x_2^2$! SUJETO A LAS SIGUIENTES RESTRICCIONES; $(x_1 - 1)(x_2 - 2) \geq 0;$ $x_1 \geq 2;$ $x_1 \leq 4;$

Óptimo Local

Solución óptima local encontrada		
valor objetivo	0.000000	
Inviabilidad	0.000000	
Iteraciones totales del solucionador	25	
Segundos de tiempo de ejecución transcurridos	2.11	
El modelo es cuadrático convexo		
Clase de modelo	QP	
Variables totales	2	
Variables no lineales	2	
Variables enteras	0	
Restricciones totales	4	
Restricciones no lineales	2	
Total distintos de cero	6	
Distintos de cero no lineales	2	
Variable	Valor	Costo Reducido
x_1	4.000000	-1.000000
x_2	2.000000	0.000000
fila	Necesidad o abundancia	Precio dual
1	0.000000	1.000000
2	0.000000	-1.333333
3	2.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000

Por lo tanto, la solución máxima global es $x^* = (4,2)$ con el valor máximo igual a 0

4.2. Criterio de Máximos y Mínimos globales en programas matemáticos

Definición 4.2.1. Sea $f: \mathbb{C}_{\text{fac}} \subset \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$ una función continua en $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ compacto. Entonces $f(\mathbb{C}_{\text{fac}})$ es un conjunto compacto.

Definición 4.2.2. Un subconjunto $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ de $\mathbb{E}^n$ es compacto por sucesiones si y solo si es cerrado y acotado.

Proposición 4.2.1. (Teorema de Weierstrass)

Sea $f: \mathbb{C}_{\text{fac}} \subset \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$ una función continua en $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ es cerrado y acotado. Entonces f tiene un máximo y un mínimo en $\mathbb{C}_{\text{fac}}$.

Demostración

Probaremos la existencia de un máximo. En efecto, sabemos que el conjunto imagen $f(\mathbb{C}_{\text{fac}})$ es un conjunto compacto de números reales (Definición 4.2.1.) y por tanto es cerrado y acotado (Definición 4.2.2.). En particular existirá el s supremo de este conjunto, lo que queremos es demostrar que este s supremo es el máximo, es decir que es alcanzado en un instante dado. Dado s es el supremo de $f(\mathbb{C}_{\text{fac}})$ y habrá elementos de ese conjunto imagen en $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$. Por hipótesis el conjunto $f(\mathbb{C}_{\text{fac}})$ cerrado, $s \in f(\mathbb{C}_{\text{fac}})$ y por lo tanto s es la imagen de un punto de $\mathbb{C}_{\text{fac}}$.

La existencia de un mínimo se puede hacer de forma análoga o aplicar la existencia de un máximo a la función $-f$

Proposición 4.2.2. (Teorema fundamental de la programación convexa)

Sea $f: \mathbb{C}_{\text{fac}} \subset \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$ una función convexa en $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ y el programa matemático

$$(\mathbb{P}) \begin{cases} \min f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \text{sujeto a} \\ x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{C}_{\text{fac}} \subset \mathbb{E}^n \end{cases}$$

Se verifica que:

- a) Si $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ es un mínimo local, entonces x es un mínimo global en el programa $(\mathbb{P})$
- b) El conjunto de todos los mínimos del programa $(\mathbb{P})$ es un conjunto convexo.

Demostración

- a) Por reducción al absurdo supóngase que x es un mínimo local no global, entonces existe $x_1 \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$ tal que

$$f(x) > f(x_1)$$

Como $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ es convexo, para todo $\xi \in [0,1]$, verificamos que

$$\bar{z} = \xi x + (1 - \xi)x_1 \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$$

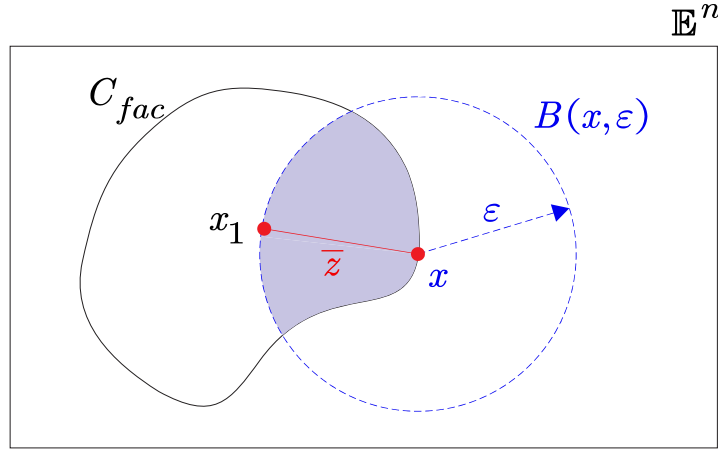


Figura 4.6. $B(x, \varepsilon) \cap C_{\text{fac}}$

Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\xi \in [0,1]$ tal que $\bar{z} \in B(x, \varepsilon) \cap C_{\text{fac}}$. Por hipótesis f es convexa entonces

$$f(\bar{z}) = f(\xi x + (1 - \xi)x_1) \leq \xi f(x) + (1 - \xi)f(x_1) < \xi f(x) + (1 - \xi)f(x) = f(x)$$

b) Sea k el mínimo valor de f en el conjunto C_{fac} y $C = \{x \in C_{\text{fac}} : f(x) = k\}$.

Dados $x_1, x_2 \in C_{\text{fac}}$ y $\xi \in [0,1]$, comprobamos que $\bar{z} = \xi x + (1 - \xi)x_2 \in C$ porque

$$k \leq f(\bar{z}) = f(\xi x + (1 - \xi)x_2) \leq \xi f(x) + (1 - \xi)f(x_2) = k$$

Entonces $f(\bar{z}) = k$

Para el problema de máximo obtenemos un resultado similar al sustituir la noción de mínimo por máximo.

Ejemplo 4.2.1. En el programa matemático no lineal

$$(\mathbb{P}_6) \begin{cases} \text{Opt } f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ \text{sujeto a} \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resuélvelo de forma analíticamente, gráficamente y con el software LINGO

Solución

Resolución Analítica del programa $(\mathbb{P}_4)$

a) La función definida por $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$ es continua porque es una función polinómica.

b) Las funciones $h_1(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$, $h_2(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$, $h_3(x_1, x_2) = x_1$, $h_4(x_1, x_2) = x_2$ son funciones continuas.

$$h_1^{-1}(\underbrace{[12, +\infty)}_{\text{cerrado}}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / 4x_1 + 3x_2 \geq 12\} \text{ cerrado}$$

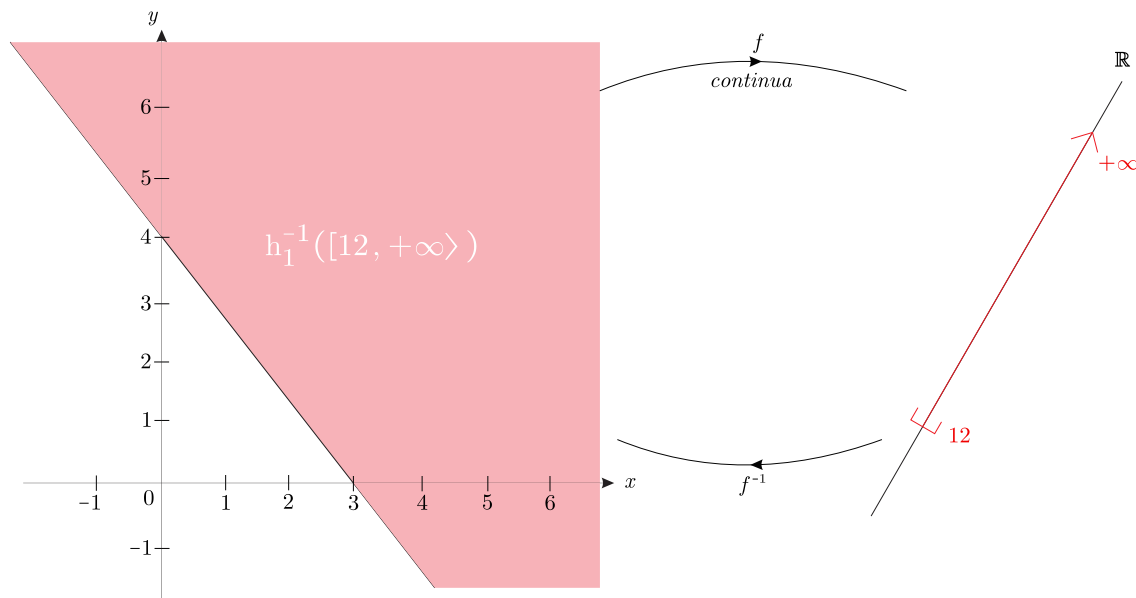


Figura 4.7. Función cerrada h_1^{-1}

$$h_2^{-1}(\underbrace{(-\infty, 36]}_{\text{cerrado}}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / 6x_1 + 4x_2 \leq 36\} \text{ cerrado}$$

