

**UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN - TACNA**

**ESCUELA DE POSGRADO**

**Maestría en Computación e Informática**

**“DISEÑO DE UN ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA  
SEPARAR LOS ELEMENTOS DE UN CONJUNTO,  
MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL”**

**TESIS**

**PRESENTADA POR :**

**ELEOCADIO DIONISIO TIRADO PAZ**

**Para Optar el Grado Académico de:**

**Maestro en Ciencias (Magister Scientiae) con Mención en  
Computación e Informática**

**TACNA - PERÚ**

**2013**

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

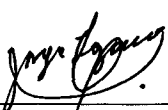
ESCUELA DE POSGRADO

**Maestría en Computación e Informática**

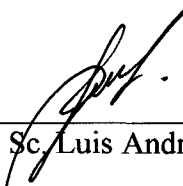
“DISEÑO DE UN ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA  
SEPARAR LOS ELEMENTOS DE UN CONJUNTO,  
MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL”

Tesis sustentada y aprobada el 04 de julio del 2013; estando el jurado calificador integrado por:

PRESIDENTE

  
\_\_\_\_\_  
M. Sc. Jorge Luis Lozano Cervera

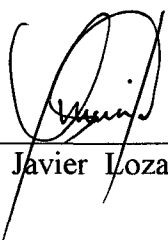
SECRETARIO

  
\_\_\_\_\_  
M. Sc. Luis Andrés Amaya Cedrón

MIEMBRO

  
\_\_\_\_\_  
Mgr. Erbert Francisco Osco Mamani

ASESOR

  
\_\_\_\_\_  
M. Sc. Javier Lozano Marreros

## **AGRADECIMIENTO**

A Dios por haberme permitido llegar a concluir este trabajo de investigación que ha pesar de muchos obstáculos presentados durante su desarrollo, se impuso la buena voluntad, la fe, la esperanza y la perseverancia.

A mi esposa Sely; a mis hijos Iván, Ely y Leo; por comprenderme los ratos de abandono e indiferencia; por brindarle un poco de dedicación al presente trabajo y por su apoyo moral y afectivo durante este periodo.

A mi asesor de Tesis Javier Lozano Marreros; por su tiempo invertido y su valioso aporte para sacar adelante la presente Tesis.

A los miembros del mi Jurado Calificador:

- Jorge Luis Lozano Cervera.
- Luis Andrés Amaya Cedrón.
- Erbert Francisco Osco Mamani.

quienes con sus críticas constructivas lograron mejorar esta obra, fruto de esfuerzo y sacrificio de las personas que me acompañaron y aportaron de una u otra manera para su culminación.

## CONTENIDO

	Pág.
Resumen	xiii
Abstract	xiv
Introducción	1
<b>CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	
1.1. Descripción del problema	2
1.1.1. Antecedentes del Problema	3
1.1.2. Problemática de la investigación	5
1.2. Formulación del problema	6
1.3. Introducción a la Programación Lineal	7
Definición 1.1 (PPL, en su forma general)	10
Definición 1.2 (Solución Factible)	11
Definición 1.3 (Región de factibilidad)	12
Definición 1.4 (Solución Optima Factible)	13
Definición 1.5 (Valor óptimo)	14
1.3.1. Otras formas de representación de un PPL	14

1.3.2. Equivalencia entre Problemas de Programación	
Lineal	15
Definición 1.6 (Forma estándar de un PPL)	15
Definición 1.7 (Forma canónica de un PPL)	16
Teorema 1.1 (Equivalencia de PPLs)	16
1.3.3. Resolución gráfica de problemas de programación	
línea	21
1.3.4. Tipos de soluciones de un PPL	24
1.4. Justificación e importancia del Problema	29
1.5. Objetivos de la investigación	30
1.5.1. Objetivo general	30
1.5.2. Objetivos específicos	30
1.6. Hipótesis	30
<b>CAPITULO II: MARCO TEÓRICO</b>	
2.1. Antecedentes del Estudio	33
2.2. Bases Teóricas	34
Definición 2.1. (Combinación Lineal)	35
Definición 2.2. (Combinación Lineal convexa)	35

Definición 2.3. (Conjunto Convexo)	36
Definición 2.4. (Hiperplano)	36
Definición 2.5. (Semiespacio Cerrado)	37
2.2.1. Convexidad del Conjunto de Soluciones de un PPL	37
Definición 2.6. (Vértice de un conjunto convexo)	39
2.2.2. Solución básica de un PPL	39
Definición 2.7. (Matriz básica)	40
Definición 2.8. (Solución básica)	42
Definición 2.9 (Solución básica factible – SBF)	42
2.2.3. El Método Simplex	43
Prueba de optimalidad y criterio para entrar en la base	45
Criterio para la salida de la base o test de la razón	48
El Algoritmo Simplex	53
2.2.4. Separación de Puntos Mediante Programación Lineal	
Introducción y definiciones preliminares	66
2.2.5. Criterio de Separabilidad Lineal	71
2.2.6. Formulación del problema lineal para separación de	
Puntos	80
Definición 2.11. Norma $\ x\ _1$	81

2.2.7. Particularidades del problema de Programación lineal	93
---	----

### **CAPÍTULO III MARCO METODOLÓGICO**

3.1. Tipo de Investigación	97
3.2. Diseño de la Investigación	97
3.3. Identificación de las Variables	98
3.4. Definición operacional de las Variables	98
3.5. Definición Conceptual de la Variable Independiente	99
3.6. Definición Conceptual de la Variable Dependiente	100
3.7. Instrumentos, software y equipos	101
3.8. El software MATLAB	101
3.9. Técnicas y Métodos de recolección de datos	105

### **CAPÍTULO IV: RESULTADOS Y EJEMPLIFICACIÓN**

4.1. Resultados de la investigación	107
4.1.1. Algoritmo computacional, para separar los elementos de un conjunto mediante programación lineal	108
4.1.2. Interfaz de usuario del algoritmo computacional, para separar los elementos de un conjunto mediante programación lineal codificado en MATLAB 7.100 (R2010a)	109

4.2. Ejemplificación	112
Ejemplo 4.1 Conjuntos linealmente separables	112
Ejemplo 4.2. Conjuntos no linealmente separables	122
Ejemplo 4.3. Conjuntos de pocos elementos	126
Ejemplo 4.4. Conjuntos de puntos en el espacio	128
Ejemplo 4.5. Aplicación en la orientación vocacional	132
CONCLUSIONES	
RECOMENDACIONES	138
REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA	139
ANEXOS	141
ANEXO 1: MATRIZ DE CONSISTENCIA	142
ANEXO 2: CÓDIGO DEL PROGRAMA	143
ANEXO 3: SIMULACRO DE ORIENTACIÓN VOCACIONAL EN LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PARTICULAR ALEXANDER FLEMING – TACNA	153

## ÍNDICE DE TABLAS

	Pág.
<b>Tabla 01:</b> Muestra el índice de masa corporal de 13 personas, en base a lo cual se indica, en la última columna sobrepeso o normal.	69
<b>Tabla A1:</b> Muestra los resultados de la evaluación y las recomendaciones de seguir estudios superiores en carreras de ciencias o de letras.	156

## ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
<b>Figura 1.</b> Representación del conjunto de puntos factibles	13
<b>Figura 2.</b> Representación de un PPL, forma canónica y estándar	21
<b>Figura 3.</b> Representación de la solución gráfica del PPL	24
<b>Figura 4.</b> Representación de un PPL con infinitas soluciones	25
<b>Figura 5.</b> Representación gráfica de un PPL sin soluciones	26
<b>Figura 6.</b> Representación gráfica de un PPL ilimitado	28
<b>Figura 7.</b> Codificación de características de los elementos de $\Omega$	33
<b>Figura 8.</b> Conjuntos convexo y no convexo en $\mathbb{R}^2$	36
<b>Figura 9.</b> Conjunto de puntos factibles y solución óptima	57
<b>Figura 10.</b> Conjuntos, separable y no linealmente separables	68
<b>Figura 11.</b> Conjuntos $\bar{E}$ y $\bar{F}$ , se aprecia su separabilidad lineal	72
<b>Figura 12.</b> Conjuntos $\bar{E}$ y $\bar{F}$ del Ejemplo 2.2 y la recta separadora	79
<b>Figura 13.</b> Dos conjuntos linealmente inseparables	91
<b>Figura 14.</b> Ventana de presentación del programa	109
<b>Figura 15.</b> Ventana de recepción de datos	110
<b>Figura 16.</b> Ventana de salida de los valores calculados	111

<b>Figura 17.</b> Visualización de las graficas, en $\mathbb{R}^2$ o en el $\mathbb{R}^3$	112
<b>Figura 18.</b> Conjuntos linealmente separables del Ejemplo 4.1	116
<b>Figura 19.</b> Conjuntos linealmente separables del Ejemplo 4.1 y recta separadora con $w \in [-3, 3]$ y $\gamma \in [-9, 9]$	118
<b>Figura 20.</b> Recta separadora del Ejemplo 4.1 calculada con un intervalo de mayor amplitud	119
<b>Figura 21.</b> Conjuntos linealmente separables del ejemplo 4.1 y de la recta separadora después de incrementar el punto (3,3; 4)	121
<b>Figura 22.</b> Conjuntos no linealmente separables del Ejemplo 4.2 y de su mejor recta separadora	123
<b>Figura 23.</b> Mejor, recta “separadora” con la banda limitada por las rectas $w'x = \gamma + 1$ y $w'x = \gamma - 1$ (Ejemplo 4.2)	125
<b>Figura 24.</b> Conjuntos linealmente inseparables del Ejemplo 4.3 y mejor, recta “separadora” con las fajas $w'x = \gamma + 1$ y $w'x = \gamma - 1$	127
<b>Figura 25.</b> Plano separador con un punto del conjunto F en el lado contrario	129
<b>Figura 26.</b> Otra toma de la grafica anterior	130
<b>Figura 27.</b> Conjuntos E y F separados linealmente por el plano separador obtenido	131

**Figura 28.** Simplemente es otra toma de la grafica anterior 132

**Figura 29.**  $(x_1; x_2) = (\text{Nota en ciencias}; \text{Nota en letras})$ . Recta que  
separa a los estudiantes que deben seguir ciencias o deben seguir 134  
letras

## RESUMEN

La presente tesis intitulada “***Diseño de un algoritmo computacional para separar los elementos de un conjunto mediante programación lineal***” surge por la necesidad de seleccionar los elementos de un conjunto en dos subconjuntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$ , para ello se plantea diseñar un algoritmo computacional haciendo uso de la programación lineal. Una vez que han sido codificadas las “n” características de los elementos, como vectores de  $\mathbb{R}^n$  y diferenciadas en dos subconjuntos, estos serán representados por las matrices  $E$  y  $F$  (en las que cada renglón representa las características de un solo elemento de  $\bar{E}$  o  $\bar{F}$ , respectivamente); a partir de ello nos empeñamos en hallar un hiperplano en  $\mathbb{R}^n$  que separe lo mejor posible a estos dos subconjuntos; lográndose este propósito mediante la solución de un PPL, que surge de las condiciones del problema de la presente investigación; para lo cual se hace uso de la programación lineal. Dado que los conjuntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  pueden ser muy numerosos, se plasma todo este proceso en un algoritmo computacional, codificado en el lenguaje de programación MATLAB. Finalmente se presentan algunas aplicaciones que muestran la importancia de la presente tesis.

## ABSTRACT

This thesis entitled "***Design of a computational algorithm to separate the elements of a set by linear programming***" arises from the need to select the elements of a set into two subsets  $\bar{E}$  and  $\bar{F}$ , for it arises by design a computational algorithm using linear programming. Once they have been encoded the "n" elements characteristics, such vectors  $\mathbb{R}^n$  differentiated into two subsets, they will be represented by the matrices  $E$  and  $F$  (in which each line represents the characteristics of a single element of  $\bar{E}$  or  $\bar{F}$ , respectively) from this we endeavor to find a hyperplane in  $\mathbb{R}^n$  best separating these two subsets, achieving this purpose through the solution of a PPL, arising from the conditions of the problem of this research, for which it makes use of linear programming. Since the sets  $\bar{E}$  and  $\bar{F}$  may be many, this process is embodied in a computational algorithm, coded in MATLAB programming language. Finally some applications that show the importance of this thesis.

## **INTRODUCCIÓN**

El presente trabajo se realiza como resultado de haber concluido los estudios de Maestría en Ciencias con mención en Computación e Informática y tomando algunas referencias del curso de Programación Lineal de pregrado.

En el Capítulo I se presenta el problema de investigación, planteamiento del problema, descripción del problema y luego se sientan base sobre programación lineal, viendo las diferentes formas de presentación de un PPL y sus diferentes formas de solución. En el Capítulo II se presenta el marco teórico de la investigación, mencionando algunos antecedentes y la sustentación del Método Simplex, que será utilizado en la investigación. Luego en el Capítulo III se expone el Marco Metodológico de la investigación, las variables y su interrelación entre ellas. La definición y características del software MATLAB, el cual será usado para la programación del algoritmo de separación de puntos. Finalmente en el Capítulo IV se realiza la discusión y se plasma los resultados de la investigación mediante algunos ejemplos teóricos y otros de la vida real.

# **CAPÍTULO I**

## **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

### **1.1. Descripción del Problema**

El problema de clasificación acompaña al hombre y a las instituciones durante su permanencia en el tiempo, siendo necesario:

- Clasificar semillas (resistentes a la sequía, a ciertas plagas, ...)
- Clasificar alimentos (por la cantidad de calorías, ...)
- Clasificar necesidades (prioritarias, secundarias)
- Clasificar calidades (1ra, 2da, 3ra.)
- Clasificar personal (de acuerdo a un perfil)
- Clasificar futuros profesionales según su vocación.

Haciendo uso de la ciencia y la tecnología se han elaborado métodos y técnicas de clasificar, que aprovechando la rapidez de la

computadora se pretende lograr cada vez una mejor eficacia de estos.

El presente trabajo surge como una necesidad de clasificar los elementos de un conjunto  $\Omega$ , en dos clases  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  que siendo cuales fuesen las características de los elementos de  $\Omega$ , éstas se pueden representar en forma de un vector de  $\mathbb{R}^n$ , y de esta manera el problema se transforma en clasificar puntos (vectores) de  $C \subset \mathbb{R}^n$ .

Estando el problema en  $\mathbb{R}^n$ , se hace uso de la programación lineal, específicamente del Método Simplex, para seleccionar los elementos del conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  en dos subconjuntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$ , mediante un hiperplano separador. Trabajos futuros podrían hacerse en más de dos partes. Puesto que los datos pueden ser numerosos, es de suma importancia la implementación de un software de computadora para afrontar el procesamiento.

### **1.1.1. Antecedentes del Problema**

La separación de puntos está ligada a la programación matemática. A nivel internacional no son muchos los trabajos que se conocen, y entre ellos están las publicaciones tales como:

“Modelos de Clasificación Basados en Máquinas de Vectores Soporte” (Abril, 2003); “Gene Selection For Cancer Classification Using Support Vector Machines” (Guyon, Weston, Barnhill, & Vapnik, 2002); Reduced support vector machines. Proceedings of the first SIAM international conference on data mining, SIAM Philadelphia (Lee & Mangasarian, 2001); (Betancourt, 2005); (Trevisan, 2010); entre otros. Como se puede ver en la referencia bibliográfica, mayormente este tema es tratado como Máquinas de Soporte Vectorial. En el Perú no conocemos algún trabajo relacionado a separación de puntos o separación de elementos de un conjunto, mediante programación lineal, tampoco, en el medio local, ni en la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann.

Una de las formas de enfocar este problema podría ser entonces de la manera como lo presentan los autores antes mencionados, es decir como Máquinas de Soporte Vectorial; para lo cual es necesario conocer programación cuadrática secuencial, como en algunas obras citadas, de las que, se ha captado información valiosa para tener un mejor panorama respecto al tema que se está desarrollando; pero se pretende llegar a más lectores dando un enfoque del problema con Programación Lineal.

### 1.1.2. Problemática de la investigación

La presente tesis se centra en el trabajo netamente matemático de separar puntos en  $\mathbb{R}^n$ .

Suponiendo que nos han dado un conjunto  $\Omega$ , de puntos etiquetados para entrenamiento, cada punto de entrenamiento  $x_j \in \mathbb{R}^n$  pertenece a alguna de las dos clases  $\bar{E}$  o  $\bar{F}$  y se le ha dado una etiqueta  $y_j \in \{-1, 1\}$ , para  $j = 1, \dots, l$ . El problema es ahora la búsqueda de un hiperplano adecuado en el espacio  $\mathbb{R}^n$  que separe a los dos conjuntos

Si los conjuntos de puntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  están representados por las matrices  $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $F \in \mathbb{R}^{k \times n}$  respectivamente, el Problema de Programación Lineal propuesto por (Bennett & Mangasarian, 1992) y (Mangasarian, 1965), es dado por:

$$\max_{w, \gamma, y, z} \frac{1}{m} e' y + \frac{1}{k} e' z$$
$$s. a. \begin{cases} Ew + y - e\gamma \geq e \\ -Fw + z + e\gamma \geq e \\ y \geq 0, \quad z \geq 0 \end{cases}$$

Donde  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $z \in \mathbb{R}^k$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$ , y el vector  $e$ , es un vector de unos de dimensión apropiada.

La solución de este problema de programación lineal conlleva a encontrar los coeficientes del hiperplano separador de los conjuntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$ .

## 1.2. Formulación del Problema

¿Será posible diseñar un algoritmo computacional haciendo uso de la Programación Lineal, para separar los elementos de un conjunto en dos subconjuntos, de acuerdo a sus características?

### Problemas específicos

- ¿Se resolverá el Problema de Programación Lineal, que se genera al intentar la separación de los elementos de un conjunto aplicando el Método Simplex?
- ¿Será posible implementar un algoritmo computacional mediante el lenguaje de programación MATLAB, que resuelva el problema de separación de elementos de un conjunto?

Antes de pasar a la justificación del problema se presenta una introducción a la programación lineal, para que así se vaya tomando conocimiento de cierta terminología y algunos conocimientos previos al tema motivo de la investigación.

### **1.3. Introducción a la Programación Lineal**

La Programación Lineal es una técnica ampliamente difundida para resolver problemas de optimización, además de ser un elemento importante en los cálculos operacionales. Entre sus aplicaciones se tiene casi en todos los sectores en la vida cotidiana: industrias, transporte, educación, medicina, agricultura, finanzas, economía, y en la administración como se ve en las publicaciones (Mangasarian, Setiono, & Wolberg, 1990) y (Mangasarian, Street, & Wolberg, 1995) constituyen una información valiosa sobre ciertas aplicaciones y se han considerado referencialmente en el presente trabajo.

El desarrollo de la Programación Lineal se inicia en el siglo pasado con dos trabajos científicos importantes: El primero fue la publicación de la "*Teoría de los Juegos*" por John Von Neumann en 1928; el segundo fue realizado por Leontief, en su artículo de

1936 este trabajo intitulado "*Quantitative input and output Relations in the Economic Systems of the United States*" se trataba de un modelo matricial que posteriormente vino a ser utilizado en la forma de un PPL.

Un creciente interés por obtener un método general para resolver un PPL ocurre en las décadas de los 30 y 40 del siglo pasado, más tarde la formulación de algunos problemas sobre la forma de restricciones. Uno de los problemas que fueron tomando mayor interés fue el llamado PPL para organizaciones y planeamiento de producción, que fue planteado y resuelto por los matemáticos de entonces, entre ellos el matemático y economista, soviético Leonid V. Kantorovitch en 1939; gracias a este trabajo Kantorovitch recibió el Premio Nobel de Economía en 1975. En 1941 Hitchcock formuló el PPL de transporte y en 1945, Stigler formuló el PPL de la dieta.

En 1947 George Dantzig y su equipo SCOP fortalece los resultados teóricos de un modelo matemático inicial de un PPL, además también un método de solución para tales problemas que fue denominado Método Simplex. Con eso hubo un aumento de interés por la Programación Lineal por parte de los matemáticos y

economistas de la época. El interés fue tanto que rápidamente nuevos avances vinieron, como por ejemplo en 1951, Tucker obtuvo los primeros resultados en la teoría de la dualidad que se hizo una parte muy importante de la PL. Un año más tarde, en 1952, Charnes y Lemkes desarrollaron el método Simplex Revisado, que fue muy importante para la implementación computacional del Método Simplex.

Cabe mencionar también el trabajo de Khachiyan en 1979 que, utilizando los métodos de los elipsoides, propuso un algoritmo en el cual el número de iteraciones para resolver un PPL está limitado por una función polinomial. Sin embargo, el rendimiento práctico deja mucho que desear. La publicación de un nuevo algoritmo por Karmarkar en 1984, dio inicio a otra línea de investigación importante en PL. *Los Métodos de Puntos Interiores*. Estos métodos surgen por la necesidad de un algoritmo que tuviese un tiempo computacional polinomial; tal es así que Klee y Minty ilustraron que el Algoritmo Simplex puede presentar un crecimiento exponencial en tiempo computacional en el peor de los casos. En la práctica el Método Simplex muestra un tiempo de computación polinomial de bajo orden.

Un Problema de Programación Lineal (PPL) puede ser definido como un problema de optimización con función objetivo (FO) lineal, y está sujeta a un conjunto de restricciones, que son compuestas por ecuaciones y/o inecuaciones también lineales; además, las variables de la función objetivo y de las restricciones son reales. Luego podemos definir un PPL como se muestra a continuación.

**Definición 1.1** (Definición de un PPL, en forma general). Un PPL es un problema de optimización que consiste en encontrar los valores de las variables:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , que minimizan (maximizan) la Función Objetivo (FO)  $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$  Sujeta a las restricciones escritas en forma de igualdades y/o desigualdades. Obteniéndose, en forma general un PPL, del modo siguiente:

$$\max (\min) Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1.1)$$

$$\text{s. a.} \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, & i = 1, \dots, p \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, & i = p + 1, \dots, q \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i, & i = q + 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1.2)$$

Donde:

$x_j$ : Nivel de la actividad  $j$  a ser determinada por la solución del PPL

(variables);

$c_j$ : Costo unitario asociado a la actividad  $j$ ;

$c_j x_j$ : Costo total de la actividad  $j$ ;

$b_i$ : valor limitante referente a la restricción  $i$  (lado derecho);

$a_{ij}$ : coeficiente que representa la contribución unitaria de la actividad  $j$  a la restricción  $i$ .

Naturalmente, no todos los tipos de restricciones necesitan estar en un PPL. La función objetivo también es conocida como función económica o función criterio. Las restricciones  $x_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , son conocidas como restricciones de no negatividad. Vamos a definir ahora lo que viene a ser una solución viable de un PPL y una solución óptima.

Sabemos que  $x \in \mathbb{R}^n$ , es un vector columna de  $(n \times 1)$  y  $x'$  es un vector fila  $(1 \times n)$ .

**Definición 1.2** (Solución Factible). Un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  que satisface todas las restricciones de un PPL es una Solución Factible para este PPL.

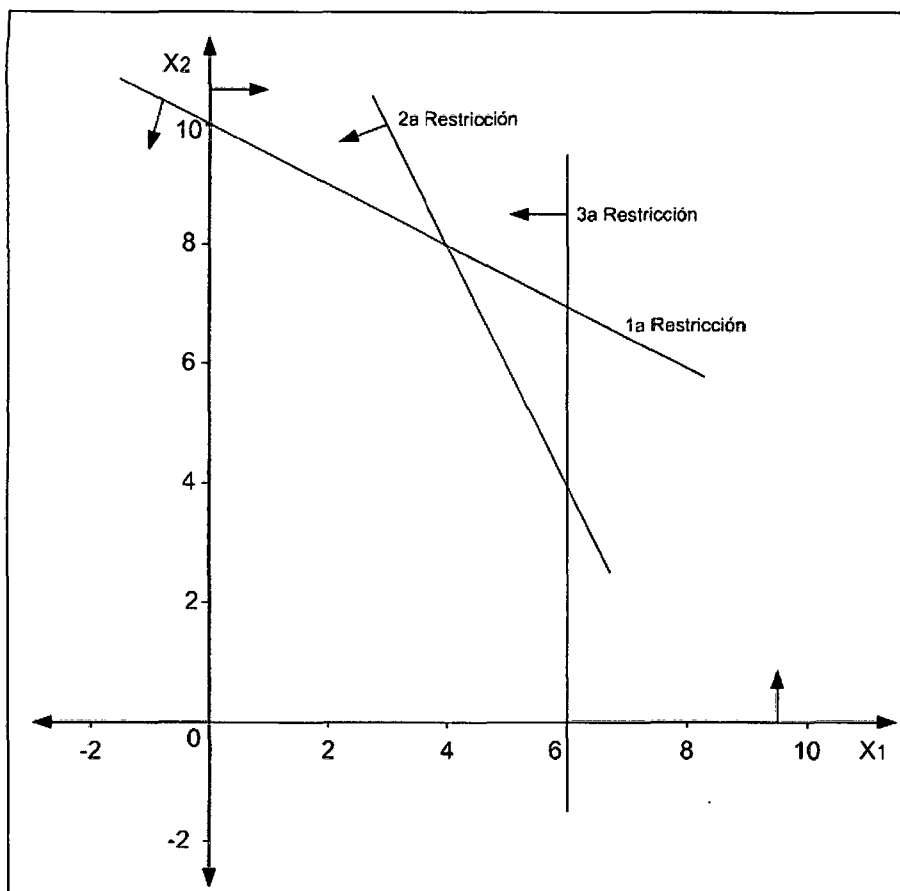
**Definición 1.3** El conjunto de todos los vectores que satisfacen las restricciones de un PPL es llamado región de factibilidad (o región factible).

**Ejemplo 1.1** Sea el PPL siguiente, del cual queremos representar gráficamente el conjunto de soluciones factibles.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s. a.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 \leq 6 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Para tal fin se necesita determinar el conjunto de todos los vectores  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  que satisfacen todas las restricciones. En efecto pueden ser determinados los puntos del plano que satisfacen cada una de las restricciones, y la intersección de todas esas condiciones constituyen el espacio buscado.

En la Figura 1 cada flecha en la recta representa el límite de cada restricción, es decir indica el semiplano que satisface dicha restricción. Para el caso en que un PPL involucra dos variables, es siempre posible visualizar gráficamente la región factible y hasta la solución óptima (o soluciones óptimas), es posible encontrarlas gráficamente.



**Figura 1.** Representación del conjunto de puntos factibles.

Fuente: Elaboración propia.

**Definición 1.4** (Solución Óptima Factible). Considere un PPL cualquiera cuyo objetivo sea minimizar la función objetivo (FO). Sea  $X$  el conjunto de todas las soluciones factibles de este PPL. Se dice que un vector  $x^* \in X$  es una solución factible del PPL si y solamente si  $c'x^* \leq c'x, \forall x \in X$ . De modo similar podemos definir una solución óptima factible para un PPL de Maximización.

**Definición 1.5** (Valor óptimo) El valor óptimo de un PPL es dado por la Solución Óptima Factible (SOF) aplicada en la función objetivo.

### 1.3.1. Otras formas de representación de un PPL

Normalmente los problemas de Programación Lineal son representados de formas más compactas de la que hemos presentado en la sección 1.1. Estas formas facilitan la comprensión de ciertos aspectos especiales de los PPL. Algunos autores prefieren representar del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. a.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Un PPL también puede ser representado en forma matricial, que viene ser una forma más compacta y bastante útil para una exploración de la teoría de dualidad y por eso se hace presente en gran parte de las obras que tratan Programación Lineal

$$\min \quad z = c'x$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Entendiéndose que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

### 1.3.2. Equivalencia entre Problemas de Programación Lineal

Cuando un PPL está en la forma de la Definición 1.1, se dice que el PPL está en su forma mixta. Se propone a seguir las definiciones cuyas restricciones están en Forma Estándar y Forma Canónica.

**Definición 1.6** (Forma estándar de un PPL) Decimos que un PPL en la forma:

$$\begin{aligned} &\min (\max) \quad z = c'x \\ &\text{s.a. } \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.6)$$

con  $b \geq 0$ , está es la forma estándar.

**Definición 1.7** (Forma canónica de un PPL). Se dice que un PPL en una de las formas siguientes

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c'x \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.7)$$

o

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c'x \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.8)$$

está en la forma canónica.

Un PPL siempre puede ser transformado de una forma en la otra, esté en la forma canónica, estándar o mixta, como nos muestra el Teorem1.1.

**Teorema 1.1** (Equivalencia de PPL's). Cualquier PPL puede ser transformado en un PPL equivalente a través de las siguientes reglas:

*i. Desigualdades :*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_j \text{ es equivalente a } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_j. \text{ es equivalente a } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0$$

ii. *Variables sin restricción de señal:*

$x_j$  *irrestringido de señal es equivalente a*  $\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}_j$ , *donde*

$$\bar{x}_j \geq 0 \text{ y } \bar{\bar{x}}_j \geq 0.$$

iii. *Variables negativas:*

$x_j \leq 0$  *es equivalente a*  $(-\bar{x}_j)$ , *con*  $\bar{x}_j \geq 0$ .

iv. *Función Objetivo:*

$\max z(x)$  *equivale a*  $-\min -z(x)$ .

