

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN - TACNA
ESCUELA DE POSGRADO
MAESTRÍA EN COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA

PROGRAMA DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO
PARA ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES
PARABÓLICAS CON FRONTERA CONVEXA

TESIS

Presentado por:

Lic. WILDER ROGER MIÑANO LEÓN

Para optar el Grado Académico de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MAGISTER SCIENTIAE) CON
MENCIÓN EN COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA

TACNA - PERÚ


2012

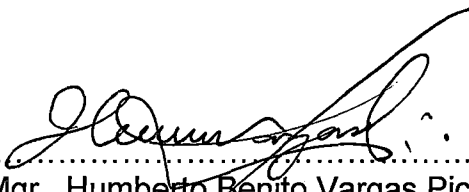
UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN – TACNA
ESCUELA DE POSGRADO


MAESTRÍA EN COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA

**PROGRAMA DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO
PARA ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES
PARÁBOLICAS CON FRONTERA CONVEXA**

Tesis sustentada y aprobada el 14 de SETIEMBRE del 2012; estando el jurado calificador integrado por:

PRESIDENTE : 
.....
Dr. Rolando Wilman Vásquez Jaico

SECRETARIO : 
.....
Mgr. Humberto Benito Vargas Pichón

MIEMBRO : 
.....
Mgr. Segundo Manuel Alvarado Contreras

ASESOR : 
.....
M.Sc. Javier Lozano Marreros

AGRADECIMIENTO Y DEDICATORIA

Quiero agradecer a Dios por darme la oportunidad de seguir viviendo y por darme la fortaleza para llegar hasta donde he llegado.

Dedico esta tesis con mucho amor:

A mis padres Elvia y Dante, quienes me dieron la vida. Gracias mamá por apoyarme en todo momento y por creer en mí.

A mi hermana Sonia, a la que quiero mucho y felicito porque pone todo su empeño en salir adelante, a pesar de todas las dificultades que la vida le ha puesto.

A mi esposa Yoisi, a mis hijos Kevin y Alessandro, a quienes amo mucho, están a mi lado dándome la fuerza para seguir adelante y son la razón de mi vida.

Wilder

CONTENIDO

	Pág.
RESUMEN.....	ix
ABSTRACT	xi
INTRODUCCIÓN.....	01
1. CAPÍTULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	02
1.1. Planteamiento del Problema	02
1.2. Justificación e Importancia del Problema.....	17
1.3. Objetivos de la investigación.....	19
1.4. Hipótesis General.....	20
1.5. Hipótesis Específica	20
2. CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO.....	21
2.1. Antecedentes.....	21
2.2. Integral de Línea	22
2.3. Cálculo de una integral de línea como integral definida.....	24
2.4. Ecuaciones Diferenciables Ordinarias	25
2.5. Ecuaciones diferenciales y modelos matemáticos	26
2.6. Existencia y Unicidad de una Ecuación Diferenciable Ordinaria..	28
2.7. Problemas de valor inicial y de frontera	29
2.8. Problema de valor inicial.....	29
2.9. Problemas con valores en la frontera	30
2.10. Método de diferencias finitas para los problemas lineales.....	32

2.11.	Derivadas parciales	37
2.12.	Definición de la derivada direccional	38
2.13.	Gradiente	38
2.14.	Ecuaciones en derivadas parciales	39
2.15.	Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.....	41
2.16.	Ecuaciones diferenciales parciales parabólicas	43
2.17.	Condiciones auxiliares; problemas bien planteados	44
2.18.	Condiciones de frontera.....	44
2.19.	Condiciones iniciales	45
2.20.	Método de diferencias finitas	45
2.21.	Cálculo de variaciones.....	51
2.22.	Distancia mínima entre dos puntos de un plano.....	55
2.23.	Métodos variacionales	57
2.24.	Método de Rayleigh-Ritz.....	61
2.25.	Método del Elemento Finito para Ecuaciones Diferenciales Parciales Parabólicas.....	67
3.	CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO.....	76
3.1.	Identificación de variables	76
3.2.	Definición operacional de las variables	76
3.3.	Definición Conceptual de la variable independiente	77
3.4.	Definición Conceptual de la variable dependiente	78
3.5.	El software MATLAB	79
4.	CAPÍTULO IV: RESULTADOY DISCUSIÓN.....	80
4.1.	Resultados de la Investigación	80
4.2.	Discusión de resultatos.....	113

4.3. Programa del Método del Elemento Finito para EDP Parabólicas con Frontera Convexa.....	114
CONCLUSIONES.....	128
RECOMENDACIONES.....	129
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	130

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA I.	Solución de la Ecuación Diferencial Parcial Parabólica del problema 4.1.....	87
TABLA II.	Comparación de la solución aproximada y solución exacta del problema 4.1	94
TABLA III.	Obtención de la condición inicial del problema 4.2.....	107
TABLA IV.	Comparación de la solución aproximada y solución exacta del problema 4.2.....	113

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Partición de la curva C	23
Figura 2.2: Proceso de formulación de modelos matemáticos	27
Figura 2.3: Problema de valor de frontera	31
Figura 2.4: Malla en el plano	46
Figura 2.5: Condiciones de frontera 1	48
Figura 2.6: Condiciones de frontera 2	48
Figura 2.7: Puntos de aproximación	49
Figura 2.8: Puntos de evaluación.....	51
Figura 2.9: Puntos de evaluación	55
Figura 4.1.1: Construcción de la región del problema 4.1	85
Figura 4.1.2: Ingreso de puntos (vértices).....	85
Figura 4.1.3: Region del problema 4.1.....	86
Figura 4.1.4: Dominio discretizado	87
Figura 4.1.5: Condiciones de frontera	88
Figura 4.1.6: Condición de frontera para $L1$	88
Figura 4.1.7: Condición de frontera para $L2$	89
Figura 4.1.8: Condición de frontera para $L3$	89
Figura 4.1.9: Condición de frontera para $L4$	90
Figura 4.1.10: Condición inicial.....	90
Figura 4.1.11: Ingreso de los valores de t para el problema 4.1	90
Figura 4.1.12: Constante de la EDP	91
Figura 4.1.13: Solución del problema 4.1.....	92
Figura 4.1.14: Gráfica de la superficie del problema 4.1.....	92
Figura 4.1.15: Gráfica de la superficie en forma de malla	93
Figura 4.1.16: Gráfica de la solución exacta del problema 4.1	93

Figura 4.2.1. Construcción de la región del problema 4.2.....	94
Figura 4.2.2: Ingreso de puntos (vértices).....	95
Figura 4.2.3: Región del problema 2	96
Figura 4.2.4: Dominio discretizado del problema 4.2.....	97
Figura 4.2.5.: Condiciones de frontera.....	97
Figura 4.2.6. Condición de frontera para L1	98
Figura 4.2.7. Condición de frontera para L2	98
Figura 4.2.8: Condición de frontera para L3.....	99
Figura 4.2.9: Condición de frontera para L4	99
Figura 4.2.10: Condición inicial.....	100
Figura 4.2.11: Ingreso de los valores de t para el problema 4.2	100
Figura 4.2.12: Condiciones constantes del EDP.....	100
Figura 4.2.13: Solución del problema 4.2.....	101
Figura 4.2.14: Gráfica de la superficie del problema 4.2.....	101
Figura 4.2.15: Gráfica de la superficie en forma de malla	102
Figura 4.2.16: Gráfica de la solución exacta del problema 4.2	102
Figura 4.3.1. Construcción de la región del programa 4.3.....	103
Figura 4.3.2. Ingreso de puntos (vértices).....	104
Figura 4.3.3. Región del problema 4.3.....	105
Figura 4.3.4. Dominio discretizado del problema 4.3.....	106
Figura 4.3.5. Condiciones de frontera.....	106
Figura 4.3.6. Condiciones de frontera para L1.....	107
Figura 4.3.7. Condiciones de frontera para L2.....	108
Figura 4.3.8. Condiciones de frontera para L3.....	108
Figura 4.3.9. Condiciones de frontera para L4.....	108
Figura 4.3.10. Condición inicial.....	109
Figura 4.3.11. Ingreso de los valores de t para el problema 4.3.....	109
Figura 4.3.12. Constantes de la EDP.....	109