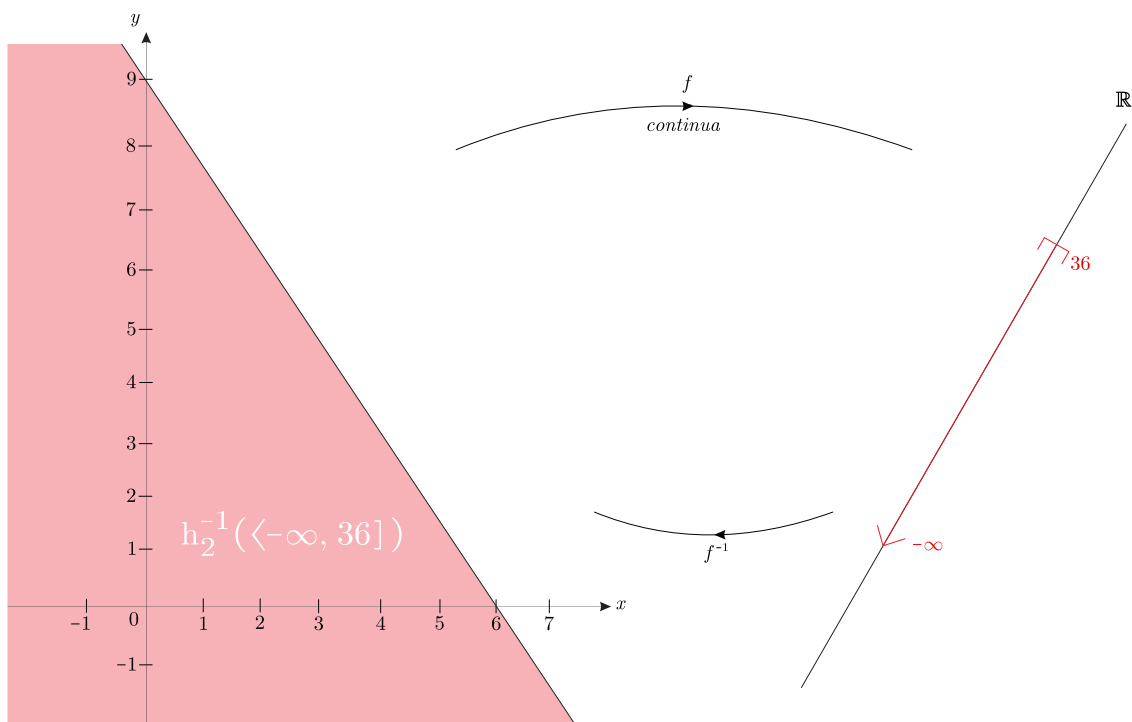


Figura 4.8. Función cerrada h_2^{-1}

$$\mathbb{h}_3^{-1}(\underbrace{[0, +\infty >)}_{\text{cerrado}}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / x_1 \geq 0\} \text{ cerrado}$$

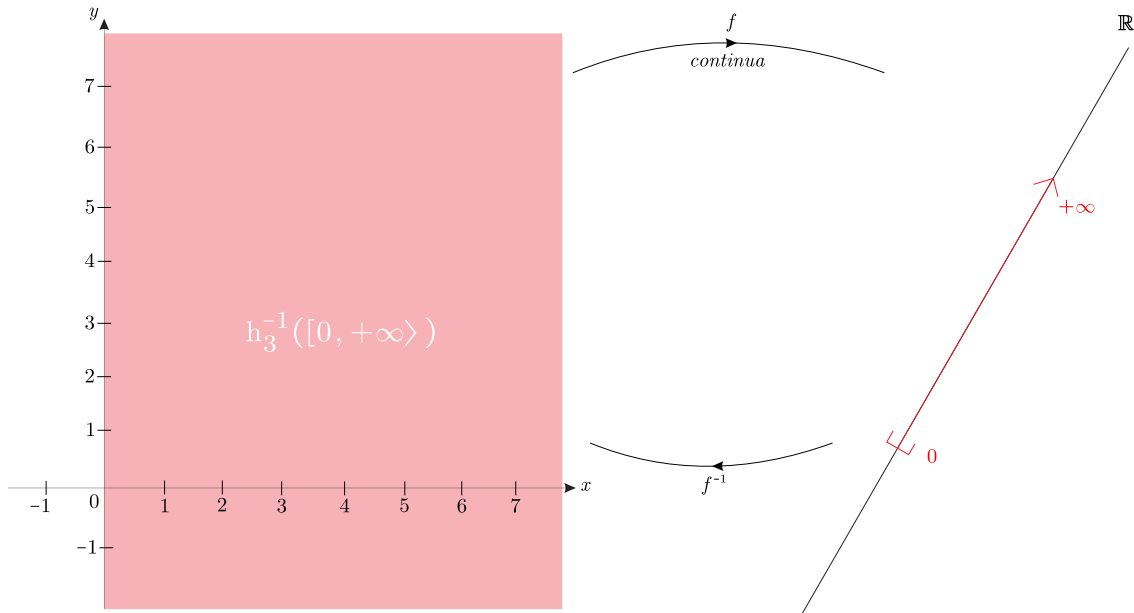


Figura 4.9. Función cerrada $\mathbb{h}_3^{-1}$

$$\mathbb{h}_4^{-1}(\underbrace{[0, +\infty >)}_{\text{cerrado}}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / x_2 \geq 0\} \text{ cerrado}$$

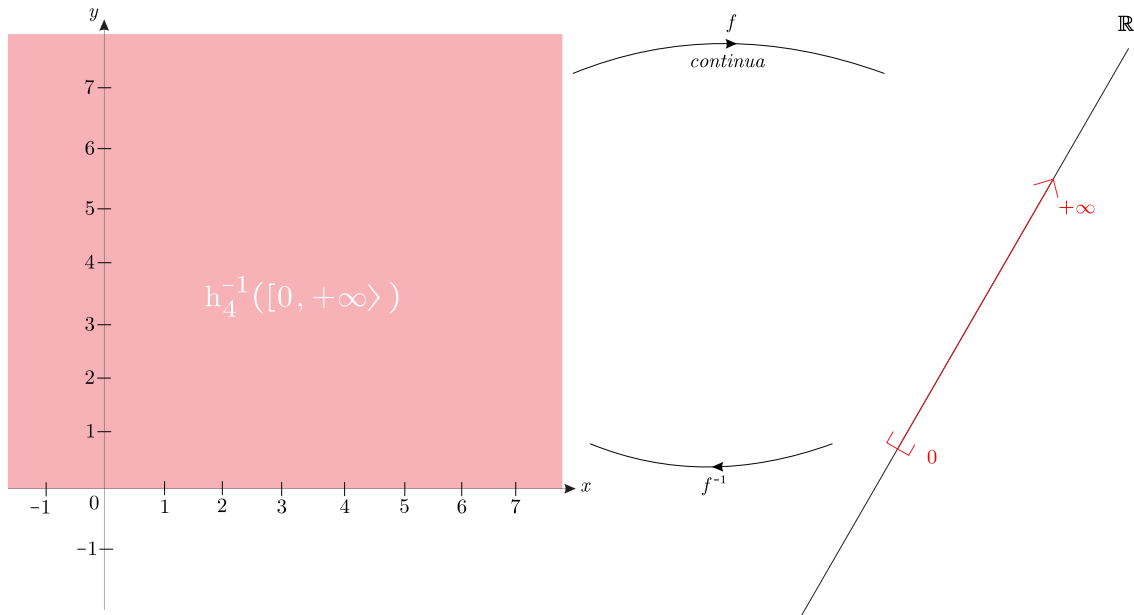


Figura 4.10. Función cerrada $\mathbb{h}_4^{-1}$

$$\mathbb{C}_{\text{fac}} = \mathbb{h}_1^{-1}(\underbrace{[12, +\infty >)}_{\text{cerrado}}) \cap \mathbb{h}_2^{-1}(\underbrace{(< -\infty, 36]}_{\text{cerrado}}) \cap \mathbb{h}_3^{-1}(\underbrace{[0, +\infty >)}_{\text{cerrado}}) \cap \mathbb{h}_4^{-1}(\underbrace{[0, +\infty >)}_{\text{cerrado}})$$

cerrado

c) Existe $\eta = 10 > 0$ tal que $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 10, \forall x \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$. Entonces $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ es acotado. Por lo tanto, como se cumple las tres condiciones de la **Proposición 4.2.1**, el programa $(\mathbb{P}_6)$ tiene un máximo global y un mínimo global.

Resolución grafica del programa $(\mathbb{P}_6)$

a) Curvas de nivel del programa $(\mathbb{P}_6)$

$$\mathbb{C}_\xi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 = \xi, \xi \in \mathbb{R}_0^+\}$$

$$\xi < 0: \mathbb{C}_\xi = \emptyset$$

$$\xi = 0: (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 = 0$$

$$\xi = 1: (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 = 1$$

$$\xi = 2: (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 = 2$$

$$\xi = 3: (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 = 3$$

$$\xi = 4: (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 = 4$$

$$\xi = 5: (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 = 5$$

$$\xi = 6: (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 = 6$$

$\vdots$

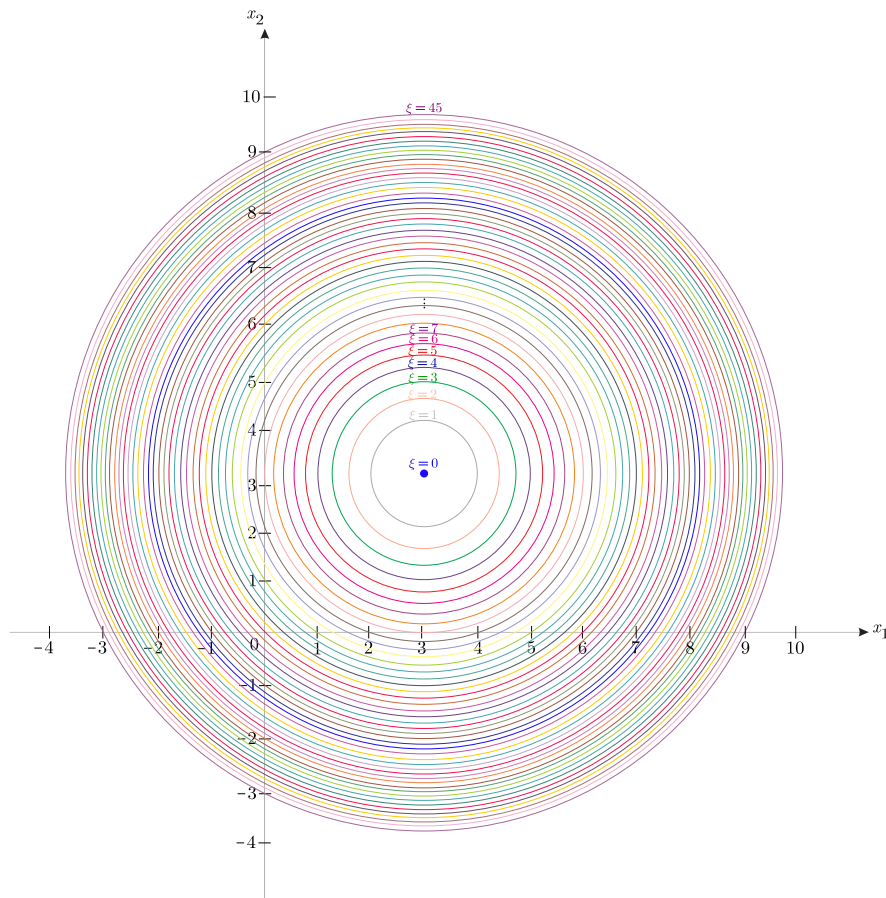


Figura 4.11. Curvas de nivel $\mathbb{C}_\xi$ del programa $(\mathbb{P}_6)$

b) Conjunto de las soluciones factibles del programa ($\mathbb{P}_6$)

$$\mathbb{C}_{\text{fac}} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / 4x_1 + 3x_2 \geq 12, 6x_1 + 4x_2 \leq 36, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$4x_1 + 3x_2 = 12$$

$$6x_1 + 4x_2 = 36$$

Para $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$ se tiene el punto
(0,4)

