

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática

**EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN DE INECUACIONES
VARIACIONALES EN ESPACIOS DE HILBERT**

TESIS

Presentada por:

Bach. ABDON WILSTON YUJRA COPA

Para optar el Título Profesional de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TACNA-PERÚ

2026



ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS Nro. 459

En la ciudad de Tacna, en el auditorium de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann; siendo las 9:30 a.m. horas del día Viernes 19 de Diciembre del 2025, estando presente el jurado calificador nominado con Resolución de Facultad Nro. 11577 - 2025 FACI-UNJBG, conformado por los siguientes docentes:

Dr. Roberto Encarnación safo Huallosi (Presidente)
Dr. Luis Andrés Amaya Cochán (Secretario)
Msc. Johnny Alfonso Chávez Delgado (Vocal)

Acto seguido, se dio lectura a la Resolución correspondiente, y del mismo modo se informa a la (al) Bachiller que el acto de sustentación constará de dos partes: (i) exposición y sustentación de la tesis, (ii) absolución de preguntas del jurado. Todo ello en un tiempo no mayor a 60 minutos ni menor a 30 minutos. A continuación, el presidente del Jurado instó a la (al) Bachiller:

Abaco Winston Jafes Copa.

a exponer la Tesis titulada:

EXISTENCIA Y UNIQUEDAD DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES VARIACIONALES EN ESPACIOS DE HILBERT

para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas.

Siendo las 10:10 a.m. horas, la (el) tesista concluye su exposición, luego se procedió a la formulación de las preguntas por parte de los miembros del jurado calificador, terminado este proceso, se invitó al público presente a abandonar la sala de sustentación para que los miembros del jurado emitan su calificación de acuerdo a reglamento. El promedio de la calificación dio el siguiente resultado: aprobado por unanimidad, con nota de 17, de acuerdo al Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann - Tacna.

Siendo las 10:30 horas, se dio por concluido el acto de sustentación de la tesis, firmando los miembros del jurado calificador, en señal de conformidad.

Roberto E. Safo Huallosi
Presidente

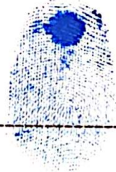
Luis Andrés Amaya Cochán
Secretario

Johnny Alfonso Chávez Delgado
Vocal

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, **JHONY ALFONSO CHÁVEZ DELGADO**, en mi condición de Asesor acreditado por la Resolución de Facultad R.F. N° 10672-2023 -FACI-UN/JBG de la tesis titulada: **“EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN DE INECUACIONES VARIACIONALES EN ESPACIOS DE HILBERT”**, presentado por el Bachiller **ABDON WILSTON YUJRA COPA** para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, habiendo cumplido con lo establecido en el reglamento de originalidad y de similitud de trabajos de investigación y producción intelectual, considerando que según la revisión, evaluación y análisis realizado a través del software de similitud textual TURNITIN cuenta con el nivel de similitud cuyo porcentaje es 07% por lo que **CERTIFICO LA SIMILARIDAD** de la tesis, la cual está de acuerdo al nivel **PERMITIDO**, para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio Institucional**.

Se emite el presente certificado con fines de continuar con los trámites respectivos para su obtención del título profesional.



Firma del Asesor

MSc. Jhony Alfonso Chávez Delgado
DNI: N° 18124030



Firma del Tesista

Bach. Abdon Wilston Yujra Copa
DNI: N° 40618660

DEDICATORIA

Al todopoderoso, por la infinita misericordia y su guía constante en cada paso de mi vida.

A la memoria de mi padre, cuyo ejemplo de esfuerzo y amor perdura como inspiración en mi camino.

A mi madre, por el amor incondicional, su fortaleza incansable y su apoyo permanente, pilares fundamentales para la realización de este logro.

AGRADECIMIENTO

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a mi asesor de tesis, por su invaluable orientación y apoyo constante durante todo el proceso de investigación.

A los docentes que me han acompañado a lo largo de mi formación académica.

A todas las personas que, con su colaboración y dedicación, contribuyeron al desarrollo de esta investigación.

Índice

DEDICATORIA	i
AGRADECIMIENTO.....	ii
ÍNDICE DE FIGURAS	iv
RESUMEN.....	v
ABSTRACT	vi
CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN	1
1.1. Descripción de la realidad problemática	1
1.2. Definición del problema de investigación.....	2
1.3. Objetivo de la investigación	2
CAPÍTULO II FUNDAMENTOS TEÓRICOS	4
2.1. Antecedentes del problema de investigación	4
2.2. Fundamentos teóricos.....	6
2.2.1. Diferenciación de funciones de variable real	6
2.2.2. Funcional	6
2.2.3. Espacio normado	10
2.2.4. Espacios de Hilbert.....	11
2.2.5. Funciones de prueba	11
2.2.6. Distribuciones.....	12
2.2.7. Espacios de Sobolev	13
2.3. Marco conceptual	13
2.3.1. Función convexa.....	14
2.3.2. Desigualdades variacionales en $\mathbb{R}^n$	15
2.3.3. Desigualdades variacionales en espacios de Hilbert	17
CAPÍTULO III METODOLOGÍA.....	21
3.1. Enfoque Metodológico	21
3.2. Procedimiento del Método Deductivo	21
CAPÍTULO IV RESULTADOS	22
4.1. Existencia y unicidad de una inecuación variacional de primer tipo	22
4.2. Existencia y unicidad de inecuación variacional de segundo tipo.....	25
4.3. Problema de obstáculos	28
CAPÍTULO V DISCUSIÓN.....	33
CAPÍTULO VI CONCLUSIONES.....	35
CAPÍTULO VII RECOMENDACIONES	36
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	37

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Funcional.....	06
Figura 2 El camino más corto que une los puntos D y E	08
Figura 3 Proyección ortogonal	17
Figura 4 Membrana elástica sin obstáculos	19
Figura 5 Membrana elástica con obstáculos.....	19
Figura 6 Problema de obstáculo unidimensional	30
Figura 7 Soluciones no únicas	32

RESUMEN

El objetivo de esta tesis fue establecer condiciones que garanticen la existencia y unicidad de respuestas para problemas de desigualdad variacional de la forma:

$$b(u, v - u) \geq (g, v - u)$$

Formuladas en espacios de Hilbert abstractos, estas cuestiones consisten en hallar una función que minimice una integral dada en un conjunto convexo. Para lograr este propósito, se emplean enfoques inductivo y deductivo, centrándose en el análisis de configuraciones continuas, coercitivas y bilineales definidas en subconjuntos convexos de espacios de Hilbert. Estas propiedades garantizan la existencia y unicidad de las soluciones de la desigualdad variacional. Además, se investiga la equivalencia entre los tipos de desigualdades y los problemas de minimización, en particular cuando configuración bilineal asociada es simétrica y asimétrica. Esta equivalencia es esencial para aplicar los resultados teóricos al estudio de la cuestión del obstáculo, un modelo fundamental en campos como la mecánica, la teoría de la elasticidad y la evaluación de fenómenos de contacto. Se realizó un análisis de la expresión del problema del obstáculo, demostrando que, bajo ciertas propiedades de datos y regularidad del dominio, puede reformularse como un problema de complementariedad. Esto permite la aplicación de conocimiento de existencia y unicidad obtenidos previamente, garantizando así la existencia de una solución débil única para este problema.

Palabra clave: Inecuación variacional de primera especie, problema del obstáculo, inecuación variacional de segunda especie.

ABSTRACT

The objective of this thesis is to establish conditions that guarantee the existence and uniqueness of solutions for problems with variational inequalities of the form:

$$b(u, v - u) \geq (g, v - u)$$

formulated in abstract Hilbert spaces. These problems consist of finding a function that minimizes a given integral within a convex set. To achieve this objective, inductive and deductive approaches are employed, focusing on the analysis of continuous, coercive bilinear forms defined on convex subsets of Hilbert spaces. These properties make it possible to guarantee the existence and uniqueness of solutions to the variational inequality. Likewise, the equivalence this type of inequalities and minimization problems is studied, particularly when the associated bilinear form is symmetric and nonsymmetric. This equivalence is key to applying theoretical results to the study of the obstacle problem, a central model in areas such as mechanics, elasticity theory, and the analysis of contact phenomena. A study is carried out on the formulation of the obstacle problem, demonstrating that, under certain conditions of regularity in the data and the domain, it can be reformulated as a complementarity problem. This allows for application to previously obtained existence and uniqueness studies, guaranteeing an investigation into the existence of a unique weak solution to this problem.

Keywords: Variational inequality of the first kind, obstacle problem, variational inequality of the s

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Descripción de la realidad problemática

La intuición física siempre ha sido fuente de cuestiones que posteriormente se desarrollan y estudian mediante diversas suposiciones matemáticas, como las desigualdades variacionales. Este principio, surgida en 1959, constituye un dominio de análisis interesante en el estudio de funcionales, optimización y las igualdades diferenciales parciales.

Las desigualdades variacionales, de igual manera invocadas inecuaciones variacionales, constituyen una suposición matemática acrecentada a comienza de la década de 1960 en Italia, por profesores Guido Stampacchia (192-1978) y Gaetano Fichera (1922-1966). Stampacchia se inspiró en la suposición del potencial, y Fichera en cuestión de mecánica, y más específicamente en la elasticidad.

La cuestión fundamental es el estudio de las desigualdades variacionales en las preguntas de Signorini. Esta cuestión, formulada por Antonio Signorini en 1959 y delimitada por Gaetano Fichera en 1963, esta pregunta proporciona un ejemplo que caracteriza el contacto sin rozamiento entre un cuerpo deformable y un cuerpo rígido. En 1964, Guido Stampacchia explicó su extensión del lema de Lax Peter-Milgram Arthur para la investigación de la regularidad de igualdades diferenciales. Guido Stampacchia introdujo la palabra “desigualdades variacionales” y, en 1967, con participación de J.L. Lions (1928-2001) estableció un vínculo entre las estructuras bilineales, continuas y coercitivas definidas en espacios de David Hilbert y existencia y particularidad de la respuesta a una desigualdad variacional.

En la formulación específica de las cuestiones de Dirichlet, con propiedades de fronteras nulas, y en las cuestiones de Neumann con derivadas en el contorno, la respuesta deseada presenta inconvenientes adicionales similares a los que se encuentran con las propiedades de frontera ordinarias. Además, deben satisfacer ciertas desigualdades, por ejemplo, desigualdades positivas en un conjunto abierto o en el contorno. Estos problemas justifican en el análisis de desigualdades en lugar de igualdades, denominadas inecuaciones variacionales.

En 1966, los matemáticos Guido Stampacchia y G.J. Hartam probaron un producto que garantiza la existencia y particularidad de una respuesta a una desigualdad variacional delimitado en un espacio euclidiano de dimensión limitada para una aplicación continua $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y X , un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^n$. En consecuencia, el problema de la existencia de $x_0 \in X$ tal que $(Bx_0, x - x_0) \geq 0$, para todo $x \in X$, admite una respuesta única.

Mientras que las hipótesis variacionales de las cuestiones de frontera encuentran su punto de inicio en el procedimiento de la proyección ortogonal, la conjetura de las desigualdades variacionales toma su punto de partida en la proyección sobre un conjunto convexo.

En esta situación, uno de los propósitos de esta investigación es explicar las herramientas matemáticas utilizadas para resolver estas cuestiones de existencia y particularidad de las respuestas a ciertas especies de desigualdades variacionales, sus consecuencias críticas y los procedimientos de resolución examinados.

Sin embargo, en este contexto, es natural formular las siguientes interrogantes.