Figura 4.3.13. Solución del problema 4.3. aplicando el programa.....	110
Figura4.3.14. Gráfica de la superficie del problema 4.3. obtenida con el programa.....	111
Figura 4.3.15. Gráfica de la superficie en forma de malla obtenida con el programa.....	111
Figura 4.3.16. Gráfica de la solución exacta del problema 4.3 obtenida en MATLAB.....	112

RESUMEN

Las soluciones analíticas o exactas para las **ecuaciones diferenciales parciales** requieren de un gran esfuerzo y complejidad matemática. En la actualidad muchos de estos problemas se resuelven utilizando un software de computadora. Las asignaturas de métodos numéricos, análisis numérico o cálculo numérico, tratan problemas sobre ecuaciones diferenciales parciales y utiliza algunos métodos, como los de diferencias finitas que son los más difundidos y en menor escala utilizan los elementos finitos.

Muchos problemas físicos se formulan sobre regiones cuya frontera es convexa. Condiciones de contorno de este tipo son difíciles de manejar usando técnicas de diferencias finitas porque en cada condición de frontera que incluya una derivada, esta debe ser aproximada mediante un cociente de diferencias en los puntos de red y la forma convexa de la frontera hace que sea difícil situar los puntos de la malla.

El **método del elemento finito** nos da una alternativa que es más adecuada para hallar la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica, pero si el desarrollo del problema se realiza en forma analítica

representa un largo y tedioso trabajo. Lo ideal es desarrollar un programa que permita hallar la solución del problema.

Si utilizamos un programa del método del elemento finito optimizamos el proceso de hallar la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica con frontera convexa. Este trabajo muestra un programa que encuentra la solución de una ecuación diferencial parabólica utilizando el método del elemento finito y está codificado en el lenguaje de programación MATLAB.

ABSTRACT

Exact or the analytical solutions to partial differential equations require great effort and mathematical complexity. At the present many of these problems are solved using a computer software. The subjects of numerical methods or numerical analysis or numerical calculation, deal with problems on partial differential equations and uses some methods such as finite differences that are most widespread and on a smaller scale using finite elements.

A lot physical problems are formulated on regions whose border is convex. Boundary conditions of this type are difficult to handle using finite difference techniques because each boundary condition that includes a derivative, it must be approximated by a quotient of differences in network points and the convex shape of the boundary makes it difficult to place the points of the mesh.

The finite element method gives us an alternative that is more suitable for find the solution of parabolic partial differential equation, but if the development of the problem is done in analytical form represents a long

and tedious work. The ideal is to develop a program that can find the solution of the problem.

If we use a program of finite element method optimized the process of finding the solution of a parabolic partial differential equation with boundary convex. This work shows a program that finds the solution of parabolic differential equations using the finite element method is coded in the MATLAB programming language.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación tiene el propósito de implementar un algoritmo del elemento finito para encontrar solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas en un lenguaje de programación.

El método utilizado es el del elemento finito que divide el dominio de la solución en regiones con formas sencillas o “elementos” en lugar de una malla rectangular, proporcionando una mejor aproximación en la solución para sistemas con forma convexa. Incluye las condiciones de frontera como integrales en una funcional que va a reducirse al mínimo, de modo que el procedimiento de construcción es independiente de las condiciones particulares de frontera del problema.

El objetivo central de dicha investigación es utilizar el lenguaje de programación MATLAB para implementar el algoritmo computacional del método del elemento finito que optimice el tratamiento de datos en la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica con frontera convexa.

CAPÍTULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿Cómo se desarrolla el método del elemento finito de un algoritmo computacional para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas el cual se implementará con el lenguaje de programación MATLAB?

¿Cuál es el desarrollo del algoritmo del elemento finito para la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas analíticamente?

¿Cómo se compilan los aspectos teóricos para desarrollar el algoritmo del método del elemento finito para la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas?

¿Cómo se implementa el algoritmo del elemento finito para la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas en lenguaje de programación MATLAB?

Descripción del problema

Antes de la era de las computadoras digitales, se dependía de las soluciones analíticas o exactas para las ecuaciones diferenciales parciales. Dichas soluciones requerían de un gran esfuerzo y complejidad matemática para hallar la solución de una ecuación diferencial parcial, como por ejemplo el método de separación de variables.

Método de separación de variables

Las ecuaciones diferenciales parciales se clasifican en dos tipos, lineal y no lineal. Si consideramos, por ejemplo, dos variables independientes x y y la variable dependiente U , una ecuación lineal tiene la forma

$$\phi(D_x; D_y)U = F(x, y) \quad (1.1)$$

donde el operador $\phi(D_x; D_y)$ es un polinomio en los dos operadores

$$D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}; \quad D_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.2)$$

teniendo coeficientes que son funciones de las variables independientes x y y solamente. Si estos coeficientes son constantes, llamamos la ecuación una ecuación lineal con

coeficientes constantes; en otro caso es una ecuación con coeficientes variables. Una ecuación diferencial parcial no lineal, es una que no es lineal.

Ejemplo 1.1.

Si $\phi = D_x^2 + 4D_xD_y - 2D_y^2 - 3D_x + 5$, $F(x; y) = x^3 - e^y$,

entonces (1.1) llega a ser

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial U}{\partial x} + 5U = x^3 - e^y$$

la cual es una ecuación diferencial parcial lineal con coeficientes constantes.

Ejemplo 1.2.

Si $\phi = xD_x + yD_y$, $F(x; y) = 1$, entonces (1.1) llega a ser

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} = 1$$

la cual es una ecuación diferencial parcial lineal con coeficientes variables.

Ejemplo 1.3.

La ecuación $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = 3x - 2y$ es una ecuación diferencial parcial no lineal, puesto que no puede expresarse en la forma (1.1).

PROPOSICIÓN 1.1. Considere la ecuación diferencial parcial lineal

$$\phi(D_x; D_y; \dots)U = F(x; y; \dots) \quad (1.3)$$

donde x, y, \dots son variables independientes y $\phi(D_x; D_y; \dots)$ es un operador polinómico en $D_x; D_y; \dots$. Entonces la solución general de (1.3) es la suma de la solución general U_c de la ecuación complementaria.

$$\phi(D_x; D_y; \dots)U = 0 \quad (1.4)$$

y cualquier solución particular U_p de (1.3); esto es,

$$U = U_c + U_p \quad (1.5)$$

La solución general U_c de (1.4) a menudo se llama la solución complementaria de (1.3).

PROPOSICIÓN 1.2. Sean U_1, U_2, \dots soluciones de la ecuación

$$\emptyset(D_x; D_y; \dots)U = 0 \quad (1.6)$$

Entonces si $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ son constantes cualesquiera

$$U = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \dots \quad (1.7)$$

es también una solución. Esta proposición se le conoce como el principio de superposición.