### **Demostración:**

i. En la primera desigualdad basta tomar

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad \text{con } x_{n+i} \geq 0$$

y la desigualdad es satisfecha. El mismo procedimiento puede ser tomado para la segunda desigualdad.

ii. Basta notar que cualquier número siempre puede ser escrito como diferencia de dos números positivos.

iii. Basta notar que si  $x_j \leq 0$ , tomando  $x_j = -\bar{x}_j$ , tenemos que

$$-\bar{x}_j \leq 0 \Leftrightarrow \bar{x}_j \geq 0.$$

iv. Sea  $X$  el conjunto de todas las soluciones factibles del PPL y  $x^*$  la solución óptima del PPL, entonces tenemos que  $\max z(x) = z(x^*)$ . Mas, de la Definición 1.4, tenemos que  $z(x^*) \geq z(x), \forall x \in X$ , por tanto se afirma que  $-z(x^*) \leq -z(x), \forall x \in X$ , de donde se sigue que  $-z(x^*) = \min(-z(x))$ , lo que implica que  $z(x^*) = -\min(-z(x))$ .

Este teorema en (iv) dice que a través de la minimización del opuesto de la función objetivo de un PPL de Maximización, se encuentra el resultado óptimo con signo contrario; siendo así, al adoptar tal procedimiento, es necesario invertir nuevamente el signo para encontrar la respuesta correcta.

En (i) de este teorema, las variables  $x_{n+i}$  incrementadas en las desigualdades para la obtención de las igualdades son conocidas como variables de holgura (o de exceso en el segundo caso).

Con este teorema cualquier PPL puede ser fácilmente transformado en un PPL equivalente en la forma estándar. La gran importancia de esto es que proporciona las condiciones del Método Simplex, que solo es aplicable a un PPL en la forma estándar;

método que es ampliamente utilizado en la programación lineal, como veremos más adelante.

El inverso también puede ser hecho, es decir, un problema en la forma estándar puede ser colocado en otra forma cualquiera. Una restricción de igualdad puede ser intercambiada por dos desigualdades:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \end{cases}$$

Es interesante observar que cuando transformamos un PPL con desigualdades a la forma estándar estamos aumentando el número de variables, o sea, tenemos un aumento en la dimensión del problema. En ese sentido, como las dos formulaciones son equivalentes es siempre posible establecer la correspondencia entre ellas.

Se puede ver eso ahora a través de las representaciones de un PPL en la forma canónica y su equivalente en la forma estándar. La Figura 2 ilustra la correspondencia entre los conjuntos de soluciones factibles de ambos PPL's.

**Ejemplo 1.2** Sea el PPL en la forma canónica de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. a.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.9)$$

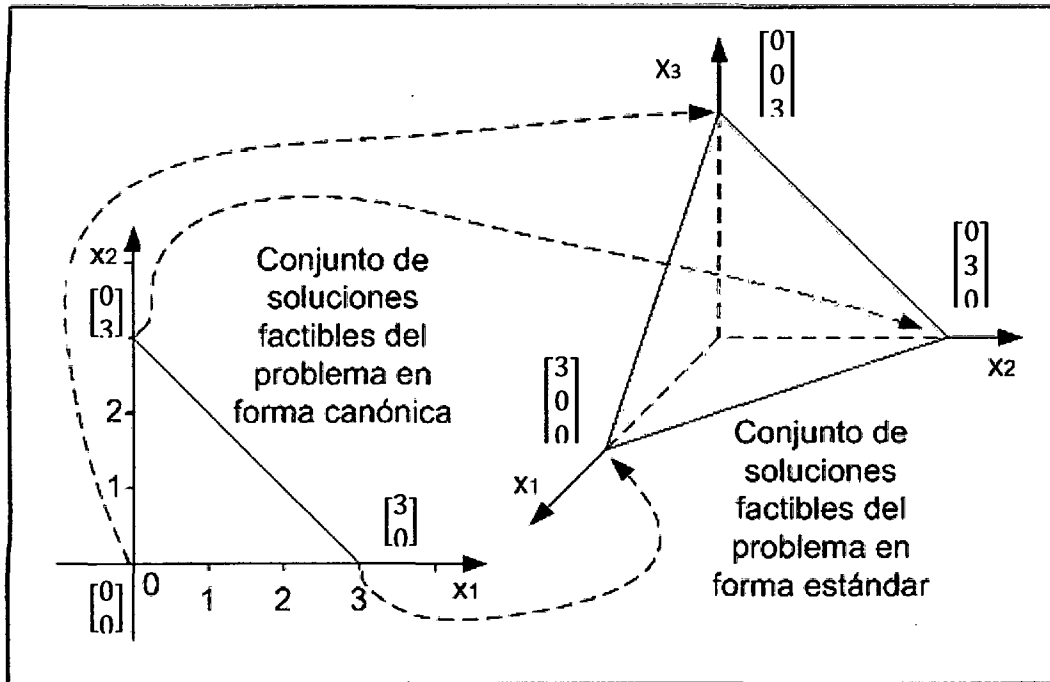
Este problema puede ser transformado en un PPL equivalente en la forma estándar a través de la inclusión de la variable de holgura  $x_3$ , quedando como sigue:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 \\ \text{s. a.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Así podemos definir la correspondencia entre las dos formulaciones

por:  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  del problema (1.9), con  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3 - x_1 - x_2 \end{bmatrix}$  del problema (1.10).

La Figura 1.2, siguiente muestra la relación establecida entre los conjuntos de soluciones factibles de los dos PPL's.



**Figura 2.** Representación de la correspondencia entre los conjuntos de soluciones factibles del PPL en la forma canónica (1.9) y su equivalente en la forma estándar (1.10).

Fuente: Elaboración propia.

### 1.3.3. Resolución gráfica de problemas de programación lineal

Como ya fue presentado en el Ejemplo 1.1 en un problema que contiene solo dos variables es siempre posible representar gráficamente su conjunto de soluciones factibles. Verdaderamente, para este tipo de problemas es siempre posible encontrar la solución óptima, en caso que tal solución exista. Problemas que contienen tres variables también pueden ser resueltos

gráficamente. A partir de cuatro variables la solución solo es posible algebraicamente.

Describiremos tal procedimiento puesto que es más fácil la comprensión de resultados asociados a un PPL. Para iniciar este estudio vamos a tomar el Ejemplo 1.1 que se trata de un problema de maximización.

A partir del conjunto de soluciones factibles del problema que está presentado por la Figura 1, necesitamos determinar, en caso exista un punto  $(x_1^*, x_2^*)$  que pertenezca a este conjunto donde la función objetivo  $z = 2x_1 + 2x_2$  asuma el mayor valor posible. Eso puede ser realizado estableciendo algunos valores para la función objetivo  $z$  dados por sus curvas de nivel, que nada más son una familia de rectas paralelas. En este problema se puede observar por ejemplo, las rectas paralelas que están en la Figura 3, representadas por las ecuaciones siguientes:

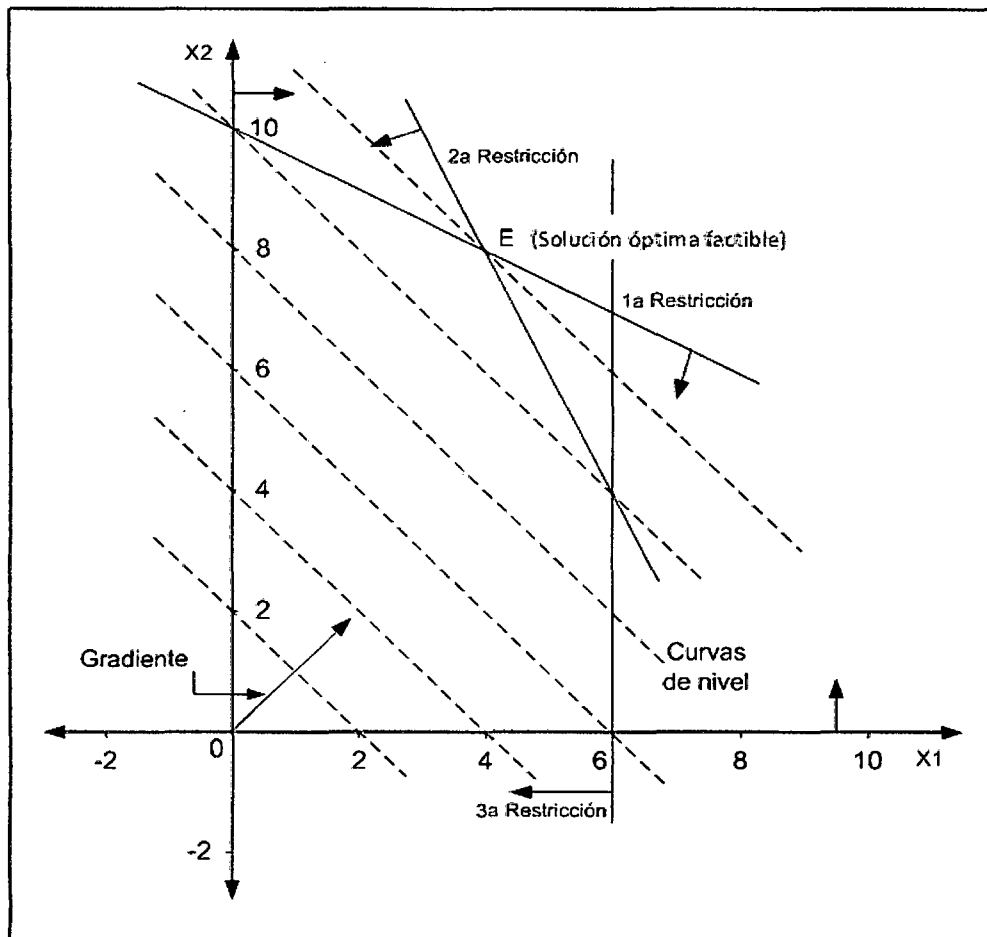
$$2x_1 + 2x_2 = 4$$

$$2x_1 + 2x_2 = 12$$

$$2x_1 + 2x_2 = 20$$

$$2x_1 + 2x_2 = 24$$

Utilizando el cálculo de varias variables tenemos como hecho indudable, que las curvas de nivel son perpendiculares al vector gradiente de la función, que es dado por  $\nabla z = \left( \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)$ . En nuestro ejemplo tenemos  $\nabla z = (2, 2)$ . Sabiendo que el vector gradiente indica el sentido de crecimiento de la función para un problema de maximización se tiene la solución óptima factible en el último punto del conjunto de soluciones factibles, en el sentido del vector gradiente, que es posible estar contenido en una curva de nivel de la función. La Figura 3 ilustra tal solución. En ella la parte sombreada representa el conjunto de soluciones factibles y las rectas punteadas son las curvas de nivel de la función objetivo. Así la solución óptima factible será dada por el punto  $E$  de coordenadas  $(4, 8)$ , teniendo como valor óptimo para el problema  $z = 24$



**Figura 3.** Representación de la solución gráfica del PPL

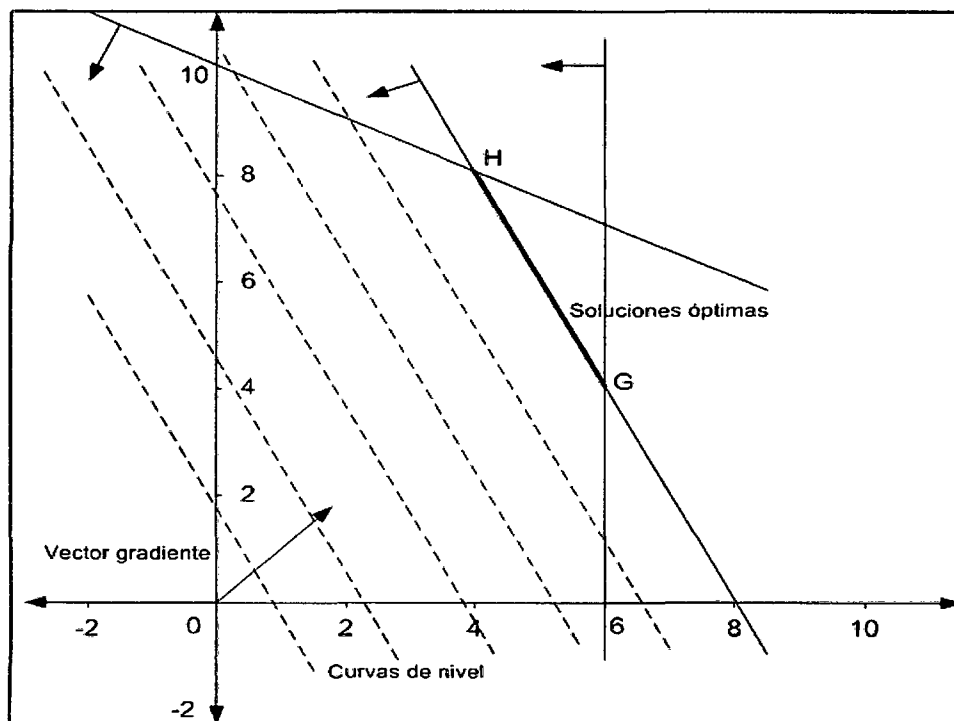
Fuente: Elaboración propia.

### 1.3.4. Tipos de soluciones de un PPL:

Aprovéchese la representación gráfica de un PPL para visualizar las posibles situaciones que pueden ocurrir con la solución de un problema:

1. PPL con **única solución óptima**, como en el ejemplo representado por la Figura 3.

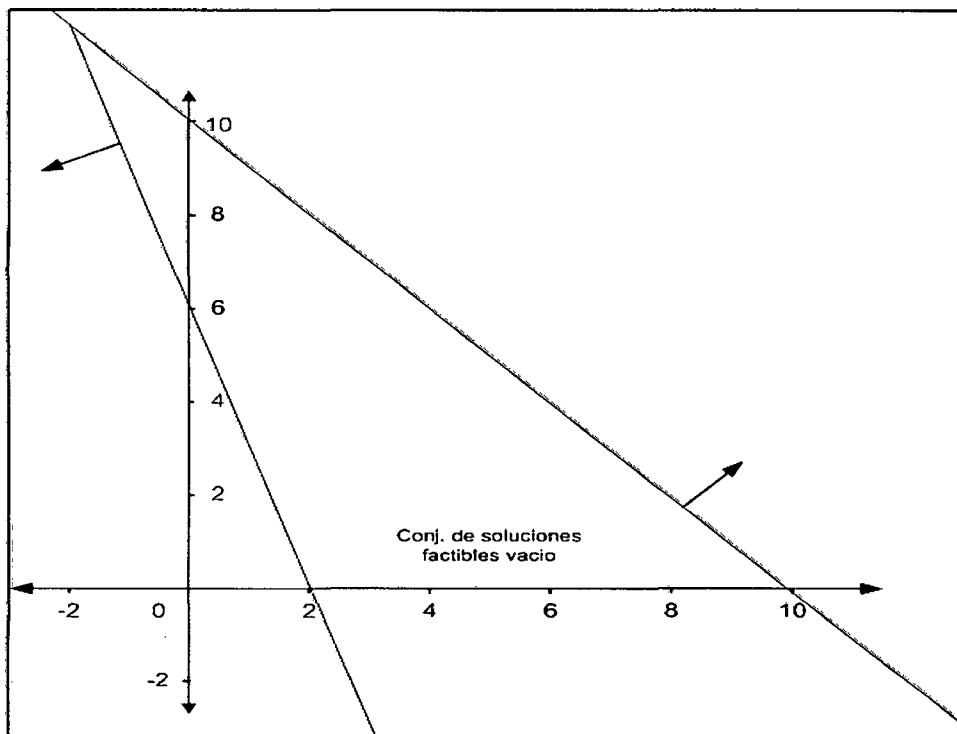
2. PPL con **infinitas soluciones óptimas**, que ocurre cuando la función objetivo es paralela a algunas de las restricciones. Tal situación puede ser obtenida alterando la función objetivo del problema 1.3 para  $z = 4x_1 + 2x_2$  donde tenemos el mismo conjunto de soluciones factibles como es mostrado en la Figura 4, con la función objetivo paralela a la segunda restricción.



**Figura 4.** Representación de un PPL con infinitas soluciones.

Fuente: Elaboración propia.

En este caso todos los puntos del segmento de recta  $\overline{GH}$  conforman una solución óptima para el PPL, por eso el mismo admite infinitas soluciones óptimas.



**Figura 5.** Representación gráfica de un PPL sin soluciones.

Fuente: Elaboración propia.

3. **PPL sin solución factible**, también conocido como PPL inviable (no factible), que ocurre cuando no existe ninguna solución que satisfaga simultáneamente todas las restricciones, eso porque el lugar geométrico de las soluciones factibles definidas por el

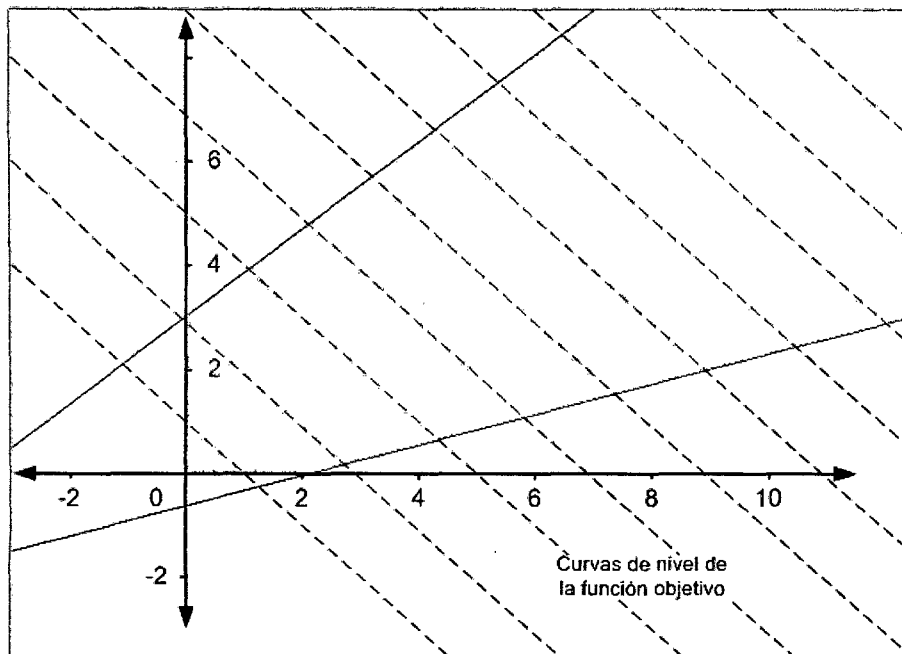
conjunto de restricciones caracteriza un conjunto vacío Figura 5. Tal situación puede ser vista alterando el conjunto de restricciones del PPL (1.3); esto es:

$$\text{s. a. } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2 \end{cases} \quad (1.11)$$

4. **PPL ilimitado**, cuando el conjunto de soluciones factibles no es cerrado y la función objetivo del PPL aumenta su valor (problema de maximización) en una dirección nunca alcanzan un límite de la región factible, siendo imposible establecer una solución óptima. En este caso el PPL se dice que es limitado. El PPL siguiente ejemplifica esta solución.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a. } \quad & \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.12)$$

La Figura 6 muestra la representación del conjunto de soluciones factibles y las curvas de nivel de la función objetivo del problema (1.12).



**Figura 6.** Representación gráfica de un PPL ilimitado.

**Fuente:** Trevisan (2010)

Es interesante observar que para este problema (1.12), si la función objetivo fuese de minimización, el mismo admitiría una única solución óptima factible, en el punto  $(0, 0)$  con valor óptimo cero. En otras palabras, solo porque el conjunto de soluciones factibles no es cerrado, no se puede afirmar que un problema de programación lineal no tiene una solución óptima, con valor limitado. La verdad es que puede seguir teniendo una o incluso infinitas soluciones óptimas con valor limitado.

#### **1.4. Justificación e importancia del problema.**

El tema de separación de puntos de  $\mathbb{R}^n$  no es muy conocido, por lo menos en nuestro medio. Sabemos que *Vladimir Vapnik* dio el inicio a los estudios en este campo, bajo la denominación de Máquinas de Soporte Vectorial (Guyon et al., 2002); lo cual demanda del conocimiento de una matemática muy sofisticada como es la programación no lineal, específicamente hablando la Programación Cuadrática Secuencial (un tema para un próximo trabajo de investigación), mediante un enfoque diferente a lo que se pretende desarrollar en el presente trabajo, puesto que aquí se aplicará la Programación Lineal como base científica para implementar el algoritmo, y el lenguaje de programación MATLAB para codificar el algoritmo que plasma el resultado de todo el trabajo; obteniéndose de este modo un material entendible por muchos lectores y estamos seguros que además será considerado como base para otros trabajos de investigación en los que se considere la selección de puntos de un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y se aplique no solo la Programación Lineal sino también la Programación No Lineal, y algún lenguaje de programación entre ellos MATLAB.

## **1.5. Objetivos de la Investigación**

### **1.5.1. Objetivo general**

Implementar un algoritmo que resuelva el problema de selección de los elementos con  $n$  características, de un conjunto haciendo uso de la Programación Lineal y el lenguaje de programación MATLAB.

### **1.5.2. Objetivos específicos**

- Desarrollar el Método Simplex como herramienta aplicativa de la Programación Lineal, para resolver el PPL generado en la presente investigación.
- Formular el algoritmo que realiza el trabajo de separación de los elementos de un conjunto y luego codificar en el lenguaje de programación MATLAB.

## **1.6. Hipótesis**

Si se cuenta con un algoritmo computacional, para seleccionar los elementos de un conjunto, el proceso de selección

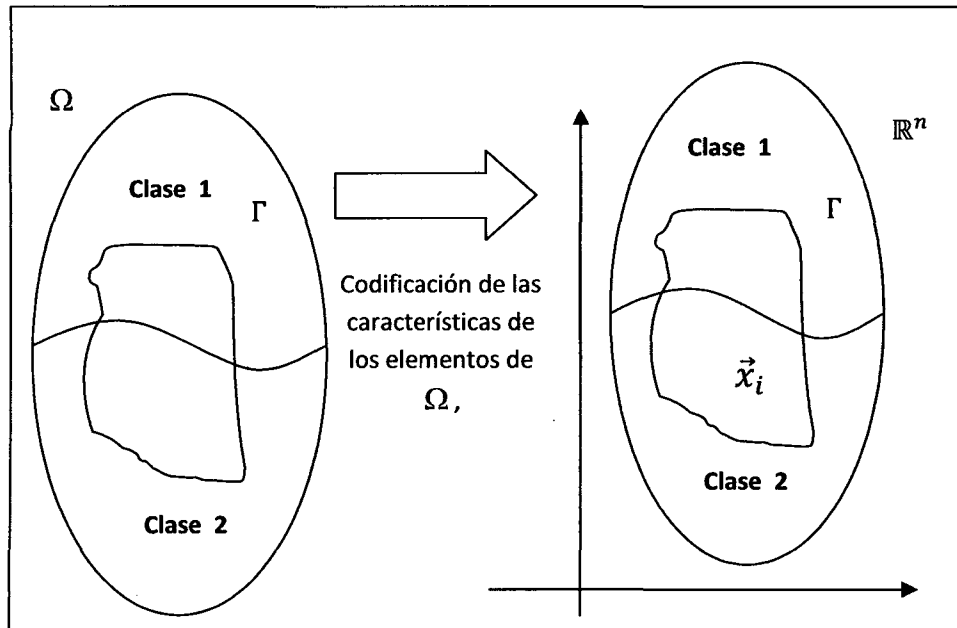
será automatizado y muy útil en aquellos conjuntos con un número inmensamente grande de elementos a ser seleccionados.

- El Método Simplex desarrollado en su forma matricial nos permitirá resolver el Problema de Programación Lineal, que resulta de la investigación.
- Puesto que el Método Simplex es desarrollado haciendo uso de la teoría de matrices, el lenguaje de programación MATLAB será considerado para implementar el algoritmo motivo de la presente investigación.

## **CAPÍTULO II**

### **MARCO TEÓRICO**

El presente trabajo será de mucha importancia, para nuestros lectores de pregrado y posgrado, puesto que luego de haber desarrollado la investigación, se mostrará una aplicación directa del trabajo realizado el cual implica conocer algo de lo que, es la matemática superior. Los elementos de un conjunto dado serán codificados observando sus características y representados por vectores (puntos) en el Espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Luego, una manera matemática de obtener una separación de puntos, es construyendo un hiperplano de tal modo que cada conjuntos de puntos esté localizado a un lado del hiperplano; esto en el caso de ser linealmente separables. En caso que los conjuntos no sean linealmente separables, proporcionar un hiperplano que minimice la media de los errores. Todo esto se logrará gracias a la programación matemática (Método Simplex) y la implementación de un programa en el lenguaje de programación MATLAB.



**Figura 7.** Muestra una codificación de las características de los elementos de  $\Omega$  y luego son representados como vectores de  $\mathbb{R}^n$ .

Fuente: Elaboración propia.

## 2.1. Antecedentes del estudio

En el año 1992 Bennett, K. P. y Mangasarian, O. L. en su obra *"Robust Linear Programming Discrimination of Two Linear inseparable sets, Optimization"*, definen conjuntos linealmente separables mediante un óptimo hiperplano separador, si los elementos de un conjunto se pueden ubicar a un solo lado del hiperplano separador, y los elementos del otro conjunto se ubican del otro lado del hiperplano. De este mismo modo es considerada

la separabilidad de los conjunto en el presente trabajo y además considerándose que los conjuntos que no se pueden separar mediante un hiperplano son no linealmente separables.

Mangasarian, O. L.; Street, W. N. y Wolberg, W. H., en 1994. Publican el artículo *“Breast Cancer Diagnosis and Prognosis via Linear Programming, Mathematical Programming Technical Report”*, donde muestran una gran aplicación de la teoría -*separación de puntos mediante programación lineal*- en el diagnóstico y pronóstico del Cáncer de Mama; basados en imágenes obtenidas previamente mediante exámenes de rutina.

## **2.2. Bases Teóricas**

En el presente capítulo luego de conocer algunos antecedentes sobre el tema se pasa, a discutir el Método Simplex el cual es un procedimiento para resolver Problemas de Programación Lineal desarrollado por George B. Dantzig en 1947. En la primera parte presentamos algunos fundamentos teóricos y después trataremos el Método Simplex propiamente dicho.

Para comprender mejor el Método Simplex es necesario presentar algunos conocimientos matemáticos sobre la naturaleza

de la solución de un Problema de Programación Lineal; más que todo son conceptos relacionados al Álgebra Lineal (Grossman, Osuna, & Soto, 1983; Stanley, 1999).

**Definición 2.1** (Combinación Lineal) Un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  es una combinación lineal (CL) de los vectores  $x^1, x^2, x^3, \dots, x^p \in \mathbb{R}^n$  si existen escalares  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ , tal que

$$x = \sum_{i=1}^p a_i x^i$$

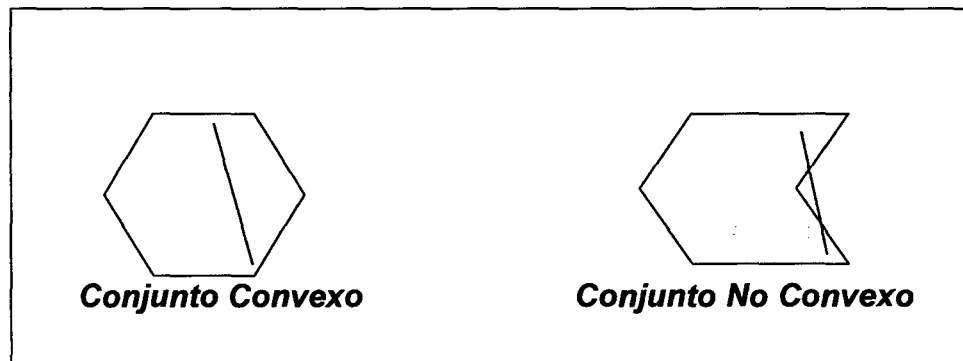
**Definición 2.2** (Combinación Lineal Convexa) Un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  es una combinación lineal convexa (CLC) de los vectores  $x^1, x^2, x^3, \dots, x^p \in \mathbb{R}^n$  si existen escalares  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ , tal que

$$x = \sum_{i=1}^p a_i x^i, \text{ donde } a_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^p a_i = 1.$$

Se define a continuación conjunto convexo, pues más adelante se mostrará que el conjunto de soluciones factibles (viables) de un PPL es un conjunto convexo. Este dato es de suma importancia dentro del desenvolvimiento del Método Simplex, pues a partir de la convexidad es posible garantizar que una solución

óptima de un problema de programación lineal, cuando existe, es obtenida en un vértice del conjunto convexo.