Para $x_1 = 0$ y $x_2 = 9$ se tiene el punto
(0,9)

Para $x_2 = 0$ y $x_1 = 3$ se tiene el punto
(3,0)

Para $x_2 = 0$ y $x_1 = 6$ se tiene el punto
(6,0)

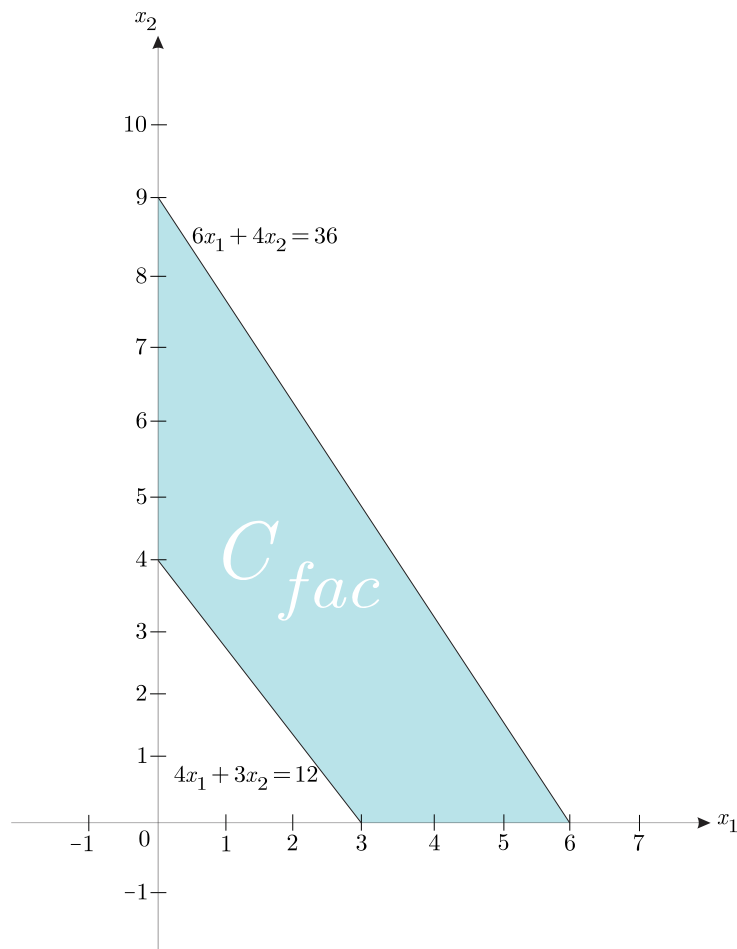


Figura 4.12. Curvas de nivel $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ del programa ($\mathbb{P}_6$)

c) Superposición de las figuras para determinar puntos máximos y mínimos para el programa ($\mathbb{P}_6$)

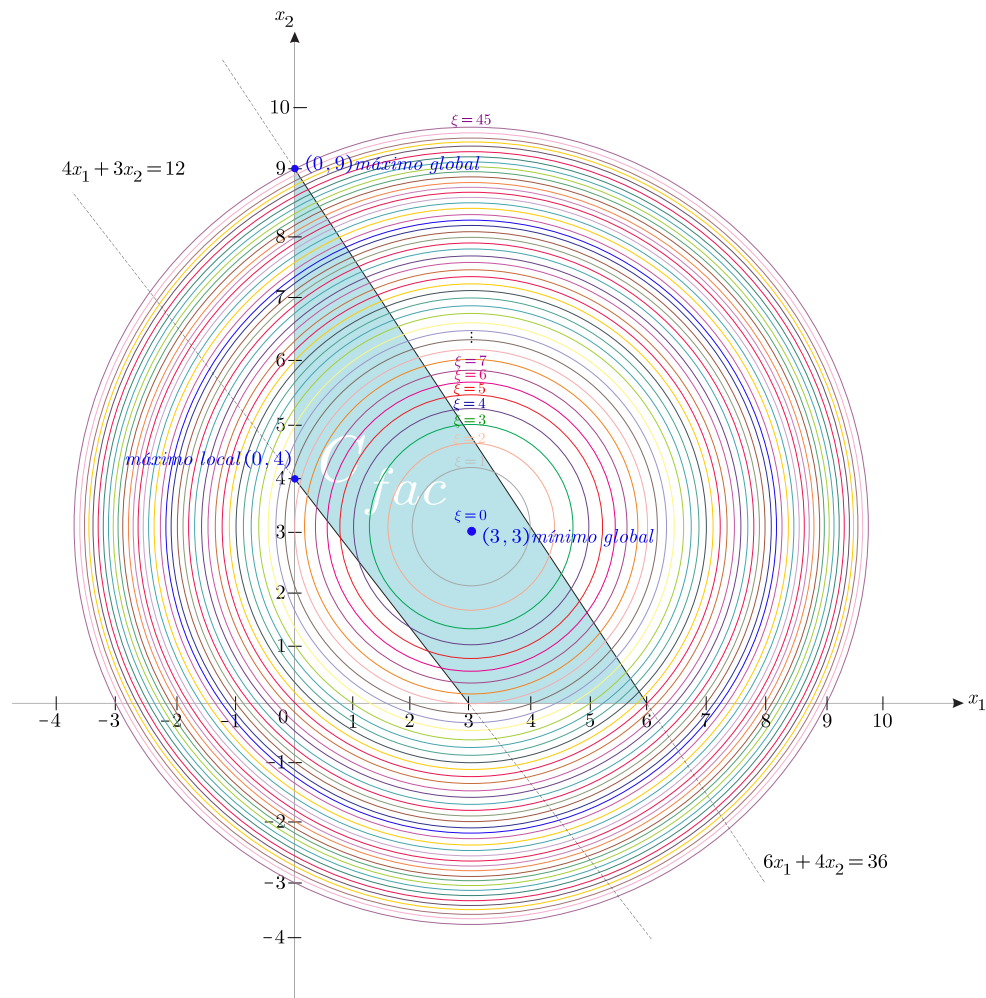


Figura 4.13. Máximo y mínimo del programa ($\mathbb{P}_6$)

Resolviendo gráficamente el programa ($\mathbb{P}_6$), obtenemos un máximo global en el punto $x^* = (0,9)$ con un valor de la función objetivo de

$$f(0,9) = (0 - 3)^2 + (9 - 3)^2 = 45$$

El punto $x^\circ = (3,3)$ es un mínimo global del programa ($\mathbb{P}_6$) con un valor de la función objetivo de

$$f(3,3) = (3 - 3)^2 + (3 - 3)^2 = 0$$

El punto $x^* = (0,4)$ es un máximo local del programa ($\mathbb{P}_6$) con un valor de la función objetivo de

$$f(0,4) = (0 - 3)^2 + (4 - 3)^2 = 10$$

Resultados con el software LINGO del programa ($\mathbb{P}_6$):

Tabla 4.2. Programa ($\mathbb{P}_6$)

PROGRAMA MATEMÁTICO NO LINEAL
$\text{MAX} = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$! SUJETO A LAS SIGUIENTES RESTRICCIONES; $4x_1 + 3x_2 \geq 12;$ $6x_1 + 4x_2 \leq 36;$ $x_1 \geq 0;$ $x_2 \geq 0;$

Óptimo Local

Solución óptima local encontrada		
valor objetivo	45.000000	
Inviabilidad	0.000000	
Iteraciones totales del solucionador	21	
Segundos de tiempo de ejecución transcurridos	0.96	
El modelo es cuadrático convexo		
Clase de modelo	QP	
Variables totales	2	
Variables no lineales	2	
Variables enteras	0	
Restricciones totales	5	
Restricciones no lineales	1	
Total distintos de cero	8	
Distintos de cero no lineales	2	
Variable	Valor	Costo Reducido
x_1	0.000000	24.000000
x_2	9.000000	0.000000
fila	Necesidad o abundancia	Precio dual
1	45.000000	1.000000
2	15.000000	0.000000
3	0.000000	3.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.000000	0.000000

PROGRAMA MATEMÁTICO NO LINEAL
$\text{MIN} = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$! SUJETO A LAS SIGUIENTES RESTRICCIONES; $4x_1 + 3x_2 \geq 12;$ $6x_1 + 4x_2 \leq 36;$ $x_1 \geq 0;$ $x_2 \geq 0;$

Óptimo global

Solución óptima global encontrada		
valor objetivo	0.0000000	
inviabilidad	0.0000000	
Iteraciones totales del solucionador	5	
Segundos de tiempo de ejecución transcurridos	0.30	
El modelo es cuadrático convexo		
Clase de modelo	QP	
Variables totales	2	
Variables no lineales	2	
Variables enteras	0	
Restricciones totales	5	
Restricciones no lineales	1	
Total distintos de cero	8	
Distintos de cero no lineales	2	
Variable	Valor	Costo Reducido
x_1	3.000000	0.000000
x_2	3.000000	0.000000
fila	Necesidad o abundancia	Precio dual
1	0.000000	-1.000000
2	9.000000	0.000000
3	6.000000	0.000000
4	3.000000	0.000000
5	3.000000	0.000000