1.2. Definición del problema de investigación

1.2.1. Problema General

¿Bajo qué propiedades es posible formular la solución a problemas de inecuaciones variacionales en espacios de Hilbert abstractos?

1.2.2. Problema Específicos

- a) ¿Bajo qué propiedades es posible formular la existencia de una solución en problemas de inecuaciones variacionales en espacios de Hilbert abstractos?
- b) ¿Bajo qué propiedades es posible formular la unicidad de la solución en problemas de inecuaciones variacionales en espacios de Hilbert abstractos?
- c) ¿Cómo formular y explicar el problema de obstáculos unidimensional?

1.3. Objetivo de la investigación

1.3.1. Objetivo General

Formular la solución a problemas de inecuaciones variacionales en espacios de Hilbert abstractos.

1.3.2. Objetivos Específicos

- a) Formular la existencia de una solución en problemas de inecuaciones variacionales en espacios de Hilbert abstractos.
- b) Formular la unicidad de la solución en problemas de inecuaciones variacionales en espacios de Hilbert abstractos.
- c) Formular y explicar el problema de obstáculos unidimensional.

1.4. Justificación e importancia de la investigación

El propósito del análisis sobre la existencia y unicidad de soluciones a desigualdades variacionales en espacios de David Hilbert se justifica principalmente por sus innumerables utilizaciones en el conocimiento y la hipótesis de las desigualdades. Estas utilidades constituyen, de hecho, una generalización muy natural de la teoría de los problemas de valores en la frontera y permiten abordar nuevas cuestiones que surgen de diversas áreas de las matemáticas aplicadas, como la mecánica, la física, la programación convexa y la teoría de control. De manera similar, se pueden matematizar muchas cuestiones específicas utilizando desigualdades variacionales, como problemas de contacto, problemas de concentración en química o cuestiones de deformación en ingeniería civil. Finalmente, una aplicación sencilla pero significativa de las desigualdades variacionales es la cuestión del obstáculo. Esta cuestión es importante porque presenta una variedad de ejemplos relacionados con diversos fenómenos físicos, como la cuestión de la presa rectangular.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1. Antecedentes del problema de investigación

Bermúdez et al (1984) en su artículo de investigación argumenta que las desigualdades variacionales son una herramienta adecuada para argumentar una considerable cifra de cuestiones no lineales en física. Por ejemplo, estas cuestiones se presentan al configurar acontecimientos cerca de la fricción unilateral entre un objeto elástico y otro rígido, el rozamiento, la fluidez de vapor no-newtonianos de especie Bingham, la entrega de calor con mutación de estado (cuestión de Stefan), la torsión elastoplástica de una varilla, etc.

Kinderlehrer & Stampacchia (1987) afirman en su trabajo que la cuestión de Signorini es el principio del estudio de las desigualdades variacionales. Esta cuestión, formulada por Antonio Signorini en 1959 y resuelto por Fichera en el año 1963, describe el contacto sin rozamiento entre un sólido deformable y un sólido firme. De manera similar, en 1964, Guido Stampacchia demostró su extensión al lema de Lax Peter-Milgram Arthur para estudiar la regularidad de las desigualdades diferenciales. Stampacchia insertó el término “desigualdades variacionales” y, en año 1967 en participación con Jacques-Louis Lions (1928-2001), asoció configuraciones bilineales continuas y coercitivas, definidas en espacios de David Hilbert, con la garantía de la existencia y particularidad de la solución de una desigualdad variacional.

Legasa (2016), en su tesis de licenciatura, afirma que el objetivo es aprender los espacios de Sobolev, que reciben su nombre de Sergei Sobolev (1908-1989), y explorar uno de los métodos más empleadas para la resolución de igualdades diferenciales parciales: el sistema variacional. Este sistema permite, en ocasiones verificar la existencia y particularidad de solución en un dominio de función determinado. Así mismo, bajo ciertas condiciones, permite transformar la cuestión en un problema de minimización. Esto incluye la noción de derivada elemental, espacios de David Hilbert y espacios de Sobolev. Nuestros espacios de funciones serán espacios de Banach conformados por funciones definidas en el espacio L_p y que admiten una o más derivadas en L_p , naturalmente en un dominio que debe explicarse con precisión. Los implementos para demostrar la existencia y particularidad son los conocidos teoremas de Guido Stampacchia y Lax Peter-Milgram Arthur, formulados para

espacios de David Hilbert. Esto no implica en absoluto la aplicación de conjeturas del contraste funcional y la topología a la solución de igualdades diferenciales parciales.

Puerto (2015) concluye que algunas cuestiones materiales pueden replantear en expresiones de desigualdades variacionales, lo que admite concluir la existencia y particularidad de sus soluciones. Asimismo, la elección del dominio en el que se define una desigualdad variacional es crucial; una elección acertada facilita la comprensión del contexto de las respuestas y atenúa las implicaciones de su existencia. Finalmente, los teoremas de Lax Peter-Milgram Arthur y Guido Stampacchia, junto con sus extensiones, son esenciales para resolver desigualdades variacionales; por lo tanto, es crucial verificar rigurosamente la validez de sus hipótesis. Sin embargo, cualquier modificación de estos problemas requiere un conocimiento altamente especializado de la teoría funcional y la teoría de operadores.

Huayta (2023), en su tesis de licenciatura, formalizó el resultado de un problema de valor en la frontera en un entorno abstracto de espacios de David Hilbert, aplicando uno de los medios más considerables de la investigación funcional: el teorema de Lax Peter-Milgram Arthur, que es una extensión de la conceptualización de Riez. Este teorema confirma la existencia y especificidad de los resultados a diversas cuestiones que involucran igualdades diferenciales parciales y ordinarias típicas, admitiendo una respuesta extendida en el espacio de funciones. Empleó el método variacional como solución extendida a cuestiones de valores en la frontera para igualdades diferenciales.

Hilasaca (2023), en su tesis de licenciatura, demostró la existencia y particularidad de resolución elíptica variacional en espacios de David Hilbert y utilizó estos logros a formulaciones débiles de la cuestión uniforme de Dirichlet y de la cuestión uniforme de Neumann. Aplicó el criterio lógico para probar las propiedades suficientes para la existencia y particularidad de esta desventaja variacional, y la parte racional se verificó utilizando cuestiones similares de Dirichlet y Neumann. Las consecuencias se prolongaron a áreas que inicialmente estaban bajo la jurisdicción de Sergei Sobolev, lo que garantizó una estructura bilineal que satisface las propiedades del teorema de Lax Peter-Milgram Arthur. Estas desventajas relacionadas con la transformación se destacan principalmente por sus numerosas aplicaciones en el campo del conocimiento, permitiendo el estudio de nuevos obstáculos que surgen en diversas áreas de las matemáticas aplicadas, como la mecánica de campos sólidos y las fórmulas de aproximación matemática que utilizan expresiones débiles de igualdades diferenciales parciales.

2.2. Fundamentos teóricos

Para el análisis presentado en el presente estudio, se define conceptos como la diferenciación de funciones de variable real, espacio vectorial normado, funcionales y espacios de Banach. También se define las propiedades de los espacios de Hilbert, los espacios de prueba y los espacios de Sobolev. La bibliografía cita algunos de los autores consultados, como (Brézis, 2010; Collantes & Coronel, 2010; Mast & Sofonea, 2009; Moshe, 2017).

2.2.1. Diferenciación de funciones de variable real

Definición 2.2.1.1. (Función Diferenciable)

Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Una función $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $x_0 \in U$ si existe un número $g'(x_0)$, al que llamamos derivada $g'(x)$ en el punto x_0 , tal que

$$g'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}, \text{ para todo } \Delta x \neq 0.$$

Definición 2.2.1.2. (Función resto)

Se define el resto $r(\Delta x)$ como la aplicación de la derivada $g'(x_0)$ por $\frac{\Delta g}{\Delta x}$, es decir,

$$r(\Delta x) = \frac{\Delta g}{\Delta x} - g'(x_0),$$

donde $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} r(\Delta x) = 0$.

2.2.2. Funcional

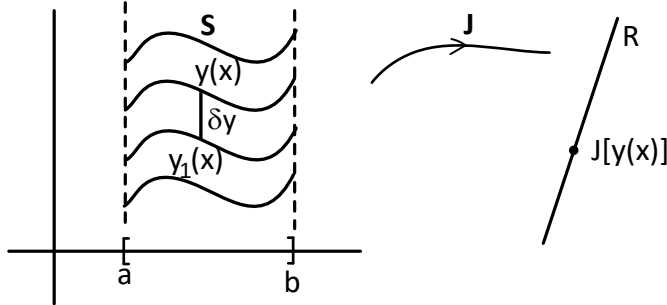
Definición 2.2.2.1. (Funcional)

Sea S una clase de funciones continuas. Un funcional es una correspondencia J que asocia a cada función continua $y(x)$ de la clase S un número denotado $J[y(x)]$, es decir,

$$J: S \rightarrow \mathbb{R}, J[y(x)] = J$$

Figura 1.

Funcional



Nota: Elaboración propia

Ejemplo 2.2.2.1.

1. $J[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$, longitud de una curva en el plano.
2. $J[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}$, longitud de arco de una curva en el espacio.
3. $J[x(t), y(t)] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (xy' + yx') dx$, área encerrada por una hoja.
4. $J[x(t), y(t)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx$, tiempo de incertidumbre por el desplazamiento de un punto a otro.

2.2.2.1. Problema de Euler

Entre todas las funciones derivadas continuas $y=y(x)$ que satisfacen las siguientes condiciones de contorno:

$$y(a)=A, y(b)=B$$

Determine la función que proporciona un extremo pequeño (curvas cercanas con derivadas similares) del funcional.

$$J[y(x)] = \int_a^b G(x, y, y') dx$$

Proposición 2.2.2.1.1. (Lema fundamental)

Para cualquier función continua $\zeta(x)$ tal que $\zeta(a) = A$ y $\zeta(b) = B$, tenemos:

$$\int_a^b g(x) = 0$$

Proposición 3.2.2.1.2. (Ecuación de Euler)

Una condición necesaria para que la funcional $J[y(x)] = \int_a^b G(x, y, y') dx$, definida en un conjunto de funciones $y=y(x)$, que admite derivadas continuas y satisface $y(a)=A$, y $y(b)=B$, alcance su extremo en la función $y=y(x)$, es que esta función satisfaga la ecuación de Euler:

$$G_y - \frac{d}{dx}(G_{y'}) = 0$$

2.2.2.2. Solución de Euler en forma desarrollada

Sea $G = G(x, y, y')$. De forma similar, la forma expandida de la ecuación de Euler será:

$$G_y - \frac{d}{dx}(G_{y'}) = G_y - G_{xy'} - y' G_{yy'} - y'' G_{y'y'} = 0.$$

2.2.2.3. La identidad de Beltrami

La funcional que depende únicamente de y e y' se representa

$$G - y' \frac{\partial}{\partial y'} G = C$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

2.2.2.4. La condición de Jacobi

Definición 2.2.2.4.1. (Ecuación de Jacobi)

La ecuación de Jacobi asociada con el Lagrangiano $y=\bar{y}$ es la funcional:

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx,$$

La ecuación diferencial con respecto a $u(x)$ se obtiene sustituyendo:

$$\left(G_{yy} - \frac{d}{dx} G_{yy'} \right) u - \frac{d}{dx} (G_{y'y'} u') = 0$$

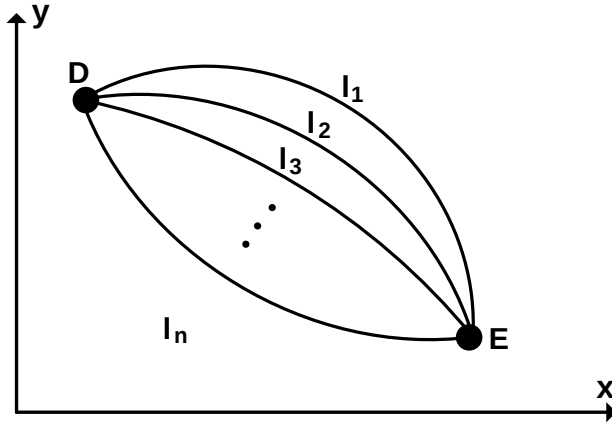
y utilizando la función dada $y=\bar{y}$.