**Definición 2.3** (Conjunto Convexo) Un conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto si para cualesquier  $x^1, x^2 \in X$ ,  $x = ax^1 + (1 - a)x^2 \in X$ ,  $a \in [0,1]$ . O sea el segmento de recta que une los puntos  $x^1, x^2$  está íntegramente contenido en  $X$ .



**Figura 8.** Representación de un conjunto convexo y un conjunto no convexo en  $\mathbb{R}^2$ .

**Fuente:** Elaboración propia.

**Definición 2.4** (Hiperplano). Un conjunto de puntos en la forma  $\{x \in \mathbb{R}^n / a'x = b\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ , no nulo y  $b \in \mathbb{R}$  es llamado hiperplano en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.5** (Semiespacio Cerrado). Un conjunto de puntos en la forma  $\{x \in \mathbb{R}^n / a'x \geq b\}$  o  $\{x \in \mathbb{R}^n / a'x \leq b\}$ , donde  $a \in \mathbb{R}^n$  (no nulo) y  $b \in \mathbb{R}$ , es llamado semiespacio cerrado en  $\mathbb{R}^n$ .

Es interesante notar que un hiperplano separa al  $\mathbb{R}^n$  en dos semiespacios representados por las inecuaciones:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \geq b \quad y \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$$

### 2.2.1. Convexidad del Conjunto de Soluciones de un PPL.

Por la Definición 1.1, se sabe que las restricciones de un PPL se pueden presentar en forma de igualdades y/o desigualdades (hiperplanos y semiespacios), como se puede observar en (Trevisan, 2010). Ahora se presenta dos resultados importantes sobre hiperplanos y semiespacios que sirven de base para garantizar la convexidad del conjunto de soluciones de un PPL.

**Proposición 2.1** Un hiperplano  $X = \{x \in \mathbb{R}^n / c'x = z\}$ ;  $c \in \mathbb{R}^n$  y  $z \in \mathbb{R}$ , es un conjunto convexo.

**Demostración:** Si  $x^1, x^2 \in X$ , sigue que  $c'x^1 = z$  y  $c'x^2 = z$ ; entonces

$$\begin{aligned} x &= \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2 \in X \quad \alpha \in [0,1] \text{ pues } c'x = c'[\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2] \\ &= \alpha c'x^1 + (1 - \alpha)c'x^2 = \alpha z + (1 - \alpha)z = z. \end{aligned}$$

**Proposición 2.2** Un semiespacio es un conjunto convexo.

La demostración de esta proposición es prácticamente análoga a la demostración de la proposición anterior.

**Proposición 2.3** El conjunto de todas las combinaciones lineales convexas de un número finito de puntos convexos es convexo, esto es,

$$X = \left\{ x/x = \sum_{i=1}^r a_i x^i, a_i > 0, i = 1, 2, \dots, r \text{ y } \sum_{i=1}^r a_i = 1 \right\}$$

es un conjunto convexo.

Otro hecho importante sobre los conjuntos convexos es el que la intersección finita de conjuntos convexos es un conjunto convexo, como es el establecido por el teorema siguiente.

**Teorema 2.1** Si  $X_i, i = 1, 2, \dots, r$ , es una colección finita de conjuntos convexos, entonces  $X$  es un conjunto convexo.

$$X = \bigcap_{i=1}^r X_i$$

La demostración sigue de los resultados anteriores, una vez que el conjunto de soluciones factibles de un PPL es formado por la intersección de hiperplanos y semiespacios, o sea restricciones del tipo  $a'x = b$ ,  $a'x \leq b$ ,  $a'x \geq b$ ,  $x \geq 0$ , que son conjuntos convexos.

A continuación se define lo que es un punto extremo de un conjunto convexo, conocido también como vértice del conjunto.

**Definición 2.6.** Sea  $X$  un conjunto convexo. Un punto  $x \in X$ , se dice que es vértice de  $X$  (un punto extremo de  $X$ ) si no existen  $x^1, x^2 \in X$ ,  $x^1 \neq x^2$  tales que  $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , o sea,  $x$  no puede ser escrita como combinación lineal convexa de dos puntos distintos de  $X$ .

### 2.2.2. Solución básica de un PPL:

Dado un problema de programación lineal, se ha visto en el Capítulo I que es siempre posible transformar sus restricciones en igualdades. Así se considerará el problema en su forma estándar:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c'x \\ \text{s. a} \quad & \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x, c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq n$ .

Se inicia, analizando el sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$ . Supongamos que, sin pérdida de generalidad,  $A$  tiene rango  $m$ , o sea  $A$  tiene  $m$  líneas linealmente independientes (LI). En este caso existe un conjunto de  $m$  índices, llamado  $I_B$ , de las  $n$  columnas de  $A$ , de tal forma que la matriz  $B$  formada con las columnas relativas a esos índices tiene rango  $m$ .

**Definición 2.7** (Matriz básica). Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . La submatriz  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , donde  $\det(B) \neq 0$  o sea  $B$  tiene rango  $m$ , es llamada matriz base (o matriz básica).

Se puede ahora asignar los índices de las columnas de  $A$  que no pertenecen a  $I_B$  en otro conjunto  $I_N$  y con las columnas de  $A$  referentes a estos índices formar una matriz  $N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ , esta es llamada matriz no básica.

Dada una matriz  $A$ , haciendo un poco de análisis combinatorio es fácil ver que el número de submatrices bases  $m \times m$  relacionadas a la matriz  $A$ , es limitado por  $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ . Siendo así se puede particionar la matriz  $A$  de la siguiente forma  $A = (B|N)$  donde  $B$  es la matriz base antes definida y  $N$  la matriz no básica formada por  $(n - m)$  columnas restantes de la matriz  $A$ .

De modo análogo se puede particionar los vectores  $x$  y  $c'$  en

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \text{ y } c' = (c'_B | c'_N), \text{ donde:}$$

$x_B$ : vector de  $m$  componentes formado por las variables del vector  $x$  asociadas a la matriz base  $B$ , variables que son llamadas variables básicas (VB).

$x_N$ : vector de  $(n - m)$  componentes, formado por las variables del vector  $x$  asociadas a la matriz no básica  $N$ , estas variables son llamadas variables no básicas (VNB).

$c_B$ : vector de  $m$  componentes formado por los coeficientes del vector  $c$  referente a las variables básicas.

$c_N$ : vector de  $(n - m)$  componentes, formado por los coeficientes del vector  $c$  referente a las variables no básicas.

Por consiguiente, podemos escribir el PPL (2.1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min z &= c'_B x_B + c'_N x_N \\ \text{s. a. } &\begin{cases} Bx_B + Nx_N = b \\ x_B \geq 0, x_N \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Se puede expresar  $x_B$  en función de  $x_N$ , multiplicando la restricción principal de (2.2). por  $B^{-1}$ , pues  $B$  es invertible, donde obtenemos:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \quad (2.3)$$

Tomando  $x_N = 0$  en (2.3) obtenemos  $x_B = B^{-1}b$ .

**Definición 2.8** (Solución Básica)  $\bar{x}$  es una solución básica para  $Ax = b$  en (2.1) cuando  $\bar{x}_N = 0$  y  $\bar{x}_B = B^{-1}b$  o sea

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Definición 2.9** (Solución básica factible - SBF). Una solución básica en que  $x_B$  asume valores mayores o iguales que cero es llamada Solución Básica factible.

**Teorema 2.3** Dado un PPL con conjunto de soluciones factibles  $X$ ,  $\bar{x}$  es solución básica factible del problema, si, y solamente si,  $\bar{x}$  es punto extremo del conjunto  $X$ .

**Teorema 2.4** Si un PPL admite una solución óptima entonces por lo menos un punto extremo del conjunto de puntos factibles es solución óptima.

**Teorema 2.5** Si una función objetivo de un PPL asume su máximo (su mínimo) en más de un punto extremo, entonces ella tomará el mismo valor para cualquier combinación lineal convexa de esos puntos.

Según el teorema 2.5, si un PPL posee más de una solución óptima, entonces posee infinitas soluciones óptimas

### **2.2.3. El Método Simplex**

Los teoremas (2.3) y (2.4) son muy importantes en la teoría de la Programación Lineal, pues por ellos es posible concluir que la búsqueda de una solución óptima se puede restringir a los puntos extremos del conjunto de soluciones factibles del PPL, o sea no es

necesario buscar soluciones en el interior de este conjunto (Taha, 2004) y (Hillier & Lieberman, 2002).

Seguidamente se da a conocer, resumidamente, cómo el Método Simplex presenta una manera eficiente de generar SBF's a partir de una SBF dada. En SBF's consecutivas, una matriz base  $B$  se diferencia de la siguiente por apenas una columna. Es un proceso iterativo que repite los mismos pasos a partir de una SBF inicial hasta llegar a una SBF óptima. Este método detecta también si un PPL tiene infinitas soluciones, si el problema es ilimitado o si el problema es inviable.

Para observar algunos resultados importantes del Método Simplex se utiliza la notación de la partición de matriz  $A$  y del vector  $x$  utilizada en la sección anterior y conseguir una nueva forma de escribir el PPL. Suponiendo que se tiene disponible una SBF; se inicia sustituyendo la expresión  $x_B$  dada por (2.3) en la función objetivo del PPL (2.2) de donde sigue que este PPL puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min. \quad & z = c'_B B^{-1} b - (c'_B B^{-1} N - c'_N) x_N \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \\ x_B \geq 0, \quad x_N \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Escribiendo la matriz  $A$  por columnas, o sea  $A = (a^1 \ a^2 \ \dots \ a^n)$  donde  $a^j = (a_{1j} \ a_{2j} \ \dots \ a_{mj})'$   $a^j \in \mathbb{R}^m$  representa una columna de  $A$  con  $j \in (I_B \cup I_N)$ .

Se define ahora  $z_j = c'_B B^{-1} a^j$ ,  $z_j \in \mathbb{R}$ , y  $\bar{z} = c'_B B^{-1} b = c'_B \bar{x}_B$ ,

$\bar{z} \in \mathbb{R}$ , como el valor de la función objetivo para la solución básica factible actual. En consecuencia, la función objetivo del problema (2.4) puede ser reescrita como:

$$\min. \quad z = \bar{z} - \sum_{j \in I_N} (z_j - c_j) x_j \quad (2.5)$$

Definiendo  $y_j = B^{-1} a^j$ ,  $y_j \in \mathbb{R}^m$ , se puede escribir las restricciones del problema (2.4) como:

$$x_B = \bar{x}_B - \sum_{j \in I_N} y_j x_j \quad (2.6)$$

### **Prueba de optimalidad y criterio para entrar en la base**

La prueba de optimalidad es utilizada para verificar si una SBF es óptima o no. Si la SBF disponible es óptima, el método termina. De lo contrario, debemos indicar una nueva variable no básica (VNB) para entrar en la base de modo que la función objetivo disminuya (problema de mínimo). En ese sentido, tal paso

del método, se muestra interesado en la mejoría del valor de la función objetivo.

El próximo teorema establece este criterio para decir si una SBF es óptima a partir del análisis del signo de  $(z_j - c_j)$ .

**Teorema 2.6.** Si  $\bar{x}_B \geq 0$  y  $(z_j - c_j) \leq 0, \forall j \in I_N$ , entonces el vector  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , donde  $x^*_{B_i} = \bar{x}_{B_i} \ i = 1, 2, \dots, m$  y  $x^*_j = 0, j \in I_N$ , será una solución óptima del PPL.

**Demostración:** De las hipótesis:  $(z_j - c_j) \leq 0$  y  $x_j \geq 0, \forall j \in I_N$  y  $\bar{x}_B \geq 0$ , sigue que

$$\sum_{j \in I_N} (z_j - c_j) x_j \leq 0$$

De la función objetivo (2.5) del PPL, que  $z = \bar{z}$ , donde  $\bar{z} = c'_B \bar{x}_B = c'x^*$ . Esto quiere decir que  $z$  nunca será menor que  $\bar{z} = c'x^*$  y siendo  $x^*$  claramente una solución básica factible del PPL, se sigue de la definición 1.4 (solución óptima del PPL), que  $x^*$  es solución óptima.

Este teorema dice que dada una solución básica factible asociada a una matriz base  $B$ , si tuviéramos  $(z_j - c_j) \leq 0, \forall j \in I_N$ ,

el problema que se quiere resolver estaría resuelto. Por tanto, al trabajar con el Método Simplex, de tener una solución básica factible, es necesario verificar si  $(z_j - c_j) \leq 0, \forall j \in I_N$ . Cuando esta condición es verificada, el método puede ser finalizado, ya que tendríamos una solución óptima. Es en este sentido que en las teorías sobre el asunto, se denomina "criterio de optimalidad".

Como se comentó anteriormente en el Método Simplex una matriz base  $B$  se diferencia de la matriz base usada en la iteración siguiente por apenas una columna. Como cada columna  $x_j$  puede ser asociada a la columna  $a^j$  de  $A$ . Se puede establecer un criterio para la selección de una variable  $x_r$  para entrar en la base. Para ello, los valores de  $(z_j - c_j) \leq 0, \forall j \in I_N$  desempeñan un papel fundamental, pues más allá de que garanticen la optimalidad de una SBF, podemos, a partir del estudio de su signo, definir tal criterio, como se ve a continuación:

En caso de que el criterio de optimalidad no sea satisfecho existe por lo menos un índice  $r \in I_N$  tal que  $(z_r - c_r) > 0$ . En este caso, se puede aplicar un criterio muy simple; para la selección de la variable  $x_r$  que entra en la base:  $x_r$  es escogida de forma que:

$$(z_r - c_r) = \text{Max}(z_j - c_j / z_j - c_j > 0) \quad (2.8)$$

Es decir, se considera para entrar en la base la variable que tiene el mayor coeficiente positivo en la función objetivo.

### **Criterio para la salida de la base o test de la razón**

Como el criterio para entrada en la base establece una variable  $x_r$ , para entrar en la base, y solo podemos tener  $m$  variables básicas, es necesario ahora establecer un criterio para la selección de una VB para dejar la base, tornándose VNB.

A partir de los criterios de entrada en la base y de salida de la base, se tiene que el Método Simplex, en cada iteración, intercambia una columna de la matriz  $N$  por una columna de la matriz  $B$  "caminando" así por puntos extremos adyacentes.

Como se vio anteriormente, se escoge la variable  $x_r$  para introducir en la base con la finalidad de disminuir el valor de la función objetivo. Siendo así es conveniente que  $x_r$  asuma el mayor valor posible ya que mientras mayor sea  $x_r$  se minimiza mas la función objetivo  $z$ . Sin embargo se necesita mantener la viabilidad de la solución. Eso es por la prueba de la razón, que indica cuánto

la variable  $x_r$  puede crecer, asumiendo que todas las VB deben permanecer no negativas.

La ecuación (2.6) nos dice que:  $x_B = \bar{x}_B - \sum_{j \in I_N} y_j x_j$  puede ser escrita sin la sumatoria pues solamente la variable  $x_r$  que entrará en la base asumirá un valor no negativo, las demás VNB permanecerán nulas.

Así tenemos que:

$$x_B = \bar{x}_B - y_r x_r \quad (2.9)$$

En forma matricial explícitamente se tiene:

$$\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{B_1} \\ \bar{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B_m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{r_1} \\ y_{r_2} \\ \vdots \\ y_{r_m} \end{pmatrix} x_r \quad (2.10)$$

O equivalentemente:

$$x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - y_{r_i} x_r, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.11)$$

analizando el signo de  $y_{r_i}$ , se teine:

1.- Si  $y_{r_i} < 0$ , entonces  $x_{B_i}$  aumenta, una vez que ya sea positivo continuara positivo con mayor razón, eso quiere decir que  $x_{B_i}$  asociado puede crecer indefinidamente con el valor de  $x_r$ .

2.- Si  $y_{r_i} = 0$ , entonces el valor de  $x_{B_i}$  permanece inalterado.

3.- Si  $y_{r_i} > 0$ , entonces el valor de  $x_{B_i}$  decrece a medida que  $x_r$  crece. Mas  $x_{B_i}$  solo puede decrecer hasta alcanzar el valor cero. En este caso para satisfacer la condición de no negatividad se impone  $x_{B_i} \geq 0$ , esto es:

$$\bar{x}_{B_i} - y_{r_i}x_r \geq 0$$

$$\Rightarrow -y_{r_i}x_r \geq -\bar{x}_{B_i}$$

$$\Rightarrow y_{r_i}x_r \leq \bar{x}_{B_i} \Rightarrow$$

$$x_r \leq \frac{\bar{x}_{B_i}}{y_{r_i}}, \quad i / y_{r_i} > 0$$

Los valores de  $\frac{\bar{x}_{B_i}}{y_{r_i}}$  limitan el crecimiento de la variable  $x_r$ . Como la

nueva VB solo podrá crecer hasta que la primera componente  $x_{B_i}$  alcance el valor cero. Es necesario tomar el mínimo entre todos los

$\frac{\bar{x}_{B_i}}{y_{r_i}}$ ,  $y_{r_i} > 0$ . Si  $x_{B_s}$  fuera esta componente, entonces tenemos que:

$$x_{B_s} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{x}_{B_i}}{y_{r_i}} / y_{r_i} \geq 0 \right\} \quad (2.13)$$

En este caso  $x_{B_s}$  es la variable básica que dejará la base, tornándose variable no básica, pues es la primera en anularse con el crecimiento de  $x_r$ . La expresión (2.13) es conocida en la literatura como **test de la razón**.

**Observación 2.1** Si  $y_{r_i} \leq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $x_r$  puede crecer indefinidamente manteniendo la factibilidad de solución. Luego de la función objetivo  $z = \bar{z} - (z_r - c_r)$ , se sigue que si  $x_r$  crece indefinidamente, el valor de la función objetivo tenderá a menos infinito, lo que significa que el problema es ilimitado.

### **Nueva SBF – Actualización**

Por los criterios de entrada y de salida de Base, expuestos anteriormente, se sabe cómo determinar la variable que entra en la base,  $x_r$ , y la variable que sale de la base  $x_{B_s}$ . Se debe establecer ahora cómo se hace la actualización de los elementos que son utilizados en el Método Simplex, ó sea, las matrices  $B$  y  $N$ , y los vectores  $c_B$ ,  $c_N$ ,  $x_B$  y  $x_N$ . Esa actualización es hecha como sigue:

**B:** La nueva matriz  $B$  es obtenida a partir de la matriz  $B$  anterior, intercambiándose la columna asociada a la variable de salida  $x_{B_s}$ , o sea, la columna  $a^{B_s}$ , por la columna asociada a la variable de entrada  $x_r$ , o sea, columna  $a^r$ .

**N:** La nueva matriz  $N$  es obtenida a partir de la matriz  $N$  anterior, intercambiándose la columna  $a^r$  por la columna  $a^{B_s}$ .

**$c_B$  y  $c_N$ :** los vectores  $c_B$  y  $c_N$ , son actualizados según los cambios hechos en  $B$  y  $N$ , o sea, el coeficiente  $c_{B_s}$  es sustituido por el coeficiente  $c_r$  en  $c_B$ , y el coeficiente  $c_r$  de  $c_N$  es sustituido por el coeficiente  $c_{B_s}$ .

**$x_B$  y  $x_N$ :** los vectores  $x_B$  y  $x_N$  también son actualizados según los cambios hechos en  $B$  y  $N$ , o sea, la variable  $x_{B_s}$  es sustituida por la variable  $x_r$  en  $x_B$ , y  $x_r$  es substituida  $x_{B_s}$  en  $x_N$ .

Recuerde que el valor de  $\bar{x}_B$  continúa siendo dado por  $\bar{x}_B = B^{-1}b$ , donde  $B^{-1}$  es la inversa de la nueva matriz  $B$ , o preferiblemente a través de la solución del sistema lineal  $B\bar{x}_B = b$ . Del mismo modo el valor de  $\bar{z} = c'_B \bar{x}_B$  donde  $c'_B$  y  $\bar{x}_B$  están asociados a la nueva matriz  $B$ .

## El Algoritmo Simplex

La idea del Algoritmo Simplex es, a través de los criterios establecidos anteriormente, describir una secuencia de pasos para la obtención de una solución óptima de un PPL.

El algoritmo simplex puede ser escrito resumidamente en los siguientes pasos:

**1º Paso:** Determinar una solución básica factible inicial para el problema;

**2º paso:** Aplicar el test de optimalidad: Si la solución es óptima, parar. Caso contrario determinar una VNB  $x_r$  para entrar en la base;

**3º paso:** Aplicar el test de la razón para determinar cuál variable básica  $x_{B_s}$  debe salir de la base;

**4º paso:** Actualizar los elementos, obteniendo una nueva SBF y retornar al segundo paso.

Utilizando las ecuaciones que fueron desarrolladas anteriormente, se puede reescribir este algoritmo un poco más

detallado. Por lo tanto, la solución óptima de un problema general de PL del tipo (2,1) se puede encontrar aplicando este algoritmo.

**Observación 2.2** Tenga en cuenta que para la aplicación del Método Simplex, el problema debe estar en su forma estándar.

### **Algoritmo Simplex en forma explícita:**

#### **Inicialización**

Proporcionar  $m, n$ , la matriz  $A$ , los vectores  $b$  y  $c$  y una SBF inicial, para el problema, es decir,  $B, N, c_B, c_N, x_B, x_N$ ,

$$\bar{x}_B = B^{-1}b, \quad \bar{z} = c'_B \bar{x}_B \quad \text{y} \quad I_N.$$

Repita hasta que se detenga:

Prueba de optimalidad – entrada en la base:

- Calcular  $z_j - c_j = c'_B B^{-1} a^j - c_j, \quad j \in I_N$ ;
- Si  $z_j - c_j \leq 0, \quad \forall j \in I_N$ ; entonces la SBF actual y óptima;  
Si  $z_j - c_j < 0, \quad \forall j \in I_N$ , posee una solución óptima.

$\bar{x} = (\bar{x}_B | \bar{x}_N)'$ . **Parar.**

Si  $z_j - c_j = 0$ , para algún  $j \in I_N$ , el PPL posee soluciones óptimas alternativas. **Parar.**

De lo contrario, elegir  $x_r$  para entrar en la base de manera que  $z_r - c_r > 0$ . Un criterio que puede ser utilizado es elegir

$$z_r - c_r = \max_{j \in I_N} \{z_j - c_j / z_j - c_j > 0\};$$

### Test de la razón – salida de la base

Calcular  $y_r = B^{-1}a^r$  o equivalentemente  $By_r = a^r$ ;

Si  $y_r \leq 0$  entonces el PPL es ilimitado. Parar.

Si no  $x_{B_s} = \min_i \left\{ \frac{\bar{x}_{B_i}}{y_{r_i}} / y_{r_i} \geq 0 \right\}$ ,  $x_{B_s}$  es la VB que sale de la base;

### Actualización – nueva SBF:

- $x_r$  entra en la base;  $x_{B_s}$  sale de la base;
- Actualizar las matrices  $B$  y  $N$  y los vectores  $c_B$ ,  $c_N$ ,  $x_B$ ,  $x_N$
- Actualizar  $\bar{x}_B$  y  $\bar{z}$

Seguidamente se aplicará el algoritmo presentado para resolver el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 2.1.** Sea el PPL:

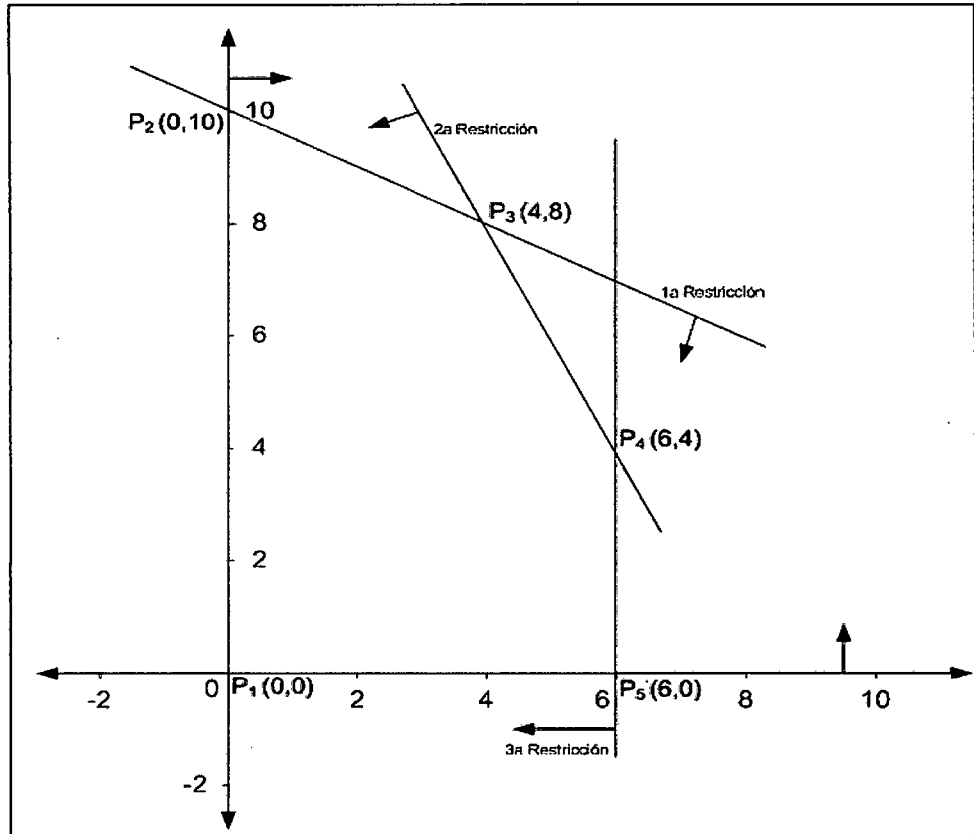
$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 \leq 6 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Se encontrará la solución a través del Método Simplex.

En el Capítulo I, Ejemplo 1.1, resuelto en forma gráfica, vimos que el problema tiene solución óptima en el punto (4, 8), con un valor óptimo  $z = 24$ . La región factible y la solución óptima se muestran, en la Figura 2.3.

Para iniciar la aplicación del Método Simplex, el problema tiene que ser colocado en forma estándar. A esto hay que añadir las variables de holgura  $x_3, x_4, x_5$ , Además, se presenta el Método Simplex para el problema de mínimo; por lo que transformamos la función objetivo, quedando el PPL del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 2x_2 \equiv \min(-z) = -2x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_1 + x_5 = 6 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.15)$$



**Figura 9.** Representação do conjunto de pontos factíveis e solução ótima do Exemplo 2.1.

Fuente: Trevisan (2010)

De esta maneira temos que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix} \quad c' = [-2 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Observando a matriz  $A$ , vemos uma SBF inicial óbvia, onde as VB são  $x_3$ ,  $x_4$  e  $x_5$  pois as colunas correspondentes a estas variáveis formam a matriz identidade.

Así,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [a^3 \ a^4 \ a^5]; \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [a^1 \ a^2]$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}; \quad \bar{x}_B = B^{-1}b = Ib = \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}; \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c'_B = [0 \ 0 \ 0]; \quad c'_N = [-2 \ -2]; \quad I_N = \{1, 2\}$$

La solución básica factible inicial es  $x'_B = [0 \ 0 \ 20 \ 16 \ 6]$ , que corresponde al punto  $P_1$  en la Figura 8, el valor de la función objetivo es dado por:

$$\bar{z} = c'_B \bar{x}_B = [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix} = 0$$

1ª Iteración

Prueba de optimalidad – entrada en la base:

$$\text{Calcular} \quad z_j - c_j = c'_B \underbrace{B^{-1}a^j}_{y_i} - c_j, \quad j = 1, 2.$$

$$\text{Para } j=1: \quad y_1 = B^{-1}a^1 = a^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 - c_1 = [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - (-2) = 2 > 0$$

( $x_1$  es candidata a entrar en la base).

Para  $j=2$ :  $y_2 = B^{-1}a^2 = a^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$z_2 - c_2 = [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (-2) = 2 > 0$$

( $x_2$  es candidata para entrar en la base)

Se puede escoger cualquiera de las dos variables  $x_1$  o  $x_2$  para entrar en la base. Se escoge  $x_2$ , esto es,  $x_r = x_2$ , ( $r = 2$ ).

### Test de la razón – salida de la base

La columna actualizada de  $x_2$  y  $y_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Vamos a

determinar cuál VB sale de la base cuando  $x_2$  entra en la base.

De las ecuaciones (2.9) y (2.10) tenemos que  $x_B = \bar{x}_B - y_2 x_2$ , que es necesario mantenerla no negativo o sea:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 20 - 2x_2 \\ 16 - x_2 \\ 6 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.16)$$

de donde se sigue que:

$$20 - 2x_2 \geq 0 \rightarrow x_2 \leq 10$$

$$16 - x_2 \geq 0 \rightarrow x_2 \leq 16$$

Esto significa que  $x_2$  solo podrá crecer hasta  $x_2 = 10$ , límite que es dado por la primera VB,  $x_3$ , que deberá entonces salir de la base. En este caso  $x_{B_s} = x_3$ .