Consideremos cómo podríamos resolver la ecuación (1.4). Cuando teníamos una ecuación diferencial ordinaria

$$\emptyset(D)y = 0 \quad (1.8)$$

con coeficientes constantes, usamos la sustitución $y = e^{mx}$, la cual conducía a la ecuación auxiliar o ecuación característica para determinar la constante m . Para el caso (1.6) con coeficientes constantes, por analogías deberíamos asumir como solución $U = e^{ax+by+\dots}$ y tratar de determinar las constantes a, b, \dots . Aunque esto tiene éxito en algunos casos, un enfoque mejor es asumir una solución de la forma:

$$U = X(x)Y(y) \dots \text{ o brevemente } U = XY \dots \quad (1.9)$$

esto es, una función solo de x multiplicada por una función solo de y , y así sucesivamente, como se sugiere al escribir $U = e^{ax+by+\dots}$
 $U = e^{ax} \cdot e^{by} \dots$. El método de solución usando (1.9) con frecuencia se llama, **el método de separación variable**, el cual es útil para obtener soluciones de ecuaciones diferenciales parciales en casos de coeficientes constantes o variables.

PROBLEMA 1.1. Resuelva el problema de valor de frontera

$$\frac{\partial U}{\partial x} + 3 \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad U(0; y) = 4e^{-2y} + 3e^{-6y} \quad (1.10)$$

Para trabajar este problema asumamos que existen soluciones de la forma

$$U(x; y) = X(x)Y(y) \quad o \quad U = XY \dots \quad (1.11)$$

esto es, U se puede expresar como una función solo de x multiplicada por una función sólo de y de acuerdo con el método de separación de variables. Usando (1.11) en la ecuación diferencial de (1.10), tenemos, si $X' = dX/dx$, $Y' = dY/dy$,

$$X'Y + 3XY' = 0 \quad o \quad \frac{X'}{3X} + \frac{Y'}{Y} = 0 \quad (1.12)$$

al dividir ambos lados por $3XY$ (asumido no cero). Suponga ahora que escribimos (1.12) en la forma

$$\frac{X'}{3X} = -\frac{Y'}{Y} \quad (1.13)$$

Vemos entonces que un lado depende sólo de x , mientras que el otro lado depende sólo de y . Puesto que x y y son variables independientes, ellas no dependen entre si, y por tanto (1.13) puede ser cierta si y sólo si cada lado de la ecuación (1.13) es igual a la misma constante, que llamamos c . De (1.13) tenemos por tanto

$$X' - 3cX = 0, \quad Y' + cY = 0 \quad (1.14)$$

Estas ecuaciones tienen soluciones, respectivamente, dadas por

$$X = a_1 e^{3cx}, \quad Y = a_2 e^{-cy} \quad (1.15)$$

Así de (1.11)

$$U = XY = a_1 a_2 e^{c(3x-y)} = B e^{c(3x-y)} \quad (1.16)$$

donde $B = a_1 a_2$ es una constante. Si ahora usamos la condición en (1.10), debemos tener

$$B e^{-cy} = 4e^{-2y} + 3e^{-6y} \quad (1.17)$$

Desafortunadamente, (1.17) no puede ser cierta para ninguna solución de las constantes B y c , parecería como si el método fallara.

Por supuesto, si tuviéramos sólo uno de los términos a la derecha del (1.17), el método funcionaría. Así, si tuviéramos sólo $4e^{-2y}$, por ejemplo, tendríamos $Be^{-cy} = 4e^{-2y}$, lo cual se satisfaría si $B = 4$ y $c = 2$, y conduciría a la solución deseada de (1.16) dada por:

$$U = 4e^{2(3x-y)}.$$

La situación se salva, sin embargo, si usamos la **proposición 1.2.** sobre la superposición de soluciones. De (1.16) se ve que $U_1 = b_1e^{c_1(3x-y)}$ y $U_2 = b_2e^{c_2(3x-y)}$ son ambas soluciones, y así debemos tener también como solución:

$$U = b_1e^{c_1(3x-y)} + b_2e^{c_2(3x-y)} \quad (1.18)$$

La solución de frontera de (1.10) nos lleva a:

$$b_1e^{-c_1y} + b_2e^{-c_2y} = 4e^{-2y} + 3e^{-6y}$$

la cual se satisface si escogemos:

$$b_1 = 4, \quad c_1 = 2, \quad b_2 = -3, \quad c_2 = 6$$

Esto lleva a la solución deseada (1.18) dada por

$$U = 4e^{2(3x-y)} - 3e^{6(3x-y)} \quad (1.19)$$

Ejemplo ilustrativo 1.1.

Resuelva el problema de valor de frontera:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$U(0; t) = 0, U(10; t) = 0, U(x, 0) = 50 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2} + 20 \operatorname{sen} 2\pi x - 10 \operatorname{sen} 4\pi x$$

Solución:

Aquí las variables independientes son x y t , así que sustituimos

$U = XT$ en la ecuación diferencial dada, donde X depende sólo de x y T depende sólo de t , encontrando:

$$\frac{\partial}{\partial t}(XT) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(XT) \quad \text{o} \quad XT' = 2X''T \quad (1.20)$$

donde:

$$X'' = d^2X/dx^2, \quad T' = dT/dt.$$

Escribiendo (1.20) como:

$$\frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X}$$

vemos que cada lado debe ser una constante denotada por c , así que:

$$T' - 2cT = 0, \quad X'' - cX = 0 \quad (1.21)$$

Ahora para escribir la solución de la segunda ecuación en (1.21), debemos saber si la constante c es positiva, negativa, o cero. Deberíamos así considerar tres casos.

Caso 1. $c = 0$. En este caso las soluciones a (1.21) están dadas por $T = c_1$ y $X = c_2x + c_3$, donde c_1, c_2, c_3 son constantes, así que una solución de la ecuación diferencial dada es:

$$U = XT = c_1(c_2x + c_3) = 0 \quad (1.22)$$

De la primera y segunda condiciones de frontera tenemos:

$$c_1c_3 = 0, \quad c_1(10c_2 + c_3) = 0 \quad (1.23)$$

Estas se satisfacen si $c_1 = 0$, pero en tal caso la solución es la trivial $U = 0$, la cual no puede satisfacer la tercera condición de frontera. Por tanto $c_1 \neq 0$. Sin embargo, en tal caso vemos de (1.23) que $c_3 = 0$, y así $c_2 = 0$, dando de nuevo $U = 0$. Vemos así que c no puede ser cero.

Caso 2. $c > 0$. Aquí las soluciones de (1.21) están dadas por:

$$T = c_1 e^{2ct}, \quad X = c_2 e^{\sqrt{c}x} + c_3 e^{-\sqrt{c}x}$$

lo cual da: $U = XT = e^{2ct}(Ae^{\sqrt{c}x} + Be^{-\sqrt{c}x})$

donde: $A = c_1 c_2$, $B = c_1 c_3$

De la primera condición de frontera tenemos:

$$U(0; t) = e^{2ct}(A + B) = 0 \quad \text{o} \quad A + B = 0 \quad \text{y} \quad A = -B$$

puesto que e^{2ct} no puede ser cero. La solución, hasta ahora, está dada por:

$$U(x; t) = B e^{2ct} (e^{\sqrt{c}x} - e^{-\sqrt{c}x}) \quad (1.24)$$

De la segunda condición de frontera tenemos:

$$U(10; t) = B e^{2ct} (e^{10\sqrt{c}} - e^{-10\sqrt{c}}) = 0$$

Puesto que $e^{2ct} \neq 0$, entonces $B = 0$ ó $e^{10\sqrt{c}} - e^{-10\sqrt{c}} = 0$, esto es $e^{20\sqrt{c}} = 1$.