Por tanto, la solución máxima global del programa $(\mathbb{P}_6)$ es $x^* = (0,9)$ con un valor igual a 45 y la solución mínima global del programa $(\mathbb{P}_6)$ es $x^\circ = (3,3)$ con un valor igual a 0

Ejemplo 4.2.2. En el programa matemático no lineal

$$(\mathbb{P}_7) \begin{cases} \text{Optf}(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \\ \text{sujeto a} \\ x_1^2 - x_2 \leq 6 \\ x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resuélvelo de forma analíticamente, gráficamente y con el software LINGO

Solución

Resolución Analítica del programa $(\mathbb{P}_7)$

- a) La función definida por $f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2$ es continua por ser una función polinómica.
- b) Las funciones $h_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$, $h_2(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$, $h_3(x_1, x_2) = x_1$, $h_4(x_1, x_2) = x_2$ son funciones continuas.

$$\underbrace{h_1^{-1}(\leq -\infty, 6]}_{\text{cerrado}} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / x_1^2 - x_2 \leq 6\} \text{ cerrado}$$

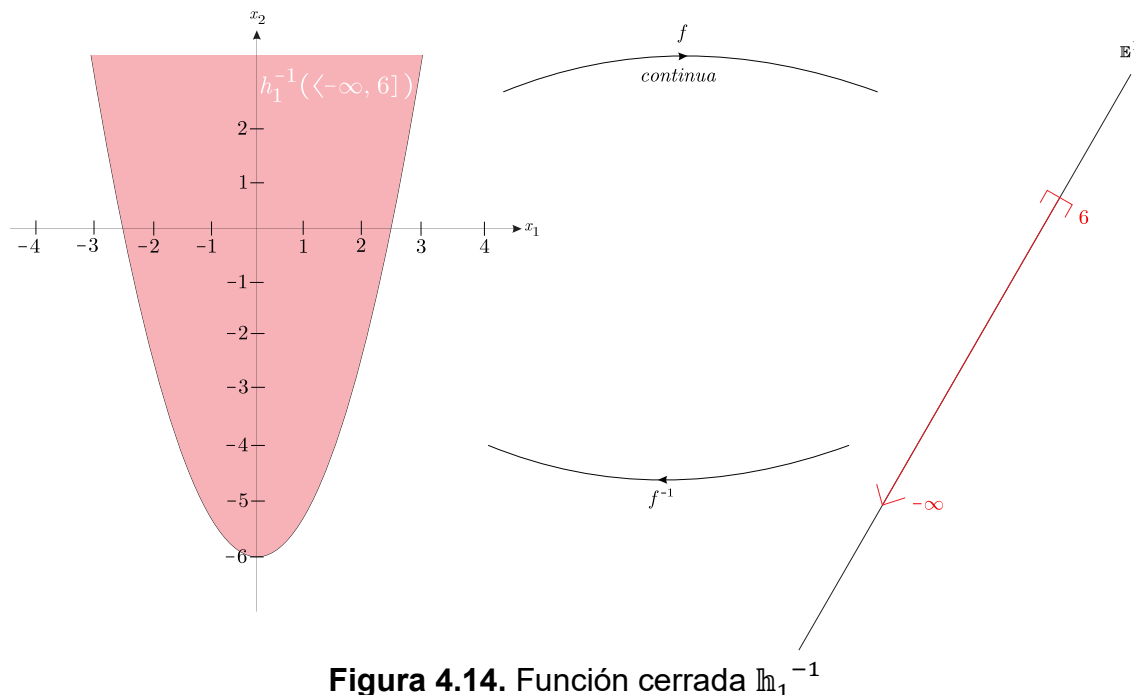


Figura 4.14. Función cerrada h_1^{-1}

$$\mathbb{h}_2^{-1}(\underbrace{(-\infty, 12]}_{\text{cerrado}}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / x_1 + 3x_2 \leq 12\} \text{ cerrado}$$

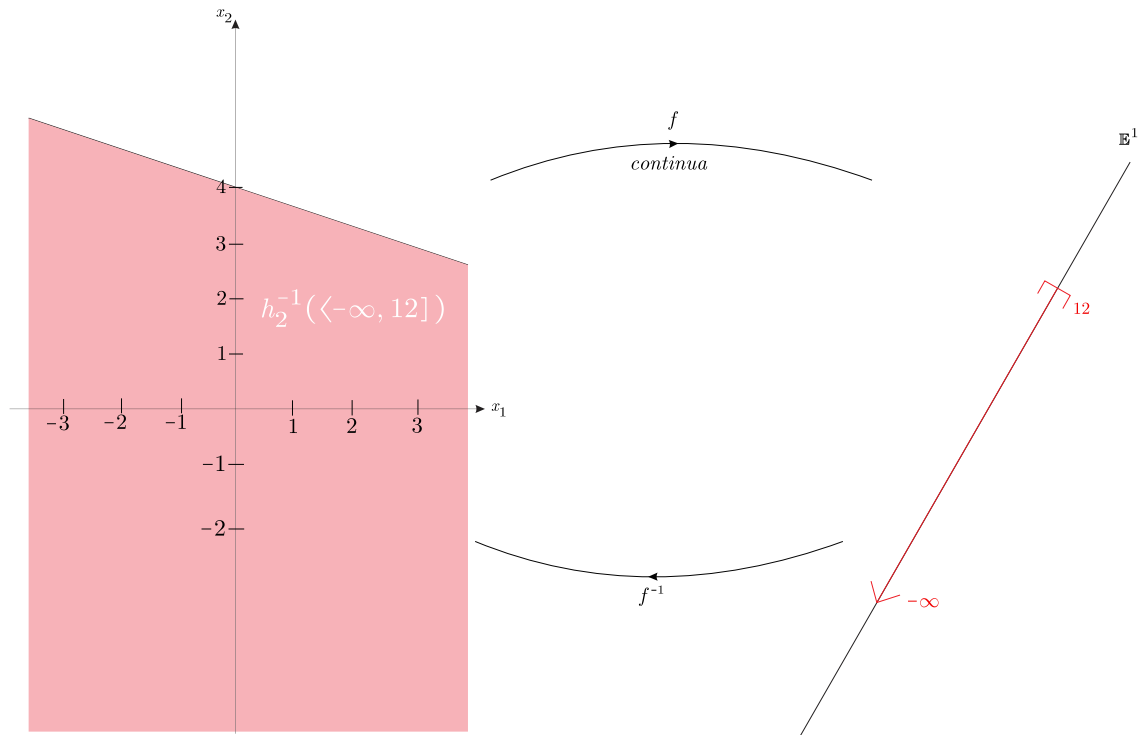


Figura 4.15. Función cerrada $\mathbb{h}_2^{-1}$

$$\mathbb{h}_3^{-1}(\underbrace{[0, +\infty)}_{\text{cerrado}}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / x_1 \geq 0\} \text{ cerrado}$$

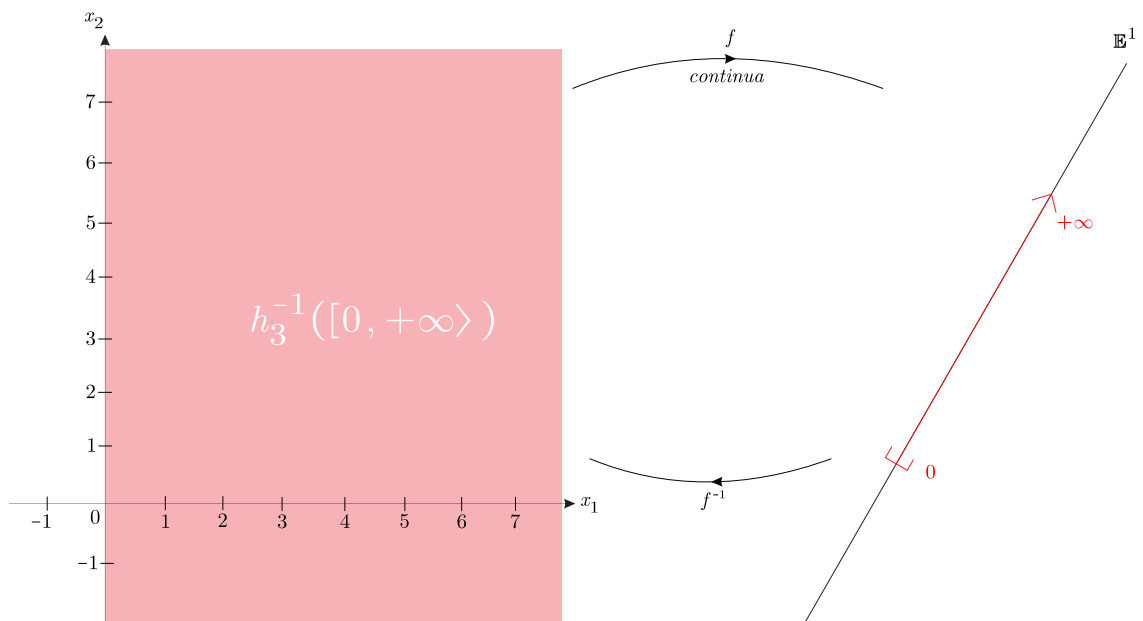


Figura 4.16. Función cerrada $\mathbb{h}_3^{-1}$

$$\mathbb{h}_4^{-1}(\underbrace{[0, +\infty >)}_{\text{cerrado}}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / x_2 \geq 0\} \text{ cerrado}$$