**Observación 2.3.** El test de la razón también puede ser visto directamente de la expresión (2.13):

$$x_{B_s} = \min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{\bar{x}_{B_i}}{y_{2_i}} / y_{2_i} \geq 0 \right\} = \min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{20}{2}, \frac{16}{1} \right\} = 10$$

Dado por la primera VB, esto es  $x_{B_s} = x_3$  es la VB que sale de la base.

### Nueva SBF – Actualización

Tenemos que:

$$x_2 \text{ entra en la base, } x_2 = 10$$

$$x_3 \text{ sale de la base, } x_3 = 0$$

Colocando  $x_2 = 10$  en (2.16) obtenemos  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 6$ ,  $x_5 = 6$ .

Por tanto:

$$B = [a^2 \ a^4 \ a^5]; \quad N = [a^1 \ a^3]; \quad I_N = \{1, 3\};$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}; \quad \bar{x}_B = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix};$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad c'_B = [-2 \ 0 \ 0]; \quad c'_N = [-2 \ 0]$$

$$\bar{z} = c'_B \bar{x}_B = [-2 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = -20$$

La nueva SBF es  $\bar{x}' = [0 \ 10 \ 0 \ 6 \ 6]$ , que corresponde al punto  $P_2$ , en la Figura 2.2 se puede notar que el valor de la función objetivo pasó de cero a  $-20$ . En efecto:

$$(z_2 - c_2)x_2 = -2 \times 10 = -20.$$

## 2ª iteración

### **Test de Optimalidad – entrada en la base.**

Calcular  $z_j - c_j = c'_B y_j - c_j$ ,  $j = 1, 3$ .

Para  $j = 1$ :  $y_1 = B^{-1}a^1 \Leftrightarrow By_1 = a^1$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1_1} \\ y_{1_2} \\ y_{1_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 - c_1 = [-2 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} - (-2) = -1 + 2 = 1 > 0$$

( $x_2$ , es candidata a entrar en la base).

Para  $j = 3$ :  $y_3 = B^{-1}a^3 \Leftrightarrow By_3 = a^3$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{3_1} \\ y_{3_2} \\ y_{3_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_3 - c_3 = [-2 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1 = -1 < 0$$

( $x_3$  no es candidata a entrar en la base).

En este caso la única candidata a entrar en la base es  $x_1$ , esto es:

$$x_r = x_1 \ (r = 1).$$

### Test de la razón – salida de la base

La columna actualizada de  $x_1$  es  $y_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Vamos a determinar

cuál variable básica sale de la base, cuando  $x_1$  entra en la base, utilizando directamente la expresión (2.13), donde se tiene:

$$x_{B_s} = \min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{\bar{x}_{B_i}}{y_{1_i}} / y_{1_i} > 0 \right\} = \min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{10}{1/2}, \frac{6}{3/2}, \frac{6}{1} \right\} = 4$$

Como 4 está asociado a la segunda variable básica o sea, está asociada a  $x_4$ , se tiene que  $x_4$  sale de la base, luego  $x_{B_s} = x_4$ .

### Nueva SBF – actualización

Tenemos que:

$x_2$  entra en la base,  $x_1 = 4$ .

$x_4$  sale de la base,  $x_4 = 0$ .

Por tanto:

$$B = [a^2 \ a^1 \ a^5]; \quad N = [a^4 \ a^3]; \quad I_N = \{3, 4\}; \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}; \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_B = B^{-1}b \Leftrightarrow B\bar{x}_B = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{x}_B = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} c'_B$$

$$= [-2 \ -2 \ 0]; \quad c'_N = [0 \ 0]$$

$$\bar{z} = c'_B \bar{x}_B = [-2 \ -2 \ 0] \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = -24$$

La nueva SBF es  $\bar{x}' = [4 \ 8 \ 0 \ 0 \ 2]$ , que corresponde al punto  $P_3$ , en la Figura 8 se observa que el valor de la función objetivo disminuye de  $-20$  a  $-24$ .

### 3ª iteración

#### Test de optimalidad – entrada en la base

Calcular  $z_j - c_j = c'_B y_j - c_j$ ,  $j = 3, 4$ .

Para  $j = 3$ :  $y_3 = B^{-1}a^3 \Leftrightarrow By_3 = a^3$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{3_1} \\ y_{3_2} \\ y_{3_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y_3 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$z_3 - c_3 = [-2 \quad -2 \quad 0] \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} - 0 = \frac{-4}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} < 0$$

( $x_3$  no es candidata a entrar en la base).

Para  $j = 3$ :  $y_4 = B^{-1}a^4 \Leftrightarrow By_4 = a^4$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{4_1} \\ y_{4_2} \\ y_{4_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y_3 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

$$z_4 - c_4 = [-2 \quad -2 \quad 0] \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} - 0 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} < 0$$

( $x_4$ , no es candidata a entrar en la base).

Como  $z_j - c_j < 0$  para  $j = 3, 4$ , se tiene que  $\bar{x}' = [4 \ 8 \ 0 \ 0 \ 2]$

es solución óptima para el PPL, siendo el valor óptimo dado por

$-(-24) = 24$ . Este valor corresponde al mismo valor encontrado gráficamente en el Capítulo I.

Como se puede ver, el algoritmo simplex en el primer paso necesita darle una SBF inicial. En algunos problemas, tal SBF

inicial se determina fácilmente. Por ejemplo cuando existen  $m$  columnas de la matriz  $A$  formando una matriz identidad ( $m \times m$ ), que se toma como una matriz de base  $B$ . En algunos problemas tal situación se presenta trivialmente con la inclusión de las variables de holgura. Mientras que en otros casos no siempre ocurre, lo que es peor todavía en algunos problemas puede no haber solución factible.

Sin embargo, hay un método eficiente para determinar una SBF inicial, conocido como el Método Simplex de dos fases. Este método consiste en aplicar el mismo Método Simplex a un PPL llamado “problema auxiliar”, que se trata de un problema de minimización montado a partir del problema original, con el aumento de variables llamadas variables artificiales (positivas).

La solución óptima del problema auxiliar proporciona una SBF inicial para el problema original, o sino, muestra si el problema es un problema inviable. De tenerla la SBF inicial, se puede resolver el problema original mediante la aplicación del Método Simplex discutido anteriormente.

Como el objetivo es presentar el Método Simplex para su posterior aplicación al problema de la separación de los puntos que

se discuten en el siguiente capítulo, y para tal discusión no se necesita el método de las dos fases, y optamos por no presentarlo. Pero el lector interesado puede encontrar este método en varias referencias, tales como (Bazaraa, Jarvis, Sherali, Talavera, & Velázquez, 1998), (Hillier & Lieberman, 2002) y (Mansfield & Rosales, 2000).

#### **2.2.4. Separación de Puntos Mediante Programación Lineal**

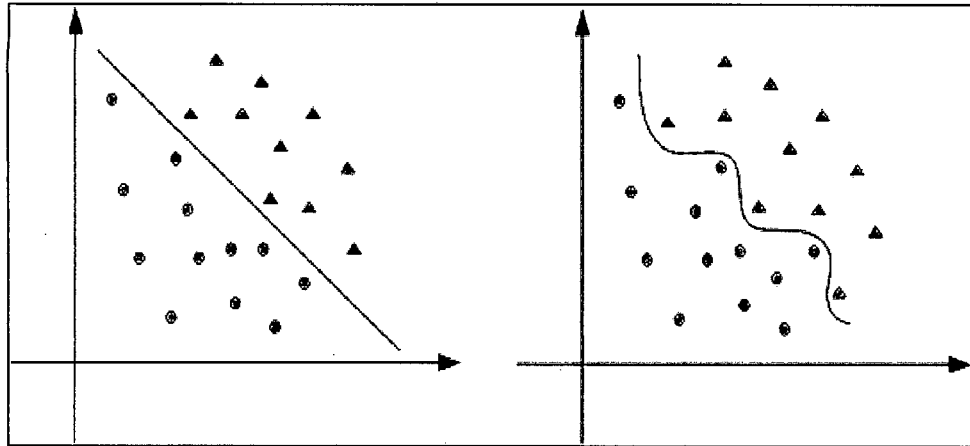
El objetivo final de este capítulo es discutir criterios de separación de puntos, a través de programación lineal, definir un problema de programación lineal, cuya solución sea capaz de separar linealmente dos conjuntos de puntos, en caso sean disjuntos, y proporcionar una separación lineal que minimice la media de los errores de clasificación en el caso que los conjuntos no sean disjuntos.

#### **Introducción y definiciones preliminares**

Entiéndase como “**padrón**” una muestra confiable de rasgos, hechos, tendencias o cualquier otro tipo de características observables de un determinado objeto o ser vivo. Es decir es un vector que tiene como componentes los códigos de las

características de los elementos de un conjunto. Una separación de padrones no es más que la obtención de un criterio para la distinción entre los elementos de un conjunto en dos subconjuntos de padrones.

Usualmente, considerando una separación matemática, los “padrones” serán representados por puntos en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Una manera matemática de obtener una separación es construir un hiperplano o superficie no lineal de  $\mathbb{R}^n$  de modo que cada subconjunto de “padrones” se encuentra en un lado del hiperplano o superficie. Así pues, suponiendo que se tenga dos conjuntos de “padrones”  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$ , donde  $\bar{E}$  está constituido por  $m$  padrones y el conjunto  $\bar{F}$  formado por  $k$  padrones. Cada padrón es constituido de  $n$  observaciones (sucesos, resultados, actos, tendencias; en resumen características empadronadas) que son representadas por  $n$  escalares reales. Separar estos conjuntos por un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$ , es encontrar tal superficie de forma que los  $m$  puntos que representan a los padrones del conjunto  $\bar{E}$  esten de un lado de tal hiperplano y los  $k$  puntos que representan a los padrones del conjunto  $\bar{F}$  esten del otro lado de este hiperplano. Naturalmente no todos los conjuntos son linealmente separables, como se puede ver en la Figura 10:



**Figura 10:** Representación de un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^2$  linealmente separables y otro no linealmente separables.

**Fuente:** Elaboración propia.

Como usualmente los padrones son representados por puntos de  $\mathbb{R}^n$ , podemos formar con estos conjuntos de padrones una matriz no vacía de números reales, llamada matriz de padrones. Cada línea de esta matriz define un único padrón compuesto de  $n$  números reales que son las representaciones de las observaciones. Siendo así los  $m$  puntos que representan al conjunto de padrones de  $\bar{E}$  son representados por una matriz  $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , donde cada una de las  $m$  líneas son los  $m$  puntos del conjunto  $\bar{E}$ . De modo análogo se pueden representar los  $k$  padrones de  $\bar{F}$  por una matriz  $F \in \mathbb{R}^{k \times n}$ , donde cada una de las  $k$  líneas son los  $k$  puntos del conjunto  $\bar{F}$ . Llámese  $a_{ij}$  a los elementos

de  $E$  y  $b_{ij}$  a los elementos de la matriz  $F$ . Como puede verse en el ejemplo siguiente de dos conjuntos de padrones.

**Ejemplo 2.2.** Según la Organización Mundial de la Salud (OMS), el Índice de Masa Corporal (IMC), que relaciona el peso de una persona con su altura al cuadrado, indica la cantidad aproximada de gordura general en el cuerpo.

Tabla 01:

Muestra el índice de masa corporal de 13 personas, en base a lo cual se indica, en la última columna sobrepeso o normal.

Altura	Peso	IMC	Clasificación
170	73	25,25	Sobrepeso
171	75	25,64	Sobrepeso
160	71	27,71	Sobrepeso
165	70	25,71	Sobrepeso
169	75	26,25	Sobrepeso
162	67	25,52	Sobrepeso
168	71	25,15	Sobrepeso
164	62	23,05	Normal
162	65	24,76	Normal
168	65	23,03	Normal
170	69	23,87	Normal
166	67	24,31	Normal
172	71	23,99	Normal

Fuente: Trevisan (2010)

Actualmente, los valores considerados normales que van desde 18,5 hasta  $24,9 \text{ kg} / \text{m}^2$  para los hombres. A partir de  $25 \text{ kg} / \text{m}^2$ , se considera que tiene sobrepeso y por encima de 30 es obesidad. Así, de acuerdo con el IMC se clasifica un grupo de hombres en dos subgrupos, a saber, normal y sobrepeso, conforme la Tabla 01.

En este caso, siendo el IMC el factor referente a la clasificación de que un hombre esté con sobrepeso o normal, podemos considerar sobrepeso como un padrón y normal como otro padrón y a partir de las observaciones de altura y peso definir las matrices de padrones  $E$  y  $F$  como sigue:

$$E = \begin{bmatrix} 170 & 73 \\ 171 & 75 \\ 160 & 71 \\ 165 & 70 \\ 169 & 75 \\ 162 & 67 \\ 168 & 71 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 164 & 62 \\ 162 & 65 \\ 168 & 65 \\ 170 & 69 \\ 166 & 67 \\ 172 & 71 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo se tiene solamente dos características, altura y peso  $n = 2$ ;  $m = 7$  (cantidad de puntos en  $E$ ) y  $k = 6$  (cantidad de puntos en  $F$ ).

### 2.2.5. Criterio de Separabilidad Lineal

El problema de separación de dos conjuntos de padrones consiste en determinar un único hiperplano

$$x'w - \gamma = 0 \quad (2.17)$$

donde  $w$  es un vector de  $\mathbb{R}^n$  normal al hiperplano y  $\gamma$  es un escalar real, tal que:

$$Ew - e\gamma > 0 \quad (2.18)$$

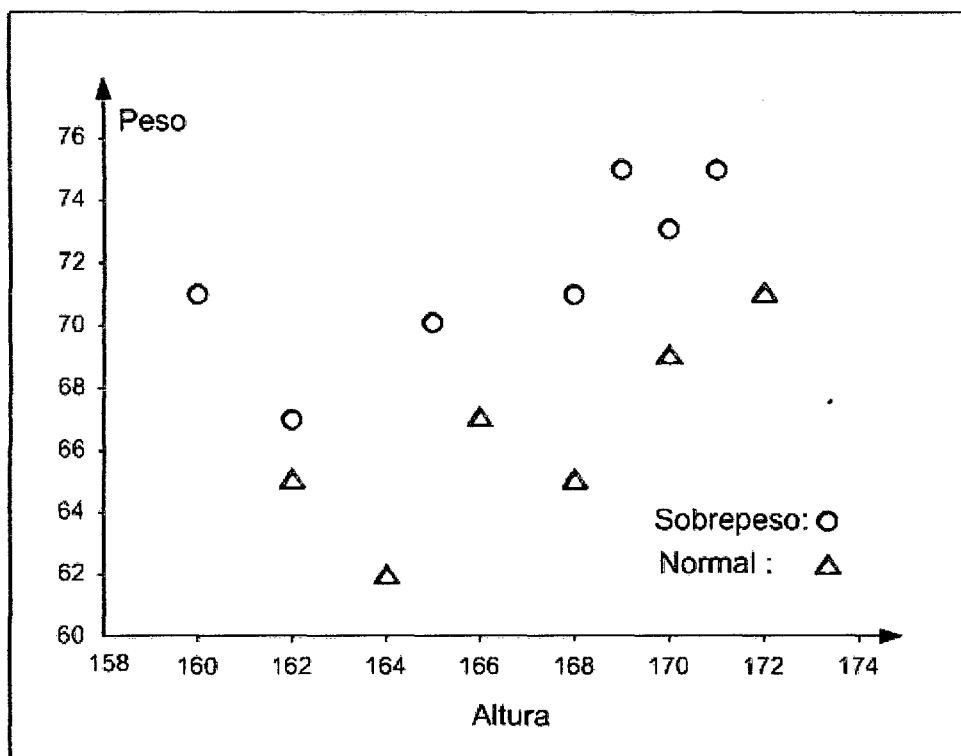
$$\text{y} \quad Fw - e\gamma < 0 \quad (2.19)$$

donde  $e$  es un vector de unos de dimensión apropiada, o sea de dimensión  $m$  en (2.18) y dimensión  $k$  en (2.19). Ahora se puede definir la separación de dos conjuntos de padrones.

**Definición 2.10** (separabilidad lineal) Sean los conjuntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  representados por las matrices  $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $F \in \mathbb{R}^{k \times n}$  respectivamente, se dice que estos conjuntos son linealmente separables si, y solamente si, existe  $w \in \mathbb{R}^n$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que (2.18) y (2.19) se satisfagan.

Si no existen  $w$  y  $\gamma$  que satisfagan la definición anterior, entonces se dice que  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  son linealmente inseparables.

En el Ejemplo 2.2 es fácil ver gráficamente que los padrones sobrepeso y normal son linealmente separables, pues es posible pasar una infinidad de rectas que separan completamente los conjuntos de padrones que representan las observaciones de peso y altura.



**Figura 11:** Representación en  $\mathbb{R}^2$  de los conjuntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  del Ejemplo 2.2 donde se aprecia rápidamente su separabilidad lineal.

**Fuente:** Elaboración propia.

Sin embargo, en la práctica, los conjuntos de padrones generalmente tienen dimensión mayor que 3, lo que excluye la posibilidad de ver gráficamente la separabilidad o no de los conjuntos. Por tanto, es interesante determinar un método para evaluar si dos conjuntos de padrones son, o no son, linealmente separables. Para establecer tal criterio se establece el siguiente lema.

**Lema 2.1** Los conjuntos de padrones  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  representados por las matrices  $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $F \in \mathbb{R}^{k \times n}$  respectivamente son linealmente separables si, y solamente si, existen  $c \in \mathbb{R}^n$  y constantes  $\alpha$  y  $\beta$  tal que

$$Ec - e\alpha \geq 0 \quad (2.20)$$

$$-Fc + e\beta \geq 0 \quad (2.21)$$

$$\alpha - \beta > 0 \quad (2.22)$$

$$e \geq c \geq -e \quad (2.23)$$

donde “ $e$ ” es un vector columna de unos de dimensión  $m$  en (2.20),  $k$  en (2.21) y  $n$  en (2.23).

**Demostración:**

( $\Rightarrow$ ) Si existe  $c$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  satisfaciendo las condiciones (2.20) al (2.23),

entonces tomando  $w = c$  y  $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$  tenemos (2.18) y (2.19)

satisfechos y con esto  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  son linealmente separables.

( $\Leftarrow$ ) Inversamente si  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  son linealmente separables, entonces existen  $w$  y  $\gamma$  que satisfacen (2.18) y (2.19). Nótese que al menos una componente de  $w$  debe ser diferente de cero, porque si  $w = 0$ , (2.18) y (2.19) nos llevarían a  $-\gamma > 0$  y  $-\gamma < 0$ , que es obviamente un absurdo. Sea  $\delta = \max_{i=1, \dots, n} |w_i|$  luego haciendo la división de (2.18) y (2.19) por  $\delta$  obtenemos:

$$(Ew/\delta) - e\gamma/\delta > 0 \quad (2.24)$$

$$(Fw/\delta) - e\gamma/\delta < 0 \quad (2.25)$$

$$\text{Nótese que en este caso vale la relación } e \geq w/\delta \geq -e \quad (2.26)$$

Definamos ahora

$$\alpha = \min_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n (a_{ij} w_j / \delta) \quad (2.27)$$

$$\beta = \max_{i=1, \dots, k} \sum_{j=1}^n (b_{ij} w_j / \delta) \quad (2.28)$$

$$c = \frac{w}{\delta} \quad (2.29)$$

Así, de (2.24), (2.25), (2.27) y (2.28) se sigue que

$$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha - \beta > 0 \quad (2.30)$$

Del mismo modo, sigue de (2.24) al (2.29) que

$$e \geq c \geq -e \quad (2.31)$$

$$Ec - e\alpha = (Ew/\delta) - e \min_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n (a_{ij} w_j/\delta) \geq 0 \quad (2.32)$$

$$Fc - e\beta = (Ew/\delta) - e \max_{i=1, \dots, k} \sum_{j=1}^n (b_{ij} w_j/\delta) \leq 0 \quad (2.33)$$

Por tanto las condiciones (2.32), (2.33), (2.30) y (2.31) son exactamente las condiciones (2.20) a (2.23).

A partir del lema anterior (Mangasarian, 1965), establece un criterio para decir si dos conjuntos de padrones son linealmente separables utilizando un Problema de Programación Lineal que tiene como función objetivo  $(\alpha - \beta)$  y como restricciones las desigualdades (2.20), (2.21) y (2.23). Esto queda claro cuando se mira el siguiente teorema.

**Teorema 2.7. (Condición de Separabilidad Lineal).** Una condición necesaria y suficiente para separabilidad lineal de los padrones de los conjuntos  $E$  y  $F$  es:

$$\theta(E, F) > 0 \quad (2.34)$$

Donde  $\theta(E, F)$  es la solución del problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha, \beta, c} (\alpha - \beta) \\ & \text{s. a. } \begin{cases} Ec - e\alpha \geq 0 \\ -Fc + e\beta \geq 0 \\ e \geq c \geq -e \end{cases} \end{aligned} \quad (2.35)$$

**Demostración:**

Si  $\theta(E, F) > 0$ , entonces (2.20) hasta (2.23) son satisfechos por la solución del Problema de Programación Lineal (2.35), como consecuencia de esto es que  $E$  y  $F$  son linealmente separables. Inversamente si  $E$  y  $F$  son linealmente separables, entonces existe algún  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $c$  satisfaciendo (2.20) hasta (2.23). Luego  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $c$  forman una solución factible para el PPL (2.35) y por tanto se tiene  $\alpha - \beta > 0$  de donde se sigue que  $\theta(E, F) > 0$ . Del Teorema 2.7 se desprende el siguiente corolario.

**Corolario 2.1** (Condición de Inseparabilidad Lineal). Una condición necesaria y suficiente para inseparabilidad lineal de los conjuntos de padrones de  $E$  y  $F$  es que  $\theta(E, F) = 0$

**Demostración:** La prueba sigue inmediatamente del Teorema 2.7 por la observación de que  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  y  $c = 0$  forman una solución factible del PPL (2.35) y en este caso  $\theta(E, F) = 0$ .

Se puede notar que el problema (2.35) tiene dos aspectos importantes que merecen ser resaltados, conforme el propio (Mangasarian et al., 1995), que dice:

1. Este problema siempre tiene una solución factible  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  y  $c = 0$ .
2. Sus soluciones están limitados superiormente por:

$$\max_{i \in \{1, \dots, m\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \max_{i \in \{1, \dots, k\}} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|$$

En la primera parte, menciona que el conjunto de soluciones factibles del PPL no es vacío, mientras que en la segunda parte se asegura de que nunca el PPL sea ilimitado, y así, entre las cuatro posibles situaciones que puedan surgir en la solución de un PPL, como se muestra en 1.3.4 del Capítulo I, este PPL solo admite dos situaciones, a saber, posee una única solución o tiene infinitas soluciones.

A continuación se muestra una aplicación del Teorema 2.7.

**Ejemplo 2.3.** Aplicando el Teorema 2.7 al Ejemplo 2.2 para saber si los conjuntos de patrones son linealmente separables o no, basta resolver el problema de programación lineal (2.35) donde:

$$E = \begin{bmatrix} 170 & 73 \\ 171 & 75 \\ 160 & 71 \\ 165 & 70 \\ 169 & 75 \\ 162 & 67 \\ 168 & 71 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 164 & 62 \\ 162 & 65 \\ 168 & 65 \\ 170 & 69 \\ 166 & 67 \\ 172 & 71 \end{bmatrix}$$

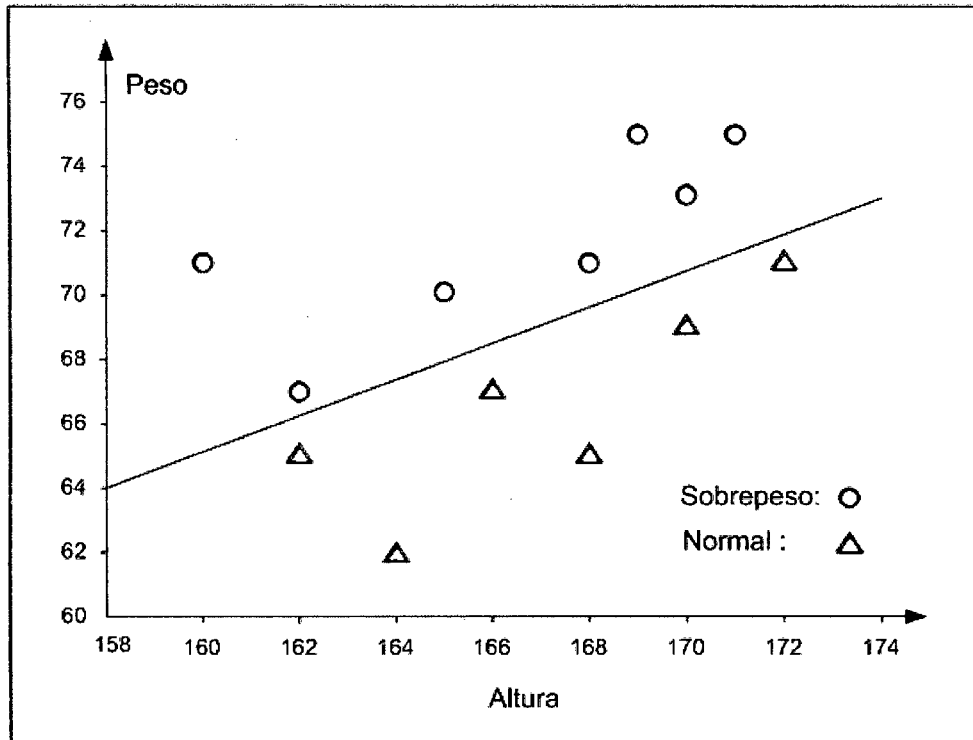
Utilizando el software MATLAB, con la opción de utilización del Método Simplex, la solución óptima presentada es:

$$w' = (-0, 67; 1), \alpha = -41 \text{ y } \beta = -43.$$

Luego el valor óptimo de la función objetivo es 2, por lo tanto,  $E$  y  $F$  son linealmente separables, como ya hemos verificado visualmente. Y en este caso, la recta cuya ecuación es

$$-0,67x_1 + x_2 = -42$$

(donde  $\frac{\alpha + \beta}{2} = -42$ ) separa linealmente estos dos conjuntos, como se muestra en la Figura 12. Se puede notar también que la solución óptima no es única, es decir, hay otras líneas que separan estos dos conjuntos.



**Figura 12:** Representación en  $\mathbb{R}^2$  de los conjuntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  del Ejemplo 2.2 juntamente con la recta separadora obtenida a partir de la aplicación del Teorema 2.7.

Fuente: Trevisan (2010)

Con lo anteriormente expuesto se puede identificar si dos conjuntos de padrones son linealmente separables o no, analizando la solución de un Problemas de Programación Lineal. Por otra parte, si ambos conjuntos fueran linealmente separables, a partir de la solución del problema de programación lineal (2.35) se puede establecer un hiperplano que separa linealmente estos conjuntos. Sin embargo, en la mayoría de los problemas de situaciones

reales, los conjuntos de padrones no son linealmente separables. En este caso, es necesario establecer un criterio no sólo de identificar cuando dos conjuntos son o no linealmente separables sino también cuando no lo son, lo ideal sería conseguir subsidios para generar un hiperplano que minimice la media de las violaciones de los puntos pertenecientes a cada conjunto. En este caso, tenemos una separación parcial de los conjuntos.

#### **2.2.6. Formulación del Problema de Programación lineal para la Separación de Puntos**

Para resolver problemas de separación de padrones, (Bennett & Mangasarian, 1992) proponen resolver un único Problema de Programación Lineal, cuya formulación es superior a las formulaciones anteriores, y con las siguientes propiedades:

1. Si los conjuntos de puntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  fueran disjuntos, a partir de la solución del Problema de Programación Lineal se genera hiperplano que separa estrictamente estos conjuntos.
2. Si los conjuntos de puntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  no fueran disjuntos, a partir de la solución del Problema de Programación Lineal se

genera un hiperplano que minimiza el promedio de los errores de clasificación de los puntos.

3. No hay necesidad de imponer restricciones al problema para incluir cualquier caso particular a ser considerado.

Nuevamente, si los puntos de los conjuntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  de padrones están representados por las matrices  $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $F \in \mathbb{R}^{k \times n}$  respectivamente, el Problema de Programación Lineal propuesto por (Bennett & Mangasarian, 1992) y (Mangasarian, 1965), es dado por

$$\min_{w, \gamma, y, z} \frac{1}{m} e' y + \frac{1}{k} e' z$$

$$s. a. \begin{cases} Ew + y - e\gamma \geq e \\ -Fw + z + e\gamma \geq e \\ y \geq 0, \quad z \geq 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Donde  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $z \in \mathbb{R}^k$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$ , y el vector  $e$ , es un vector de unos de dimensión apropiada.

En este caso  $w'x = \gamma$  es el hiperplano separador citado en las propiedades anteriores donde  $w$  es un vector normal al hiperplano de separación y el número real  $\gamma$  es responsable de la localización del hiperplano.

El PPL (2.36) es vaciado en un problema de optimización con norma. Antes de presentar este problema, definamos dos elementos componentes importantes.