2.2.2.5. Un problema antiguo de Optimización

Se considera dos puntos distintos, D y E, situados justamente en el plano. ¿Cuál es la forma de la curva que minimizan la separación entre estos dos puntos?

Figura 2.

Problema clásico de optimización



Nota: Elaboración propia.

La funcional que debe generar la solución viene dada por la ecuación:

$$J[y(x)] = \int_{x_D}^{x_E} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Tenemos:

$$G_y = 0 \text{ y } G_{y'} = y'(1 + (y')^2)^{-1/2}.$$

Sustituyendo en la ecuación, obtenemos

$$G_y - \frac{d}{dx}(G_{y'}) = 0 - \frac{d}{dx} \left[y'(1 + (y')^2)^{-1/2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow y'(1 + (y')^2)^{-1/2} = C$$

$$\Leftrightarrow y(x) = C_1 x + C_2,$$

donde C_1 y C_2 son constantes que se determinarán en función de las condiciones de contorno.

Respecto a la condición de Legendre, dado que $G_{y'} = y'(1 + (y')^2)^{-1/2}$, se tiene.

$$G_{y'y'} = (1 + (y')^2)^{-1/2} - (1 + (y')^2)^{-3/2} y' y'$$

Entonces

$$G_{y'y'} = \frac{1}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} > 0, \forall y(x)$$

Dado que $G_{y'y'} > 0$, y la función $y(x)$ satisface las condiciones de la ecuaciones de Euler y Jacobi, $y(x)$ es un mínimo para la funcional.

2.2.3. Espacio normado

Definición 2.2.3.1. (Espacio vectorial)

Un conjunto $\mathbb{V} \neq \emptyset$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, si satisface las subsiguientes propiedades:

1. $x_1 + x_2 \in \mathbb{V}$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{V}$
2. $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{V}$
3. $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$, para todo $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{V}$
4. Para todo $x_1 \in \mathbb{V}$, $\exists! \mathbf{0}$, tal que $x_1 + \mathbf{0} = x_1$, $\mathbf{0} + x_1 = x_1$
5. Para todo $x_1 \in \mathbb{V}$, $\exists! (-x)$, tal que $x + (-x) = \mathbf{0}$, $(-x) + x = \mathbf{0}$
6. $\delta x_1 \in \mathbb{V}$, para todo $\delta \in \mathbb{K}$ y todo $x_1 \in \mathbb{V}$
7. $\delta(x_1 + x_2) = \delta x_1 + \delta x_2$, para todo $\delta \in \mathbb{K}$ todo $x_1, x_2 \in \mathbb{V}$
8. $(a\delta)x_1 = a(\delta x_1)$, para todo $a, \delta \in \mathbb{K}$ y todo $x_1 \in \mathbb{V}$
9. $(a\delta)x_1 = a(\delta x_1)$, para todo $a, \delta \in \mathbb{K}$ y todo $x_1 \in \mathbb{V}$
10. $1 x_1 = x_1$, para todo $x_1 \in \mathbb{V}$

Definición 2.2.3.2. (Norma)

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial normado sobre los números reales. Una funcional $\|x_1\|$ definida en $\mathbb{V}$ se denomina norma de x_1 en $\mathbb{V}$ si cumple las siguientes propiedades:

1. $\|x_1\| > 0$, para todo $x_1 \neq 0$, $x_1 \in \mathbb{V}$.
2. $\|x_1\| = 0$, si $x_1 = 0$.
3. $\|\varepsilon x_1\| = |\varepsilon| \|x_1\|$, para todo $x_1 \in \mathbb{V}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$.
4. $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{V}$, (Desigualdad triangular).

Definición 2.2.3.3. (Espacio vectorial normado)

$\mathbb{V}$ es un espacio vectorial normado en $\mathbb{R}$ si existe en $\mathbb{V}$ una norma $\|\cdot\|: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definida.

Definición 2.2.3.4. (Disco abierto)

$\mathbb{V}$ es un espacio vectorial. El disco abierto centrado en $h \in \mathbb{V}$ y con radio r es el conjunto:

$$B_r(h) = \{g \in \mathbb{V}: \|g - h\| < r\}$$

Definición 2.2.3.5. (Conjunto abierto)

Un conjunto $Y \subset \mathbb{V}$ es abierto si, para cada $y \in Y$, existe un $r > 0$ tal que $B_r(y) \subset Y$

Definición 2.2.3.6. (Espacio de Banach)

Sea X un espacio vectorial normado, dotado de la métrica $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$. Decimos que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach cuando (X, d) está completo, es decir, cuando toda sucesión de Cauchy en X converge.

Definición 2.2.3.7. (Espacio Dual)

Sea X un espacio vectorial normado. El espacio dual de X , denotado X' , es el espacio:

$$\mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \{ g: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } g \text{ es una funcional lineal continua} \}$$

Observación 2.2.3.1.

Los elementos $g \in X'$ son funcionales continuos sobre X .

2.2.4. Espacios de Hilbert**Definición 2.2.4.1. (Producto interno)**

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial complejo. Un producto interno complejo es:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$$

que satisface las siguientes condiciones:

- 1) $\langle x_1, x_1 \rangle \geq 0, \forall x_1 \in \mathbb{V} \text{ y } \langle x_1, x_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$
- 2) $\langle x_1, x_2 \rangle = \overline{\langle x_2, x_1 \rangle}$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{V}$
- 3) $\langle \varepsilon x_1 + \theta x_2, x_3 \rangle = \varepsilon \langle x_1, x_3 \rangle + \theta \langle x_2, x_3 \rangle$, para todo $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{V}$, para todo $\varepsilon, \theta \in \mathbb{C}$
- 4) $\langle x_1, \varepsilon x_2 + \theta x_3 \rangle = \bar{\varepsilon} \langle x_1, x_2 \rangle + \bar{\theta} \langle x_1, x_3 \rangle$, para todo $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{V}$, para todo $\varepsilon, \theta \in \mathbb{C}$

Definición 2.2.4.2. (Espacios de Hilbert)

Un espacio de Hilbert es un espacio pre-Hilbert completo (para la métrica asociada). Por tanto, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach con un producto interno.

2.2.5. Funciones de prueba**Definición 2.2.5.1. (Soporte de una función)**

Sea $\chi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de valor real de una variable vectorial. El soporte de χ es el conjunto

$$\text{sop} \chi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n / \chi \neq 0\}}$$

Definición 2.2.5.2. (El espacio vectorial $C_0^\infty(\omega)$)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. El espacio $C_0^\infty(A)$ es el espacio vectorial funciones infinitamente diferenciables en A cuyo soporte está contenido en un conjunto compacto de A .

Definición 2.2.5.3. (Convergencia en $C_0^\infty(A)$)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Una sucesión de funciones (χ^n) converge para $\chi \in C_0^\infty(A)$, si cumple las siguientes condiciones:

- a) $\text{sop}(\chi^n) \subset B$, donde B es un conjunto compacto fijo en A , $\forall n = 1, 2, \dots$
- b) (χ^n) converge uniformemente para $\chi \in A$, al igual que todas sus derivadas de cualquier orden.

Definición 2.2.5.4. (El espacio vectorial $C_0^\infty(A)$)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. El espacio de funciones de prueba es el espacio vectorial $C_0^\infty(A)$ con la convergencia en $C_0^\infty(A)$.

2.2.6. Distribuciones

Definición 2.2.6.1. (Distribución)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Una distribución en A es una funcional lineal T continua en el espacio de funciones de prueba $D(A)$.

Definición 2.2.6.2. (Derivada de una distribución)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. La derivada de una distribución T en un conjunto abierto A es una función lineal $\frac{\partial T}{\partial x_k}$, continua en el espacio de funciones de prueba $D(A)$, definida por la relación:

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \chi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \chi}{\partial x_k} \right\rangle, \forall \chi \in D(A), k = 1, 2, \dots, n$$

Ejemplo 2.2.6.1. Calcule la derivada en el sentido de las distribuciones de

$$\theta(x) = 0, \text{ si } x < 0 \quad \text{y} \quad \theta(x) = 1, \text{ si } x > 0$$

Solución

Por la definición 2.2.6.2.

$$\begin{aligned} \langle D\theta, \chi \rangle &= \left\langle \frac{d\theta}{dx}, \chi \right\rangle = \langle DT_\theta, \chi \rangle = (D\theta)(\chi) = (-1)^1 \langle T_\theta, \chi' \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \chi'(x) dx = - \left(\int_{-\infty}^0 \theta(x) \chi'(x) dx + \int_0^{\infty} \theta(x) \chi'(x) dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(\int_{-\infty}^0 0 \chi'(x) dx + \int_0^{\infty} 1 \chi'(x) dx) \\
&= -\int_0^{\infty} \chi'(x) dx \\
&= -\int_0^{\infty} \frac{d\chi(x)}{dx} dx = -\int_0^{\infty} d\chi(x) \\
&= -[\chi(x)]_0^{+\infty} = -[\chi(+\infty) - \chi(0)] \\
&= -[0 - \chi(0)] = \chi(0) = \delta(\chi),
\end{aligned}$$

de lo cual se deduce que

$$\langle D\theta, \chi \rangle = \chi(0) = \delta(\chi) = \langle \delta, \chi \rangle$$

Por lo tanto

$$D\theta = \delta$$

2.2.7. Espacios de Sobolev

Definición 2.2.7.1. (Espacios de Sobolev $W_0^{1,p}(A)$)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(A)$ se define como la clausura de $D(A)$ en $W^{1,p}(A)$.

Observación 2.2.7.1.

El espacio $H_0^1(A)$ se define en lugar de $W_0^{1,2}(A)$.

Definición 2.2.7.2. (Espacio de Sobolev de orden uno)

Se define el espacio $H_0^1(A)$ como la cerradura de $D(A)$ en $H^1(A)$, el cual está dotado con la norma

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2}^2$$

Observación 2.2.7.2.

El espacio $H_0^1(A)$ es un espacio de Hilbert separable, con el producto escalar de $H^1(A)$.

2.3. Marco conceptual

Para el análisis de nuestras variables de estudio, se introducen las definiciones de funciones convexas y se establece las condiciones para la existencia de inecuaciones variacionales. La bibliografía cita varias obras de referencia, en particular (Duistermaat y Kolk, 2010),

(Dijk, 2013), (Dantzing, 1991), (Evans, 1998), (Friedlander, 1999), (Gutierrez, 2013), (Hounie, 1979), (Jost, 1975), (Kinnunen, 2020).

2.3.1. Función convexa

Definición 2.3.1.1. (Segmento de recta)

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. El segmento de recta con extremos x e y es el conjunto

$$[x_1, x_2] = \{(1-s)x_2 + sx_1 : 0 \leq s \leq 1\}.$$

Definición 2.3.1.2. (Conjunto convexo)

Un conjunto no vacío $X \subset \mathbb{R}^n$ se denomina convexo si $\forall x_1, x_2 \in X$ el segmento de recta $[x_1, x_2] \subset X$.