Ahora si $B = 0$, la solución (1.24) es la trivial $U = 0$, que por supuesto no puede satisfacer de frontera, la cual ni siquiera ha sido considerada todavía. También es imposible tener $e^{20\sqrt{c}} = 1$ para

valores positivos de c , puesto que para $c > 0$, $e^{20\sqrt{c}} > 1$. Este estado de cosas muestra que no podemos tener $c > 0$.

Caso 3. $c < 0$. Es conveniente en este caso escribir $c = -\lambda^2$ para mostrar que c es negativo. Entonces (1.21) llega a ser:

$$T' + 2\lambda^2 T = 0, \quad X'' + \lambda^2 X = 0$$

ó
$$T = c_1 e^{-2\lambda^2 t}, \quad X = c_2 \cos \lambda x + c_3 \operatorname{sen} \lambda x$$

Esto da:

$$U = XT = e^{-2\lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x)$$

Donde:

$$A = c_1 c_2, \quad B = c_1 c_3.$$

De la primera condición de frontera tenemos:

$$U(0; t) = A e^{-2\lambda^2 t} = 0 \quad \text{o} \quad A = 0$$

puesto que $e^{-2\lambda^2 t}$ no puede ser cero. La solución hasta ahora es

$$U(x; t) = B e^{-2\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x \quad (1.25)$$

De la segunda condición de frontera tenemos:

$$U(10; t) = B e^{-2\lambda^2 t} \operatorname{sen} 10\lambda = 0$$

Puesto que $B \neq 0$ (de otra manera tenemos la solución trivial $U = 0$), debemos tener:

$$\operatorname{sen} 10\lambda = 0, \quad \text{esto es, } 10\lambda = m\pi \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{m\pi}{10}$$

donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y (1.25) llega a ser

$$U(x; t) = B e^{-m^2\pi^2 t/50} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{10} \quad (1.26)$$

La última condición de frontera produce

$$U(x; 0) = B \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{10} = 50 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2} + 20 \operatorname{sen} 2\pi x - 10 \operatorname{sen} 4\pi x$$

Sin embargo, no podemos encontrar un solo par de constantes m y B que satisfagan esta condición. Afortunadamente el principio de superposición viene en nuestra ayuda, puesto que sabemos que sumas de soluciones del tipo (1.26) para diferentes valores de B y enteros m también serán una solución.

Puesto que sólo necesitamos tres términos con la forma (1.26), consideramos la solución:

$$U(x; t) = b_1 e^{-m_1^2\pi^2 t/50} \operatorname{sen} \frac{m_1\pi x}{10} + b_2 e^{-m_2^2\pi^2 t/50} \operatorname{sen} \frac{m_2\pi x}{10} + b_3 e^{-m_3^2\pi^2 t/50} \operatorname{sen} \frac{m_3\pi x}{10}, \quad (1.27)$$

De modo que la última condición de frontera da:

$$\begin{aligned}
 b_1 \operatorname{sen} \frac{m_1 \pi x}{10} + b_2 \operatorname{sen} \frac{m_2 \pi x}{10} + b_3 \operatorname{sen} \frac{m_3 \pi x}{10} \\
 = 50 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2} + 20 \operatorname{sen} 2\pi x - 10 \operatorname{sen} 4\pi x
 \end{aligned}$$

Esto se puede satisfacer si escogemos:

$$b_1 = 50, \quad \frac{m_1 \pi}{10} = \frac{3\pi}{2} \quad o \quad m_1 = 15;$$

$$b_2 = 20, \quad \frac{m_2 \pi}{10} = 2\pi \quad o \quad m_2 = 20;$$

$$b_3 = -10, \quad \frac{m_3 \pi}{10} = 4 \quad o \quad m_3 = 40;$$

Utilizando éstos valores en (1.27), da la solución deseada:

$$U(x; t) = 50e^{-9\pi^2 t/2} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2} + 20e^{-8\pi^2 t} \operatorname{sen} 2\pi x + 10e^{-32\pi^2 t} \operatorname{sen} 4\pi x$$

Para la mayoría de problemas podemos anticipar el hecho que debemos hacer la selección $c = -\lambda^2$, puesto que de otra manera no obtenemos los términos presentes en la última condición de frontera del Ejemplo ilustrativo 1.1. Así no necesitamos preocuparnos con cualquier otra selección para la constante distinta de $-\lambda^2$. Este hecho se puede también deducir desde un punto de vista físico, si U representa alguna variable física tal como la temperatura y t denota

tiempo. Si c fuera positiva entonces cuando $t \rightarrow \infty$ tendríamos $U \rightarrow \infty$, o como a menudo decimos U sería no acotada, y esto contradeciría el principio de conservación en la naturaleza. También si c fuera cero, U sería independiente del tiempo, lo cual no es el caso corriente.

Sin embargo en la actualidad muchos de estos problemas pueden resolverse utilizando un software de computadora. El amplio campo que se conoce como métodos numéricos, análisis numérico, donde se trata de problemas sobre ecuaciones diferenciales parciales y se utilizan algunos métodos, como los de diferencias finitas que son los más difundidos y en menor escala los métodos que utilizan elementos finitos.

Muchos problemas físicos tienen condiciones de contorno que incluyen derivadas y se formulan sobre regiones cuya frontera es convexa. Condiciones de contorno de este tipo, son difíciles de manejar usando técnicas de diferencias finitas porque en cada condición de frontera que incluya una derivada, esta debe ser aproximada mediante un cociente de diferencias en los puntos de red y la forma convexa de la frontera, hace que sea difícil situar los puntos de la malla.

El método del elemento finito nos da una alternativa que es más adecuada para hallar la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica, pero si el desarrollo del problema se realiza en forma analítica representa un largo y tedioso trabajo. Lo ideal es desarrollar un programa que permita hallar la solución del problema, aunque actualmente existen algunos paquetes comerciales que no dan mayor información, respecto al código fuente.

1.2. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DEL PROBLEMA

Actualmente no existe una investigación profunda sobre como hallar la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica con frontera convexa usando los métodos de las diferencias finitas y mucho menos usando el método de los elementos finitos, en las Facultades de Ciencias e Ingeniería.

El desarrollo de la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica, analíticamente requiere de un gran esfuerzo y complejidad matemática y se dan generalmente para problemas con valor en la frontera fácil de resolver.

Los métodos de diferencias finitas, no son aplicables a problemas con una geometría irregular, con condiciones de frontera no usuales o de composición heterogénea.

Es importante conocer cómo se desarrolla la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica, utilizando el método del elemento finito para luego poder desarrollar el algoritmo e implementarlo en el lenguaje de programación MATLAB. Tener un programa de computadora creado especialmente para este tipo de ecuaciones diferenciales, con el código fuente disponible, y poder simular la solución de otras ecuaciones diferenciales parciales parabólicas con mayor rapidez y confiabilidad, y también, aumentar el proceso de aprendizaje para este tipo de problemas.