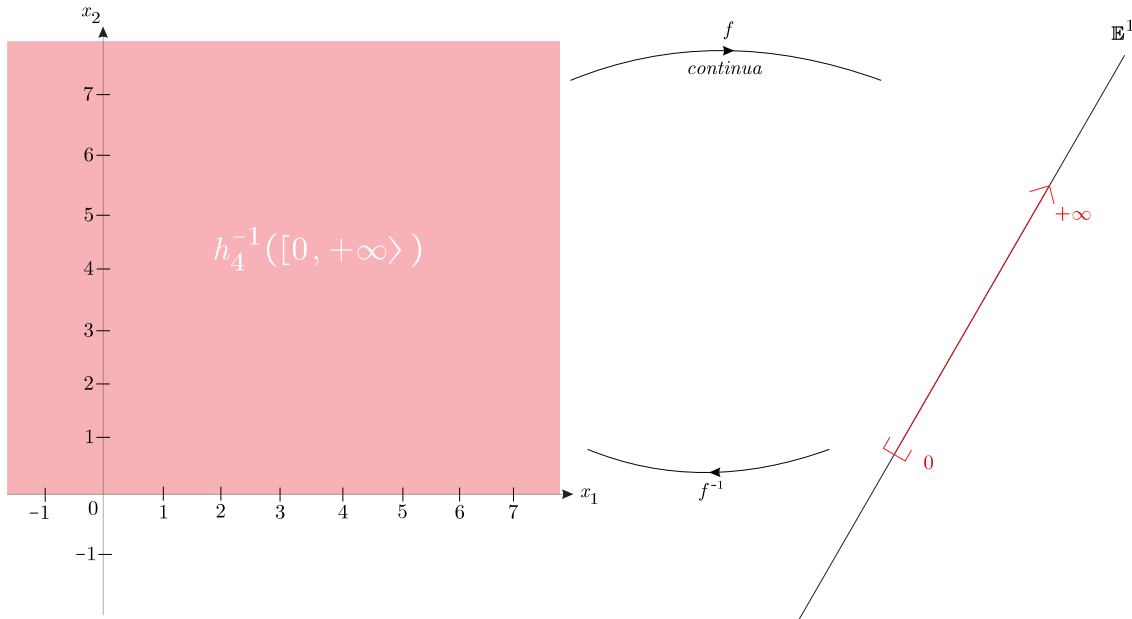


Figura 4.17. Función cerrada $\mathbb{h}_4^{-1}$

$$\mathbb{C}_{\text{fac}} = \underbrace{\mathbb{h}_1^{-1}(< -\infty, 6])}_{\text{cerrado}} \cap \underbrace{\mathbb{h}_2^{-1}(< -\infty, 12])}_{\text{cerrado}} \cap \underbrace{\mathbb{h}_3^{-1}([0, +\infty >)}_{\text{cerrado}} \cap \underbrace{\mathbb{h}_4^{-1}([0, +\infty >)}_{\text{cerrado}}$$

cerrado

c) Existe $\eta = 6 > 0$ tal que $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 6, \forall x \in \mathbb{C}_{\text{fac}}$. Entonces $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ es acotado

Por lo tanto, dado que se cumplen las tres condiciones de la **Proposición 4.2.1.** el programa $(\mathbb{P}_7)$ tiene un máximo global y mínimo global.

Resolución gráfica del programa $(\mathbb{P}_7)$:

a) Curvas de nivel del programa $(\mathbb{P}_7)$

$$\mathbb{C}_\xi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 = \xi, \xi \in \mathbb{R}_0^+\}$$

$$\xi < 0: \mathbb{C}_\xi = \emptyset$$

$$\xi = 0: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 = 0$$

$$\xi = 1: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 = 1$$

$$\xi = 2: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 = 2$$

$$\xi = 3: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 = 3$$

$$\xi = 4: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 = 4$$

$$\begin{aligned}\xi = 5: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 &= 5 \\ \xi = 5: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 &= 6 \\ \xi = 5: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 &= 7 \\ \xi = 5: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 &= 8 \\ \xi = 5: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 &= 9 \\ \xi = 5: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 &= 10 \\ \xi = 5: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 &= 11 \\ \xi = 5: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 &= 12 \\ \xi = 5: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 &= 13 \\ &\vdots\end{aligned}$$

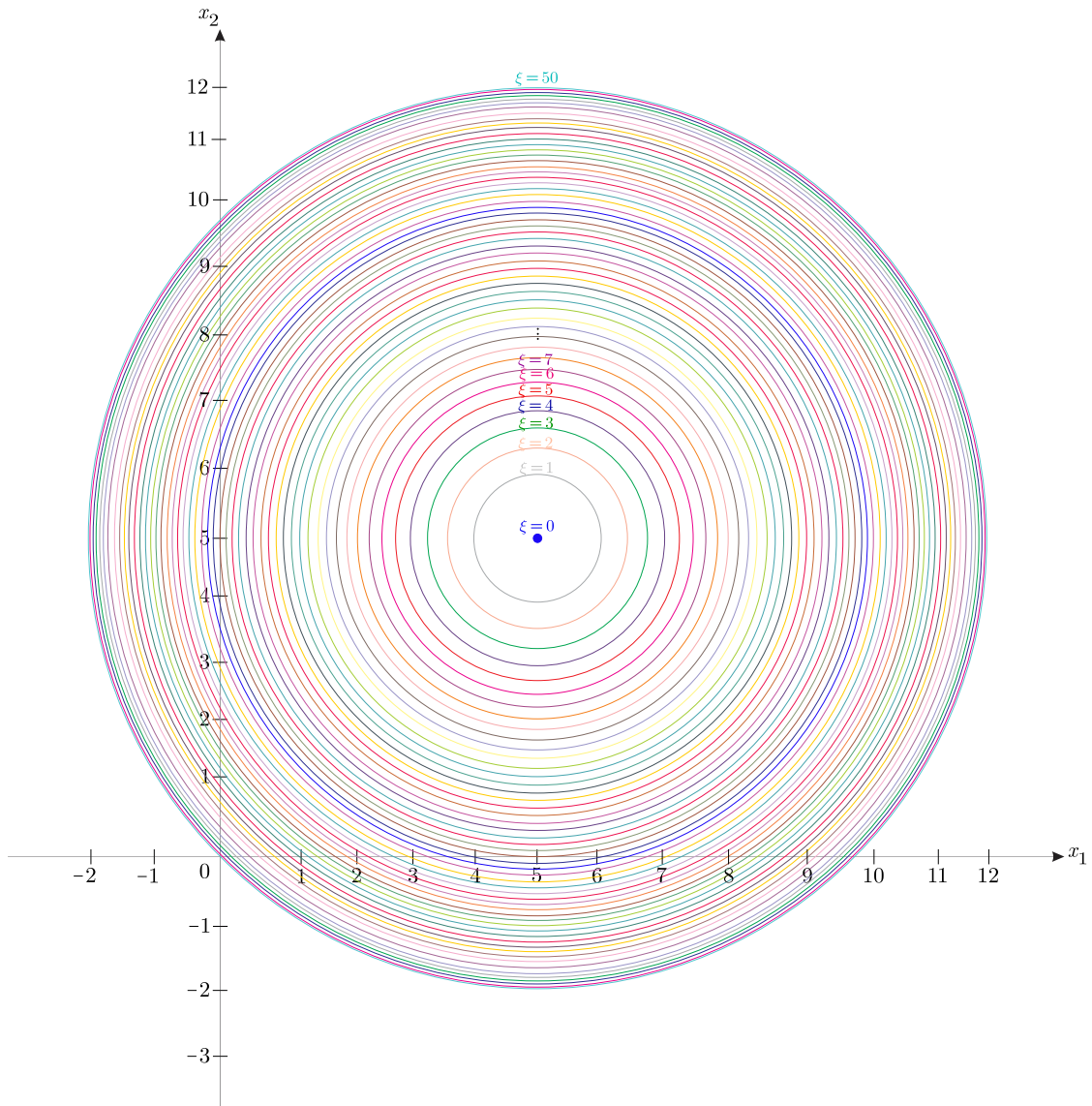


Figura 4.18. Curvas de nivel $\mathbb{C}_\xi$ del programa $(\mathbb{P}_7)$

b) Conjunto de las soluciones factibles del programa ($\mathbb{P}_7$)

$$\mathbb{C}_{\text{fac}} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / x_1^2 - x_2 \leq 6, x_1 + 3x_2 \leq 12, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$x_1^2 - x_2 = 6$$

$$x_1 + 3x_2 = 12$$

Para $x_1 = 0$ y $x_2 = -6$ se tiene el punto $(0, -6)$

Para $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$ se tiene el punto $(0, 4)$

Para $x_2 = 0$ y $x_1^2 = 6$ se tiene los puntos $(\sqrt{6}, 0) \wedge (-\sqrt{6}, 0)$

Para $x_2 = 0$ y $x_1 = 12$ se tiene el punto $(12, 0)$

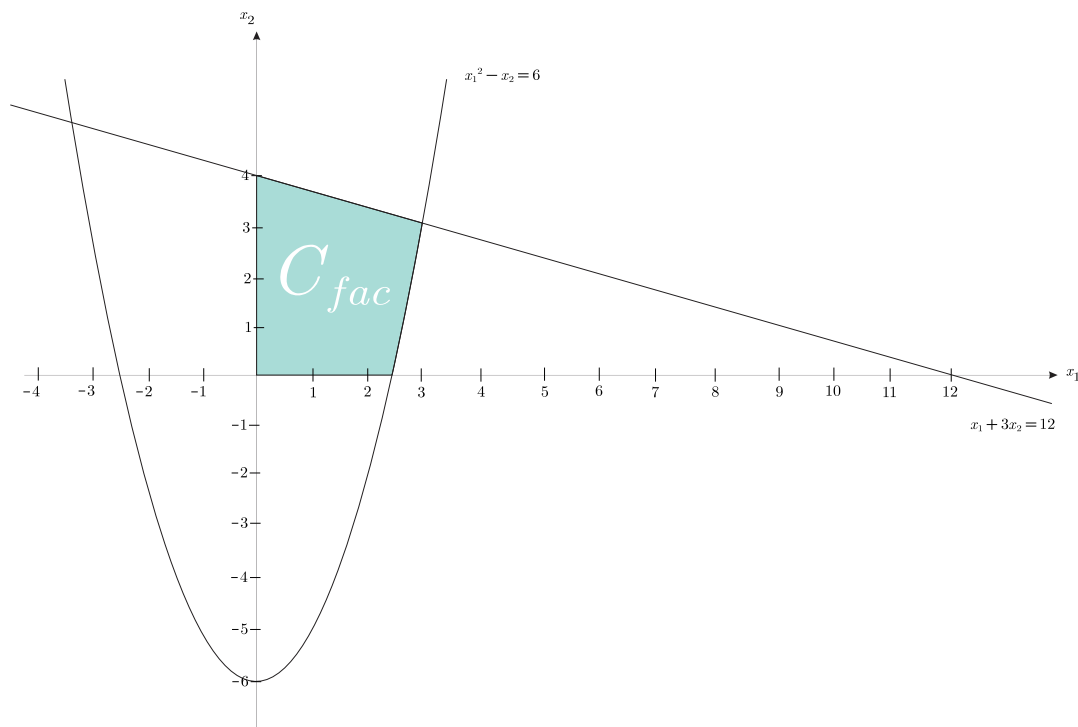


Figura 4.19. Conjunto factible $\mathbb{C}_{\text{fac}}$ del programa ($\mathbb{P}_7$)

c) Superposición de las figuras para determinar puntos máximos y mínimos para el programa ($\mathbb{P}_7$)