Definición 2.3.1.3. (Función convexa)

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Decimos que $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa en el conjunto X se cumple la siguiente condición:

$$g(sx_1 + (1-s)x_2) \leq sg(x_1) + (1-s)g(x_2), \text{ para todo } s \in [0,1], x_1, x_2 \in X$$

Observación 2.3.1.1.

Cuando la función g es diferenciable, tenemos que:

$$g(x_2) \geq g(x_1) + (\nabla g(x_1), x_2 - x_1), \forall x_1, x_2 \in X$$

Definición 2.3.1.4. (Función semicontinuo inferior)

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Decimos que $g: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función semicontinua inferior en $x_0 \in X$ si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \geq g(x_0)$$

Definición 2.3.1.5. (Función característica)

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. La función característica de X , denotada como

$1_X: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, se define como sigue:

$$1_X(x_1) = 0, \text{ si } x_1 \in X \text{ y } 1_X(x_1) = \infty, \text{ si } x_1 \notin X$$

Observación 2.3.1.2.

La función 1_X toma el valor cero para los puntos que pertenece al conjunto X y $+\infty$ para aquellos que no pertenecen a ellos.

2.3.2. Desigualdades variacionales en $\mathbb{R}^n$

La teoría de las desigualdades variacionales se desarrolló con gran rapidez porque constituye una generalización natural de los problemas de valores en la frontera para ecuaciones diferenciales parciales. Además, permite abordar nuevos problemas derivados de diversas áreas de las matemáticas aplicadas, como la ingeniería, la física, la economía, la química, la programación matemática, etc. Para demostraciones de sus propiedades, véase, por ejemplo, Kinderlehrer Stampacchia (1987).

Ejemplo 2.3.2.1. (Función en un rango cerrado)

Sea $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable y cóncava hacia arriba. Consideremos el siguiente problema de minimización:

$$\min\{g(x_1): x_1 \in [c, d]\}$$

Entonces, el punto x_0 que minimiza la función g , satisface:

$$g'(x_0)(x_1 - x_0) \geq 0, \forall x_1 \in [c, d] \quad (2.1)$$

El punto x_0 puede estar dentro del intervalo $[c, d]$ o en uno de los extremos. En ambos casos:

- a) Caso 1: Si $x_0 = c$, entonces $g'(x_0) \geq 0$ y $x_1 - x_0 \geq 0$.
- b) Caso 2: Si $c < x_0 < d$, entonces $g'(x_0) = 0$.
- c) Caso 3: Si $x_0 = d$, entonces $g'(x_0) \leq 0$ y $x_1 - x_0 \leq 0$.

En cada uno de estos casos, x_0 satisface la desigualdad (2.1).

Observación 2.3.2.1.

- 1) La expresión dada en (2.1) se denomina desigualdad variacional.
- 2) La desigualdad variacional también puede obtenerse sustituyendo la condición de que g debe ser dos veces diferenciable y cóncava hacia arriba por la condición de que g debe ser convexa y diferenciable.

Ejemplo 2.3.2.2. (Problema de minimización convexa)

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y cerrado, y sea $G: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable y definida positiva. Considere el siguiente problema de minimización:

$$\min\{G(x_1): x_1 \in X\} \quad (2.2)$$

Entonces, el punto x_0 que minimiza la función G satisface la siguiente desigualdad óptima:

$$(\nabla G(x_0), x_1 - x_0) \geq 0, \text{ para todo } x_1 \in X. \quad (2.3)$$

Además, si G es una función convexa, la reciproca también es cierta: si $x_0 \in X$ satisface la desigualdad (2.3), entonces x_0 es un mínimo de G en X .

Considere x_0 como solución de (2.2) y elija un punto fijo $x_1 \in X$. Dado que el conjunto X es convexo, la recta paramétrica $\{(1-s)x_0 + sx_1 : 0 \leq s \leq 1\}$ está contenida en X .

Defina la función ψ como sigue:

$$\psi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(s) = G(x_0 + s(x_1 - x_0)),$$

Sea $x_1 \in X$ un punto fijo. Dado que G es dos veces diferenciable y $x_0 \in X$, ψ también lo es. Además, la convexidad del conjunto X implica que la trayectoria $x_0 + s(x_1 - x_0)$ permanece en X para todo $s \in [0,1]$.

Como x_0 es un mínimo de G en X , la función ψ alcanza un mínimo en $s = 0$. Por cálculo integral, esto implica que:

$$\psi'(0)(s - 0) \geq 0, \text{ para todo } s \in [0,1].$$

Dado que

$$\psi'(t) = (\nabla G(x_0 + s(x_1 - x_0)), x_1 - x_0)$$

al evaluar $s = 0$, obtenemos:

$$\psi'(0) = (\nabla G(x_0), x_1 - x_0)$$

Por lo tanto

$$(\nabla G(x_0), x_1 - x_0) \geq 0, \text{ para todo } x_1 \in X,$$

es decir, se cumple la condición de optimización de (2.3).

Dado que x_0 satisface (2.3) y la función G es convexa, tenemos:

$$G(x) \geq G(x_0) + (\nabla G(x_0), x_1 - x_0) \geq 0, \text{ para todo } x_1 \in X.$$

Dado que el producto escalar $(\nabla G(x_0), x_1 - x_0) \geq 0$, se deduce que:

$$G(x_0) \leq G(x_1), \text{ para todo } x_1 \in X.$$

Esto demuestra que x_0 es una solución del problema de minimización (2.2).

Observación 2.3.1.3.

Una generalización natural de (2.3) implica considerar una aplicación continua

$B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y un conjunto convexo y cerrado $X \subset \mathbb{R}^n$. El problema se formula de la siguiente manera:

$$\text{Encuentre } x_0 \in X: (Bx_0, x_1 - x_0) \geq 0, \text{ para todo } x_1 \in X, \quad (2.4)$$

La relación (2.4) define una desigualdad variacional en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.3.2.1. (Hartman- Guido Stampacchia)

Sea $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua y $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y compacto. Entonces, el problema

$$\text{Encuentre } x_0 \in X: (Bx_0, x_1 - x_0) \geq 0, \text{ para todo } x_1 \in X,$$

admite una solución única.

Observación 2.3.1.3.

- 1) Para demostrar este resultado de la proposición 2.3.2.1, utilizamos el teorema del punto fijo de Brouwer.
- 2) La proposición 2.3.2.1 demuestra la existencia y unicidad de la solución a una desigualdad variacional definida en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.3.2.3. Si X es un cono convexo cerrado, entonces problema (2.4) es equivalente a lo siguiente: Encontrar $x_0 \in X$.

$$(Bx_0, x_1) \geq 0, \text{ para todo } x_1 \in X \text{ y } (Bx_0, x_1) = 0 \quad (2.5)$$

Supongamos que x_0 es una solución del problema (2.4). Al establecer $x_1 = 0$ y $x_1 = 2x_0$, en la desigualdad (2.4), se obtenemos:

$$\begin{aligned} (Bx_0, 0 - x_0) = -(Bx_0, x_0) \geq 0 &\Rightarrow (Bx_0, x_0) \leq 0 \\ (Bx_0, 2x_0 - x_0) = (Bx_0, x_0) &\geq 0 \end{aligned}$$

De estas dos desigualdades, deducimos que $(Bx_0, x_0) = 0$. Debido a la linealidad del producto escalar y dado que $x_1 \in X$, se deduce que:

$$(Bx_0, x_0) \geq 0, \text{ para todo } x_1 \in X.$$

Esto implica que x_0 satisface (2.5). A la inversa, supongamos que x_0 es un problema de (2.5) bajo las condiciones del problema (2.4), es decir, si X es un conjunto convexo y cerrado, entonces:

$$(Bx_0, x_1 - x_0) \geq 0, \text{ para todo } x_1 \in X$$

Esto demuestra que x_0 también satisface (2.4), lo que establece la equivalencia entre ambos problemas.

2.3.3. Desigualdades variacionales en espacios de Hilbert

Para demostraciones de las propiedades, véase, por ejemplo, Brezis (2010).

Definición 2.3.3.1. (Relación dual)

Sea V un espacio Hilbert real de dimensión finita con el producto escalar $(u, v)_V$ y la norma inducida $\|v\|_V = \sqrt{(v, v)_V}$. Sea V' el espacio dual de V . La relación entre V' y V viene dado por la relación dual:

$$V' \times V \rightarrow \mathbb{R}, (g, v) \mapsto (g, v)_{V' \times V}$$

Proposición 2.3.3.1. (Proyección variacional ortogonal)

Sea V un espacio de Hilbert y X un conjunto convexo cerrado en V . Para cada $w \in V$, existe un único $u = P_X w \in X$ tal que:

$$\|u - w\|_V \leq \|v - w\|_V, \text{ para todo } v \in X$$

Además, el operador $P_X: V \rightarrow X$ es una contracción, es decir:

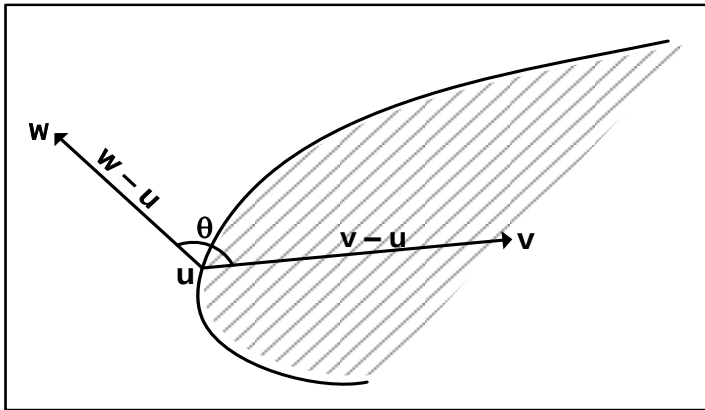
$$\|P_X w_1 - P_X w_2\|_V \leq \|w_1 - w_2\|_V, \text{ para todo } w_1, w_2 \in V.$$

Observación 2.3.3.1.

El punto $P_X w$ es el punto en X que minimiza $d(w, X)$ y, como se puede observar en la Figura 3, el ángulo θ es obtuso. Esto demuestra que $(w - u, v - u) \leq 0$ para todo $v \in X$.

Figura 3.

Proyección ortogonal



Nota: Tomado de Elliot y Ockendon (1982).

Proposición 2.3.3.2. (Conceptualización de Frigys Riesz-Maurice Fréchet)

Sea V un espacio de Hilbert y V' su dual. Como $g \in V'$, existe un solo $w_g \in H$ tal que:

$$(g, v)_{V' \times V} = (w_g, v)_V \text{ para todo } v \in V$$

Observación 2.3.3.2.

La proposición 2.3.3.2. muestra que cada $g \in V'$ puede ser representado por un solo elemento w_g en V gracias al producto escalar definido en V .

Proposición 2.3.3.3. (Fundamento de la contracción)

Sea (X, d_1) un espacio métrico completo y $C: M \rightarrow M$ una contracción estricta, es decir,

$$d_1(Cx, Cy) \leq \lambda d_1(x, y), \text{ para todo } \lambda \in (0,1), x, y \in M$$

Entonces, existe un único punto $p \in X$ tal que $C(p) = p$.