El presente proyecto de tesis trata sobre la teoría básica y los aspectos de programación del método del elemento finito para hallar la solución de ecuaciones diferenciales parabólicas, y que constituye un método particularmente útil para el estudio de problemas de la onda en geometrías convexas. El desarrollo de un código de programación, entendiendo la teoría básica y los aspectos programáticos, presenta algunas ventajas respecto a algunos paquetes comerciales que se tienen disponibles; una es la facilidad de visualización y localización de la posición de los nodos y de la

información resultante asociada a los mismos. El código de programación permite simular otras modificaciones.

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo General

Implementar el algoritmo del método del elemento finito para la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas en el lenguaje de programación MATLAB.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Mostrar el desarrollo del algoritmo del elemento finito para la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas analíticamente.
- Compilar los aspectos teóricos para poder desarrollar el algoritmo del método del elemento finito para la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica.
- Utilizar el lenguaje de programación MATLAB para implementar el algoritmo computacional del método del elemento finito que optimice el tratamiento de datos en la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica con frontera convexa.

1.4. Hipótesis General

Si utilizamos un programa del método del elemento finito entonces optimizamos el proceso de hallar la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica con frontera convexa implementada en MATLAB.

1.5. Hipótesis Específicas

- a) El desarrollo del algoritmo del elemento finito para la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas está basado en el método del elemento finito.
- b) La compilación de los aspectos teóricos del cálculo variacional sirven para desarrollar el algoritmo del elemento finito para la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas.
- c) El lenguaje de programación MATLAB es eficiente en la implementación del algoritmo computacional.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

PRELIMINARES MATEMÁTICOS

2.1. Antecedentes

Análisis Numérico de Burden, Richard L. & Faires J. Douglas. (2002). En el método de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales parciales, el dominio de la solución se divide en una malla con puntos discretos o nodos, donde las derivadas parciales se reemplazan por puntos.

Método computacional del elemento finito para Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas con frontera irregular". Lozano Marreros, Javier. (2010).

El método del elemento finito ofrece una alternativa más adecuada para el tratamiento de una solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Parabólicas con frontera convexa.

2.2. Integral de línea

Para introducir el concepto de integral de línea, consideremos la masa de un cable de longitud finita, descrito por una curva C en el espacio. Supongamos que la densidad (masa por unidad de longitud) del cable en el punto $(x; y; z)$ viene dada por $f(x; y; z)$.

Se divide la curva C mediante los puntos P_0, P_1, \dots, P_n , en n subarcos. Sea Δs_i la longitud del i -ésimo subarco.

Luego elegir en cada subarco un punto $(x_i; y_i; z_i)$. Si la longitud de cada subarco es pequeña, la masa total del cable puede aproximarse por la suma

$$\text{Masa del cable} \approx \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \Delta s_i$$

Si $\|\Delta\|$ denota la longitud del subarco más grande y se hace tender $\|\Delta\|$ a cero. Esperando que el límite de esta suma tienda a la longitud del cable.

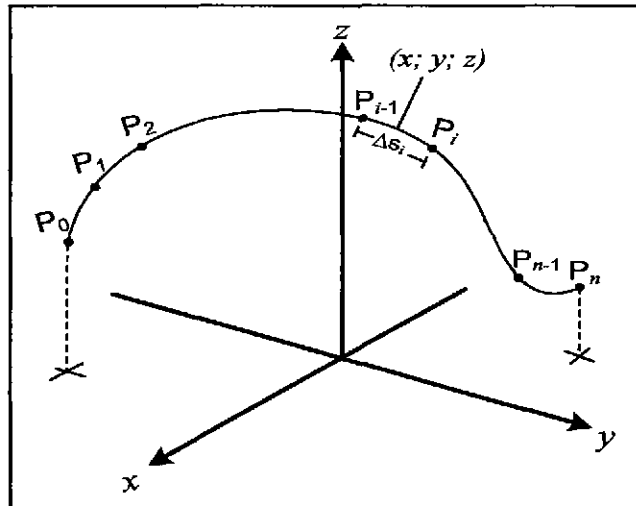


FIGURA 2.1: Partición de la curva C

Fuente: Larson-Hostetler-Edwards. "Cálculo y Geometría Analítica" Vol. 2.

Definición 2.1. Si f está definida en una región que contiene a la curva suave C , de longitud finita, la **integral de línea** de f sobre C se define como

$$\int_C f(x; y) dS = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta S_i, \quad \text{para el plano y}$$

$$\int_C f(x; y; z) dS = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \Delta S_i, \quad \text{para el espacio}$$

siempre que estos límites existan.

Para calcular una integral de línea sobre una curva plana C dada por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ utilizamos:

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

2.3. Cálculo de una integral de línea como integral definida

Sea $f(x; y)$ continua en una región que contiene a la curva suave C .

Si C viene dada por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, donde $a \leq t \leq b$, entonces:

$$\int_C f(x; y) ds = \int_a^b f(x(t); y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Si C viene dada por:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \text{ donde } a \leq t \leq b,$$

entonces:

$$\int_C f(x; y; z) ds = \int_a^b f(x(t); y(t); z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

Nótese que si $f(x; y; z) = 1$, la integral de línea da la longitud de arco de la curva C . Es decir:

$$f(x; y; z) = \int_C 1 ds = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt,$$

es la longitud de la curva C .

2.4. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

El álgebra es suficiente para resolver muchos problemas estáticos, pero la mayoría de los fenómenos naturales más interesantes involucra cambios descritos por ecuaciones que relacionan cantidades que cambian.

La derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ de la función f es considerada como la razón por la cual la cantidad $y = f(x)$ cambia con respecto de la variable independiente x . Una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida de una o más variables se llama ecuación diferencial. Si la función desconocida depende sólo de una variable, la ecuación se llama ecuación diferencial ordinaria. Por ejemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 15y = 0$$

El estudio de las ecuaciones diferenciales tiene los siguientes fines:

- a. Encontrar la ecuación diferencial que describe una situación física específica;
- b. Encontrar exacta o aproximadamente la solución apropiada para esa ecuación.
- c. Interpretar la solución encontrada.

2.5. Ecuaciones diferenciales y modelos matemáticos

Los siguientes ejemplos ilustran el proceso de traducción de las leyes y principios científicos en ecuaciones diferenciales, interpretando razones de cambio como derivadas. En cada uno de ellos la variable independiente es el tiempo t .

Ejemplo 2.1.

La ley de Torricelli establece que la razón de cambio con respecto del tiempo de un volumen V de agua en un tanque de drenado es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad y del agua en el tanque:

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}$$

Donde k es una constante.

Ejemplo 2.2.

La ley del enfriamiento de Newton puede ser establecida de la siguiente forma: La razón de cambio de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre T y la temperatura A del medio ambiente. Esto es:

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T)$$

donde k es una constante positiva. Obsérvese que si $T > A$, entonces $\frac{dT}{dt} < 0$, de modo que la temperatura $T(t)$ es una función decreciente de t y el cuerpo se está enfriando.

Por otro lado, si $T < A$, entonces $\frac{dT}{dt} > 0$, de modo que la temperatura $T(t)$ está aumentando.

Esperamos que si se dan los valores de k y A , podremos encontrar una fórmula explícita para $T(t)$ y entonces (con la ayuda de la fórmula) podremos predecir la temperatura futura del cuerpo.