**Definición 2.11.** Si  $x$  es un vector de  $\mathbb{R}^n$  entonces vamos a definir:

1.  $(x_i)_+ = \max_{i=1, \dots, n} \{x_i, 0\}$ .
2.  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ .

Ahora si podemos enunciar el problema de optimización con norma escribiendo el problema de minimización que sigue:

$$\min_{w, \gamma} \frac{1}{m} \|(-Ew + e\gamma + e)_+\|_1 + \frac{1}{k} \|(Fw - e\gamma + e)_+\|_1 \quad (2.37)$$

La justificación para la equivalencia del problema de optimización (2.37) con el PPL (2.36) sigue inmediatamente del lema que vemos a continuación, el cual relaciona el problema de minimización con norma a un problema de minimización restringida desprovisto de norma y abultado de ecuaciones.

**Lema 2.2.** Sea  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  y sea  $S$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Los problemas:

$$\min_{x \in S} \|g(x)_+\|_1 + \|h(x)_+\|_1 \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} & \min_{x \in S} e'y + e'z \\ & \text{s. a } \begin{cases} y \geq g(x) \\ z \geq h(x) \\ y \geq 0, z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.39)$$

tienen soluciones idénticas.

**Demostración:**

Como  $g(x)_+ \geq g(x)$  y  $h(x)_+ \geq h(x)$ , se puede establecer la equivalencia observando que para el problema (2.39) los valores óptimos de  $y, z$  y  $x$  son dados por las igualdades  $y = g(x)_+$  y  $z = h(x)_+$ .

Utilizando el Lema (2.2) (Bennett & Mangasarian, 1992), pueden afirmar la equivalencia entre el problema de optimización con norma (2.37) y el problema de programación lineal (2.36) tomando  $\lambda_1 = \frac{1}{m}$  y  $\lambda_2 = \frac{1}{k}$  en la proposición que sigue.

**Proposición 2.4.** (Bennett & Mangasarian, 1992). Para  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 > 0$ , el problema de minimización

$$\min_{w, \gamma} \lambda_1 \| (-Ew + e\gamma + e)_+ \|_1 + \lambda_2 \| (Fw - e\gamma + e)_+ \|_1 \quad (2.40)$$

es equivalente al Problema de Programación Lineal

$$\min_{w, \gamma, y, z} \lambda_1 e' y + \lambda_2 e' z$$

$$s. a \begin{cases} Ew - e\gamma + y \geq e \\ -Fw + e\gamma + z \geq e \\ y \geq 0, z \geq 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

**Demostración:**

Basta tomar  $g(x) = -Ew + e\gamma + e$  y  $h(x) = Fw - e\gamma + e$  en el lema para obtener la equivalencia necesaria.

La próxima proposición nos presenta una nueva definición para separabilidad lineal considerando un caso especial.

**Proposición 2.5.** Si  $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $F \in \mathbb{R}^{k \times n}$  representan punto de los conjuntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  respectivamente, entonces  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  son linealmente separables si, y solamente si, existe  $w \in \mathbb{R}^n$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que

$$Ew \geq e\gamma + e \quad (2.42)$$

$$Fw \leq e\gamma - e$$

**Demostración:** ( $\Rightarrow$ ) Suponga que  $E$  y  $F$  son linealmente separables y sea  $E_i$  la fila  $i$  de  $E$  y  $F_i$  la fila  $i$  de  $F$ . Entonces de (2.18) y de (2.19) existen  $v \in \mathbb{R}^n$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que  $E_i v > e\gamma + e$  y  $F_i v < \gamma$ .

Si se coloca:

$$\eta = \min_{1 \leq i \leq m} E_i v - \max_{1 \leq i \leq k} F_i v$$

$$w = \frac{2v}{\eta} \quad y$$

$$\gamma = \frac{1}{\eta} \left( \min_{1 \leq i \leq m} E_i v + \max_{1 \leq i \leq k} F_i v \right)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq i \leq m} E_i w &= \left( \frac{2}{\eta} \right) \left( \min_{1 \leq i \leq m} E_i v \right) = \left( \frac{1}{\eta} \right) \left( \min_{1 \leq i \leq m} E_i v + \min_{1 \leq i \leq m} E_i v \right) \\ &= \underbrace{\left( \frac{1}{\eta} \right) \left( \min_{1 \leq i \leq m} E_i v + \max_{1 \leq i \leq k} F_i v \right)}_{\gamma} + \underbrace{\left( \frac{1}{\eta} \right) \left( \min_{1 \leq i \leq m} E_i v + \max_{1 \leq i \leq k} F_i v \right)}_{\eta} = \gamma + 1 \end{aligned}$$

De modo análogo se tiene que

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq k} F_i w &= \left( \frac{2}{\eta} \right) \left( \max_{1 \leq i \leq k} F_i v \right) = \left( \frac{1}{\eta} \right) \max_{1 \leq i \leq k} F_i v + \max_{1 \leq i \leq k} F_i v \\ &= \underbrace{\left( \frac{1}{\eta} \right) \left( \max_{1 \leq i \leq k} F_i v + \min_{1 \leq i \leq m} E_i v \right)}_{\gamma} + \underbrace{\left( \frac{1}{\eta} \right) \left( \max_{1 \leq i \leq k} F_i v + \min_{1 \leq i \leq m} E_i v \right)}_{\eta} = \gamma - 1 \end{aligned}$$

De modo que

$$E_i w \geq \gamma + 1$$

y

$$F_i w \leq \gamma - 1$$

de donde sigue que:

$$E w \geq e \gamma + e$$

y

$$F w \leq e \gamma - e$$

( $\Leftarrow$ ) suponiendo que  $E w \geq e \gamma + e$  y  $F w \leq e \gamma - e$ ,

como

$$E w - e \gamma > E w - e \gamma - e \geq 0$$

entonces

$$E w - e \gamma > 0$$

y

$$F w - e \gamma < F w - e \gamma + e \leq 0$$

entonces

$$F w - e \gamma < 0.$$

Siendo así el hiperplano  $w'x = \gamma$  separa linealmente los conjuntos  $E$  y  $F$ .

En las condiciones de esta proposición los conjuntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  son linealmente separables si existe un hiperplano que separa estos conjuntos y esta por lo menos a una unidad del punto más próximo de  $\bar{E}$  y por lo menos una unidad más próxima de  $\bar{F}$ .

Esta distancia de una unidad se da por la suma de “unos” (vector “ $e$ ”) a los términos  $-Ew + e\gamma$  y  $Fw - e\gamma$ .

Aprovechando la Proposición (2.5), es posible establecer que los conjuntos de padrones  $E$  y  $F$  son linealmente separables solamente si el valor mínimo de (2.37) es 0, más si eso sucede, la solución  $w = 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  no puede ser óptima como es mostrado en el teorema siguiente.

**Teorema 2.8.** (Bennett & Mangasarian, 1992) Los conjuntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  representados por las matrices  $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $F \in \mathbb{R}^{k \times n}$  respectivamente son linealmente separables si solamente si el valor mínimo de (2.37) es 0, el caso en que la solución  $w = 0$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$  no puede ser óptima.

**Demostración:**

Basta notar que por la definición (2.18), el mínimo de (2.37) es 0 si, y solamente si,  $-Ew + e\gamma + e \leq 0$  y  $Fw - e\gamma + e \leq 0$ , el que equivale a la separabilidad lineal de  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$ . Para ver que  $Ew = 0$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$  no puede ser óptima para (2.37) basta notar que si  $w = 0$  en (2.37) obtenemos

$$\min_{\gamma} (1 + \gamma)_+ + (1 - \gamma)_+ = 2 > 0,$$

el que obviamente contradice el hecho requerido de que el mínimo de (2.37) es 0 para la separación lineal de estos conjuntos de este resultado sigue inmediatamente el importante corolario.

**Corolario 2.2** Los conjuntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  representados por las matrices  $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $F \in \mathbb{R}^{k \times n}$  respectivamente, son linealmente separables si, y solamente si, la solución del problema de programación lineal (2.36) es 0.

**Demostración:** Sea  $(\bar{w}, \bar{\gamma}, \bar{y}, \bar{z})$  la solución óptima de (2.36). En este caso la función objetivo de (2.36) es cero si, y solamente si,  $\bar{y} = 0$  y  $\bar{z} = 0$ , de donde sigue que  $Ew - e\gamma - e \geq 0$  y  $-Fw + e\gamma - e \geq 0$ , implicando así en la separabilidad lineal de  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$ .

El Teorema 2.8 y el corolario 2.2 establecen un criterio para decir si los conjuntos de puntos son linealmente separables de acuerdo con la solución del PPL (2.36), ya que cuando obtuviéramos como solución el valor óptimo de la función objetivo igual a 0 esto es, los vectores  $y = z = 0$ , los conjuntos serán linealmente separables, con  $w \neq 0$ .

Los mismos también nos dicen que el PPL (2.36) siempre va generar un hiperplano de separación  $w'x = \gamma$  para los conjuntos linealmente separables  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$ , satisfaciendo así la primera propiedad enunciada al inicio de ésta sesión. Hecho importante de mencionar (Bennett, 1992) es que la constante 1 sumada en cada  $-E_i w + \gamma$  y en cada  $F_i w - \gamma$  asegura que ningún punto en ninguna de las clases de padrones estará directamente sobre el plano de separación, esto para el caso linealmente separable.

Para los conjuntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  no linealmente separables el problema de optimización (2.37) va generar un hiperplano de separación  $w'x = \gamma$  que minimiza las medias de las violaciones de los puntos  $\bar{E}$  que están del "lado errado" del hiperplano  $w'x = \gamma + 1$  y de los puntos de  $\bar{F}$  que están del "lado errado" del hiperplano  $w'x = \gamma - 1$ . La constante 1 que da la localización de los planos

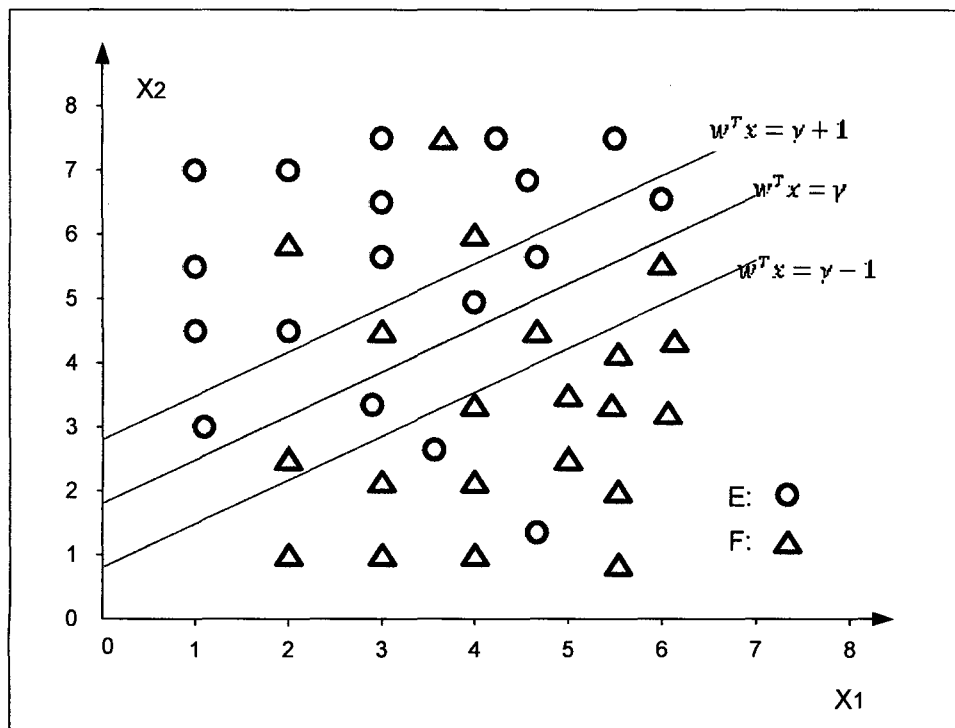
$w'x = \gamma + 1$  y  $w'x = \gamma - 1$  puede ser simplemente considerada como un factor positivo cualquiera, y por tanto, puede ser sustituida por cualquier  $\xi > 0$ . Así el PPL (2.36) irá a generar luego un hiperplano  $w'x = \gamma$  que minimiza los errores de clasificación para cualquier  $\xi > 0$ .

Es más fácil entender el porqué de la generación de un hiperplano que minimice las medias de las violaciones de los puntos, para el caso linealmente inseparable, a partir de la solución del PPL (2.36), cuando buscamos para (2.37) que también puede ser escrito como

$$\min_{w,\gamma} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (-E_i w + \gamma + 1)_+ + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (F_j w - \gamma + 1)_+ \right\} \quad (2.43)$$

De esta última expresión vemos que cuando  $-E_i w + \gamma + 1 \leq 0$  para algún  $i = 1, 2, \dots, m$ , o sea, cuando el punto representado por  $E_i$  está del lado cierto del hiperplano  $w'x = \gamma + 1$  irá a contribuir con cero en la primera parte de la sumatoria anterior. Cuando  $-E_i w + \gamma + 1 \geq 0$  para algún  $i = 1, 2, \dots, m$ , caso en que el punto representado por  $E_i$  está del lado errado del hiperplano  $w'x = \gamma + 1$ , el término correspondiente a este  $i$ , irá a contribuir con un valor positivo en la primera parte de la sumatoria anterior.

Lo mismo ocurre para los puntos del conjunto  $\bar{F}$ . Las contribuciones positivas formarán la media de las violaciones de los puntos que están del lado errado del hiperplano, conforme propone la segunda propiedad de (2.36) al inicio de la sección.



**Figura 13:** Representación de dos conjuntos linealmente inseparables. (En esta figura usamos  $w^T$  en vez de  $w'$ ).

**Fuente:** Elaboración propia.

En este caso lo que ocurre es que los valores de  $y, z \neq 0$  representan las violaciones y así mismo generan un plano. La

Figura 13 ayuda a ilustrar mejor tal situación para el caso linealmente inseparables en  $\mathbb{R}^2$ .

En formulaciones anteriores del PPL (2.36) había la necesidad de colocar restricciones extras para garantizar la obtención de  $w \neq 0$  en la solución. El PPL propuesto por Smith citado en (Bennett & Mangasarian, 1992), propone los pesos  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{m+k}$ , y obtenemos algunas veces  $w = 0$  como solución. Mientras tanto los problemas basados en situaciones reales generalmente poseen conjuntos linealmente inseparables, y la obtención de una solución con  $w = 0$ , no nos permite trazar hiperplanos.

El Teorema 2.9 garantiza, que cuando  $w = 0$  es solución óptima del PPL (2.36), este PPL presenta otra solución óptima con  $w \neq 0$  (caso de soluciones óptimas alternativas), de modo que un plano siempre puede ser trazado también para el caso linealmente inseparable. Esto justifica la propiedad 3 presentada en el inicio de la sección 2.2.6.

**Teorema 2.9** (No unicidad de la solución para  $w$  nulo). La solución  $(w = 0, \gamma, y, z)$  para (2.36) no es única, según (Bennett & Mangasarian, 1992).

Siendo así, el PPL (2.36) aquí propuesto es más completo y eficiente que el PPL propuesto en el Teorema 2.7 de la sección 2.3.2. No es tan interesante obtener la solución  $w = 0$  para conjuntos linealmente inseparable, ya que en este caso no existe el hiperplano de separación. En este sentido, es esencial que la solución del LPP sea  $w \neq 0$ , justificando la importancia del Teorema 2.9.

### **2.2.7. Particularidades del Problema de Programación Lineal**

El problema de programación lineal (2.36) se presenta con las restricciones de las matrices  $E$  y  $F$ , lo que facilita la identificación de los datos, cuando se quiere separar los conjuntos de puntos asociados a estas matrices. Sin embargo, para una mejor visualización de ciertas características del problema, podemos cambiar la forma de presentar la función objetivo y las restricciones del mismo utilizando matrices particionadas. Así, el PPL (2.36) puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min \quad & [0 \mid (1/m)e \mid (1/k)e \mid 0] \begin{bmatrix} w \\ y \\ z \\ \gamma \end{bmatrix} \\ \text{s. a.} \quad & \begin{cases} \begin{bmatrix} E & I_m & 0 & -e \\ -F & 0 & I_k & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ y \\ z \\ \gamma \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} e \\ e \end{bmatrix} \\ w, \gamma \text{ sin restricciones; } y, z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde  $I_m$  e  $I_k$  son matrices identidad de orden  $m$  y  $k$  respectivamente,  $e$  es un vector de "unos" de dimensión apropiada.

U, opcionalmente usando una sola matriz  $D$ , un único vector de variables  $x$ , podemos escribir:

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ \text{s. a.} \quad & \{Dx \geq b \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$x = [w \ y \ z \ \gamma]', \quad x \in \mathbb{R}^p \text{ con } p = n + m + k + 1,$$

$$y, z \geq 0; \quad w, \gamma \text{ irrestrictos de signo.}$$

$$c = [0 \mid \frac{1}{m}e \mid \frac{1}{k}e \mid 0]'; \quad c \in \mathbb{R}^p$$

$$b = (1 \dots 1); \quad b \in \mathbb{R}^{m+k}$$

$$D = \begin{bmatrix} \overbrace{E}^w & \overbrace{I_m}^y & \overbrace{0}^z & \overbrace{-e}^\gamma \\ -F & 0 & I_k & e \end{bmatrix}; \quad D \in \mathbb{R}^{(m+k) \times p}$$

Observando la matriz  $D$ , que representa las restricciones del problema, se puede ver que es conveniente resolver el PPL (2.36), propuesto para separación de padrones por el Método Simplex, pues presenta una matriz base  $B = I_{(m+k)}$  cuando se toma como variable básicas, las variables asociadas a los vectores  $y, z$ .

Es necesario mencionar que, como  $w$  y  $\gamma$  son libres de signo, se podría escribir, como se explica en el Capítulo I:

$$w = \bar{w} - \bar{\bar{w}} \quad \text{y} \quad \gamma = \bar{\gamma} - \bar{\bar{\gamma}}, \quad \text{con} \quad \bar{w}, \bar{\bar{w}}, \bar{\gamma}, \bar{\bar{\gamma}} \geq 0,$$

incrementando así para cada componente  $w$ , una columna más en la matriz  $D$ , además de una columna para la componente  $\gamma$ , pasando entonces a tener  $(2n + m + k + 2)$  columnas, continuando con las  $(m + k)$  filas. Sin embargo, para los problemas con un número muy grande de columnas, duplicar el número de columnas relacionadas a  $w$ , para trabajar solo con variables positivas, puede aumentar bastante el tamaño del problema y puede requerir más tiempo de cálculo en la resolución. En consecuencia, puede ser preferible asumir que las componentes de  $w$ , e incluso  $\gamma$ , estén limitadas a un intervalo que sea conveniente. En los problemas que se aplica tal estrategia se muestra satisfactoriamente como será visto en el Capítulo IV.

Otro punto que merece ser resaltado es cuando se trabaja con conjuntos linealmente no separables. A partir del hiperplano  $w'x = \gamma$ , generado por la solución del PPL (2.36), pueden ser generados nuevos hiperplanos en la tentativa de separar los conjuntos con un número finito de hiperplanos. En otras palabras podemos usar recursivamente el mismo procedimiento (resolución de un PPL) para uno o más semiespacios del tipo  $w'x > \gamma$  o  $w'x < \gamma$  cuando ocurre la mistura de puntos de  $E$  y  $F$  en el mismo semiespacio. Para eso podemos construir nuevos hiperplanos teniendo en cuenta las regiones ya determinadas por los hiperplanos anteriores. Así, obtenida la solución del PPL (2.36), dependiendo si  $y > 0$  o  $z > 0$ , escogemos el semiespacio  $w'x > \gamma$  o  $w'x < \gamma$  y descartamos los puntos que figuran en el otro semiespacio. Eso significa que las matrices  $E$  y  $F$  se alteran (disminuyen) a cada nuevo hiperplano.

En el Capítulo IV se da, a conocer algunos ejemplos de aplicación de nuestra teoría presentada.

## **CAPÍTULO III**

### **MARCO METODOLÓGICO**

#### **3.1. Tipo de Investigación**

La investigación realizada, es una investigación aplicada puesto que se utiliza el Método Simplex y MATLAB para diseñar el algoritmo computacional y luego ver algunas aplicaciones directas. Según (ZORRILLA, 1993): La investigación aplicada, guarda íntima relación con la básica, pues , depende de los descubrimientos y avances de la investigación básica y se enriquece con ellos, pero se caracteriza por su interés en la aplicación, utilización y consecuencias prácticas de los conocimientos. La investigación aplicada busca el conocer para hacer, para actuar, para construir, para modificar.

#### **3.2. Diseño de la Investigación**

La investigación desarrollada es de Lógico matemática y no experimental (Melvin, 2010).

**Lógico matemática:** porque mediante el estudio de la matemática y lógica se resuelve un problema matemático que luego puede ser aplicado en otros campos del quehacer humano.

**No experimental:** porque no se pretendió manipular las variables estudiadas si no analizarlas tal como se presentan en su contexto natural, para luego utilizarlas.

### **3.3. Identificación de las Variables**

**Variables dependientes:**

- PRPS: Programa que resuelve el problema de selección de los elementos de un conjunto de acuerdo a sus características.

**Variables independientes:**

- PPLG: Problema de Programación Lineal generado por el proceso de selección de los elementos de un conjunto.

### **3.4. Definición Operacional de las Variables**

La Implementación del programa de Separación de los Elementos de un Conjunto de Acuerdo a sus Características, se

encuentra en función del Planteamiento y solución del Problema de Programación Lineal generado (PPLG).

PRPS= función (PPLG)

### 3.5. Definición Conceptual de la Variable Independiente

El problema de Selección de los Elementos de un Conjunto de acuerdo a sus Características nos conllevará al planteamiento de un Problema de Programación Lineal (PPLG) que puede ser planteado, en su forma estándar, del siguiente modo:

$$\text{Minimizar } z = c^t x$$

$$\text{Sujeto a: } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

#### Indicadores

- **Separabilidad**

Algunos conjuntos serán Linealmente Separables y otros serán no linealmente separables. De esta propiedad

dependerá la complejidad con que, quede planteado el problema de programación lineal.

### **3.6. Definición Conceptual de la Variable Dependiente.**

El programa que se implementará será el que resuelva el Problema de Programación Lineal que genera el proceso de selección de los elementos de un conjunto haciendo uso del Método Simplex y el lenguaje de programación propio de MATLAB

#### **Indicadores**

- **Superficie separadora**

En el caso de ser el conjunto linealmente separable la superficie separadora será un hiperplano que no contiene punto alguno de ninguno de los conjuntos; pero de ser un conjunto no linealmente separable, se tendrá un hiperplano que minimice la cantidad de puntos del lado errado. Y la implementación del programa se realizará en torno a esas dos posibilidades de separación.

## **3.7. Instrumentos, software y equipos**

### **3.7.1. Instrumentos:**

Bases de programación lineal.

Algoritmo del Método Simplex.

Lenguaje de Programación.

### **3.7.2. Software y equipos :**

MATLAB.

Word 2007.

Power point 2007.

EndNot X5.

Visio 2007.

Una Computadora Lap Top 667 MHz.

Una Impresora hp Desk Jet 840C.

Dos USB hp 8GB.

## **3.8. El software MATLAB.**

La denominación MATLAB, es una abreviatura de “MATrix LABoratory”, que en español significa Laboratorio de Matrices (García, 1999).

Según (Pérez, 2002), MATLAB es un software muy versátil que ofrece fundamentalmente dos aspectos muy importantes:

- Un entorno de desarrollo integrado (Integrated Development Environment, IDE): intérprete, editor, depurador (debugger), asistente de ayuda, librerías y más.
- Un lenguaje de programación propio: lenguaje M.

Siendo más extensivo el mismo autor Cesar Pérez López en su misma obra antes citada "MATLAB y aplicaciones en ciencias e ingeniería" dice lo siguiente:

**MATLAB** tiene un entorno de computación técnica que posibilita la ejecución del cálculo numérico y simbólico de forma rápida y precisa, acompañado de características gráficas y de visualización avanzadas aptas para el trabajo científico y la ingeniería. **MATLAB** es un entorno interactivo para el análisis y el modelado que implementa más de 500 funciones para el trabajo en distintos campos de la ciencia. Por otra parte, **MATLAB** presenta un lenguaje de programación de muy alto nivel basado en vectores, arrays y matrices. Además, el entorno básico de **MATLAB** se complementa con una amplia colección de toolboxes que contienen

funciones específicas para determinadas aplicaciones en diferentes ramas de las ciencias y la ingeniería. La arquitectura de **MATLAB** es abierta y ampliamente extensible, permitiendo la relación con Excel, C, Fortran y otras aplicaciones externas muy utilizadas e importantes. Entre otras cosas, el código escrito en lenguaje de **MATLAB** puede ser traducido a C de forma inmediata. **MATLAB** también permite la operatividad entre plataformas posibilitando trabajar con distintos sistemas operativos y relacionar el trabajo realizado en las distintas plataformas. **MATLAB** es un software en continuo crecimiento y muy adaptable a los avances científicos y al trabajo en laboratorios I+D, que resuelve los problemas que presenta la ingeniería en el desarrollo de productos innovadores. En el campo de las Comunicaciones, **MATLAB** permite realizar modelado y diseño de sistemas **DSP**, trabajar con sistemas conmutados, con telefonía fija/móvil o **ADSL** y con modelado de canal/emisor/receptor.

En el campo de los Periféricos para ordenadores, **MATLAB** dispone de drivers para discos, de periféricos de control para posición/velocidad y de instrumentación. En el campo Aeroespacial/Defensa, **MATLAB** permite trabajar en sistemas

radar, unidades de seguimiento y rastreo, aviónica, modelado y control de sistemas de potencia y guiado, navegación y control.

En el campo de la Automoción, **MATLAB** posibilita aplicaciones para trabajar en la ingeniería de control, sistemas de suspensión, sistemas ABS y diseño de bloques de embrague. Pero **MATLAB** tampoco olvida otros campos importantes como el de las Finanzas cuantitativas, pudiendo utilizarse como un entorno de cálculo para el análisis de datos, para la valoración y análisis de opciones e instrumentos financieros, para la optimización de carteras y análisis de riesgos y para el desarrollo de modelos y su validación. Asimismo, **MATLAB** se puede utilizar como un entorno de desarrollo de aplicaciones de renta fija, de opciones derivadas, de distribución de activos/gestión de cartera y de gestión de riesgo y reporting. Materias como la Estadística, el Álgebra lineal, el Análisis matemático, el Análisis numérico, el Análisis de series temporales, las Bases de datos y la Geometría encuentran en el módulo básico de **MATLAB** y en sus toolboxes adicionales una herramienta esencial para su desarrollo. También **MATLAB**, a través de Simulink, permite diseñar sistemas dinámicos sencillos o complejos y realizar modelado y simulación mediante un lenguaje agradable basado en diagramas de bloques. Admite sistemas en

tiempo continuo, sistemas de control y control inteligente, y aplicaciones de procesamiento de señal digital y comunicaciones.

Otros autores complementan la reseña de MATLAB coincidiendo en que: el entorno de trabajo de MATLAB es muy gráfico e intuitivo, similar al de otras aplicaciones profesionales de Windows. MATLAB dispone de un editor que permite tanto crear y modificar estos ficheros, como ejecutarlos paso a paso para ver si contienen errores, en un proceso de depuración (i Nogueras, 2005),(KOLMAN & Hill, 2006; Quarteroni & Saleri, 2007), (Pérez, 2002).

### **3.9. Técnicas y métodos de recolección de datos**

Se recolectó información a través bibliografía de la especialidad; publicaciones Web, folletos y trabajos de investigación, que hacen referencia al tema, entre ellos los que contienen: Programación lineal, separación de puntos, máquinas de soporte vectorial, Método Simplex, Programación en MATLAB.

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS Y EJEMPLIFICACIÓN

En este capítulo se presenta el resultado de la investigación plasmado en **Un Algoritmo Computacional Para Separar los Elementos de un Conjunto Mediante Programación Lineal**, que gracias a las bondades que tiene MATLAB se ha codificado este algoritmo convirtiéndolo en un programa de computadora que nos facilita realizar el proceso de separación de puntos de  $\mathbb{R}^n$ , mediante un hiperplano, el cual aparece como resultado de la solución de un problema de programación lineal, usando el Metodo Simplex.

Se pone de manifiesto también algunos ejemplos de separación de puntos y aplicando allí la teoría discutida en el Capítulo II. Se presentan algunos ejemplos teóricos para descubrir algunos detalles de esta teoría.

Finalizando el trabajo con una aplicación de la vida real, sobre orientación vocacional, consiguiendo una recta separadora en el plano, que separa pares ordenados que representan las calificaciones numéricas en ciencias e ingeniería, y letras y humanidades, obtenidas mediante una

evaluación de los estudiantes del 5º Año de educación secundaria de la Institución Educativa Alexander Fleming –Tacna en año académico 2012.

Los resultados de cada aplicación del algoritmo se pueden observar gráficamente para los casos que son bidimensionales o tridimensionales y algebraicamente (la ecuación del hiperplano separador) en los casos que no se pueden graficar.