Definición 2.3.3.2. (Procedimiento bilineal continuo)

Sea V un espacio de Hilbert real. Una función bilineal definida en un espacio de Hilbert

$$b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto b(u, v)$$

se dice que es continua si existe una constante $c > 0$ tal que:

$$|b(u, v)| \leq c \|u\|_V \|v\|_V, \text{ para todo } u, v \in V.$$

Definición 2.3.3.3. (Procedimiento bilineal coercitivo)

Sea V un espacio de Hilbert real. Una función bilineal definida en un espacio de Hilbert,

$$b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (v, v) \mapsto b(v, v)$$

se dice que es coercitiva en V si existe $\alpha > 0$ tal que:

$$b(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \text{ para todo } v \in V$$

Definición 2.3.3.4. (Procedimiento bilineal simétrico)

Sea V un espacio de Hilbert real. Una función bilineal definida en un espacio de Hilbert,

$$b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto b(u, v)$$

se dice que es simétrica en V , cuando $b(u, v) = b(v, u)$, para todo $u, v \in V$.

Observación 2.3.3.3.

1) Si $b(u, v)$ es un procedimiento bilineal continuo, coercitivo y simétrico, entonces $b(u, v)$ induce un producto escalar en V . Además, existen constantes β y $\alpha > 0$ tales que:

$$\beta \|v\|_V^2 \leq b(v, v) \leq \alpha \|v\|_V^2, \quad \text{para todo } v \in V.$$

De esta desigualdad, se deduce que $[b(v, v)]^{1/2}$ define una norma en V .

2) Sea $B: V \rightarrow V'$ un operador lineal y continuo. Definimos el procedimiento bilineal $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$b(u, v) = \langle Bu, v \rangle_{V' \times V}, \text{ para todo } u, v \in V$$

Lema 2.3.3.1. (Arthur Milgram-Peter Lax).

Si V es un espacio de Hilbert dotado con la norma $\|\cdot\|_V$, $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es un procedimiento bilineal continuo y coercitivo, y si $g \in V$, entonces existe una solución única $u \in V$ tal que

$$b(u, v) = g(v), \text{ para todo } v \in V$$

Además, cuando $b(u, v)$ es simétrico, es equivalente al siguiente problema de minimización:

$$\min\{\Psi(v): v \in V\}$$

$$\text{donde } \Psi(v) = \frac{1}{2}b(v, v) - \langle g, v \rangle_{V' \times V}$$

Definición 2.3.3.5. (Inecuación variacional elíptica de primera especie)

Si $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es un procedimiento bilineal, X un conjunto convexo cerrado, y $g \in V'$ un funcional fijo, buscamos $u \in X$ tal que

$$b(u, v - u) \geq \langle g, v - u \rangle_{V' \times V}, \text{ para todo } v \in V, \quad (2.6)$$

lo que se denomina inecuación variacional elíptica de primera especie.

Observación 2.3.3.4.

- 1) La inecuación (2.6) se denomina la inecuación de Lions-Stampacchia.
- 2) Si $X \subset V$ es un subconjunto convexo cerrado y existe $\alpha > 0$ tal que:

$$b(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \text{ para todo } v \in V$$

- 3) De forma similar, un procedimiento bilineal $b(u, v)$ se define una aplicación lineal si consideramos:

$$b(u, \cdot): V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \rightarrow a(u, v)$$

Por tanto, es posible reescribir (2.6), de la siguiente manera:

$$\text{Encontre } u \in X: \langle Bu - g, v - u \rangle_{V' \times V} \geq 0, \text{ para todo } v \in X$$

Definición 2.3.3.6. (Inecuación variacional elíptica de segundo tipo)

Si V es un espacio de Hilbert, si $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un procedimiento bilineal, y

$\psi: V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un funcional propio, convexo y semicontinuo inferiormente, entonces, dado $g \in V$, encuentre un $u \in X$ tal que

$$b(u, v - u) + \psi(v) - \psi(u) \geq \langle g, v - u \rangle_{V' \times V}, \text{ para todo } v \in V, \quad (2.7)$$

Esto se denomina inecuación variacional elíptica de segunda especie.

Observación 2.3.3.5.

- 1) La inecuación (2.7) se denomina la desigualdad de Duvaut-Lions.
- 2) Si $\psi = 0$, la inecuación (2.7) es una inecuación elíptica variacional de primera especie.
- 3) Si $X=H$ y $\psi = 0$, la inecuación (2.7) equivale a resolver el siguiente problema: Encuentre $u \in V$ tal que $b(u, v) = g(v)$, para todo $v \in V$.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1. Enfoque Metodológico

La investigación presentada en esta tesis, titulada “Existencia y unicidad de solución de inecuaciones variaciones en espacios de Hilbert”, según el diseño de investigación es de carácter explicativa, y de acuerdo al fin que se persigue es del tipo básica que nos llevará a la exploración de nuevos conocimientos sobre las inecuaciones variacionales hiperbólicas en espacios de Hilbert.

La población estudiada es equivalente a la muestra, y la tesis se enmarca en el ámbito de las ciencias formales, considerando como objeto de estudio procedimientos bilineales continuas y coercitivas definidas en un subconjunto convexo de espacios de Hilbert.

3.2. Procedimiento del Método Deductivo

a) Observación

Se seleccionó un conjunto de proposiciones relativas a la existencia y unicidad de la solución a las desigualdades variacionales y se buscó una solución.

b) Experimentación

Se analizaron las proposiciones relativas a la existencia y unicidad de las desigualdades variacionales. Además, se evaluaron rigurosamente con respecto a los fundamentos teóricos y el marco conceptual.

c) Deducción

Se establecieron las reglas de deducción y la definición del problema variacional elíptico. Además, se procedió en pasos sucesivos, introduciendo nuevos términos y proposiciones.

d) Analogías

Se compararon las proposiciones relativas a la existencia y unicidad de las igualdades variacionales con las relativas a las desigualdades variacionales en general.

e) Generalización

La solución de la desigualdad elíptica se ha generalizado basándose en las reglas de deducción y las definiciones.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

4.1. Existencia y unicidad de una inecuación variacional de primer tipo

Proposición 4.1.1. (Inecuación variacional de primera especie)

Sea V un espacio de Hilbert, X un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de V , $g \in V'$ y

$$b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

una forma bilineal continua y coercitiva. Entonces, existe una solución única para

$$b(u, v - u) \geq (g, v - u)_{V' \times V}, \text{ para todo } v \in V. \quad (4.1)$$

Si $b(u, v)$ es simétrico, entonces $b(u, v - u) \geq (g, v - u)_{V' \times V}$, para todo $v \in V$, es equivalente al siguiente problema de minimización:

$$\min\{\Psi(v): v \in V\} \quad (4.2)$$

donde $\Psi(v) = \frac{1}{2} b(v, v) - \langle g, v \rangle_{V' \times V}$

Demostración:

La explicación de esta proposición considera las siguientes afirmaciones:

Afirmación: Existencia y unicidad de producto interno simétrico $b(u, v)$ para

$$b(u, v - u) \geq (g, v - u)_{V' \times V}$$

Dado que $b(u, v)$ induce un producto escalar en V entonces, por el teorema 2.3.2.1, existe un único $w_g \in H$ tal que $b(w_g, v) = \langle g, v \rangle$, para todo $v \in V$. Podemos reescribir el funcional Ψ de la siguiente manera:

$$\Psi(v) = \frac{1}{2} b(w_g - v, w_g - v) - \frac{1}{2} b(w_g, w_g) = \frac{1}{2} \|w_g - v\|_H^2 - \frac{1}{2} \|w_g\|_H^2$$

Nótese que resolver la ecuación (4.2) equivale a minimizar $d_1(w_g, X)$. Según la proposición 2.3.3.1. existe un único $u \in X$ que minimiza $d_1(w_g, X)$; por lo tanto, u es una solución de (4.2). Además, de acuerdo con la proposición 2.3.3.1, el ángulo interno entre $w_g - u$ y $v - u$ es obtuso, lo que implica que $b(w_g - u, v - u) \leq 0$, para todo $v \in V$. Por lo tanto, tenemos una solución u que satisface la inecuación (4.1)

(4.1).

Afirmación: Equivalencia entre problemas

$$b(u, v - u) \geq (g, v - u)_{V' \times V}, \text{ para todo } v \in V \text{ y } \min\{L(v): v \in V\}$$

Sea u una solución de (4.1) y $v \in X$ fijo, entonces:

$$\Psi(u) - \Psi(v) = \frac{1}{2} b(u, u) - \langle g, u \rangle_{V' \times V} - \frac{1}{2} b(v, v) + \langle g, v \rangle_{V' \times V}$$

$$= \langle g, v - u \rangle_{V' \times V} - b(u, v - u) - \frac{1}{2}b(u - v, u - v) \quad (4.3)$$

Dado que $b(u - v, u - v) \geq \beta \|u - v\|_V^2$ y $\langle g, v - u \rangle_{V' \times V} \leq b(u, v - u)$, al sustituir estas inecuaciones en (4.3) nos da $\Psi(u) \leq \Psi(v)$, para todo $v \in X$. Esto demuestra que u es una solución de (4.2).

Por el contrario, si u es una solución de (4.2) y para todo $v \in X$, debido a la convexidad del conjunto, tenemos que $u + s(v - u) \in X$, para cada $s \in (0, 1]$, porque es necesario para el argumento de diferencial direccional, mientras que $s=0$ es trivial (da u) y no se usa en la diferenciación. Incluir $s=1$ garantiza que cada segmento de u y v pertenece al conjunto convexo X .

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Psi(u) &\leq \Psi(u + t(v - u)) \\ &= \Psi(u) + sb(u, v - u) - s\langle g, v - u \rangle_{V' \times V} + \frac{1}{2}s^2b(u - v, u - v) \end{aligned}$$

De la inecuación anterior, es fácil ver que

$$sb(u, v - u) - s\langle g, v - u \rangle_{V' \times V} + \frac{1}{2}s^2b(u - v, u - v) \geq 0$$

Dividiendo entre s y haciendo que $s \rightarrow 0^+$, obtenemos

$b(u, v - u) \geq \langle g, v - u \rangle_{V' \times V}$ para todo $v \in X$. Esto demuestra que tenemos una solución u que satisface la inecuación (4.1)

Afirmación: Existencia y unicidad de $b(u, v)$ no simétrica para

$$b(u, v - u) \geq \langle g, v - u \rangle_{V' \times V}$$

Considere $B: V \rightarrow V$ una transformación lineal continua tal que $b(u, v) = (Bu, v)_V$. Por la proposición 2.3.3.2, existe $h_g \in V$ tal que $\langle g, v \rangle_{V' \times V} = \langle h, v \rangle_V$. Por lo tanto (4.1) es equivalente al siguiente problema:

Encuentre $u \in X$: $(u - \xi(Bu - h_g) - u, v - u) \leq 0$, para todo $v \in X$ y $\xi > 0$ (4.4.)