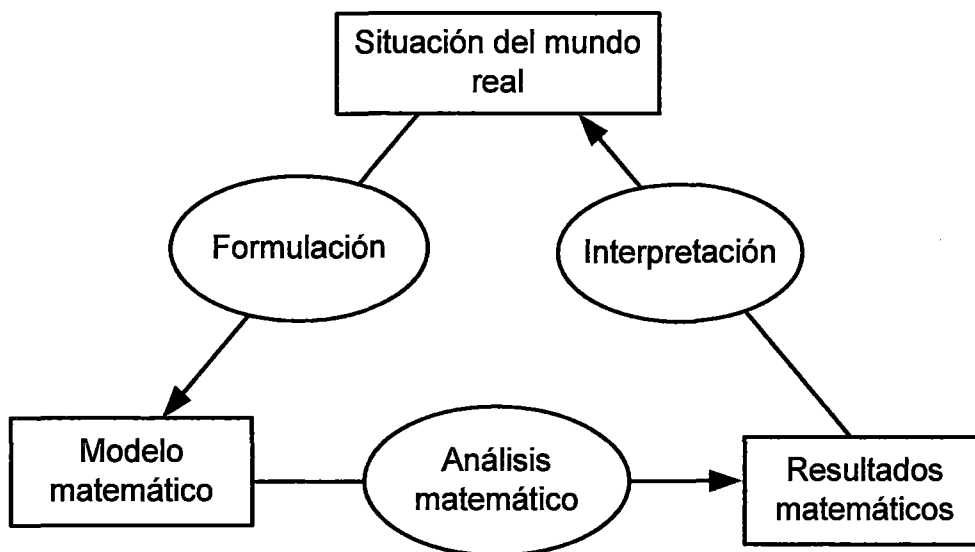


FIGURA 2.2 Proceso de formulación de modelos matemáticos.
FUENTE: C.H. Edwards, Jr. & Penney, David E. (1994). *Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera.*

2.6. Existencia y Unicidad de la Solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria.

Cuando un problema de valor inicial modela matemáticamente una situación física, la existencia y unicidad de la solución es de suma importancia, pues con seguridad se espera tener una solución, debido a que físicamente algo debe suceder. Por otra parte, se supone que la solución sea única, pues si repetimos el experimento en condiciones idénticas, cabe esperar los mismos resultados, siempre y cuando el modelo sea determinístico.

PROPOSICIÓN 2.1.

Dada una ecuación diferencial $y' = f(x; y)$, donde la función $f(x; y)$ está definida en un recinto D del plano XOY que contiene el punto $(x_0; y_0)$. Si la función $f(x; y)$ satisface a las condiciones:

- a) $f(x; y)$ es una función continua de dos variables x e y , en la región R ;
- b) $f(x; y)$ admite derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$, continua con respecto de x e y en la región R , entonces, existe una y sólo una solución $y = \varphi(x)$ en R que satisface a la condición $y|_{x=x_0} = y_0$.

La condición $y|_{x=x_0} = y_0$ se llama condición inicial.

El problema de la búsqueda de la solución de la ecuación $y'(x) = f(x; y)$ que satisface a la condición inicial $y|_{x=x_0} = y_0$ lleva el nombre de Cauchy.

Geoméricamente esto significa que se busca la curva integral que pasa por el punto dado $M_0 = (x_0; y_0)$ del plano XOY .

2.7. Problemas de valor inicial y de frontera

En la mayoría de las aplicaciones estamos interesados no en la solución general de una ecuación diferencial, sino en una solución particular que satisfaga ciertas condiciones dadas. Esto da origen a los problemas de valor inicial o de frontera. Una diferencia importante entre ellas es que en el problema de valor inicial las condiciones sobre la función desconocida x y sus derivadas x' o dx/dt están especificadas en un valor de la variable independiente, mientras que en el problema de valor de frontera las condiciones sobre la función desconocida x se especifican en dos o más valores de la variable independiente.

2.8. Problema de valor inicial

Un problema de valor inicial o de Cauchy consta de una ecuación diferencial de orden n y de n condiciones iniciales, impuestas a

la función desconocida y a sus $n - 1$ primeras derivadas en un valor de la variable independiente. Es decir,

$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dx^n} = f(x; y; y^{(1)}; y^{(2)}; y^{(3)}; \dots; y^{(n-1)}) & x \in [a; b] \\ y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_1; y''(x_0) = y_2; \dots; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Un problema de valor inicial es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial, sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de la variable independiente.

Por ejemplo, el problema de valor inicial de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, se puede escribir en la forma:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x; y); & x \in [a; b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

2.9. Problemas con valores en la frontera

Aparecen aplicaciones en la cual las condiciones no se conocen para un solo punto, sino que se conocen en diferentes valores de la variable independiente. Estos valores se especifican en los puntos extremos o frontera de un sistema y se les conoce como problemas de valores en la frontera.

Un problema de valores en la frontera o de Dirichlet consta de una ecuación diferencial ordinaria de orden n y de n condiciones de frontera impuestas sobre la función desconocida en n valores de la variable independiente. Es decir,

$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = f(x; y; y^{(1)}; y^{(2)}; y^{(3)}; \dots; y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ y(x_{n-1}) = y_{n-1} \end{cases}$$

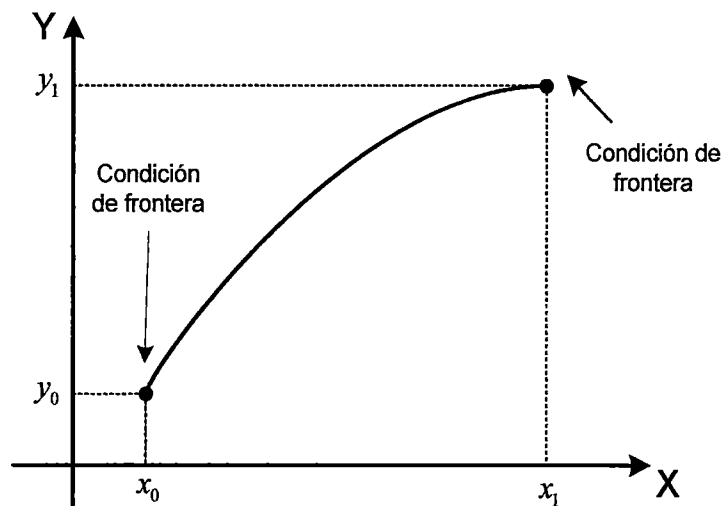


FIGURA 2.3 Problema de valor de frontera

FUENTE: Lozano Marreros, Javier. (2010). *Método computacional del elemento finito para Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas con frontera irregular*. Perú.

2.10. Método de diferencias finitas para los problemas lineales

El método lineal de diferencias finitas para el problema de valor de frontera de segundo orden:

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) & x \in [a; b] \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

requiere utilizar las aproximaciones del cociente de diferencias para aproximar tanto a y' como a y'' . Primero, seleccionamos un entero $N > 0$ y dividimos el intervalo $[a; b]$ en $N+1$ subintervalos iguales, cuyos extremos son los puntos de malla $x_i = a + ih$, para $i = 0; 1; 2; \dots; N + 1$, donde $h = \frac{b-a}{N+1}$.