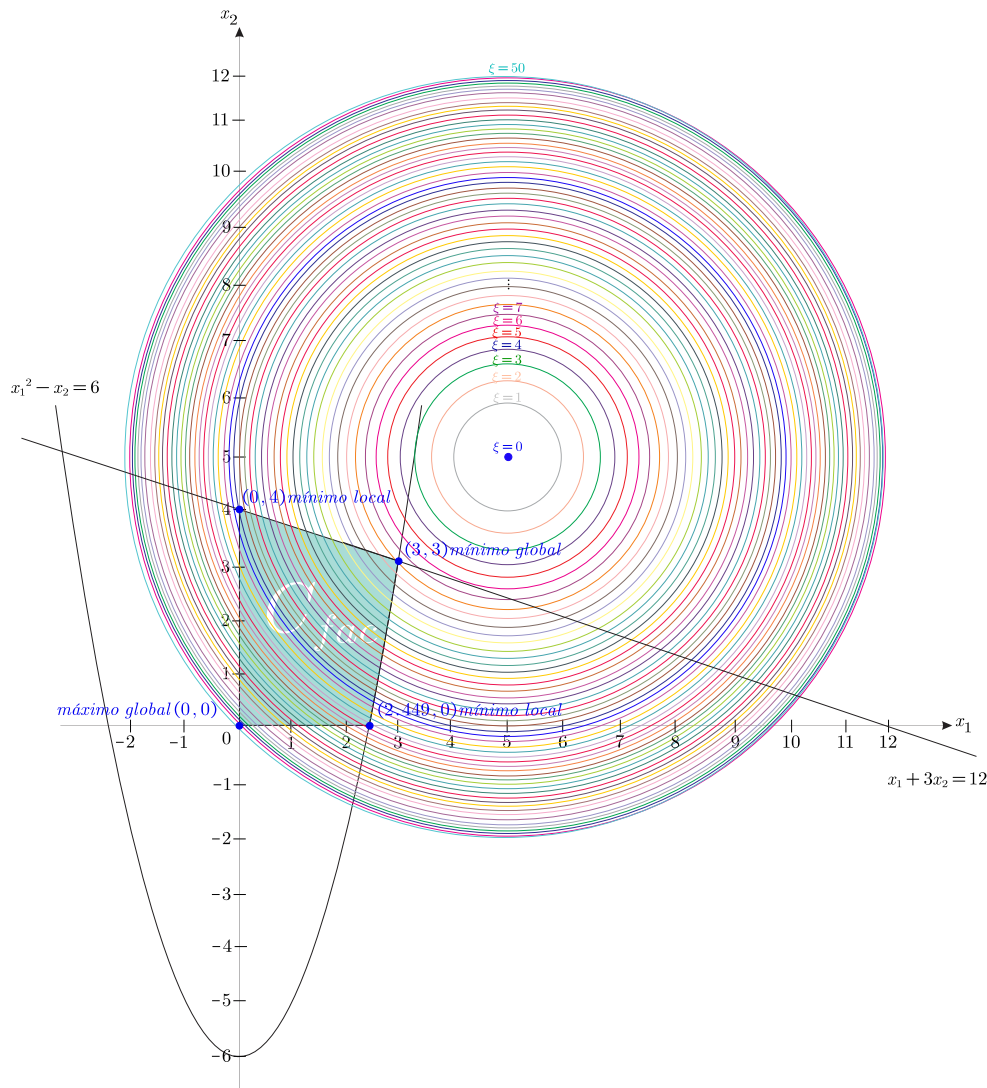


Figura 4.20. Máximo y mínimo del programa $(\mathbb{P}_7)$

Resolviendo gráficamente el programa $(\mathbb{P}_7)$, obtenemos un máximo global en el punto $x^* = (0,0)$ con un valor de la función objetivo de $f(0,0) = (0 - 5)^2 + (0 - 5)^2 = 50$

El punto $x^* = (3,3)$ es un mínimo global del programa $(\mathbb{P}_7)$ con un valor de la función objetivo es $f(3,3) = (3 - 5)^2 + (3 - 5)^2 = 8$

El punto $x^* = (0,4)$ es un mínimo local del programa $(\mathbb{P}_7)$ con un valor de la función objetivo de $f(0,4) = (0 - 5)^2 + (4 - 5)^2 = 26$

El punto $x^* = (2.449,0)$ es un mínimo local del programa $(\mathbb{P}_7)$ con un valor de la función objetivo de $f(2.449,0) = (2.449 - 5)^2 + (0 - 5)^2 = 31.507601$

Resultados con el software LINGO del programa $(\mathbb{P}_7)$

Tabla 4.3. Programa $(\mathbb{P}_7)$

PROGRAMA MATEMÁTICO NO LINEAL		
$\text{MAX} = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2$		
! SUJETO A LAS SIGUIENTES RESTRICCIONES;		
$x_1^2 - x_2 \leq 6;$		
$x_1 + 3x_2 \leq 12;$		
$x_1 \geq 0;$		
$x_2 \geq 0;$		

Óptimo Local

Solución óptima local encontrada		
valor objetivo	50.000000	
Inviabilidad	0.000000	
Iteraciones totales del solucionador	20	
Segundos de tiempo de ejecución transcurridos	0.53	
El modelo es cuadrático convexo		
Clase de modelo	QP	
Variables totales	2	
Variables no lineales	2	
Variables enteras	0	
Restricciones totales	5	
Restricciones no lineales	2	
Total distintos de cero	8	
Distintos de cero no lineales	3	
Variable	Valor	Costo Reducido
x_1	0.000000	10.000000
x_2	0.000000	10.000000
fila	Necesidad o abundancia	Precio dual
1	50.000000	1.000000
2	6.000000	0.000000
3	12.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.000000	0.000000

PROGRAMA MATEMÁTICO NO LINEAL		
$\text{MIN} = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2$		
! SUJETO A LAS SIGUIENTES RESTRICCIONES;		
$x_1^2 - x_2 \leq 6;$		
$x_1 + 3x_2 \leq 12;$		
$x_1 \geq 0;$		
$x_2 \geq 0;$		

Óptimo global

Solución óptima global encontrada		
valor objetivo	8.0000000	
inviabilidad	0.1157929E-07	
Iteraciones totales del solucionador	7	
Segundos de tiempo de ejecución transcurridos	0.45	
El modelo es cuadrático convexo		
Clase de modelo	QP	
Variables totales	2	
Variables no lineales	2	
Variables enteras	0	
Restricciones totales	5	
Restricciones no lineales	2	
Total distintos de cero	8	
Distintos de cero no lineales	3	
Variable	Valor	Costo Reducido
x_1	3.000000	-0.2607000E-04
x_2	3.000000	-0.1581732E-08
fila	Necesidad o abundancia	Precio dual
1	8.000000	-1.000000
2	0.000000	0.4210469
3	0.1277004E-07	1.473693
4	3.000000	0.000000
5	3.000000	0.000000

Por tanto, la solución máxima global del programa $(\mathbb{P}_7)$ es $x^* = (0,0)$ con un valor igual a 50 y la solución mínima global del programa $(\mathbb{P}_7)$ es $x^\circ = (3,3)$ con un valor igual a 8

Ejemplo 4.2.3.

En el programa matemático no lineal

$$(\mathbb{P}_8) \begin{cases} \text{Min } f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2000(x_1 - 50) + 2000(x_1 + x_2 - 100) \\ \text{sujeto a} \\ x_1 \geq 50 \\ x_1 + x_2 \geq 100 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 150 \\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Resuélvelo de forma analíticamente, gráficamente y con el software LINGO.

Solución

Resolución Analítica del programa $(\mathbb{P}_8)$

El programa $(\mathbb{P}_8)$ es convexo porque el conjunto de soluciones factibles es convexo y la función objetivo $f(x_1, x_2, x_3)$ es convexa.

Debido a las condiciones necesarias y suficientes de Kuhn-Tucker, los valores que debe tomar $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, 5$ son $\lambda_1 = -2000, \lambda_2 = -2000, \lambda_3 = -100, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 0; x = 50, y = 50, z = 50$

Por tanto, $x^* = (50, 50, 50)$ es un mínimo global del programa $(\mathbb{P}_8)$ con

$\lambda^* = (-2000, -2000, -100, 0, 0)$ y el valor de la función objetivo es 7500

Resultados con el software LINGO del programa $(\mathbb{P}_8)$:

Tabla 4.6. Programa $(\mathbb{P}_8)$

PROGRAMA MATEMÁTICO NO LINEAL
$\text{MIN} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2000(x_1 - 50) + 2000(x_1 + x_2 - 100)$! SUJETO A LAS SIGUIENTES RESTRICCIONES; $x_1 \geq 50;$ $x_1 + x_2 \geq 100;$ $x_1 + x_2 + x_3 \geq 150;$ $x_2 \geq 0; x_3 \geq 0;$

Óptimo global

Solución óptima global encontrada		
valor objetivo	7499.992	
inviabilidad	0.1411822E-07	
Iteraciones totales del solucionador	11	
Segundos de tiempo de ejecución transcurridos	1.21	
El modelo es cuadrático convexo		
Clase de modelo	QP	
Variables totales	3	
Variables no lineales	3	
Variables enteras	0	
Restricciones totales	6	
Restricciones no lineales	1	
Total distintos de cero	11	
Distintos de cero no lineales	3	
Variable	Valor	Costo Reducido
x_1	50.00000	0.000000
x_2	50.00000	0.1278866E-03
x_3	50.00004	0.1866853E-03
fila	Necesidad o abundancia	Precio dual
1	7499.992	-1.000000
2	- 0.1907435E-05	-2000.001
3	- 0.3856712E-05	-2000.115
4	0.3765097E-04	-99.88678
5	50.00000	0.000000

Por tanto, la solución mínima global del programa ($\mathbb{P}_8$) es $x^\circ = (50,50,50)$ con un valor igual a 7500.