Observe que (4.4), según la proposición 2.3.3.1, es equivalente al siguiente problema:

$$\text{Encontrar } u \in X: u = P_X[u - \xi(Bu - h_g)], \xi > 0 \quad (4.5)$$

Definir la aplicación W como sigue:

$$W(v) = P_X[v - \xi(Bv - h_g)], \quad W: V \rightarrow V$$

De la equivalencia entre (4.4) y (4.5), obtenemos que (4.1) es equivalente a un problema fijo, dado por:

$$\text{Encontrar } u \in X: u = W(u). \quad (4.6)$$

Para demostrar la existencia y unicidad de la solución de (4.6), debemos demostrar que W es una contracción estricta. Como P_X es una contracción, entonces

$$\begin{aligned}\|W(v_1) - W(v_2)\|_V &= \|P_X[v_1 - \xi(Bv_1 - h_g)] - P_X[v_2 - \xi(Bv_2 - h_g)]\|_V \\ &\leq \|v_1 - v_2 - \xi B(v_1 - v_2)\|_V\end{aligned}\quad (4.7)$$

Tenga en cuenta que

$$\|v_1 - v_2 - \xi B(v_1 - v_2)\|_V^2 = \|v_1 - v_2\|_V^2 - 2\xi(B(v_1 - v_2), v_1 - v_2)_V + \xi^2 \|B(v_1 - v_2)\|_V^2$$

Como B está acotado, entonces $\|B(v_1 - v_2)\|_V^2 \leq \|B\|^2 \|v_1 - v_2\|_V^2$

y por coercitividad del procedimiento bilineal, tenemos

$$(B(v_1 - v_2), v_1 - v_2)_V = b(v_1 - v_2, v_1 - v_2)_V \geq \beta \|v_1 - v_2\|_V^2$$

De manera similar, obtenemos:

$$\|v_1 - v_2 - \xi B(v_1 - v_2)\|_V^2 \leq (1 - 2\xi\beta + \xi^2 \|B\|^2) \|v_1 - v_2\|_V^2$$

Sustituir la inecuación anterior en (4.7), obtenemos:

$$\|W(v_1) - W(v_2)\|_V \leq (1 - 2\xi\beta + \xi^2 \|B\|^2)^{\frac{1}{2}} \|v_1 - v_2\|_V$$

Entonces, para que W sea una contracción estricta, basta con elegir $\xi > 0$ tal que:

$$1 - 2\xi\beta + \xi^2 \|B\|^2 < 1$$

Esto se verifica si tomamos $0 < \xi < \frac{2\beta}{\|B\|^2}$

Ejemplo 4.1.1. (Problema de contorno)

Sea el espacio de Sobolev de orden uno $H = H^1(0,1)$ y sea el espacio

$$X = \{v \in H^1(0,1) : v(0) \geq 0, v(1) \geq 0\}.$$

Examinar el siguiente problema de contorno:

$$-v''(x) = g(x); v(0) \geq 0, v(1) \geq 0; v'(0) \leq 0, v'(1) \geq 1; v'(x) = 0, \text{ si } x \in \{0,1\}.$$

Ahora bien, $b(v, u) = \int_0^1 v'(x)u'(x)dx$ y $\langle g, u \rangle = \int_0^1 g(x)u(x)dx$

En consecuencia, la cuestión de contorno es equivalente a la inecuación variacional de la especie uno de la forma:

$$\int_0^1 v'(x)(u'(x) - v'(x))dx \geq \int_0^1 g(x)(u(x) - v(x))dx$$

para cada $v(x) \in X$, donde X un cono con vértice 0 , es asegurar, que para todo $u, w \in X$, se cumple para todo $u + w \in X$ y $su \in X$ para cada $s \geq 0$.

4.2. Existencia y unicidad de inecuación variacional de segundo tipo

Proposición 4.2.1.(Inecuación variacional de segunda especie)

Sea V un espacio de Hilbert, $g \in V'$, $\psi: V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funcional semicontinuo inferiormente, propiamente convexo y $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coercitiva. Entonces existe una solución única para

$$b(u, v - u) + \psi(v) - \psi(u) \geq \langle g, v - u \rangle_{V' \times V}, \text{ para todo } v \in V \quad (4.8)$$

Demostración

Primero demostraremos la unicidad y luego la existencia:

Unicidad de la solución de la inecuación(4.8)

Afirmación: $u_1 = u_2$

Supongamos que $u_1 \neq u_2$ son soluciones de (4.8), entonces

$$b(u_1, v - u_1) + \psi(v) - \psi(u_1) \geq \langle g, v - u_1 \rangle_{V' \times V}, \text{ para todo } v \in V$$

$$b(u_2, v - u_2) + \psi(v) - \psi(u_2) \geq \langle g, v - u_2 \rangle_{V' \times V}, \text{ para todo } v \in V$$

Al reemplazar $v = u_2$ y $v = u_1$ respectivamente, obtenemos

$$b(u_1, u_2 - u_1) + \psi(u_2) - \psi(u_1) \geq \langle g, u_2 - u_1 \rangle_{V' \times V}, \text{ para todo } v \in V$$

$$b(u_2, u_1 - u_2) + \psi(u_1) - \psi(u_2) \geq \langle g, u_1 - u_2 \rangle_{V' \times V}, \text{ para todo } v \in V$$

Si sumamos las desigualdades obtenidas anteriormente, se obtiene

$$b(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

Pero para efectuar esta suma, es necesario demostrar que $\psi(u_i) < \infty$, $i = 1, 2 \dots$

Dado que ψ es propio, existe $v_0 \in V$ de forma que $-\infty < \psi(v_0) < \infty$.

Sustituyendo v_0 en (4.8), obtenemos:

$$-\infty < \psi(u_i) \leq \psi(v_0) - \langle g, v_0 - u_i \rangle_{V' \times V} + b(u_i, v_0 - u_i), i = 1, 2.$$

Esto demuestra que $\psi(u_i) < \infty$, $i = 1, 2$ y por la coercitividad de la forma bilineal obtenemos:

$$0 \leq \beta \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq b(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

Por lo tanto, $u_1 = u_2$.

Existencia de la solución de (4.8)

Sea $u \in X$ y $\xi > 0$. Consideremos el problema $(\mathcal{C}_\xi)$ de hallar $w \in V$ tal que para todo $v \in V$, se cumpla:

$$(w, v - w)_V + \xi[\psi(v) - \psi(w)] \geq (u, v - w)_V + \xi[\langle g, v - w \rangle_{V' \times V} - b(u, v - w)] \quad (\mathcal{C}_\xi)$$

Sabemos que el problema $(\mathcal{C}_\xi)$ es de la forma (4.8) y la forma bilineal asociada coincide con el producto interno definido en V , el cual es simétrico.

Afirmación: u es solución de $b(u, v - u) + \psi(v) - \psi(u) \geq \langle g, v - u \rangle_{V' \times V} \forall v \in V$

Supongamos $(\mathcal{C}_\xi)$ tiene una solución única. Definimos la aplicación $F_\xi(u) = w$, donde w es la solución de $(\mathcal{C}_\xi)$. Deforma análoga a la proposición 4.1.1, mostraremos que F_ξ es una contracción estricta.

Sean $u_1, u_2 \in V$ tal que $F_\xi(u_i) = w_i, i=1,2$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} (w_1, w_2 - w_1)_V + \xi[\psi(w_2) - \psi(w_1)] \\ \geq (u_1, w_2 - w_1)_V + \xi[\langle g, w_2 - w_1 \rangle_{V' \times V} - a(u_1, w_2 - w_1)] \\ (w_2, w_1 - w_2)_V + \xi[\psi(w_1) - \psi(w_2)] \\ \geq (u_2, w_1 - w_2)_V + \xi[\langle g, w_1 - w_2 \rangle_{V' \times V} - a(u_2, w_1 - w_2)] \end{aligned}$$

Como $\psi(w_1)$ y $\psi(w_2)$ son finitos, luego de sumar las desigualdades obtenemos.

$$(w_1 - w_2, w_2 - w_1)_V \geq (u_1 - u_2, w_2 - w_1)_V - \xi(u_1 - u_2, w_2 - w_1)$$

y desde aquí

$$\|F_\xi(u_1) - F_\xi(u_2)\|_V = \|w_2 - w_1\|^2 \leq ((I - \xi B)(u_1 - u_2), w_2 - w_1)_V$$

De ahí se deduce fácilmente que

$$\|I - \xi B\| < 1, \text{ cuando } \xi \in]0, \frac{2\beta}{\|B\|^2} [$$

Según la proposición 2.3.3.3, existe un único punto fijo $F_\xi(u) = u$. Sustituyendo esta relación en $(\mathcal{C}_\xi)$, obtenemos:

$$(u, v - u)_V + \xi[\psi(v) - \psi(u)] \geq (u, v - u)_V + \xi[\langle g, v - u \rangle_{V' \times V} - b(u, v - u)], \forall v \in V$$

Por lo tanto, u es una solución de (4.8).

En la demostración de la proposición 4.1.2. se asumió que $(\mathcal{C}_\xi)$ tiene solución única. A continuación, procederemos a demostrar dicho resultado.

Proposición 4.2.3. Sea V un espacio de Hilbert, $b_1: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y simétrica con constante de coercitividad $\beta, g \in V'$ y $\psi: V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ un funcional convexo propiamente y semicontinuo inferiormente. Sea $\mathcal{H}: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\mathcal{H}(v) = \frac{1}{2} b_1(v, v) + \psi(v) - \langle g, v - u \rangle_{V' \times V}$$

Por lo tanto, existe el siguiente problema de minimización, el cual tiene una solución única

$$\min\{\mathcal{H}(v): v \in V\} \tag{4.9}$$

Además (4.9) es equivalente al siguiente problema:

Encontrar $u \in V$: $b_1(v, v - u) + \psi(v) - \psi(u) \geq \langle g, v - u \rangle_{V' \times V}$, para todo $v \in V$.

Demostración:

Según la teoría de optimización convexa de Ekeland (1976), la ecuación (4.9) admite una solución única si $\mathcal{H}$ es estrictamente convexo y coercitiva (es decir, $\mathcal{H}(v) \rightarrow \infty$, cuando $\|v\| \rightarrow \infty$).

Afirmación: Existe una solución única para $\min\{\mathcal{H}(v): v \in V\}$.

Dado que $b_1(v, v)$ es estrictamente convexa, ψ es convexa y g es lineal, entonces $\mathcal{H}$ es un funcional estrictamente convexo.

Como ψ es semicontinua inferiormente y propia, existen $\lambda \in V'$ y $\mu \in \mathbb{R}$ tales que

$\psi(v) \geq \langle \lambda, v \rangle_{V' \times V} + \mu$. Dado que λ y g son continuos, entonces

$$|\langle \lambda, v \rangle_{V' \times V}| \leq L_1 \|v\|_V \text{ y } |\langle g, v \rangle_{V' \times V}| \leq L_2 \|v\|_V \text{ para cada } v \in V.$$

Utilizando estas desigualdades y la coercitividad de $b_1(u, v)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(v) &= \frac{1}{2} b_1(v, v) + \psi(v) - \langle g, v \rangle_{V' \times V} \geq \frac{\beta}{2} \|v\|_V^2 - (L_1 + L_2) \|v\|_V + \mu \\ &= \left(\sqrt{\frac{\beta}{2}} \|v\|_V - \frac{(L_1 + L_2)}{2} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \right)^2 + \mu - \frac{(L_1 + L_2)^2}{2\beta} \end{aligned}$$

Obsérvese que $\mathcal{H}(v) \rightarrow \infty$ cuando $\|v\| \rightarrow \infty$. Esto demuestra que es coercitivo y, en consecuencia, la existencia de una solución única para (4.9).