#### **4.1. Resultados de la Investigación.**

Como resultado del trabajo realizado se tiene la presentación del **algoritmo computacional para separar los elementos de un conjunto mediante programación lineal**, codificado en MATLAB, el cual facilita enormemente el procedimiento del cálculo, tal como se observa en el Ejemplo 4.1 donde se ha planteado el PPL en forma completa y que a pesar de tener pocos puntos por separar y de dimensión 2 ya se siente la necesidad de contar con un software que facilite la solución del PPL planteado.

#### 4.1.1. Algoritmo computacional, para separar los elementos de un conjunto mediante programación lineal.

**Paso 1:** Ingresar:

- Las matrices  $E$  y  $F$  cuyos renglones son vectores de  $\mathbb{R}^n$ , (que a la vez sus componentes son códigos de las características de un elemento de uno de los conjuntos  $\bar{E}$  o  $\bar{F}$  respectivamente).
- El intervalo de recorrido de las variables sin signo  $w_i$ .
- El intervalo de recorrido de la variable sin signo  $\gamma$ .

**Paso 2:** Formular las matrices Nulas e Identidades  $I_m$  y  $I_k$  de órdenes adecuados (depende del orden de  $E$  y del orden de  $F$ ) de tal manera que la matriz de coeficientes formada por ellas, sea una matriz cuadrada de orden " $m + k$ "

**Paso 3:** Formular el PPL 2.44 de acuerdo al paso 2.

**Paso 4:** Resolver el PPL del Paso 3 mediante el Método Simplex.

**Paso 5:** Formular la ecuación del hiperplano separador con los valores obtenidos en el Paso 4. si  $n \leq 3$  hacer paso 6; sino finalizar.

**Paso 6:** Mostrar resultados gráficamente para los casos,  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

4.1.2. Interfaz de usuario del algoritmo computacional, para separar los elementos de un conjunto mediante programación lineal, codificado en MATLAB 7.100 (R2010a).

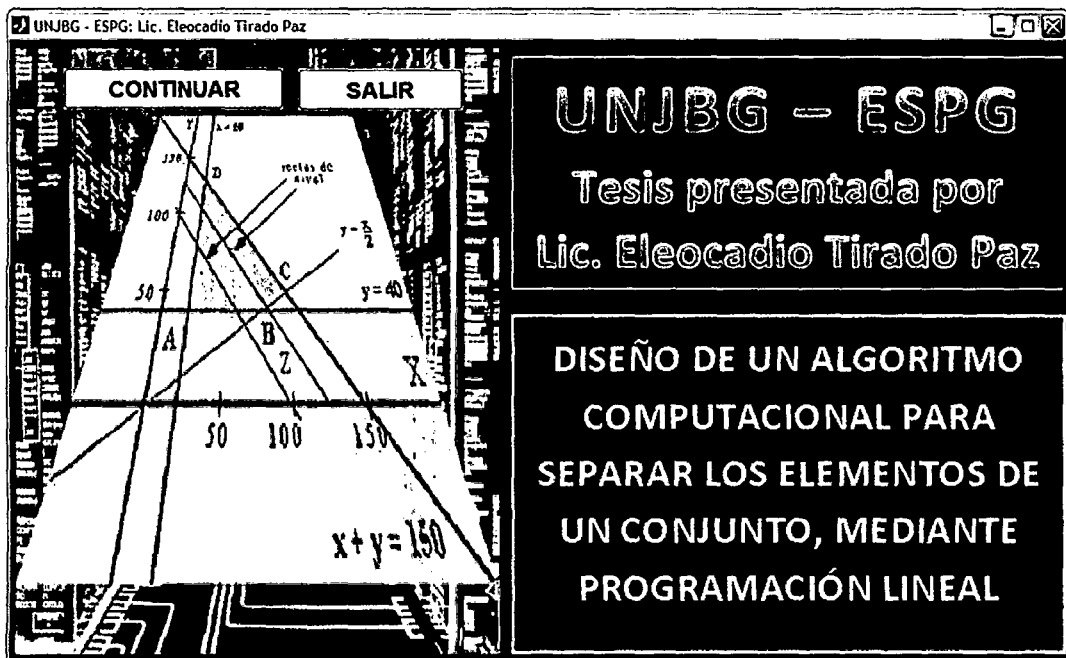


Figura 14: Ventana de presentación del programa.

Fuente: Elaboración propia.

UNJBG-ESPG: Lic. Eleccadio Tirado Paz

### SEPARACION DE PUNTOS con PROGRAMACION LINEAL

**DATOS DE ENTRADA**

**Conjunto E**

Datos a ingresar

Valor m:  Valor n:  **OK**

	E1	E2
1	20	0
2	0	0
3	0	0

Datos en archivo

**Abrir** **Grabar**

**Conjunto F**

Datos a ingresar

Valor k:  Valor n:  **OK**

	F1	F2
1		
2		
3		
4		

Datos en archivo

**Abrir** **Grabar**

**Parametros**

w:

	i	u
w1	0	0
w2	0	0

Gamma:   $\leq \text{gamma} \leq$

**ACEPTAR**

---

**SOLUCION**

Los wi:

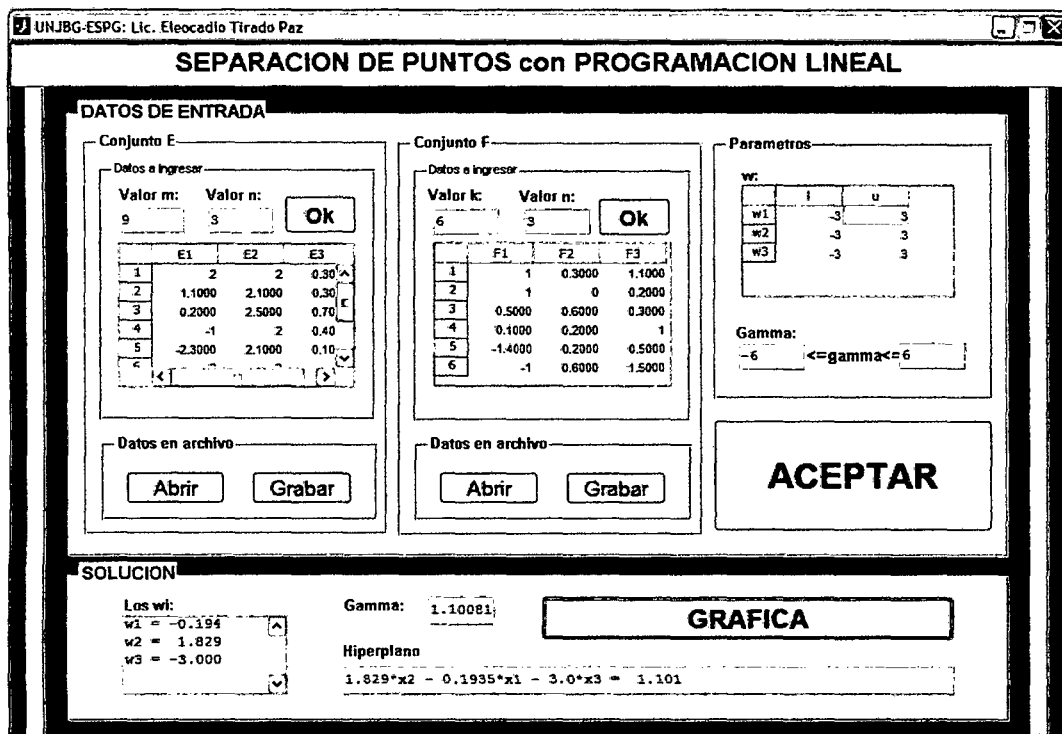
Gamma:

Hiperplano

**GRAFICA**

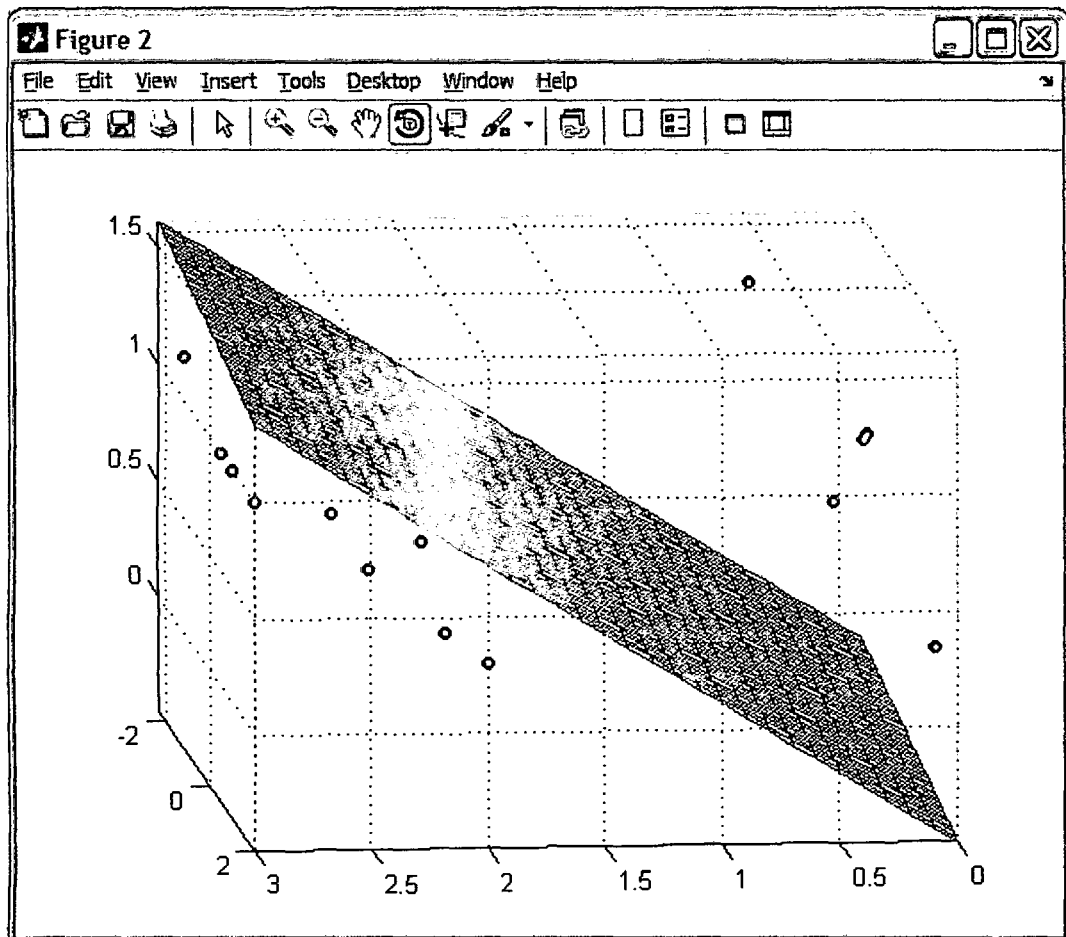
**Figura 15:** Ventana de recepción de datos.

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 16:** Ventana de salida de los valores calculados:  $w_i$ ,  $\gamma$ , la ecuación del hiperplano separador y entrada a la ventana de "gráfica".

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 17:** Ventana de visualización de las graficas, en  $\mathbb{R}^2$  o en el  $\mathbb{R}^3$ .

**Fuente:** Elaboración propia.

## 4.2. Ejemplificación

**Ejemplo 4.1** (Conjuntos Linealmente Separables) En este primer ejemplo, se presenta dos conjuntos de puntos linealmente separables con un número pequeño de puntos: 9 puntos en el

conjunto  $\bar{E}$  y 7 puntos en el conjunto  $\bar{F}$ . Sin hacer distinción entre los conjuntos y las matrices que lo representan tenemos:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 2 \\ 5 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Como cada línea de las matrices representan un punto  $(x_1, x_2)$ , es fácil percibir que los conjuntos son linealmente separables ya que cualquier recta paralela al eje  $x_2$ , y con  $3 \leq x_1 \leq 4$ , separa linealmente estos conjuntos.

Siendo pequeño el número de puntos escogido para este ejemplo, al plantearse, el PPL de la forma (2.36) correspondiente a este ejemplo se siente la necesidad de recursos computacionales para la búsqueda de la solución del problema; a pesar de tratarse de  $n = 2$ , el número de variables del PPL que se plantea en cada caso aumenta a medida en que el número de puntos aumenta y la dimensión aumenta.

Para las matrices  $E$  y  $F$  elegidas arriba ( $m = 9$ ,  $K = 7$ ,  $n = 2$ ), el PPL a ser resuelto es:

$$\min_{w,y,z} \frac{1}{9}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_9) + \frac{1}{7}(z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_7)$$

$$s. a. \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{cc} E & & & \\ \hline 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & & \\ 1 & 3 & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & 2 & & \\ 2 & 3 & & \\ 2 & 4 & & \\ 3 & 3 & & \\ 3 & 4 & & \\ \hline -4 & -1 & & \\ -4 & -2 & & \\ -4 & -3 & & \\ -5 & -2 & & \\ -5 & -3 & & \\ -5 & -4 & & \\ -6 & -2 & & \\ \hline -F & & & \end{array} & \begin{array}{cccc} I_9 & & & \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \end{array} & \begin{array}{cccc} 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline I_7 & & & \end{array} & \begin{array}{c} -e \\ \hline -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline e \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \hline y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ \hline z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ \hline \gamma \end{array} \geq \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 9; \quad z_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 7$   
 $w_1, w_2, \gamma$  sin restricciones (valores en un intervalo)

**Observación 4.1** Las matrices  $0$  representan a una matriz de ceros de dimensión conveniente ( $m \times k$  o  $k \times m$ ),  $I_9$  y  $I_7$  representan la identidad de orden 9 y orden 7 respectivamente. Nótese que el problema no está en su forma estándar y ya presenta un tamaño que lo torna insoluble manualmente.

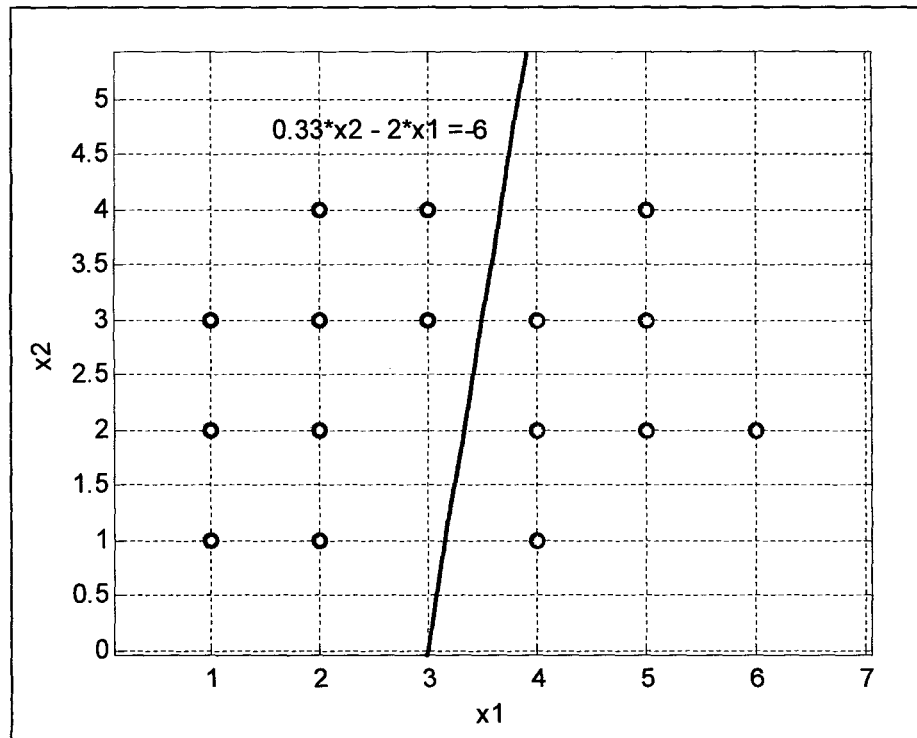
La estructura del problema establece la necesidad de la utilización de un software que permita la fácil manipulación de

matrices de tamaño relativamente grande, de modo que, para problemas mayores no exista la necesidad de ingresar manualmente las matrices nulas y las matrices identidad, ambas necesarias, si no, que el mismo software lo puede crear. Es decir el mismo software termina de construir la matriz  $D$ , de coeficientes de las restricciones del PPL. Como en el Ejemplo 4.1.

**Observación 4.2** Los resultados de los ejemplos presentados en este trabajo, son obtenidos mediante el software obtenido; utilizando como límites inferior y superior para las variables  $w_i$  sin restricciones:  $-2, 2$  respectivamente, y para  $\gamma$ , los límites  $-6, 6$ ; obteniéndose como resultado:

- Valor óptimo de la FO: cero, lo que indica según los resultados presentados en el Capítulo II, que los conjuntos son linealmente separables ;
- $w = (w_1, w_2) = (-2, -0.33)$ ;
- $\gamma = -6$ ;
- $y \in \mathbb{R}^9$  y  $z \in \mathbb{R}^7$  vectores nulos de los respectivos espacios.
- En este caso la ecuación de la recta separadora será dada por  $x_2 = \left( \frac{2x_1 - 6}{0,33} \right)$

La Figura 18 ilustra los conjuntos de puntos y la recta separadora para estos límites.



**Figura 18:** Representa dos conjuntos linealmente separables del Ejemplo 4.1 y la recta separadora con límites inferior y superior pequeños.

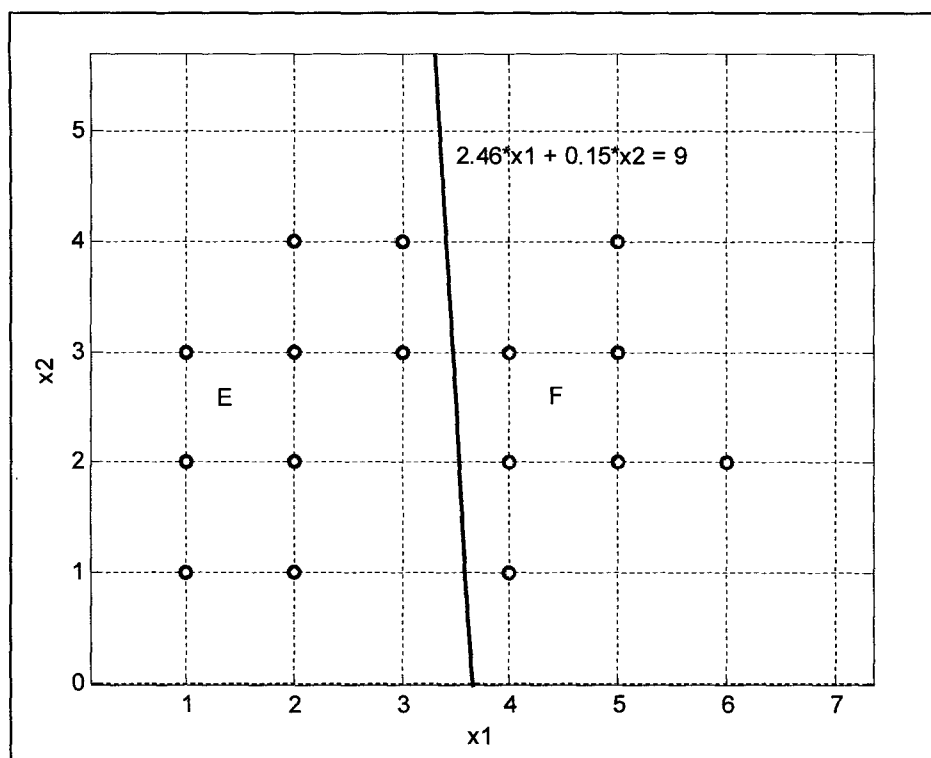
**Fuente:** Elaboración propia.

Como se observa, esa no es la única recta que separa los conjuntos  $E$  y  $F$  pues existen infinitas rectas que los separa linealmente. Cambiando varían los límites de las variables sin restricciones obtenemos otras rectas separadoras, por ejemplo,

alterando un poco los valores de los límites para  $-3 \leq w_1 \leq 3$ ,  $3 \leq w_2 \leq 3$  y  $-9 \leq \gamma \leq 9$  la recta separadora cambia de pendiente (en algunos casos puede pasar de ser creciente a decreciente).

La Figura 19 representa los conjuntos de puntos y la recta separadora para estos nuevos límites. Con estos límites el software ofrece los siguientes valores:

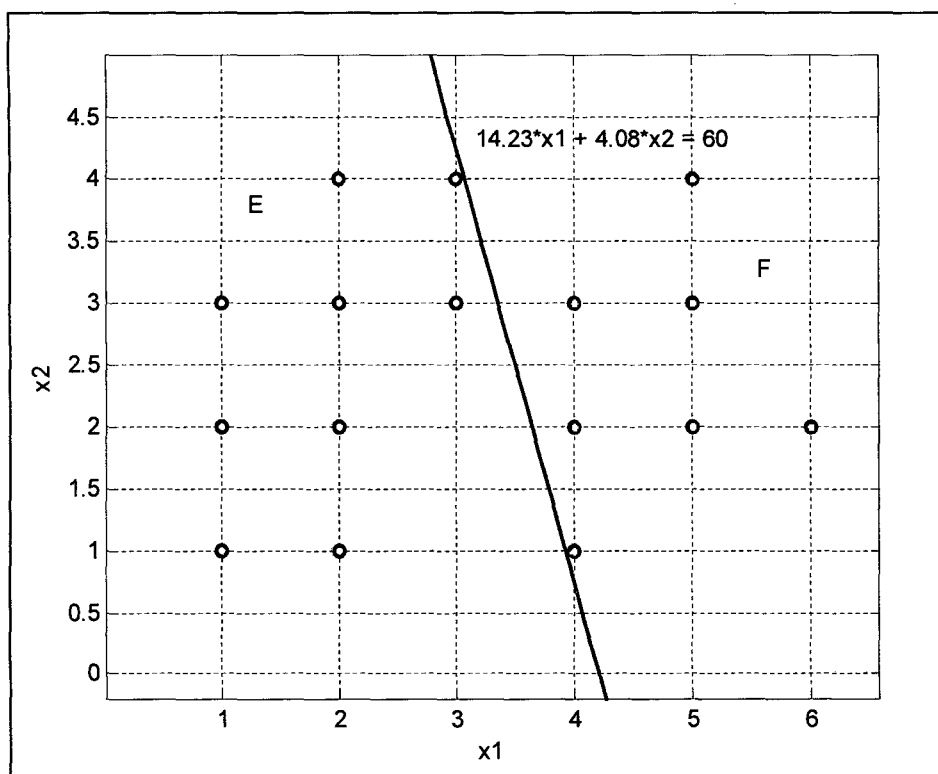
- Valor óptimo de la FO: cero (conjuntos son linealmente)
- $w = (w_1, w_2) = (-2, 46; -0.15)$ ;
- $\gamma = -9$ ;
- $y \in \mathbb{R}^9$  y  $z \in \mathbb{R}^7$  vectores nulos de los respectivos espacios.
- La ecuación de la recta separadora resulta  $x_2 = -\left(\frac{2,46x_1 - 9}{0,15}\right)$



**Figura 19:** Representación de los conjuntos linealmente separables del ejemplo 4.1 y de la recta separadora con  $w \in [-3, 3]$  y  $\gamma \in [-9, 9]$ .

**Fuente:** Elaboración propia.

Cambiando nuevamente los límites de las variables libres de señal, por ejemplo colocando como límites para  $w_1$  y  $w_2$   $-20$  y  $20$ , y  $-60$  y  $60$  para  $\gamma$  y resolviendo nuevamente el problema se obtiene como respuesta:



**Figura 20:** representación de los conjuntos linealmente separables del Ejemplo 4.1 y de la recta separadora, calculada con un intervalo de mayor amplitud.

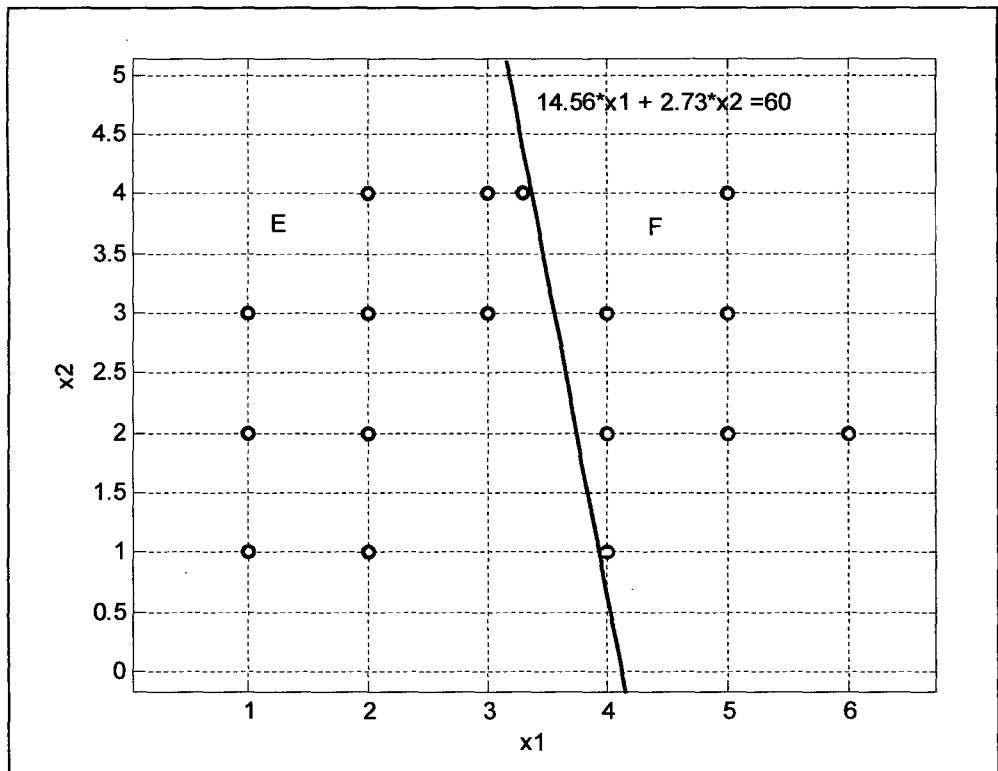
**Fuente:** Elaboración propia.

- Valor óptimo de la FO: cero (los conjuntos son linealmente)
- $w = (w_1, w_2) = (-14, 23; -4,07)$ ;
- $\gamma = -60$ ;
- $y \in \mathbb{R}^9$  y  $z \in \mathbb{R}^7$  vectores nulos de los respectivos espacios.

- La recta separadora será dada por  $x_2 = -\left(\frac{14,23x_1-60}{4,07}\right)$ . se observa estos resultados en la Figura 20.

Se observa que mientras mayor es la longitud del intervalo asignado a las variables sin restricciones, se aproxima más la recta separadora a algunos puntos de los conjuntos. Pero en los casos linealmente separables, como se comentó en el Capítulo II, la recta nunca contendrá punto alguno de los conjuntos.

Ocurre también que cuando se incrementa un nuevo punto en el conjunto  $E$  en el semiespacio que solo contenga puntos de  $F$ , si los conjuntos todavía continuasen linealmente separables como era de esperar, la recta separadora se ajusta manteniendo la separación de los conjuntos. Observemos el caso incrementando el punto  $(3,3; 4)$  al conjunto  $E$  del ejemplo, manteniendo la misma amplitud del intervalo  $[-20,20]$  para  $w$  y  $[-60,60]$  para  $\gamma$ , intervalo este en el que la recta separadora se acerca a algunos puntos de ambos conjuntos, como se observa en la Figura 20. Resolviendo el PPL nuevamente encontramos una recta que mantiene la separabilidad, como es ilustrado en la Figura 21.



**Figura 21:** Representación de los conjuntos linealmente separables del Ejemplo 4.1 y de la recta separadora después del incremento del punto (3,3; 4).

**Fuente:** Elaboración propia.

Se percibe que al resolver varios de estos problemas, el valor óptimo de  $\gamma$  muchas veces es el propio límite inferior de esta variable. Para problemas con pocos puntos cuando alteramos este límite el valor óptimo de  $\gamma$  es proporcional al anterior (como es el caso del presente ejemplo). Estos no sucede con el valor de  $w$  que no se altera en la misma proporción, en caso contrario no sería

garantizada la separabilidad; por tanto, no es una regla el valor óptimo para  $\gamma$  ser igual a su límite inferior.