4.3. Aplicaciones

4.3.1. Para mantenerse saludable una persona debe cumplir ciertos requisitos mínimos diarios, relacionados con diferentes tipos de elementos nutricionales. Supongamos que solo necesitan considerar tres clases de elementos nutricionales: calcio, proteínas y calorías, y que la dieta de la persona se compone únicamente de dos alimentos A y B cuyos precios y contenido nutricional por unidad se indican en la siguiente tabla, donde también se expresan los mínimos diarios que rigen cada elemento.

	Alimento A	Alimento B	Requerimientos mínimos diarios
Calcio(unidad)	10	4	20
Proteínas(unidad)	5	5	20
Calorías(unidad)	2	6	12
Precio	0.60	1.00	

El problema es encontrar la combinación de alimentos que satisfaga las necesidades diarias al menor costo posible. Formule y resuelva el problema gráficamente.

Solución

Formulación analítica del programa $\mathbb{P}_9$

Variables de decisión:

$$x_1 \equiv \text{cantidad del alimento A}$$

$$x_2 \equiv \text{cantidad del alimento B}$$

El programa matemática lineal:

$$(\mathbb{P}_9) \begin{cases} \text{Min } f(x_1, x_2) = 0.6x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} \\ 10x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 5x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ 2x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Vemos que el mínimo se alcanza en el punto de intersección de las dos rectas

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 20 \\ 2x_1 + 6x_2 = 12 \end{cases}$$

Entonces en $x_1^\circ = 3, x_2^\circ = 1$ hay un costo mínimo global a $\frac{28}{10} = 2.8$

a) Gráficamente

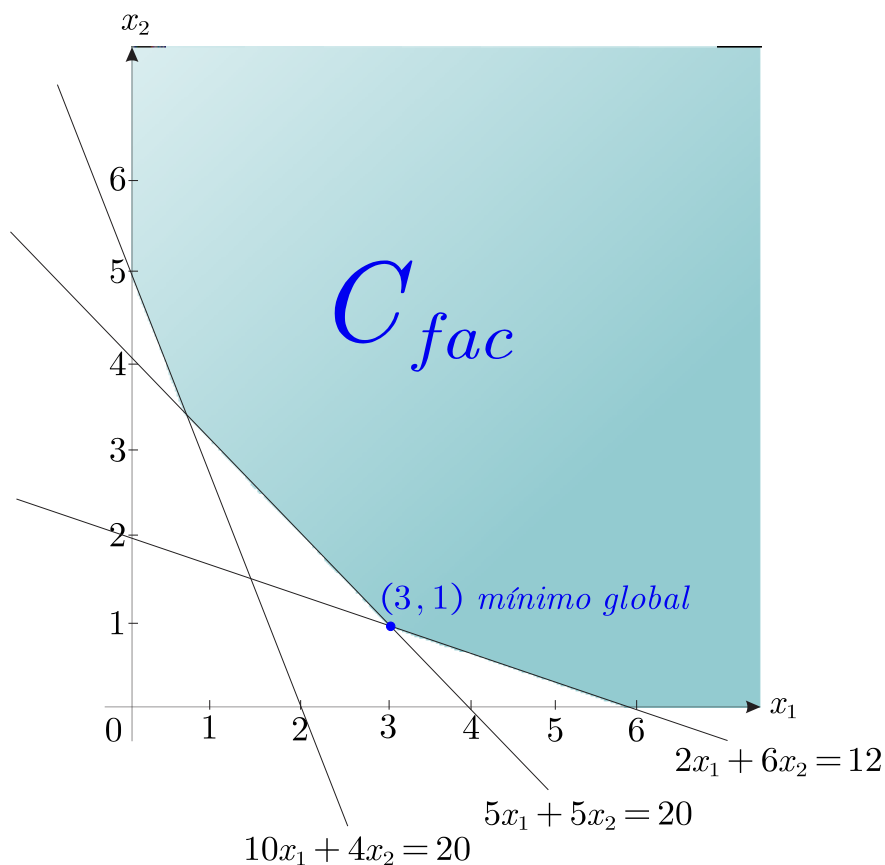


Figura 4.21. Conjunto factible C_{fac} del programa $(\mathbb{P}_9)$

Resultados con el software LINGO del programa $(\mathbb{P}_9)$:

Tabla 4.5. Programa $(\mathbb{P}_9)$

PROGRAMA MATEMÁTICO LINEAL	
MIN $= 0.6x_1 + x_2$ ¡SUJETO A LAS SIGUIENTES RESTRICCIONES; $10x_1 + 4x_2 \geq 20;$ $5x_1 + 5x_2 \geq 20;$ $2x_1 + 6x_2 \geq 12;$ $x_1 \geq 0;$ $x_2 \geq 0;$	

Optimo global

Solución óptima global encontrada		
valor objetivo	2.800000	
inviabilidad	0.000000	
Iteraciones totales del solucionador	2	
Segundos de tiempo de ejecución transcurridos	0.45	
El modelo es cuadrático convexo	LP	
Clase de modelo	2	
Variables totales	0	
Variables no lineales	0	
Variables enteras	6	
Restricciones totales	0	
Restricciones no lineales	10	
Total distintos de cero	0	
Variable	Valor	Costo Reducido
x_1	3.000000	0.000000
x_2	1.000000	0.000000
fila	Necesidad o abundancia	Precio dual
1	2.800000	-1.000000
2	14.00000	0.000000
3	0.000000	-0.8000000E-01
4	0.000000	-0.1000000
5	3.000000	0.000000
6	1.000000	0.000000

4.3.2. La empresa Petroperú quiere determinar cuántos barriles de petróleo explorara en sus pozos durante los próximos tres años para maximizar sus ganancias. Sabemos que si extrae x_1 millones de dólares en el primer año, puede vender cada barril por $(28 - x_1)$ dólares con un costo de exploración de x_1^2

millones de dólares. En el segundo año si se explora x_2 millones de barriles, el precio de venta por barril es de $(30 - x_2)$ dólares y 1.5 millones de dólares es el costo de exploración. En el tercer año si se extraen x_3 millones de barriles, cada uno de ellos se puede vender a $(32 - x_3)$ dólares, en este caso los costos de extracción son $2x_3^2$ millones de dólares. La empresa, en cambio, sabe que en los tres años podrá explorar en total 30 millones de barriles y gastar 350 millones en faenas mineras. Suponiendo que el tipo de interés anual es de 4%, determine las políticas de extracción óptimas durante los próximos tres años usando un programa de computadora de programación no lineal.

Solución

Formulación analítica del programa $\mathbb{P}_{10}$

Variables de decisión:

$x_1 \equiv$ millones de barriles extraídos en el primer año

$x_2 \equiv$ millones de barriles extraídos en el segundo año

$x_3 \equiv$ millones de barriles extraídos en el tercer año

El programa matemático no lineal:

$$(\mathbb{P}_{10}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } f(x_1, x_2, x_3) = x_1(28 - x_1) + \frac{1}{1.04}x_2(30 - x_2) + \frac{1}{(1.04)^2}x_3(32 - x_3) - x_1^2 - \frac{1}{1.04}1.5x_2^2 \\ \quad - \frac{1}{(1.04)^2}2x_3^2 \\ \text{sujeto a} \\ x_1^2 + 1.5x_2^2 + 2x_3^2 \leq 350 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 30 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Así que, el beneficio de maximizar cuando se explora:

$x_1 \equiv$ 7 millones de barriles en el primer año

$x_2 \equiv$ 6 millones de barriles en el segundo año

$x_3 \equiv$ 5.333 millones de barriles en el tercer año

Por lo tanto, se obtiene una utilidad de 263,43 millones de dólares en los próximos tres años

Resultados con el software LINGO del programa $(\mathbb{P}_{10})$:

Tabla 4.6. Programa $(\mathbb{P}_{10})$

PROGRAMA MATEMÁTICO NO LINEAL		
$\text{MAX} = x_1(28 - x_1) + \frac{1}{1.04}x_2(30 - x_2) + \frac{1}{(1.04)^2}x_3(32 - x_3) - x_1^2 - \frac{1}{1.04}1.5x_2^2 - \frac{1}{(1.04)^2}2x_3^2$		
! SUJETO A LAS SIGUIENTES RESTRICCIONES;		
$x_1^2 + 1.5x_2^2 + 2x_3^2 \leq 350;$		
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 30;$		
$x_1 \geq 0;$		
$x_2 \geq 0;$		
$x_3 \geq 0;$		

Óptimo global

Solución óptima global encontrada		
valor objetivo	263.4339	
inviabilidad	0.000000	
Iteraciones totales del solucionador	7	
Segundos de tiempo de ejecución transcurridos	0.22	
El modelo es cuadrático convexo		
Clase de modelo	QP	
Variables totales	3	
Variables no lineales	3	
Variables enteras	0	
Restricciones totales	6	
Restricciones no lineales	2	
Total distintos de cero	12	
Distintos de cero no lineales	6	
Variable	Valor	Costo Reducido
x_1	7.000000	0.000000
x_2	6.000000	0.000000
x_3	5.333333	0.000000
fila	Necesidad o abundancia	Precio dual
1	263.4339	1.000000
2	190.1111	0.000000
3	11.66667	0.000000
4	7.000000	0.000000
5	6.000000	0.000000
6	5.333333	0.000000

Por lo tanto, la solución máxima es $x_1 = 7, x_2 = 6, x_3 = 5.3$ con el valor máximo global igual a 263.4339

CAPÍTULO 05: DISCUSIÓN

Uno de los propósitos de esta tesis fue establecer las condiciones optimas para la existencia de soluciones en programas matemáticos no lineales. Este objetivo se logro estableciendo condiciones optimas para la existencia de soluciones globales mínimas y máximas en programas no lineales. Asimismo, se han formulado y resuelto condiciones optimas por ordenador en programas no lineales. Este resultado coincide con los obtenidos en esta área de investigación por otros matemáticos como (Mordecai, 2003), (Chávez, 2020) y (Gutiérrez, 2022).