Afirmación: $b_1(u, v - u) + \psi(v) - \psi(u) \geq \langle g, v - u \rangle_{V' \times V} \equiv \min\{\mathcal{H}(v): v \in V\}$

Sea u como solución de (4.9). Sea $v \in V$ fijo y $s \in [0, 1]$. Dado que

$\Psi(v) = \frac{1}{2} b_1(v, v) - \langle g, v \rangle_{V' \times V}$, tenemos $\mathcal{H}(v) = \Psi(v) + \psi(v)$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{H}(u + s(v - u)) - \mathcal{H}(u) \\ &= \Psi(u + s(v - u)) - \Psi(u) + \psi(u + s(v - u)) - \psi(u) \\ &\leq \Psi(u + s(v - u)) - \Psi(u) + s[\psi(v) - \psi(u)], \text{ para todo } v \in V \end{aligned}$$

Dividiendo por s en la desigualdad anterior y tomando el límite cuando $s \rightarrow 0^+$, obtenemos:

$$0 \leq (\Psi' u, v - u)_V + \psi(v) - \psi(u), \text{ para todo } v \in V$$

Dado que $c(u, v)$ es simétrica, obtenemos:

$$(\Psi' u, w)_V = b_1(v, w) - \langle g, v \rangle_{V' \times V}, \text{ para todo } v, w \in V$$

Reemplazando la desigualdad anterior, obtenemos:

$$0 \leq b_1(v, v - u) - \langle g, v - u \rangle_{V' \times V} + \psi(v) - \psi(u), \forall v \in V$$

Esto indica que u satisface (4.8)

Sea u una solución de (4.8) y sea $v \in V$ un valor fijo. Reescribiendo $\mathcal{H}$, obtenemos

$$\mathcal{H}(v) - \mathcal{H}(u) = \frac{1}{2} [b_1(v, v) - b_1(u, u)] + \psi(v) - \psi(u) - \langle g, v - u \rangle_{V' \times V}$$

Dado que $b_1(v, v) = b_1(u, u) + 2b_1(u, v - u) + b_1(u - v, u - v)$,

Sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos:

$$\mathcal{H}(v) - \mathcal{H}(u) = b_1(u, v - u) + \psi(v) - \psi(u) - \langle g, v - u \rangle_{V' \times V} + \frac{1}{2} B(u - v, u - v)$$

Como $b_1(u - v, u - v) \geq 0$, esto significa que $\mathcal{H}(v) \geq \mathcal{H}(u)$. Por lo tanto, u satisface la desigualdad variacional (4.9).

Ejemplo 4.2.1. Sea 1_X la función característica del conjunto X definida por:

$$1_X(v) = 0, v \in X; 1_X(v) = \infty, v \notin X.$$

Consideremos la desigualdad:

$$b(u, u - v) + 1_X(v) - 1_X(u) \geq \langle g, v - u \rangle_{V' \times V}, \text{ para todo } v \in V \quad (4.10)$$

Y queremos demostrar que constituye una desigualdad variacional elíptica de segunda especie y que es equivalente a la forma habitual restringida al conjunto X .

Si $X \subset V$ es convexo, cerrado y no vacío, su función indicadora 1_X es propiamente convexa y semicontinua inferior.

La desigualdad (4.10) es equivalente a la formulación

$$b(u, u - v) \geq \langle g, v - u \rangle, \forall v \in X$$

es decir, una desigualdad variacional elíptica de segunda especie con $\psi = 1_X$.

En el caso $X = V$ y $\psi = 0$, la desigualdad (4.10) se reduce al problema variacional clásico:

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } b(u, v) = g(v), \text{ para todo } v \in V, \quad (4.11)$$

cuya existencia y unicidad (4.11) están garantizadas por el Lema de Lax-Milgram.

4.3. Problema de obstáculos

Consideremos una membrana elástica homogénea que ocupa un dominio acotado abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ del plano XY , fija al contorno $\partial\Omega$. Este problema consiste en determinar la posición de equilibrio de la membrana en presencia de un cuerpo rígido definido por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z \leq \Phi(x, y)\}, \text{ donde } \Phi \text{ es la función de obstáculo tal que } \Phi \leq h \text{ en } \partial\Omega.$$

Como se ilustra en las Figuras 4 y 5, cuando un obstáculo restringe la membrana, se forma una región de coincidencia entre la membrana y el obstáculo. Esta región de coincidencia, denominada dominio abierto Ω_0 , se define por el siguiente conjunto:

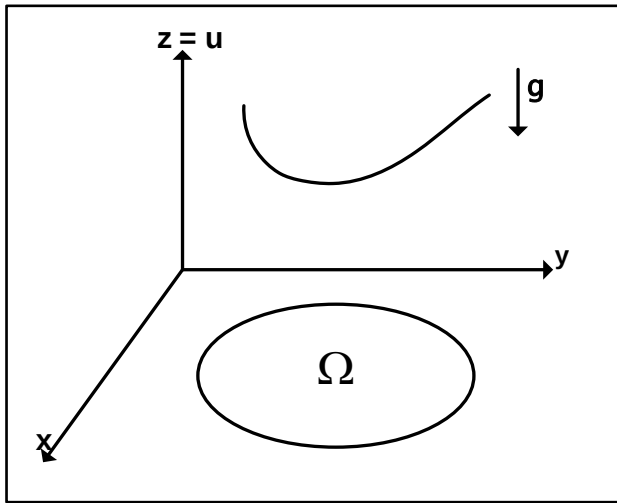
$$\Omega_0 = \{(x, y) \in \Omega: u(x, y) = \Phi(x, y)\}$$

Dado que el obstáculo se encuentra debajo de la membrana, la región $\Omega_+ = \Omega \setminus \bar{\Omega}_0$, significa que no hay superposición entre la membrana y el obstáculo. De forma similar, Ω_+ se define como

$$\Omega_+ = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) > \Phi(x, y)\},$$

Figura 4.

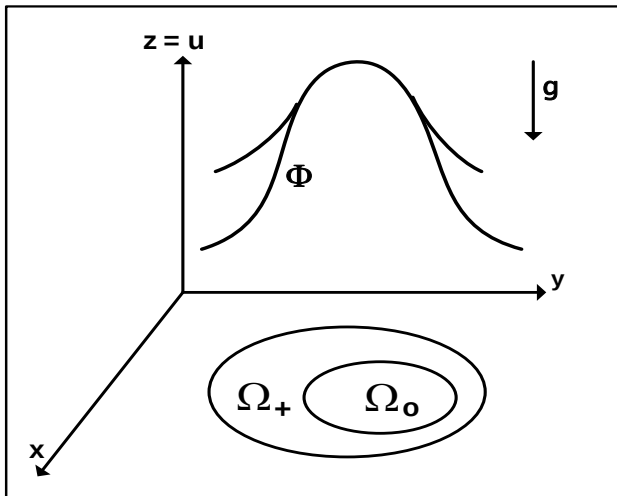
Membrana elástica sin obstáculos.



Nota: Tomado de Rodrigues (1987).

Figura 5.

Membrana elástica con obstáculos.



Nota: Tomado de Rodrigues (1987).

Las Figuras 4 y 5 muestran que la región de coincidencia está estrictamente contenida dentro de Ω . Esto indica que $u < \Phi$ en $\partial\Omega$, pero es posible que $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega \neq \emptyset$.

Aunque la coincidencia con el obstáculo ocurre en Ω_+ , existe un equilibrio de fuerzas. Esto indica que

$$-\Delta u = g \text{ en } \Omega_+$$

Dado que no hay equilibrio de fuerzas en Ω_0 , entonces $-\Delta u \neq g$ en Ω_+ . Dado que se supone que el obstáculo es rígido, entonces

$$-\Delta u > g \text{ en } \Omega_0$$

Finalmente, en la región $\gamma = \partial\Omega_+ \cap \partial\Omega_0$, la coincidencia es continua, es decir:

$$u = \Phi \text{ y } \nabla u = \nabla \Phi \text{ en la vecindad de } \gamma$$

Esta región γ se define como la curva que separa la región Ω_+ de Ω_0 . Esta región γ se denomina contorno libre.

El problema del obstáculo es un caso especial del problema de contorno. La solución a este tipo de problema se denota por el par $[u, \gamma]$. Con base en los supuestos naturales mencionados, definimos esta cuestión de la siguiente manera:

Determinar el par $[u, \gamma]$ bajo las siguientes situaciones:

$$\begin{cases} -\Delta u = g, & \text{en } \Omega_+ & (4.12) \\ u = \Phi, & \text{en } \Omega_0 & (4.13) \\ u = h, & \text{en } \partial\Omega & (4.14) \\ u = \Phi, & \text{cerca de } \gamma & (4.15) \\ \nabla u = \nabla \Phi, & \text{cerca de } \gamma & (4.16) \\ u \geq \Phi & \text{en } \Omega & (4.17) \\ -\Delta u \geq g & \text{en } \Omega & (4.18) \end{cases}$$

A partir de (4.12), (4.13), (4.17) y (4.18), el problema de obstáculo puede formularse como una cuestión complementaria, como sigue:

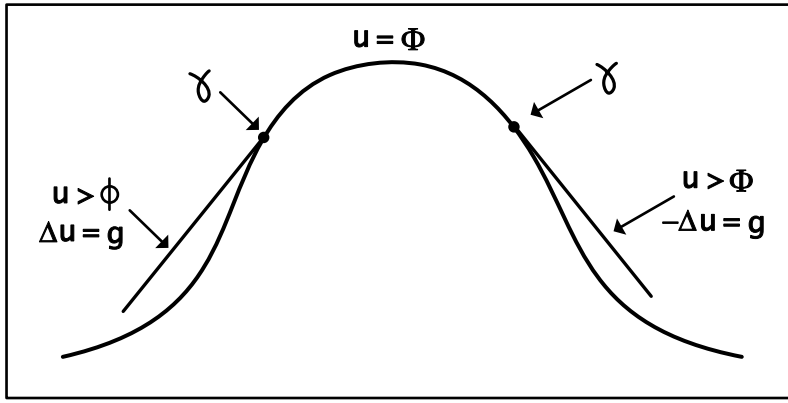
$$\begin{cases} u \geq \Phi & \text{en } \Omega \\ -\Delta u \geq g & \text{en } \Omega \\ (-\Delta u - g)(u - \Phi) = 0, & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (4.19)$$

Entonces, si u es una solución al problema del obstáculo, en particular, satisface (4.19)

La Figura 6 representa el problema de obstáculo en el caso unidimensional.

Figura 6.

Problemas de obstáculos unidimensionales.



Nota: Tomado de Friedman (2020).

Ejemplo 4.3.1. (Problema tipo de obstáculo)

Dado el dominio $\gamma =] - 1, 1[$ y las funciones h, Φ, g tal que $h = 0, \Phi = -\frac{1}{18}$,

$g(x) = 1 - 32x^2, |x| \leq \frac{1}{4}; g(x) = -1$, en caso contrario

encuentre u que satisfaga las condiciones (4.12) – (4.18).

Consideremos las siguientes soluciones analíticas:

Solución 01

Sea $\gamma = \pm \frac{2}{3}$ y el conjunto de coincidencias (es decir, las posiciones donde la solución corresponde al obstáculo) dado por $\Omega_0 =] - \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$, y la función u , definida como sigue:

$$u(x) = \Phi + \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{3} \right)^2, -1 \leq x < -\frac{2}{3}; u(x) = \Phi(x), -\frac{2}{3} \leq x < \frac{2}{3};$$

$$u(x) = \Phi + \frac{1}{2} \left(x - \frac{2}{3} \right)^2, \frac{2}{3} < x \leq 1$$

Cumple las condiciones (4.12) – (4.17). Pero no cumple la condición (4.18), ya que $u'(0) = 0$ y $g(0) = 1$.