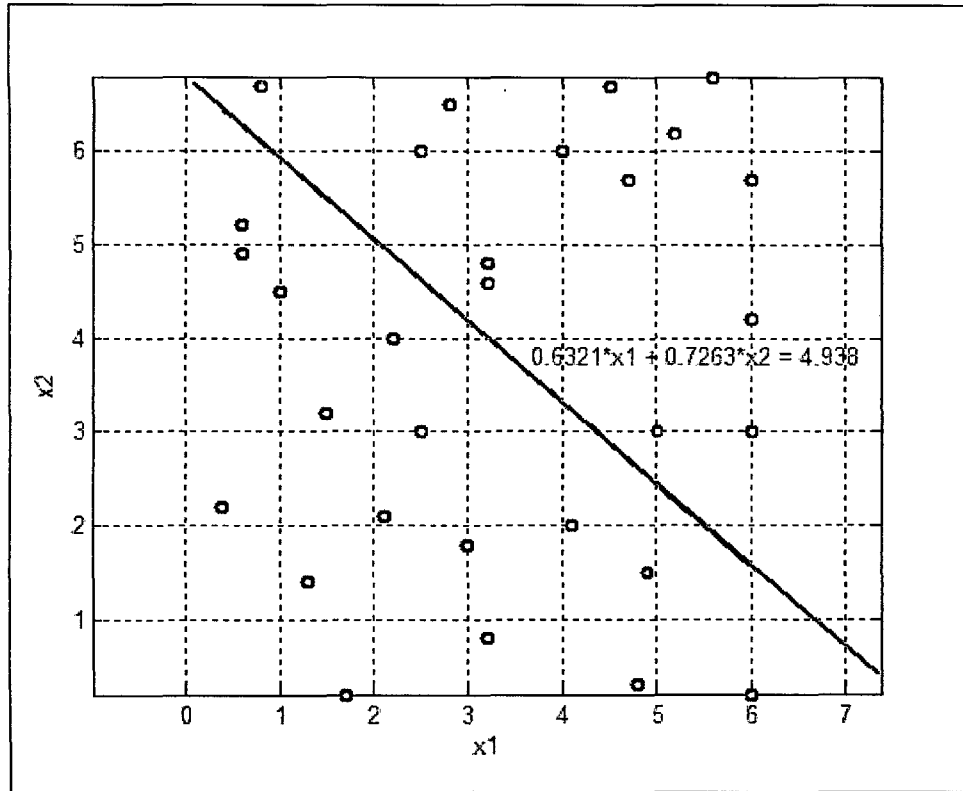
En cuanto a la mejor selección de los límites para las variables sin restricciones, depende de la necesidad de cada ejemplo. Se quisiera una separación donde el plano separador pase más cerca de algunos puntos de los conjuntos, se debe elegir un intervalo con mayor amplitud, si se quisiera el plano separador pasando más lejos de los puntos de los conjuntos, situación que aparentemente parece ser mejor, se debe trabajar con un intervalo de amplitud menor. Una mejor discusión sobre la influencia de estos límites en el plano separador queda como sugerencia para trabajos futuros.

**Ejemplo 4.2** (Conjuntos no Linealmente Separables) considérese los conjuntos de punto  $E$  y  $F$  como se muestran en las matrices siguientes:

$$E' = \begin{bmatrix} 1,7 & 4,8 & 4,9 & 6 & 3,2 & 1,3 & 0,4 & 2,1 & 3 & 1,5 & 2,2 & 3,2 & 1 & 0,6 & 0,8 & 4 \\ 0,2 & 0,3 & 1,5 & 0,2 & 0,8 & 1,4 & 2,2 & 2,1 & 1,8 & 3,2 & 4 & 4,8 & 4,5 & 4,9 & 5,2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$F' = \begin{bmatrix} 0,8 & 2,8 & 3,2 & 4,7 & 4,5 & 4,1 & 5,2 & 5,6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 2,5 & 2,5 \\ 6,7 & 6,5 & 4,6 & 5,7 & 6,7 & 2 & 6,2 & 6,8 & 4,2 & 5,7 & 3 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el PPL propuesto nuevamente se obtiene como respuesta los valores:



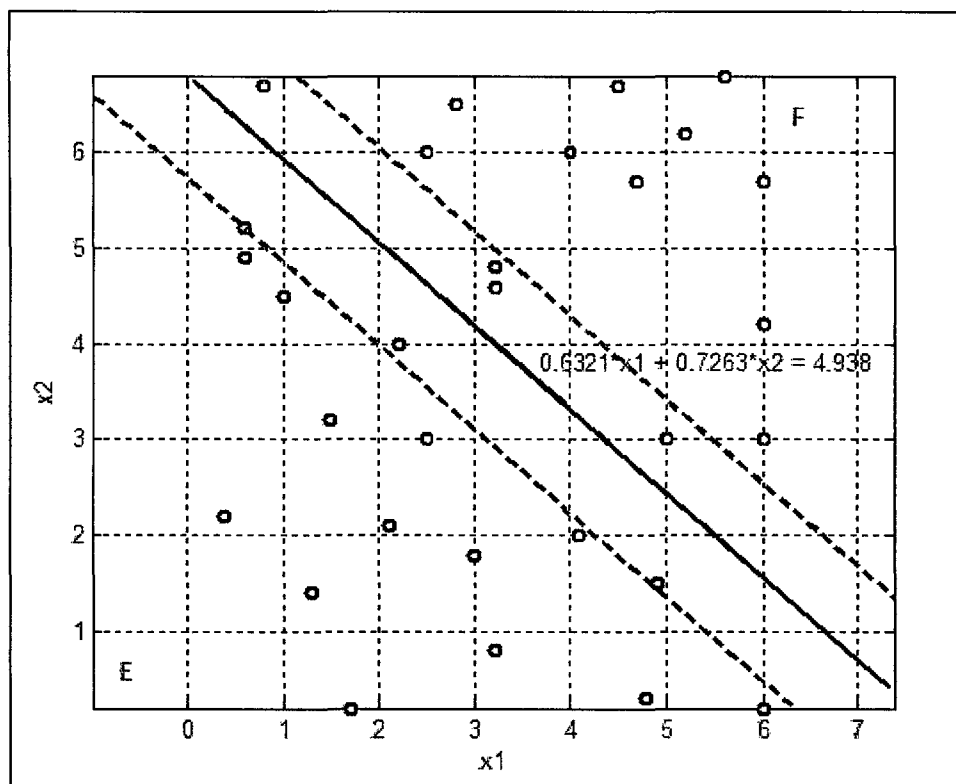
**Figura 22:** Representación de los conjuntos no linealmente separables del Ejemplo 4.2 y de su mejor recta separadora.

**Fuente:** Elaboración propia.

- Valor óptimo de la función objetivo: 0,79 (valor positivo indicando que los puntos no son linealmente separables);
- $w = (w_1, w_2) = (-0,63; -0,73)$ ;
- $\gamma = 4,93$ ;
- $y' = (0, 0, 0, 47, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 36, 1, 93, 0, 0, 0, 34, 2, 95), y \in \mathbb{R}^{16}$
- $z' = (0, 56, 0, 0, 57, 0, 0, 1, 89, 0, 0, 0, 0, 0, 60, 0, 2, 18, 0), z \in \mathbb{R}^{14}$ .

De estos valores sigue que la recta separadora es dada por la ecuación  $x_2 = -\left(\frac{0,63x_1-4,93}{0,73}\right)$ , como se puede ver en la Figura 4.9.

Para obtener esta separación fijamos los límites de las variables sin restricciones en  $-50$  y  $50$  respectivamente, alteramos estos valores, mas no se altera significativamente la recta separadora. Tenemos a penas dos puntos de cada uno de los conjuntos del lado “errado” de la recta; por tanto se tiene 5 componentes positivas en cada uno de los vectores  $y$  y  $z$ . Lo que ocurre es que los puntos que se encuentran dentro de la banda  $w'x = \gamma + 1$  y  $w'x = \gamma - 1$  de ambos lados de la recta, también contribuyen con una componente positiva para los vectores. Como puede ser visto en la Figura 23.



**Figura 23:** Representación de los conjuntos linealmente inseparables del Ejemplo 4.2 y de su mejor recta “separadora” con la banda limitada por las rectas  $w'x = \gamma + 1$  y  $w'x = \gamma - 1$

**Fuente:** Elaboración propia.

Tenemos tres puntos de cada conjunto dentro de esta banda. Cuando los puntos no se localizan en la banda o faja opuesta, mas están del lado cierto del hiperplano, la componente del vector  $y$  o  $z$  asociada a este punto es cero en la solución. Cuando el punto estuviera dentro de la faja o del lado errado del hiperplano, será

atribuido un valor positivo para la componente del vector  $y$  o  $z$  asociada a este punto.

En el próximo ejemplo con apenas un punto del lado errado se puede observar éste hecho.

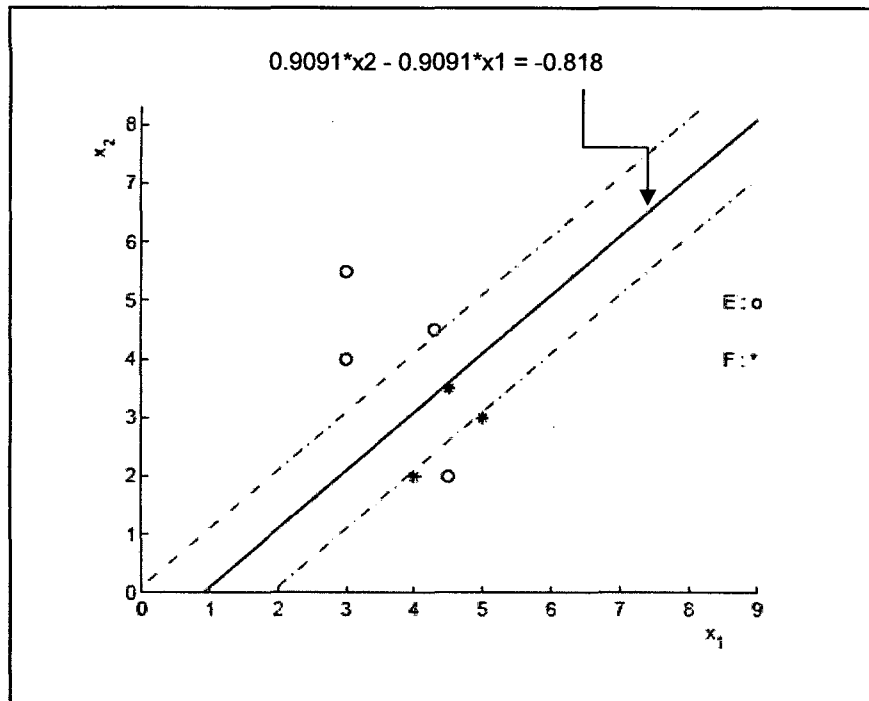
**Ejemplo 4.3** (Conjuntos de pocos elementos) Vamos a considerar los conjuntos  $E$  con 4 puntos y  $F$  con 3 puntos como sigue:

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4,30 & 4,50 \\ 4,50 & 2 \\ 3 & 5,50 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4,50 & 3,50 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el PPL 2.36 asociado encontramos los valores:

- Valor óptimo de la función objetivo: 0,92;
- $w = (w_1, w_2) = (-0,91; -0,91)$ ;
- $\gamma = -0,82$ ;
- $y' = (0, 0, 2,45, 0)$ ;
- $z' = (0, 0,19, 0)$ ;
- Recta separadora  $0.9091 * x_2 - 0.9091 * x_1 = -0.818$

La Figura 24 muestra los puntos y la recta separadora para estos pequeños conjuntos.



**Figura 24:** Representación de los conjuntos linealmente inseparables del Ejemplo 4.3 y de su mejor recta “separadora” con las fajas  $w'x = \gamma + 1$  y  $w'x = \gamma - 1$ .

Fuente: Elaboración Propia.

Vea que el punto del conjunto  $E$  del lado errado de la recta tiene componente de  $y$  con el valor 2,45 y el valor 0,19 de  $z$  representa el punto de  $F$  que está dentro de la faja.

Para percibir la separación de puntos en  $\mathbb{R}^3$ , que es la máxima dimensión en que se puede graficar, presentamos a continuación el siguiente ejemplo.

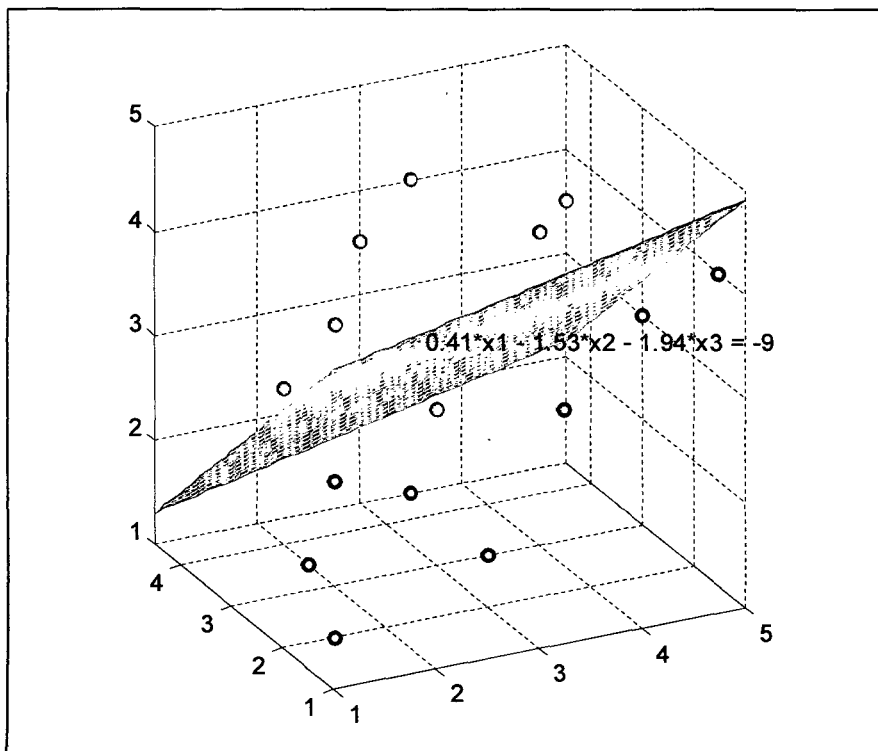
**Ejemplo 4.4.** (Conjuntos de puntos en el espacio) Hallaremos mediante el software, el plano separador de los conjuntos  $\bar{E}$  y  $\bar{F}$  contenidos en  $\mathbb{R}^3$ , representados mediante las matrices respectivas, siguientes:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2 \\ 1.5 & 2 & 1 \\ 4 & 2.5 & 2.5 \\ 3.5 & 3 & 1 \\ 5 & 1.5 & 4 \\ 4.5 & 2 & 3.5 \\ 2 & 1.5 & 2.5 \\ 2.5 & 4 & 1.5 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2.5 \\ 2 & 3 & 3.5 \\ 2.5 & 3.5 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 4.5 & 3.5 \\ 3 & 3.5 & 4.5 \\ 3.5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Ingresamos estas matrices en el software y consideramos el vector  $w$  dentro del intervalo  $[-3, 3]$ ; y  $\gamma \in [-9, 9]$ , resolvemos el PPL y encontramos los valores del punto solución:

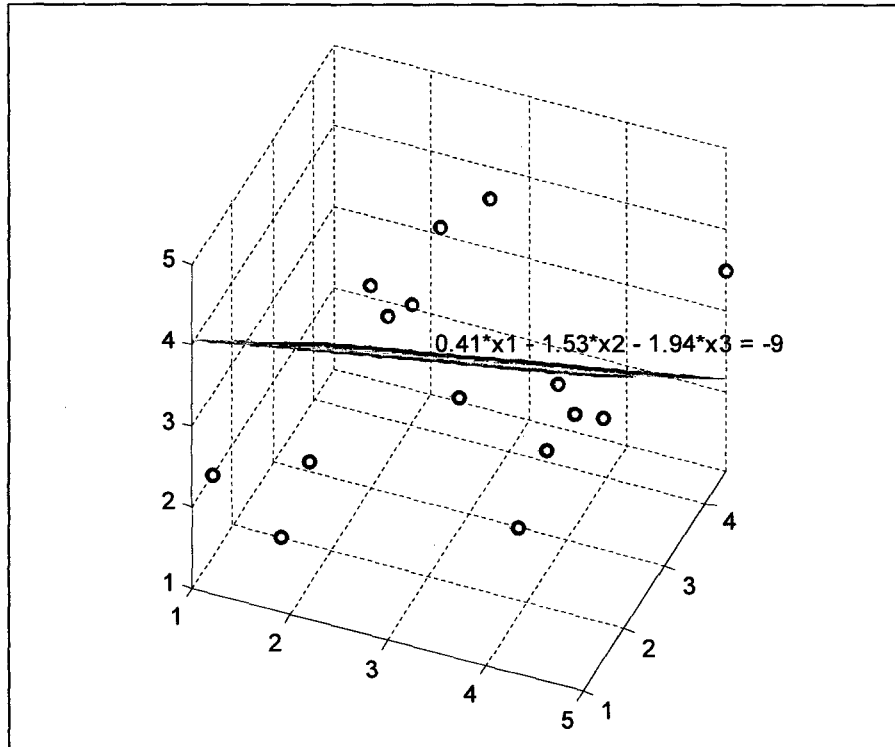
- Valor óptimo de la Función Objetivo: 0,206
- $w = (w_1, w_2, w_3) = (0,41; -1,53; -1,94)$ ;
- $\gamma = -9$ ;
- $y' = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ ;
- $z' = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1.44)$ .
- Hiperplano separador  $0,41x_1 - 1,53x_2 - 1,94x_3 = -9$ .

Obsérvese, en las gráficas siguientes, visto de diferentes ángulos (Figura 25, Figura 26).



**Figura 25:** Se observa el plano separador con un punto del conjunto  $F$  en el lado contrario; además se observa que quizás puede haber un plano que si separaría linealmente los conjuntos propuestos.

**Fuente:** Elaboración propia.



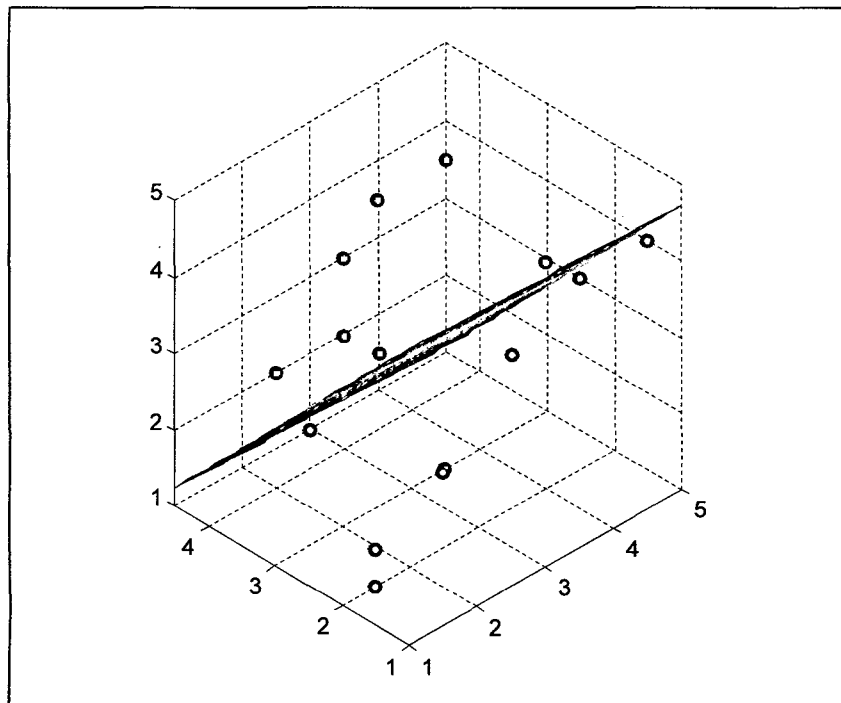
**Figura 26:** Otra toma de la gráfica anterior y se observa mejor, que puede haber un plano que sí separe linealmente los conjuntos propuestos.

Fuente: Elaboración propia.

Pensando en que se podría hallar un plano separador que separe linealmente los conjuntos, se varia los intervalos para  $w$  y  $\gamma$ , entre los que consideramos  $w \in [-10, 10]$ ,  $\gamma \in [-30, 30]$ , y obtenemos:

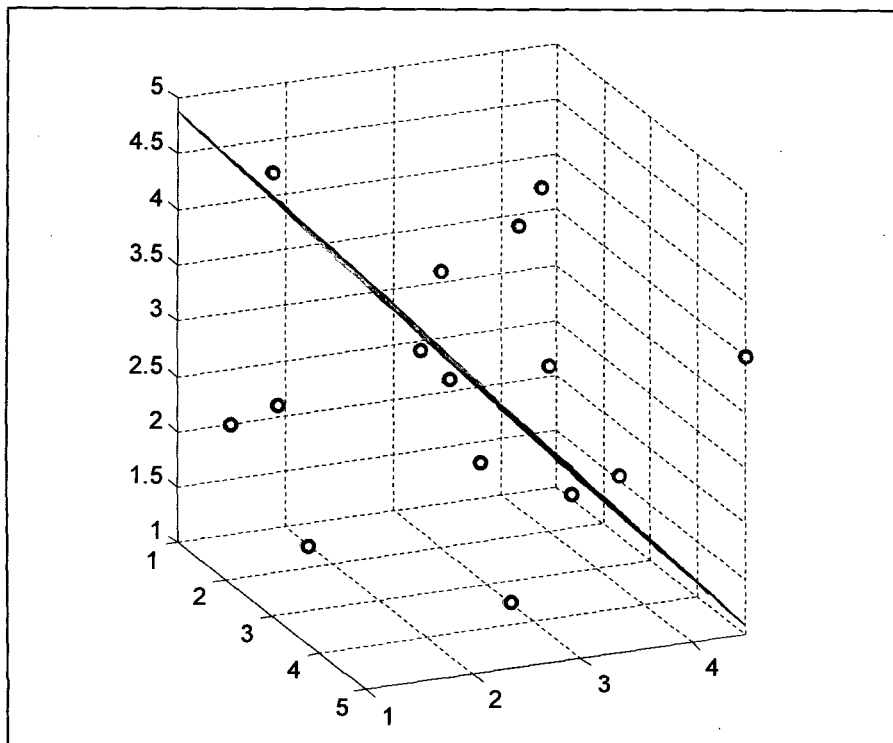
- Valor óptimo de la Función Objetivo: 0; lo cual significa que los conjuntos propuestos son linealmente separables.
- $w = (w_1, w_2, w_3) = (-1,97; -15,82; -13,85);$
- $\gamma = -90;$
- $y' = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0);$
- $z' = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0).$
- Plano separador  $-0.206 * x_1 - 5.235 * x_2 - 5.029 * x_3 = -30$

Estos resultados se observan en las dos gráficas siguientes:



**Figura 27:** Observamos los conjuntos E y F separados linealmente por el plano separador obtenido.

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 28:** simplemente es otra toma de la gráfica anterior, donde también se observa que los conjuntos son linealmente separables.

**Fuente:** Elaboración propia.

**Ejemplo 4.5.** (Aplicación en la orientación vocacional) En esta parte del trabajo se presenta un ejemplo de aplicación en la orientación vocacional; tal como se mencionó en el Proyecto de Tesis, como Ejemplificación en el punto 3.2.12 del proyecto.

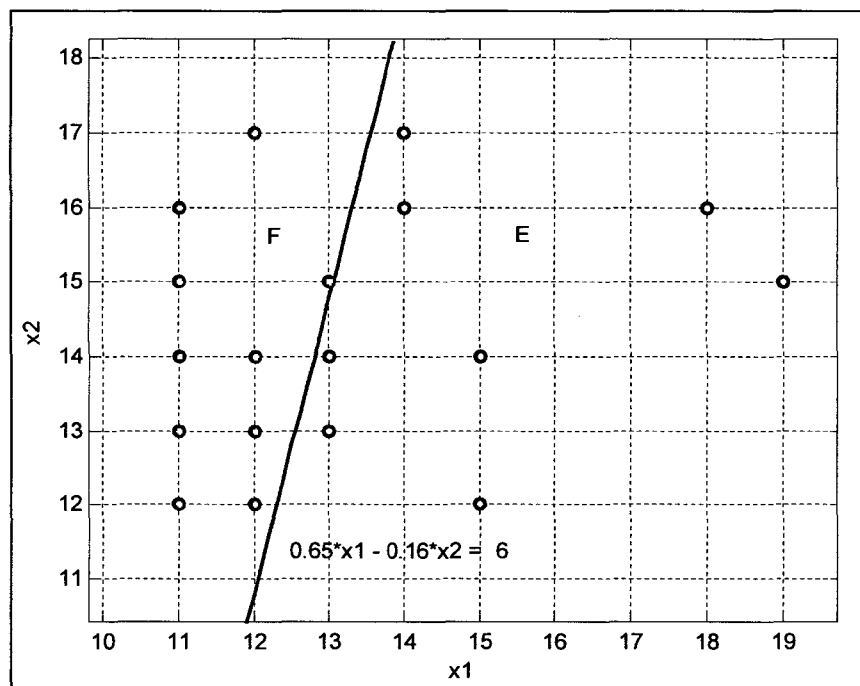
Se Ha realizado una evaluación de conocimientos y habilidades en base a los cursos de Ciencias y de Letras, a los alumnos de la sección única del quinto año del nivel secundario en la Institución Educativa Particular Alexander Fleming (según la documentación que consta en el anexo 03), con la única intención de encontrar en ellos los conocimientos y habilidades de poder realizar estudios superiores en alguna de las carreras de Ciencias e Ingeniería, o de Letras y Humanidades, codificándose los resultados en las matrices siguientes:

$$E = \begin{bmatrix} 18 & 16 \\ 19 & 15 \\ 14 & 17 \\ 14 & 16 \\ 15 & 14 \\ 13 & 14 \\ 13 & 13 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 12 & 17 \\ 13 & 15 \\ 12 & 14 \\ 11 & 15 \\ 11 & 16 \\ 11 & 14 \\ 12 & 13 \\ 11 & 13 \\ 12 & 12 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Donde  $E$  representa los resultados de la evaluación aplicada a los estudiantes cuyo indicativo es que deben estudiar alguna carrera de Ciencias e Ingeniería ( $E = C1$ );  $F$  representa los resultados de la evaluación aplicada a los estudiantes cuyo indicativo es que deben estudiar alguna carrera de Letras o Humanidades ( $F = C2$ ).

Considerando el intervalo  $-2 \leq w_i \leq 2$  y el valor de  $\gamma = 6$  se obtiene los resultados siguientes:

- Valor óptimo de la Función Objetivo: 0. Lo cual significa que los conjuntos son linealmente separables.
- $w = (w_1, w_2) = (0,65; -0,16)$ ;
- $\gamma = 6$ ;
- $y'$ , es un vector nulo de  $\mathbb{R}^8$
- $z'$ , es un vector nulo de  $\mathbb{R}^{10}$
- Recta separadora  $0.65*x_1 - 0.16*x_2 = 6$



**Figura 29:** Cada punto en el plano representa el par de notas obtenidas por cada estudiante en la evaluación aplicada para ver su inclinación por una futura carrera a seguir.  
 $(x_1, x_2) = (\text{Nota asignaturas de ciencias}; \text{Nota asignaturas de letras})$ .

Fuente: Elaboración propia.

Una vez determinada la recta separadora bastará ubicar el punto en el plano cartesiano, cuyas coordenadas son las notas de las evaluaciones de cualquier otro alumno evaluado posteriormente, y sabremos su carrera, sugerida a seguir.

## CONCLUSIONES

**PRIMERA:** Se hizo el estudio del Método Simplex en su forma matricial, mediante el cual fue posible resolver el problema de programación lineal (2.36) generado en el intento de separar los elementos de un conjunto, y se consideró como base para el diseño del algoritmo computacional, objeto de la presente tesis.

**SEGUNDA:** Se elaboró el algoritmo computacional que realiza dos funciones principales:

- Concluye la formulación del PPL (2.36) incluyendo adecuadamente, en la matriz de coeficientes de las restricciones, dos submatrices nulas y dos submatrices identidades de órdenes adecuados obteniéndose de esta manera el PPL (2.44) al que conduce el problema.
- Resuelve el PPL (2.44) planteado de cuya solución se obtiene los datos suficientes para escribir la ecuación del hiperplano separador y con ello la elaboración de la gráfica correspondiente cuando el problema está en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ ; más cuando se trata de un

problema en  $\mathbb{R}^n$ , con  $n > 3$  solamente se puede visualizar la ecuación del hiperplano separador.

Se ha utilizado el lenguaje de programación del MATLAB, para la codificación del algoritmo, por considerarse el más indicado debido a que contiene una gran cantidad de funciones ya elaboradas que facilitan el trabajo y además, como su nombre lo indica –MATLAB Laboratorio de Matrices– es el más adecuado para este tipo de trabajos donde se realizan operaciones con matrices.

**TERCERA:** Haciendo uso de la “Programación Lineal” y el lenguaje de programación MATLAB ha sido posible diseñar el algoritmo computacional (sección 4.1.1 - pg. 106), para separar los elementos de un conjunto de acuerdo a sus características.

El algoritmo que se ha logrado diseñar, puede ser considerado en diferentes aplicaciones, puesto que, una vez hallado el hiperplano separador, para un conjunto pequeño de elementos caracterizados, (puntos o vectores de  $\mathbb{R}^n$ ); bastará verificar si un punto cualquiera está hacia un “lado” o el otro del hiperplano.