En los puntos de red del interior x_i para $i = 1; 2; \dots; N$ la ecuación diferencial a aproximar es:

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$$

Al desarrollar y en el tercer polinomio de Taylor, alrededor de x_i evaluada en x_{i+1} y x_{i-1} tenemos:

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) \\ &\quad + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^+); \quad \xi_i \text{ en } (x_i; x_{i+1}) \end{aligned}$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^-); \quad \xi_i \text{ en } (x_{i-1}; x_i)$$

De estas ecuaciones (al sumarlas) se obtiene:

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2y''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^+ + \xi_i^-)$$

Entonces $y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2}$

de manera semejante se obtiene que: $y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h}$

Con un error de truncamiento de orden 2, $O(h^2)$

Estas ecuaciones se reemplazan en:

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$$

y se obtiene:

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} = p(x_i) \left(\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} \right) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$$

O también

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p(x_i) \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right) + q(x_i)y_i + r(x_i)$$

Luego se tiene el siguiente sistema de ecuaciones para

$i = 1; 2; \dots; N$ y donde $y_0 = y(a) = \alpha$ y $y_{N+1} = y(b) = \beta$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 \left[p(x_i) \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right) + q(x_i)y_i + r(x_i) \right]$$

$$\left[1 + \frac{h}{2}p(x_i) \right] y_{i-1} + (-2 - h^2q(x_i))y_i + \left[1 - \frac{h}{2}p(x_i) \right] y_{i+1} = h^2r(x_i)$$

Desarrollando el sistema anterior se tiene que:

Para $i = 1$:

$$\left[1 + \frac{h}{2}p(x_1) \right] y_0 + (-2 - h^2q(x_1))y_1 + \left[1 - \frac{h}{2}p(x_1) \right] y_2 = h^2r(x_1)$$

Para $i = 2$:

$$\left[1 + \frac{h}{2}p(x_2) \right] y_1 + (-2 - h^2q(x_2))y_2 + \left[1 - \frac{h}{2}p(x_2) \right] y_3 = h^2r(x_2)$$

Para $i = 3$:

$$\left[1 + \frac{h}{2}p(x_3)\right]y_2 + (-2 - h^2q(x_3))y_3 + \left[1 - \frac{h}{2}p(x_3)\right]y_4 = h^2r(x_3)$$

...

Para $i = N$:

$$\left[1 + \frac{h}{2}p(x_N)\right]y_{N-1} + (-2 - h^2q(x_N))y_N + \left[1 - \frac{h}{2}p(x_N)\right]y_{N+1} = h^2r(x_N)$$

Por lo tanto se tendrá el siguiente sistema de ecuaciones:

$$[2 + h^2q(x_1)]y_1 + \left[-1 + \frac{h}{2}p(x_1)\right]y_2 = -h^2r(x_1) + \left[1 + \frac{h}{2}p(x_1)\right]y_0$$

$$\left[-1 - \frac{h}{2}p(x_2)\right]y_1 + (2 + h^2q(x_2))y_2 + \left[-1 + \frac{h}{2}p(x_2)\right]y_3 = -h^2r(x_2)$$

$$\left[-1 - \frac{h}{2}p(x_3)\right]y_2 + (2 + h^2q(x_3))y_3 + \left[-1 + \frac{h}{2}p(x_3)\right]y_4 = -h^2r(x_3)$$

...

$$\left[-1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right]y_{i-1} + (2 + h^2q(x_i))y_i + \left[-1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right]y_{i+1} = -h^2r(x_i)$$

Para $i = 1; 2; \dots; N$ donde y_i representa el valor aproximado de la solución $y(x_i)$ en el punto $x = x_i$.

Se puede expresar el sistema anterior en forma matricial como $AY = B$, donde A es la matriz tridiagonal, Y el vector de las incógnitas y B el vector de términos independientes. Es decir,

$$A = \begin{bmatrix} 2+h^2q(x_1) & -1+\frac{h}{2}p(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ -1-\frac{h}{2}p(x_2) & 2+h^2q(x_2) & -1+\frac{h}{2}p(x_2) & \dots & 0 \\ 0 & -1-\frac{h}{2}p(x_3) & 2+h^2q(x_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1+\frac{h}{2}p(x_{N-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2+h^2q(x_N) \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -h^2r(x_1) + \left[1 + \frac{h}{2}p(x_1)\right]y_0 \\ -h^2r(x_2) \\ -h^2r(x_3) \\ \vdots \\ -h^2r(x_N) \\ -h^2r(x_N) + \left[1 - \frac{h}{2}p(x_N)\right]y_{N+1} \end{bmatrix}$$

2.11. Derivadas parciales

Sea z una función de varias variables independientes; por ejemplo $z = f(x; y)$. Si $y = y_0$, $z = f(x; y_0)$ es la curva intersección de la superficie $z = f(x; y)$ con el plano $y = y_0$ por tanto

$\frac{\partial}{\partial x} u(x; y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h; y_0) - f(x_0; y_0)}{h}$, da la pendiente de esa curva en el punto $z = f(x_0; y_0; z_0)$.

Si $x = x_0$, $z = f(x_0; y)$ es la curva intersección de la superficie $z = f(x; y)$ con el plano $x = x_0$ por tanto

$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0; y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0; y_0+h) - f(x_0; y_0)}{h}$, da la pendiente de la curva intersección de $z = f(x; y)$ con el plano $x = x_0$.

Lo que viene a decirnos que los valores de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ dan las pendientes de la superficie en las direcciones x e y

Las siguientes notaciones son equivalentes

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x; y) = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = f_x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

Si todas las derivadas parciales de $z = f(x; y)$ hasta el orden m son continuas en alguna región Ω , se dice que u es de clase $C^m(\Omega)$, o que u es C^m en Ω .

2.12. Definición de la derivada direccional

Sea f una función de dos variables x e y , y sea $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \text{sen } \theta \vec{j}$ un vector unitario. La derivada direccional de f en la dirección de \vec{u} , que se denota $D_{\vec{u}}f$, se define como:

$$D_{\vec{u}}f(x; y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cos \theta; y + t \text{sen } \theta) - f(x; y)}{t}$$

siempre que ese límite existe.

PROPOSICIÓN 2.2. Derivada Direccional

Sea f una función diferenciable de x e y , entonces su derivada direccional en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \text{sen } \theta \vec{j}$ es

$$D_{\vec{u}}f(x; y) = f_x(x; y) \cos \theta + f_y(x; y) \text{sen } \theta$$

2.13. Gradiente

Si $u = u(x; y; z)$ es una función C^1 definida en una región Ω de R^3 , el gradiente de u se define por

$$\text{grad } u \equiv \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

Si \vec{n} denota un vector unitario en R^3 , la derivada direccional de u en la dirección de \vec{n} se expresa por:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n}$$

Si $u = u(x; y)$ es una función C^1 definida en una región Ω de R^2 , el gradiente de u se define por:

$$\text{grad } u \equiv \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}$$

Si \vec{n} denota un vector unitario en R^2 , la derivada direccional de u en la dirección de \vec{n} se expresa por:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n}$$

2.14. Ecuaciones en derivadas parciales

Toda ecuación diferencial que contiene derivadas parciales se denomina ecuación diferencial en derivadas parciales, o simplemente ecuación en derivadas parciales (EDP), y el orden de la ecuación es igual al mayor de los órdenes de las derivadas parciales que en ella intervienen. En toda ecuación diferencial en derivadas

parciales, la variable dependiente deberá ser una función de dos variables independientes por lo menos, ya que en otro caso no aparecerían derivadas parciales; en general, será una función con n variables independientes. Por ejemplo, las siguientes ecuaciones en las que $u = u(x; y)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$, es una EDP lineal de segundo orden.

$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$, es una EDP lineal de tercer orden.

$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3 + 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} = x$, es una EDP no lineal de tercer orden.