Solución 02

Sea $\gamma = \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$ y el conjunto de coincidencias dado por

$\Omega_0 =] - \frac{2}{3}, \frac{2}{3}] \cup] \frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, y la función u , definido como:

$$u(x) = \Phi + \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{3} \right)^2, -1 \leq x < -\frac{2}{3}; u(x) = \Phi(x), -\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{3};$$

$$u(x) = \Phi + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{3} \right)^2, -\frac{1}{3} < x \leq -\frac{1}{4}; u(x) = -\frac{1}{32} + \frac{8x^2}{3} \left(x^2 - \frac{3}{16} \right)^2, -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4};$$

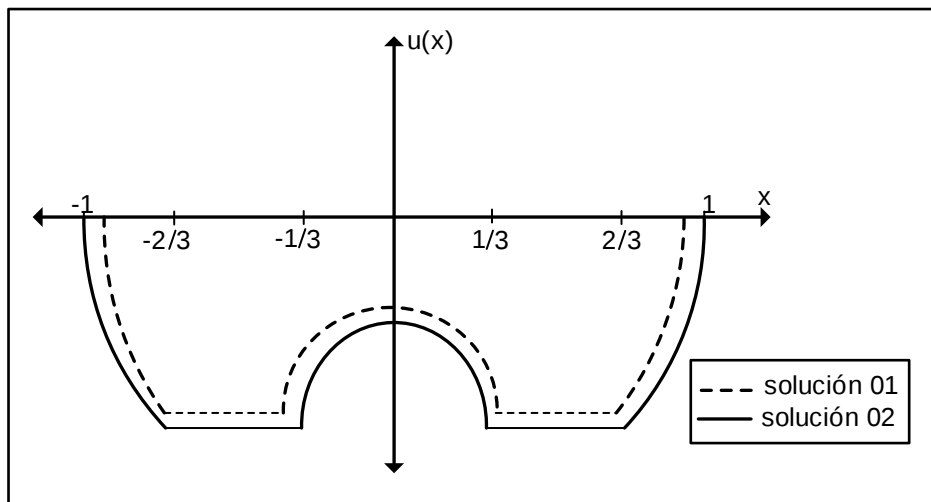
$$u(x) = \Phi + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{3} \right)^2, \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{3}; u(x) = \Phi(x), \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3};$$

$$u(x) = \Phi + \frac{1}{2} \left(x - \frac{2}{3} \right)^2, \frac{2}{3} < x \leq 1$$

Cumple las propiedades (4.12) – (4.18). Como se puede observar en la Figura 7, la condición (4.18) es influyente porque garantiza la unicidad de la solución al problema del obstáculo.

Figura 7.

Soluciones no únicas.



Nota: Tomado de Elliot y Ockendon(1982).

CAPÍTULO V

DISCUSIÓN

1. Dado que $b(u, v)$ es una forma bilineal continua y coercitiva, que $X \subset V$ es un conjunto convexo cerrado y que $g \in V'$, surge el siguiente problema de desigualdad variacional: encontrar $u \in X$ tal que $b(u, v - u) \geq \langle g, v - u \rangle_{V' \times V}$, para todo $v \in X$.

Estas condiciones son necesarias para formular una desigualdad variacional de la especie Lions-Stampacia. Para garantizar la existencia y unicidad de la solución se consideran dos casos. En el caso en que la forma bilineal $b(u, v)$ es simétrica, la existencia y unicidad de la solución se establecen aplicando el teorema de proyección de variación ortogonal y el teorema fundamental de Riesz-Frechet. Esto da como resultado una desigualdad elíptica de primera especie. De forma similar, si $b(u, v)$ no es simétrica, suponemos que existe una transformación lineal $B: V \rightarrow V'$ tal que $b(u, v) = (Bu, v)$. En este caso la existencia y unicidad de la solución se establecen nuevamente mediante el teorema fundamental de Riesz-Fréchet y el teorema de proyección. (Fundamentada en las páginas 23-25)

2. Bajo las siguientes condiciones: V es un espacio de Hilbert, $g \in V'$, $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional propia semicontinua inferiormente, convexa y $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coercitiva, se plantea el siguiente problema de desigualdad variacional:

encontrar $u \in X$ tal que $b(u, v - u) + \psi(v) - \psi(u) \geq \langle g, v - u \rangle_{V' \times V}$ para todo $v \in V$.

Estas condiciones son necesarias para formular una desigualdad variacional de la especie Duvans-Lions. Para establecer la existencia y unicidad de la solución, se consideran los siguientes aspectos. En el caso de la unicidad, el enfoque conduce a una contradicción. Supusimos la existencia de dos soluciones distintas que satisficieran la desigualdad:

$$b(u_i, v - u_i) + \psi(v) - \psi(u_i) \geq \langle g, v - u_i \rangle_{V' \times V} \text{ para todo } v \in V, i = 1, 2.$$

Sustituyendo $v = u_2$ en la desigualdad para u_1 y $v = u_1$ en la de u_2 , y sumando ambas desigualdades, obtenemos una expresión que, junto con la coercitividad de b , nos permite concluir que $u_1 = u_2$. Esto garantiza la unicidad de la solución. De manera similar, en el caso de existencia, se introduce un problema auxiliar regularizado, denominado problema $(\mathcal{C}_\xi)$. Dado $u \in X$ y un parámetro $\xi > 0$, buscamos $w \in V$ tal que:

$$(w, v - w)_V + \xi[\psi(v) - \psi(w)] \geq (u, v - w)_V + \xi[\langle g, v - w \rangle_{V' \times V} - b(u, v - w)], \forall v \in V.$$

Demostramos que este problema regularizado admite una solución única para todo $\xi > 0$, es decir el problema $(\mathcal{C}_\xi)$ tiene solución única. La existencia de esta solución se demuestra

mediante técnicas de paso de límite, aprovechando la semicontinuidad inferior de ψ y la coercitividad de b . (Fundamentada en las páginas 26-28)

3. En el problema del obstáculo unidimensional, si se impone la condición $-\Delta u \geq g$ en Ω , esta se expresa en el contexto unidimensional como $-u''(x) \geq g(x)$, $x \in \Omega$. Surgen dos casos adicionales: en la solución 01, en la región central $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$ y $u = \Phi$ es constante. Por lo tanto, $u''(x) = 0$, así que $-u''(x) = 0$ y $g(0) = 1$, por lo que $0 \geq g(0)$ lo cual no se verifica. En la solución 02, en la región de coincidencia $\frac{1}{3} < |x| < \frac{2}{3}$, la solución para u no es constante, sino que está definida por un polinomio tal que $u''(x) \geq g(x)$ se cumple en toda la región. En este caso, tenemos $u''(x) = 1$. La evaluación arroja el siguiente resultado $-u''\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ y $g\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, por lo tanto $-1 \geq -1$, y así verifica la desigualdad. (Fundamentada en las páginas 33 y 34)

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

PRIMERA. Esta tesis presenta los resultados de la existencia y unicidad de la solución de una inecuación variacional de primera especie (Proposición 4.1.1), así como su equivalencia con un problema de minimización, considerando el caso en que la forma bilineal asociada es simétrica y no simétrica.

SEGUNDA. De manera similar, se presentan los resultados de existencia y unicidad de la solución de una inecuación variacional de segunda especie (Proposición 4.2.1) y su equivalencia con un problema de minimización, bajo el supuesto de la semicontinuidad inferior del funcional ψ y la coercitividad de la forma bilineal b .

TERCERA. La formulación del problema del obstáculo incluye un ejemplo unidimensional (Ejemplo 4.3.1) en el que se verifica que una solución satisface todas las condiciones necesarias para garantizar la unicidad de la solución a este problema.

CAPÍTULO VII

RECOMENDACIONES

7.1. Una vez demostrados los resultados de existencia y unicidad para inecuaciones variacionales del segundo tipo, sería de gran interés desarrollar una investigación destinado a obtener la solución de un problema con restricciones a partir de una secuencia de soluciones del problema de minimización sin restricciones.

7.2. Resulta relevante proponer un estudio que permita establecer la existencia y unicidad de la solución débil del problema de obstáculo.

7.3. Desde un punto de vista computacional, se propone una investigación orientada a la construcción de un esquema numérico que permita aproximar cuantitativamente la solución exacta del problema de obstáculos en el caso unidimensional.

7.4. Sería interesante realizar un estudio para formar un GLASFLO bidimensional (Flujo de Lagrange aumentado generalizado) para modelar el problema del obstáculo, como una versión extendida (2D) del método de Flujo de Lagrange aumentado o Flujo de Gradiente proyectado aplicado a la desigualdad variacional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adams, R. (1975). *Sobolev space*. Academic Press. Nueva York.
- Bermúdez de Castro Varela López, A., Fernández, F., Moreno, L., Rodríguez, C. & Samartín, A. (1983). *Resolución de inecuaciones variacionales y aplicaciones*. Alcalá de Henares.
- Brezis, H (2019). *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*, Madrid. Alianza Editorial. ISBN 54-206-800 45.
- Bowers, A. & Kalton, N. (2014). *An Introductory Course in Functional Analysis*. New York, Editorial Springer. ISBN 978-1-4939-1944-4.
- Collantes, L. & Coronel, A. (2010). *Formulación variacional de ecuaciones diferenciales parciales*. Universidad Industrial de Santander. Revista Integración, 28(2), págs. 133–152.
- Dijk, G. (2013). *Distribution Theory*. Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston.
- Duistermaat, J. & Kolk, J. (2010). *Distribution Theory and Applications*. Springer Science+Business Media, LCC.
- Elliot, C. & Ockendon, J. (1982). *Métodos débiles y variacionales para problemas de frontera móvil*. Massachusetts: Pitman Publishing.
- Evans, L. (1998). *Partial Differential Equations*. Volumen 19. American Mathematical Society.
- Friedlander, F. (1999). *Introduction to the theory of distributions*. Cambridge University Press. ISBN 0-521-69471-1.
- Gutierrez, D. (2013). *Inecuaciones variacionales y aplicaciones en problemas tipo obstáculo con resolución numérica vía complementariedad*. Universidad Federal de Juiz de Fora.
- Hilasaca, J. (2023). *Existencia y unicidad de la solución del problema variacional elíptico en los espacios de Hilbert*. Tesis de Licenciatura de la UNJBG. <https://repositorio.unjbg.edu.pe/bitstreams/33994188-cfd6-4547-ad4c-46ce6878c331/download>.
- Houne, J. (1979). *Teoría Elemental de las Distribuições*. Rio de Janeiro: Colóquio Brasileiro de Matemática.
- Huayta, J.(2023). *Existencia y unicidad de soluciones generalizadas de problemas de contorno en ecuaciones diferenciales*. Tesis de Licenciatura de la UNJBG. <https://repositorio.unjbg.edu.pe/bitstreams/a80ce033-dec0-4b43-8a56-2932d492946e/download>.

- Jost, J. (1975). *Partial Differential Equations*. New York: Editorial Springer. ISBN 0-387-95428-7.
- Kinderlehrer, D. & Stampacchia, G. (1984). *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia. ISBN 0-89871-466-4.
- Kinnunen, J. (2020). *Sobolev Spaces*. Aalto University, Departamento of Mathematics and Systems Analysis.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. Wiley New York.
- Legasa, M. (2016). Espacios de Sobolev y Formulación Variacional de Ecuaciones en Derivadas Parciales Elípticas. Trabajo Fin de Grado en Matemáticas. Universidad del País Vasco.
- Mast, A. & Sofonea, M. (2009). *Variational Inequalities with Applications*. New York. Editorial Springer. ISBN 978-0-387-87460-9.
- Moshe, O. (2017). *First Course in Functional Analysis*. Chapman and Hall Crc. ISBN 13.978.1.4987.1161.0.
- Puerto, C. (2015). *Inecuaciones variacionales y aplicaciones*. Universidad de los Andes Departamento de matemáticas. Bogotá. MÑ.
- Rodrigues, J. (1987). *The Variational Inequality Approach to the One-Phase Stefan Problem*. Acta Applicandae Mathematicae 8, 1-35. VPO.