## RECOMENDACIONES

**PRIMERA:** El trabajo de investigación puede ser considerado como base preliminar de tesis de aplicación directa, adecuando el algoritmo que se presenta ahora, al caso particular que se requiera.

**SEGUNDA:** Se sabe que la separación de puntos del espacio euclidiano no solo se puede abordar con la Programación Lineal; podría ser también usando la Programación Cuadrática Secuencial, que puede resultar una forma más directa.

## REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Abril, G. L. (2003). *Modelos de clasificación basados en máquinas de Vectores Soporte*. Paper presented at the Congreso Asociación Científica Europea de Economía Aplicada.
- Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., Sherali, H. D., Talavera, G. G., & Velázquez, H. V. (1998). *Programación lineal y flujo en redes*: Limusa México.
- Bennett, K. P. (1992). *Decision tree construction via linear programming*: Center for Parallel Optimization, Computer Sciences Department, University of Wisconsin.
- Bennett, K. P., & Mangasarian, O. L. (1992). Robust linear programming discrimination of two linearly inseparable sets. *Optimization methods and software*, 1(1), 23-34.
- Betancourt, G. A. (2005). Las máquinas de soporte vectorial (svms). *Scientia et Technica*, 1(27).
- García, J. G. (1999). *Notas sobre MATLAB*: Universidad de Oviedo.
- Grossman, S. I., Osuna, M. G., & Soto, F. P. (1983). *Álgebra lineal*: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Guyon, I., Weston, J., Barnhill, S., & Vapnik, V. (2002). Gene selection for cancer classification using support vector machines. *Machine learning*, 46(1-3), 389-422.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2002). *Investigación de operaciones*: McGraw-Hill.
- i Nogueras, G. B. (2005). *Introducción informal a Matlab y Octave*.
- KOLMAN, B. A., & Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal*: Pearson Educación.

- Lee, Y.-J., & Mangasarian, O. L. (2001). *RSVM: Reduced support vector machines*. Paper presented at the Proceedings of the first SIAM international conference on data mining.
- Mangasarian, O. L. (1965). Linear and nonlinear separation of patterns by linear programming. *Operations Research*, 13(3), 444-452.
- Mangasarian, O. L., Setiono, R., & Wolberg, W. (1990). Pattern recognition via linear programming: Theory and application to medical diagnosis. *Large-scale numerical optimization*, 22-31.
- Mangasarian, O. L., Street, W. N., & Wolberg, W. H. (1995). Breast cancer diagnosis and prognosis via linear programming. *Operations Research*, 43(4), 570-577.
- Mansfield, R., & Rosales, O. A. P. (2000). *Excel 2000: para gente ocupada*: McGraw-Hill Companies.
- Melvin, C. C. H. (2010). Representación por computadora de una figura plana de arte usando fractales. *thesis*.
- Pérez, C. (2002). Matlab y aplicaciones en ciencias e ingeniería. *Universidad*, 172.
- Quarteroni, A., & Saleri, F. (2007). *Cálculo científico con Matlab y Octave*: Springer Verlag.
- Stanley, G. (1999). Algebra lineal. *Editorial McGraw-Hill*.
- Taha, H. A. (2004). *Investigación de operaciones*: Pearson Educación.
- Trevisan, E. P. (2010). O uso da programação linear na separação de pontos.
- ZORRILLA, A. (1993). Santiago. 1993. *Introducción a la metodología de la investigación*. México: Cal Editores.

# **ANEXOS**

# ANEXO 1

## MATRIZ DE CONSISTENCIA

TÍTULO: "DISEÑO DE UN ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA SEPARAR LOS ELEMENTOS DE UN CONJUNTO, MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL"

PROBLEMAS	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES
<p><b>Formulación del problema</b> ¿Será posible diseñar un algoritmo computacional haciendo uso de la Programación Lineal, para separar los elementos de un conjunto en dos subconjuntos, de acuerdo a sus características?</p> <p><b>Problemas específicos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Será posible resolver, el Problema de Programación Lineal, que se genera al intentar la separación de los elementos de un conjunto aplicando el Método Simplex?</li> <li>• ¿Será posible implementar un algoritmo computacional mediante el lenguaje de programación MATLAB, que resuelva el problema de separación de elementos de un conjunto?</li> </ul>	<p><b>Objetivo general</b> Implementar un algoritmo que resuelva el problema de selección de los elementos con <math>n</math> características, de un conjunto haciendo uso de la Programación Lineal y el lenguaje de programación MATLAB.</p> <p><b>Objetivos específicos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Desarrollar el Método Simplex como herramienta aplicativa de la Programación Lineal, para resolver el PPL generado por la presente investigación.</li> <li>• Formular el algoritmo que realiza el trabajo de separación de los elementos de un conjunto y luego codificar en el lenguaje de programación MATLAB.</li> </ul>	<p><b>Hipótesis General</b> Si se cuenta con un algoritmo computacional, para seleccionar los elementos de un conjunto, el proceso de selección será automatizado y muy útil en aquellos conjuntos con un número inmensamente grande de elementos a ser seleccionados.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El Método Simplex desarrollado en su forma matricial nos permitirá resolver el Problema de Programación Lineal, que resulta de la investigación.</li> <li>• Puesto que el Método Simplex es desarrollado haciendo uso de la teoría de matrices, el lenguaje de programación MATLAB será considerado para implementar el algoritmo motivo de la presente investigación.</li> </ul>	<p><b>Dependiente:</b> PRPS: Programa que resuelve el problema de selección de los elementos de un conjunto de acuerdo a sus características.</p> <p><b>Independiente:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• PPLG: Problema de programación lineal generado por el proceso de separación de los elementos de un conjunto.</li> </ul>

## ANEXO 2

### CÓDIGO DEL PROGRAMA

```
function varargout = tesis_caratula(varargin)

gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @tesis_caratula_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn',  @tesis_caratula_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn',  [], ...
'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function tesis_caratula_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles,
varargin)

handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);
set(hObject, 'Units', 'pixels');
info = imfinfo('figural.jpg');
foto3=imread('figural.jpg');
foto3D=imread('figura3.jpg');
axes(handles.axes3);
image(foto3)
set(handles.axes3, 'Visible', 'off', 'Units', 'pixels', 'Position',
[6 6 info.Width+50 info.Height+270]);
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);
set(hObject, 'Units', 'pixels');
info = imfinfo('figura2.jpg');
foto5=imread('figura2.jpg');
foto5D=imread('figura3.jpg');
axes(handles.axes5);
```

```

image(foto5)
set(handles.axes5,'Visible', 'off','Units', 'pixels','Position',
[460 340 info.Widthinfo.Height]);
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);
set(hObject, 'Units', 'pixels');
info = imfinfo('figura3.jpg');
foto6=imread('figura3.jpg');
foto6D=imread('figura3.jpg');
axes(handles.axes6);
image(foto6)
set(handles.axes6,'Visible', 'off','Units', 'pixels','Position',
[460 6 info.Widthinfo.Height]);

function varargout = tesis_caratula_OutputFcn(hObject, eventdata,
handles)

varargout{1} = handles.output;

function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)

tesis_leo

function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)

function pushbutton3_Callback(hObject, eventdata, handles)

function pushbutton4_Callback(hObject, eventdata, handles)

function pushbutton5_Callback(hObject, eventdata, handles)

function pushbutton6_Callback(hObject, eventdata, handles)

function figure1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

```

```

    if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
    get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function pushbutton7_Callback(hObject, eventdata, handles)
close

function axes3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

function varargout = tesis_leo(varargin)

gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @tesis_leo_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn',  @tesis_leo_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn',  [] , ...
'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function tesis_leo_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles,
varargin)

handles.output = hObject;

guidata(hObject, handles);

function varargout = tesis_leo_OutputFcn(hObject, eventdata,
handles)

varargout{1} = handles.output;

function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');

```

```

end

function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
global m n
m=str2double(get(handles.edit1,'string'));
n=str2double(get(handles.edit2,'string'));
FilasColumns=zeros(m,n);
set(handles.edit4,'string',n);
set(handles.uitable1,'Data',FilasColumns,'columnEditable',true)
set(handles.uitable1,'ColumnWidth',{60})
strArray = java_array('java.lang.String',n);
for i=1:n
cad=sprintf('E%d',i);
cadD=sprintf('E%d',i);
strArray(i) = java.lang.String(cad);
end
cellArray = cell(strArray);
set(handles.uitable1,'columnName',cellArray);
FilasColumns=zeros(n,2);
set(handles.uitable3,'Data',FilasColumns,'columnEditable',true)
strArray = java_array('java.lang.String',n);
for i=1:n
cad=sprintf('w%d',i);
strArray(i) = java.lang.String(cad);
end
cellArray = cell(strArray);
cellArrayDD = cell(strArray);
set(handles.uitable3,'RowName',cellArray)
set(handles.uitable3,'ColumnWidth',{60})
set(handles.edit7,'string','');
set(handles.edit8,'string','');
set(handles.edit9,'string','');
function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit4_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit4_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

```

```

if ispc && isequal (get (hObject, 'BackgroundColor'),
get (0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set (hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end

function pushbutton2_Callback (hObject, eventdata, handles)
global k n
k = str2double (get (handles.edit3, 'string'));
n = str2double (get (handles.edit4, 'string'));
FilasColumnas = zeros (k, n);
set (handles.uitable2, 'Data', FilasColumnas, 'ColumnEditable', true);
set (handles.uitable2, 'ColumnWidth', {60})
set (handles.edit4, 'string', n)
strArray = java_array ('java.lang.String', n);
strArrayDD = java_array ('java.lang.String', n);
for i = 1:n
cad = sprintf ('F%d', i);
strArray (i) = java.lang.String (cad);
end
cellArray = cell (strArray); %array de celdas
set (handles.uitable2, 'columnName', cellArray)
set (handles.edit7, 'string', '');
set (handles.edit8, 'string', '');
set (handles.edit9, 'string', '');
function edit2_ButtonDownFcn (hObject, eventdata, handles)
function edit5_Callback (hObject, eventdata, handles)
function edit5_CreateFcn (hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal (get (hObject, 'BackgroundColor'),
get (0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set (hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end
function edit6_Callback (hObject, eventdata, handles)
function edit6_CreateFcn (hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal (get (hObject, 'BackgroundColor'),
get (0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set (hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end
function edit7_Callback (hObject, eventdata, handles)

function edit7_CreateFcn (hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal (get (hObject, 'BackgroundColor'),
get (0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set (hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end
function edit8_Callback (hObject, eventdata, handles)
function edit8_CreateFcn (hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal (get (hObject, 'BackgroundColor'),
get (0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set (hObject, 'BackgroundColor', 'white');

```

```

end
function edit9_Callback(hObject, eventdata, handles)
function edit9_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal (get (hObject, 'BackgroundColor'),
get (0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set (hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end
function edit10_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit10_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal (get (hObject, 'BackgroundColor'),
get (0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set (hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end
function pushbutton3_Callback(hObject, eventdata, handles)
global m k n
E=get(handles.uitable1,'data');
F=get(handles.uitable2,'data');
Wi=get(handles.uitable3,'data');
gammav1=str2double(get(handles.edit5,'string'));
gammav2=str2double(get(handles.edit6,'string'));
EF=[E;-F];
ide=eye(m+k);
eE=-ones(m,1);
eF=ones(k,1);
e=[eE;eF];
A=[EF ide e];
AB=[EF ide e];
A=-A;
B=ones(m+k,1);
B=-B;
fw=zeros(n,1);
fE=(1/m)*ones(m,1);
fF=(1/k)*ones(k,1);
fgamma=zeros(1,1);
f=[fw; fE; fF; fgamma];
lb=[Wi(:,1);zeros(m+k,1);gammav1];
ub=[Wi(:,2);inf*ones(m+k,1);gammav2];
options = optimset('LargeScale', 'off', 'Simplex', 'on');
[xp,fval,exitflag,output,lambda]=linprog(f,A,B,[],[],lb,ub,[],options);
disp('xp(1,3)= ');
xp(3,1);
[p q]=size(xp);
xn=length(xp);
g=xp(xn);
cad1='';
for i=1:n
cad2=sprintf('w%d = %6.3f\n',i,xp(i));
cad1=[cad1 cad2];
end

```

```

cad3='';
fori=n+1:m+n
cad4=sprintf('y%d = %6.3f\n',i-n, xp(i));
cad3=[cad3 cad4];
end
cad5='';
fori=m+n+1:m+n+k
cad6=sprintf('z%d = %6.3f\n',i-m-n, xp(i));
cad5=[cad5 cad6];
end
cad7=sprintf('gamma = %6.3f\n', xp(m+n+k+1));
cadena=[cad1 cad3 cad5 cad7];
set(handles.edit7,'string',cadena);
set(handles.edit8,'string',g)
symsx1x2x3x4x5x6x7x8x9x10
switch n
case 2
ecu=xp(1)*x1+xp(2)*x2;
digits4
    textol=char(vpa(ecu));
texto2=sprintf(' = %6.3f',g);
ecuacion=[textol texto2];
set(handles.edit9,'string',ecuacion);
case 3
ecu=xp(1)*x1+xp(2)*x2+xp(3)*x3;
digits4
    textol=char(vpa(ecu));
texto2=sprintf(' = %6.3f',g);
ecuacion=[textol texto2];
set(handles.edit9,'string',ecuacion);
case 4
ecu=xp(1)*x1+xp(2)*x2+xp(3)*x3+xp(4)*x4;
digits4
    textol=char(vpa(ecu));
texto2=sprintf(' = %6.3f',g);
ecuacion=[textol texto2];
set(handles.edit9,'string',ecuacion);
case 5
ecu=xp(1)*x1+xp(2)*x2+xp(3)*x3+xp(4)*x4+xp(5)*x5;
digits4
    textol=char(vpa(ecu));
texto2=sprintf(' = %6.3f',g);
ecuacion=[textol texto2];
set(handles.edit9,'string',ecuacion);
case 6
ecu=xp(1)*x1+xp(2)*x2+xp(3)*x3+xp(4)*x4+xp(5)*x5+xp(6)*x6;
digits4
    textol=char(vpa(ecu));
texto2=sprintf(' = %6.3f',g);
ecuacion=[textol texto2];
set(handles.edit9,'string',ecuacion);

```

```

end
function edit11_Callback(hObject, eventdata, handles)
function edit11_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal (get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end
function pushbutton4_Callback(hObject, eventdata, handles)
global m k n
E=get(handles.uitable1, 'data');
F=get(handles.uitable2, 'data');
Wi=get(handles.uitable3, 'data');
gammav1=str2double(get(handles.edit5, 'string'));
gammav2=str2double(get(handles.edit6, 'string'));
EF=[E;-F];
ide=eye(m+k);
eE=-ones(m,1);
eF=ones(k,1);
e=[eE;eF];
A=[EF ide e];
A=-A;
B=ones(m+k,1);
B=-B;
fw=zeros(n,1);
fE=(1/m)*ones(m,1);
fF=(1/k)*ones(k,1);
fgamma=zeros(1,1);
f=[fw; fE; fF; fgamma];
lb=[Wi(:,1); zeros(m+k,1); gammav1];
ub=[Wi(:,2); inf*ones(m+k,1); gammav2];
options = optimset('LargeScale', 'off', 'Simplex', 'on');
[xp, fval, exitflag, output, lambda]=linprog(f,A,B,[],[],lb,ub,[],options);
xn=length(xp);
a=[E;F];
if n==2
    ax1=figure(2);
    cla(ax1);
    xx=min(a(:,1)):0.1:max(a(:,1));
    yy=(xp(xn)-(xp(1))*xx)/xp(2);
    graf1=plot(xx,yy,E(:,1),E(:,2),'o');
    set(graf1,'LineWidth',2,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','y',
'MarkerSize',5)
    hold on
    graf2=plot(F(:,1),F(:,2),'o');
    set(graf2,'LineWidth',2,'MarkerEdgeColor','b','MarkerFaceColor','g',
'MarkerSize',5)
    axisequal
    grid on
    hold off
end

```

```

if n==3
    ax1=figure(2);
    cla(ax1);
    xx=min(a(:,1)):0.1:max(a(:,1));
    yy=min(a(:,2)):0.1:max(a(:,2));
    [XX YY]=meshgrid(xx,yy);
    ZZ=(xp(xn)-xp(1).*XX-xp(2).*YY)/xp(3);
    mesh(XX,YY,ZZ);
    holdon
    graf1=plot3(E(:,1),E(:,2),E(:,3),'o');
    set(graf1,'LineWidth',2,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','y',
        'MarkerSize',5)
    graf2=plot3(F(:,1),F(:,2),F(:,3),'o');
    set(graf2,'LineWidth',2,'MarkerEdgeColor','b','MarkerFaceColor','g',
        'MarkerSize',5)
    axisequal
    gridon
    holdoff
end
function edit12_Callback(hObject, eventdata, handles)
function edit12_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
    get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit13_Callback(hObject, eventdata, handles)
function edit13_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
    get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function pushbutton5_Callback(hObject, eventdata, handles)
global m n k
[FileName,PathName] = uigetfile('*.mat','Seleccione un archivo
MATLAB');
datosxy_estructura=load(FileName);
datosxy_celda = struct2cell(datosxy_estructura);
datosxy_matriz = cell2mat(datosxy_celda);
set(handles.uitable1,'data',datosxy_matriz);
set(handles.uitable1,'ColumnWidth',{60});
[m,n]=size(datosxy_matriz);
set(handles.edit1,'string',m);
set(handles.edit2,'string',n);
set(handles.edit4,'string',n);
FilasColumnas=zeros(n,2);
set(handles.uitable3,'Data',FilasColumnas,'columneditable',true);
set(handles.uitable3,'ColumnWidth',{60});
strArray = java_array('java.lang.String',n);
for i=1:n
    cad=sprintf('w%d',i);
    strArray(i) = java.lang.String(cad);

```

```

end
cellArray = cell(strArray);
set(handles.uitable3,'RowName',cellArray)
set(handles.edit7,'string','');
set(handles.edit8,'string','');
set(handles.edit9,'string','');
for i=1:n
cad=sprintf('E%d',i);
strArray(i) = java.lang.String(cad);
end
cellArray = cell(strArray);
set(handles.uitable1,'columnName',cellArray)
function pushbutton6_Callback(hObject, eventdata, handles)
xy1=get(handles.uitable1,'data');
uisave({'xy1'},'var1');
function pushbutton7_Callback(hObject, eventdata, handles)
global m n k
[FileName,PathName] = uigetfile('*.mat','Seleccione un archivo
MATLAB');
datosxy_estructura=load(FileName);
datosxy_celda = struct2cell(datosxy_estructura);
datosxy_matriz = cell2mat(datosxy_celda);
set(handles.uitable2,'data',datosxy_matriz);
set(handles.uitable2,'ColumnWidth',{60});
[k,n]=size(datosxy_matriz);
set(handles.edit3,'string',k);
set(handles.edit7,'string','');
set(handles.edit8,'string','');
set(handles.edit9,'string','');
fori=1:n
cad=sprintf('F%d',i);
strArray(i) = java.lang.String(cad);
end
cellArray = cell(strArray);
set(handles.uitable2,'columnName',cellArray)
function pushbutton8_Callback(hObject, eventdata, handles)
xy2=get(handles.uitable2,'data');
uisave({'xy2'},'var2');

```

## ANEXO 3

### **SIMULACRO DE ORIENTACIÓN VOCACIONAL EN LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PARTICULAR ALEXANDER FLEMING – TACNA.**

SOLICITA: AUTORIZAR PRUEBA DE SELECCIÓN  
PARA ORIENTACIÓN VOCACIONAL

SEÑORA DIRECTORA DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PARTICULAR “ALEXANDER FLEMING”–  
TACNA.

Eleocadio Dionisio Tirado paz, Identificado con DNI No. 17982254, domiciliado en Asoc. Viv. Eduardo Pérez Gamboa. Mz. E lote 26. Gregorio Albarracín, Maestrante de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann. Con el respeto que Ud. se merece me presento y

**Expongo:**

Que con la finalidad de obtener el Grado Académico de Maestro en Ciencias con mención en Computación e Informática, he presentado mi Plan de Tesis titulado:

***“Diseño de un algoritmo computacional para separar los elementos de un conjunto mediante programación lineal”.***

En el que se ha incluido una Prueba de Selección sobre Orientación Vocacional, pero solo en dos Canales (Ciencias e Ingenierías; Letras y Humanidades), según sus aptitudes y conocimientos, a los alumnos de 5º año de secundaria de la Institución Educativa Particular “Alexander Fleming”, la cual dignamente dirige. Por lo que solicito tenga a bien autorizarme la aplicación de dicha prueba (indicándome la hora y fecha), lo cual solo es con fines académicos y cuyos resultados serán informados a su despacho.

**Por lo Expuesto:**

Ruego a Ud. acceder a mi petición para poder lograr mis objetivos.

Tacna, 05 de noviembre del 2012

---

Eleocadio Dionisio Tirado paz

**PRUEBA DE SELECCIÓN: CIENCIAS E INGENIERÍAS – LETRAS Y HUMANIDADES**

Nombre completo del estudiante: \_\_\_\_\_ sección: \_\_\_\_\_

**HISTORIA**

- ¿Quién consolidó la independencia del Perú?  
 A) Don José de San Martín B) Simón Bolívar  
 C) José de Sucre D) La Serna  
 E) Andrés Abelino Cáceres
- El nombre verdadero de Tupac Amaru II fue:  
 A) Sayri Túpac Inca B) Garcilaso Inca de la Vega C)  
 José Mateo Pumacahua D) José Gabriel  
 Condorcanqui E) José de la Riva Agüero

**GEORAFÍA**

- La meseta de Bombón se encuentra en:  
 A) Junín B) Ayacucho C) Puno D) Pasco E) Ilo.
- ¿Qué departamento tiene como límites: Ecuador, Tumbes, Lambayeque, Cajamarca, Océano Pacífico?  
 A) Ancash B) San Martín C) La Libertad  
 D) Piura E) Loreto

**RAZONAMIENTO VERBAL**

- Marque la analogía correcta: Golpe-Enojó  
 A) Hombre-Mujer B) amor-edad  
 C) copa-vino D) caricia - cariño  
 E) amor - beso

**ECONOMÍA**

- Cantidad de un determinado producto que necesita la población para cubrir su necesidad. Define a:  
 A) la oferta B) punto de equilibrio C) demanda  
 D) economía E) globalización

**LENGUAJE Y LITERATURA**

- Señale la obra literaria que no es de José Carlos Mariátegui.  
 A) “La escena contemporánea”  
 B) “Horas de Lucha”  
 C) “Siete ensayos de interpretación de la realidad peruana”  
 D) “La novela y la vida” E) “Defensa del Marxismo”
- En la expresión ¡Qué bonito día! predomina la función:  
 A) Poética B) Fática C) Metalingüística  
 D) Expresiva E) Referencial

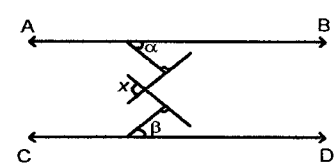
**BIOLOGÍA**

- ¿Cuál o cuáles son los huesos de la pierna? A)  
 Fémur B) peroné C) tibia y cúbito D) tibia y  
 peroné E) cubito y radio
- Base nitrogenada que no se encuentra en el Ácido Ribonucleico:  
 A) Uracilo B) Timina C) Citocina D) guanina  
 E) Adenina.

**QUÍMICA**

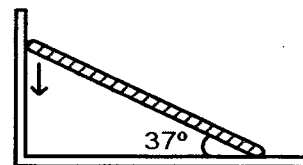
- El compuesto químico,  $H_2S O_3$ , es llamado ácido:  
 A) Persulfúrico B) Sulfúrico C) Selenioso D)  
 Hiposulfúrico E) Sulfuroso
- Si el elemento x con A=70 y Z=38, libera cinco partículas alfa y una partícula beta ¿Qué nuevo elemento se formaría?  
 A)  $^{50}_{21}y$  B)  $^{52}_{21}y$  C)  $^{58}_{29}y$  D)  $^{50}_{12}y$  E)  $^{50}_{31}y$

**RAZ. MAT., ARIT-ÁLG, GEOM-TRÍG.**

- Cuando A nació, B tenía 8 años y cuando C nació, A tenía 11 años. Ahora las edades de los tres suman 39 años. ¿Cuántos años tiene el mayor?  
 a) 18 b) 20 c) 24 d) 21 e) 22
- Si  $P(x+1)=x^2+3x+2$ , Además  $P(P(y))= 42$ ; hallar “y”  
 A) 4 B) 5 C) 3 D) 1 E) 2
- $E = [\sqrt{x-y}\sqrt{x+y}]^2 + y^2$ . Si  $x=2$ ; E vale:  
 A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) falta el valor de y.
- Sea el conjunto unitario  
 $R = \{3a + 3; a + 2b + 1; 12\}$   
 Hallar  $a - b$   
 A) 1 B) 3 C) 2 D) -1 E) 4
- Si  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ , además  $\alpha + \beta = 140^\circ$ . Calcular “x”.  


- a)  $40^\circ$  b)  $50^\circ$  c)  $60^\circ$  d)  $70^\circ$  e)  $30^\circ$

- El gráfico muestra una barra de 10 metros de longitud, que forma  $37^\circ$  con el piso. Si su extremo superior se desliza verticalmente 1 metro hacia el piso. ¿Qué ángulo formará ahora con el piso?



- a)  $15^\circ$  b)  $30^\circ$  c)  $45^\circ$  d)  $33^\circ$  e)  $46^\circ$

**INFORME No 01**  
**17 de diciembre de 2012**

A la : SEÑORA MARINA GAVANCHO DE SUPO DIRECTORA DE  
LA I. E. P. ALEXANDER FLEMING - TACNA

Del : Lic. Eleocadio Dionisio Tirado Paz  
Maestrante EPG - UNJBG.

Asunto: Resultados de Examen de Orientación Vocacional.

---

Mediante el presente me dirijo a Ud. para saludarlo y a la vez informarle los resultados del examen aplicado a los alumnos del 5to Año de Secundaria del Colegio que dignamente dirige. Y debido a nuestros estudios realizados, las proyecciones referentes a la Orientación Vocacional son las que se adjuntan; sugiriendo se haga de conocimiento a los estudiantes.

Es cuanto informo debo informar.

---

Eleocadio Tirado Paz  
DNI 17982254

**TABLA A1:** Muestra los resultados de la evaluación y consecuentemente las recomendaciones de seguir estudios superiores en carreras de ciencias o de letras.

ESCUELA DE POSGRADO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN – I.E.P.  
ALEXANDER FLEMING

*"Diseño de un algoritmo computacional para separar los elementos de un conjunto mediante programación lineal".*

RESULTADO Y RECOMENDACIONES - PRUEBA DE SELECCIÓN: CIENCIAS E INGENIERIAS – LETRAS Y HUMANIDADES

O. M.	NOMBRES	Asignaturas CIENCIAS	Asignaturas LETRAS	CLASE
1	Jean Pacci Alanoca	18	16	C <sub>1</sub>
1	Josemanuel MoralesGutierrez	19	15	C <sub>1</sub>
3	Melitón Cruz Rosales	14	17	C <sub>1</sub>
4	Abad Pari Quispe	14	16	C <sub>1</sub>
5	Hugo Cutipa Ayma	12	17	C <sub>2</sub>
5	Heydy Carita Sagua	15	14	C <sub>1</sub>
7	Sergio Vicente Melchor	13	15	C <sub>2</sub>
7	Nilton Alférez Roque	13	15	C <sub>2</sub>
9	Eduardo Eyzaguirre Garcia	13	14	C <sub>1</sub>
9	Pamela Eulogio Bejarano	13	14	C <sub>1</sub>
9	Heydar Cutipa Copaja	15	12	C <sub>1</sub>
9	Ivonne Huayta Ramos	13	14	C <sub>1</sub>
13	Anthony Tongo Cruz	12	14	C <sub>2</sub>
13	Yino B. Muñoz	11	15	C <sub>2</sub>
13	Antonio Condori Ramos	11	15	C <sub>2</sub>
13	José Mamani Herrera	11	16	C <sub>2</sub>
13	Jorge Mamani Mamani	13	13	C <sub>1</sub>
13	Gianella Gutiérrez Delgado	13	13	C <sub>1</sub>
19	Javier Mamani Chambilla	11	14	C <sub>2</sub>
19	Juan Mamani Tito	12	13	C <sub>2</sub>
19	Juana Zuazo Nassi	11	14	C <sub>2</sub>
22	Bryan Merma Parado	11	13	C <sub>2</sub>
22	Natalia Salinas Castro	11	13	C <sub>2</sub>
22	Mel Vera Choque	11	13	C <sub>2</sub>
22	Yan Mamani Ingaluque	12	12	C <sub>2</sub>
26	Lorena Uchasara Jiménez	11	12	C <sub>2</sub>

O.M. Orden de mérito.

C<sub>1</sub>: Debe seguir sus estudios profesionales en carreras de ciencias e ingeniería.

C<sub>2</sub>: Debe seguir sus estudios profesionales en carreras de letras y humanidades.

**Fuente:** Elaboración propia.