Para demostrar el teorema de Weierstrass se utilizaron el supremo e ínfimo junto con las condiciones de continuidad en un conjunto factible cerrado y acotado. Estas tres condiciones se aplicaron para la solución analítica de programas no lineales con el fin de obtener máximos y mínimos globales. Estos resultados fueron corroborados gráficamente en el plano y con el software Lingo en programas no lineales.

Para demostrar la teoría de la programación convexa en un conjunto factible, se uso el concepto de segmento de recta junto con las condiciones de función convexa y mínimo local en un conjunto factible y se obtuvo como resultado un mínimo global en el conjunto factible. Asimismo, obtuvimos que el conjunto de todos los mínimos del programa matemático es un conjunto convexo. Estos resultados fueron corroborados por programas no lineales.

Finalmente, la existencia de soluciones optimas en programas no lineales cuando el numero de variables es mayor o igual a tres se establecen si la función real de variable vectorial es continua definida en un conjunto factible, que es un conjunto de puntos en un espacio euclidiano que comprueba las restricciones de un programa matemático, cuyo conjunto debe ser cerrado y delimitado.

CAPÍTULO 06: CONCLUSIONES

Primera. Las condiciones óptimas se establecieron utilizando la proposición 4.2.1. para la existencia de soluciones mínimas y máximas globales en programas matemáticos no lineales.

Segunda. Las condiciones bajo las cuales cada óptimo local es un óptimo global se establecieron utilizando la proposición 4.2.2. de la Programación convexa.

Tercera. Las condiciones óptimas fueron formuladas y resueltas por computadora en programas matemáticos no lineales como LINGO

CAPÍTULO 07: RECOMENDACIONES

Primera. Realizar estudios de programas matemáticos para establecer la existencia de óptimos globales en programas matemáticos lineales y no lineales con restricciones de desigualdad.

Segunda. Realizar estudios de programas matemáticos para establecer condiciones de optimalidad en problemas de optimización convexa con términos de subdiferenciales.

Tercera. La realización de estudios sobre optimización convexa y subdiferencial abre el camino para el estudio de diferentes aplicaciones, por lo que se puede considerar como una opción para trabajos futuros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Balbolla, R., Sanz, P. & Cerdá, E. (1995). *The concavity in an economic model: Demand functions*. Editorial : Madrid Pirámide. ISBN: 84-368-0925-4
- Balbolla, R ., Sanz. P. & Cerdá, E. (2001). *Optimization: Mathematical Programming and Applications to Economics*. Editorial Madrid: Prentice-Hall. ISBN: 978-8492-2992-9.
- Banda. J. & Ríos, J. (2015). Existencia de solución en un problema de optimización no lineal con restricciones de no negatividad. Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Pedro Luis Gallo.
- Bellman. R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press. New Jersey.
- Bonifaz. J. & Lama, R. (2013). *Optimización dinámica y teoría económica*. Universidad del Pacífico.
- Castillo, E., Conejo. A., Pedregal. P., García. R. & Alguacil. N. (2002). *Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia*. Universidad Castilla la Mancha.
- Cantú . R. (1996). Programación no lineal. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Nuevo León.
- Chávez . J.& Lupaca . H. (2020). Existencia de soluciones óptimas de programas matemáticos no lineales. Ciencias, 3(3).66-74.
<https://doi.org/10.33326/27066320.2019.3.952>
- Dantzig. G. (1991). *Linear Programming and extensions*. Princeton University Press.
- Espinosa,G., & Vázquez .A. (2016). *Aplicaciones de programación no lineal*. Omnia Science. México.
- Gutiérrez , P. (2022). *Programación no lineal*. Trabajo de fin de grado. Universidad de Sevilla

Intriligator, M. (1973). *Optimización matemática y teoría económica*, Prentice-Hall.

Lagrange, J. L. (1901). *Elementary Mathematics*. The open court publishing

Meneu, R., Pérez, J.& Ventura, M. (1999). *Fundamentos de Optimización matemática en economía: Programación no lineal*. Universidad de Valencia

Mordecai, A. (2003). *Programación No lineal: Análisis y Métodos*. Edition, reprint. Publisher

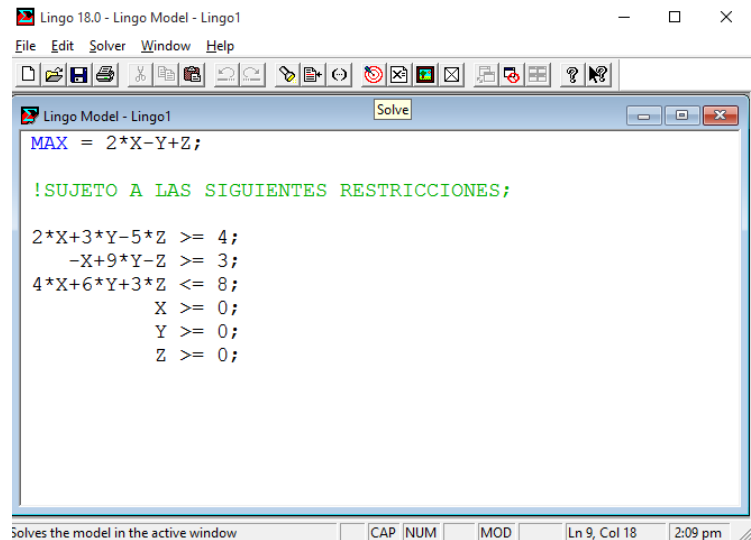
Ponce J., Solis G.& Ulfe L.(www.lindo.com). *Guía básica del LINGO software de optimización matemática*.

Weierstrass, K. (1903). *Mathematische werke*. Dritter band. Berlin. VPO-MÑ

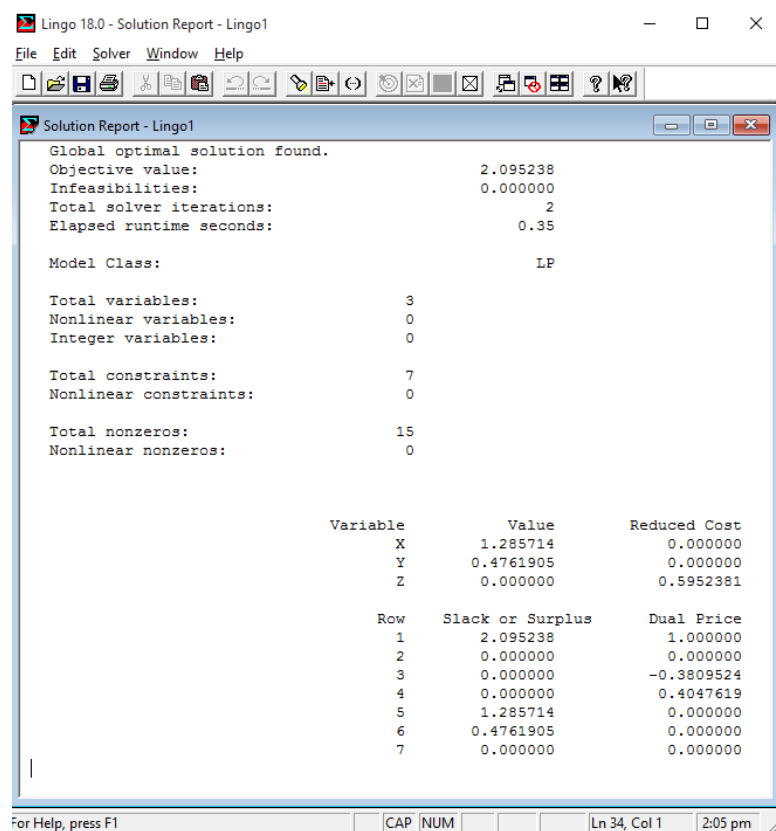
ANEXOS

Software LINGO	LINGO (Optimización de Generalización Lineal) es una herramienta capaz de formular la solución y análisis de programas matemáticos lineales y no lineales, lo que significa que podemos trabajar con una o más variables de decisión. La respuesta que nos da LINGO es una optimización que nos favorece a encontrar el excelente producto (superior beneficio, pequeño, costo, etc.). Unos de los atributos más característicos de LINGO es su aplicación en la estructura de modelos matemáticos lo que permite indagar en la cuestión a optimizar de una forma más natural y así expresar grandes cuestiones de optimización.
Sintaxis LINGO	El lenguaje del software LINGO es muy clara y educativa, sus instrucciones nos permiten contar las variables, en relación a los avisos en línea, las cuales deben terminar todas con punto y coma (;), para poder contar o etiquetar la función objetivo, esto se puede hacer haciendo uso de corchetes. Para ingresar la función objetivo, ya sea minimizadora o maximizadora, esto se hace con las palabras guardadas MAX o MIN seguidas de la representación (!).
Ejemplo. En el próximo programa $\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } 2x - y + z \\ \text{sujeto a} \\ 2x + 3y - 5z \geq 4 \\ -x + 9y - z \geq 3 \\ 4x + 6y + 3z \leq 8 \\ x, y, z \geq 0 \end{array} \right.$ Resuélvelo con el software LINGO	Solución Ingresamos y visualizamos la ventana principal del LINGO 

Ingresamos el programa matemático a optimizar, luego de ingresar al programa le pedimos al software que lo resuelva con ctrl+u o haciendo clic en el icono resolver (se ve en la imagen)



Al finalizar el procedimiento anterior llegamos a la solución del programa matemático



	Se observa que el valor de la función objetivo es 2.095238 y los valores de la variable de resolución son $x=1.285714$, $y=0.4761905$, $z=0$ La columna holgura o excedente proporciona el valor de la holgura o excedente en la solución óptima. La columna costo reducido proporciona el valor que disminuye del valor optimo cuando una variable no fundamental aumenta en una unidad. Finalmente, se puede guardar la plantilla en la opción de guardar para emplearla en otro instante. VPO-MÑ
--	--