Una ecuación diferencial parcial lineal, es aquella que es lineal en la función desconocida y en todas sus derivadas, con coeficientes que dependen solo de las variables independientes de la función.

La mayoría de los problemas físicos y de ingeniería, de importancia práctica, están descriptos por este tipo de ecuaciones diferenciales, y fundamentalmente por ecuaciones diferenciales de segundo orden. Por ello el tratamiento de las EDP que se desarrollará en lo sucesivo se concentrará sobre ecuaciones lineales de segundo orden.

2.15. Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

Ecuaciones lineales

La forma general de una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal de segundo orden (EDP) con dos variables independientes, x e y , es:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

en que $A; B; C; D; E; F; G$ son funciones de x e y . Cuando $G(x; y) = 0$, la ecuación se llama **homogénea**; en cualquier otro caso es no homogénea.

Una **solución** de una ecuación en derivadas parciales con dos variables independientes x e y es una función $u(x; y)$ que posee todas las derivadas parciales que indica la ecuación y que la satisface en alguna región del plano xy .

Clasificación de las ecuaciones

Una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal de segundo orden (EDP), con dos variables independientes y con coeficientes constantes, puede pertenecer a uno de tres tipos generales. Esta clasificación solo depende de los coeficientes de las derivadas de

segundo orden. Naturalmente, suponemos que al menos uno de los coeficientes A ; B y C no es cero.

La ecuación diferencial en derivadas parciales lineal y de segundo orden:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

en donde A ; B ; C ; D ; E y F son constantes reales, es:

Hiperbólica si $B^2 - 4AC > 0$,

Parabólica si $B^2 - 4AC = 0$,

Elíptica si $B^2 - 4AC < 0$.

Las EDP elípticas aparecen en problemas estacionarios de transmisión de calor, difusión de partículas o vibración de una membrana.

Las ecuaciones parabólicas, típicamente resultan de analizar la evolución temporal de los problemas mencionados para ecuaciones elípticas, y otros.

Las ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico, son comunes en el análisis de transporte de masa en fluidos, fenómenos ondulatorios y otros procesos.

Para la solución de las EDP pueden utilizarse una gran variedad de técnicas. Entre otras técnicas pueden mencionarse, los métodos de diferencias finitas, los métodos de elementos finitos, los métodos de volúmenes finitos, los métodos espectrales, etc.

2.16. Ecuaciones diferenciales parciales parabólicas

Es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x; y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x; y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + r(x; y)u(x; y) = f(x; y); (x; y) \in D$$

Que es equivalente a:

$$p(x; y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + q(x; y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} + r(x; y)u(x; y) = f(x; y)$$

$r(x; y) \in D$, y la que se puede escribir como:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f, \quad u = u(x; y); \quad g = g(x; y)$$

Donde:

$$A = p(x; y); \quad B = 0; \quad C = q(x; y); \quad D = \frac{\partial p}{\partial x}; \quad E = \frac{\partial q}{\partial y}; \quad F = r(x; y)$$

Si $p(x; y) = -1$; $B = 0$; $q(x; y) = 1$; $r(x; y) = 0$, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

es la Ecuación Diferencial Parcial Parabólica.

2.17. Condiciones auxiliares; problemas bien planteados

Las ecuaciones en derivadas parciales que plasman sistemas físicos, suelen tener un número infinito de soluciones. Para seleccionar la función que de manera única representa la solución a un problema físico, deben imponerse ciertas condiciones auxiliares que posteriormente caractericen al sistema que está representando. Estas condiciones se agrupan en dos categorías: condiciones de frontera y condiciones iniciales.

2.18. Condiciones de frontera

Son las condiciones que deben satisfacerse en los puntos sobre la frontera S de la región Ω en donde se encuentra la ecuación diferencial parcial. Se han dado nombres especiales a tres tipos de condiciones de frontera:

1. Condición de Dirichlet $u = g$
2. Condición de Neumann (o de flujo) $\frac{\partial u}{\partial n} = g$
3. Condición mixta (de Robin o de radiación) $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g$

En la que g , α y β son funciones establecidas en S .

2.19. Condiciones iniciales

Son las condiciones que deben satisfacerse a lo largo de Ω en el instante en el cual se inician las consideraciones del sistema físico.

Las funciones prescritas de condición inicial y de frontera, junto con las funciones de coeficientes y con cualquier término no homogéneo en la ecuación diferencial parcial, son los datos en el problema plasmado por la ecuación diferencial parcial. Se dice que la solución depende continuamente de los datos, si pequeños cambios en los datos producen sus correspondientes pequeños cambios en la solución.

Se dice que el problema está correctamente planteado si:

- existe una solución al problema.
- la solución es única.
- la solución depende continuamente de los datos.

Si alguna de estas condiciones no se satisface, se dice que el problema está incorrectamente planteado.

2.20. Método de diferencias finitas

La ecuación diferencial parcial elíptica es la ecuación de POISSON:

$$\nabla^2 u(x; y) = \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} = f(x; y) \quad (2.1)$$

En $R = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / a < x < b, c < y < d\}$, con $u(x; y) = g(x; y)$

Para $(x; y) \in S$, donde S es la frontera de R . Se supone que tanto la función f como g son continuas en sus dominios.

El primer paso consiste en seleccionar los enteros n y m y en definir

los tamaños de paso: $h = \frac{b-a}{n}$ y $k = \frac{d-c}{m}$.

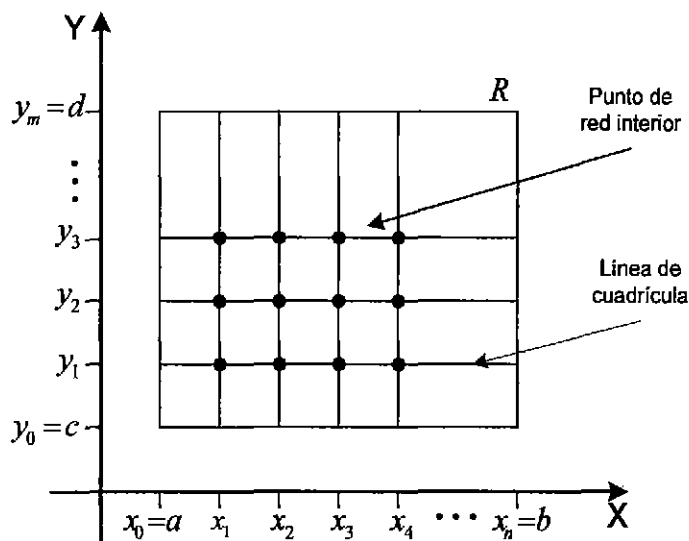


FIGURA 2.4 Malla en el plano

FUENTE: Burden, Richard L. & Faires J. Douglas. (2002). *Análisis Numérico*.

La división del intervalo $[a; b]$ y $[c; d]$ en n y m partes iguales respectivamente da como resultado una cuadrícula en el rectángulo R .

$$x_i = a + ih \quad \text{para cada } i = 0; 1; 2, \dots, n$$

$$y_i = c + jk \quad \text{para cada } j = 0; 1; 2, \dots, m$$

En cada punto de red del interior de la cuadrícula $(x_i; y_i)$, con $i = 0; 1; 2; \dots; n - 1, j = 0; 1; 2; \dots; m - 1$, se utiliza la serie de Taylor en la variable x alrededor de x_i para generar la fórmula de las diferencias centrales

$$\frac{\partial^2 u(x_i; y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i+1}; y_j) - 2u(x_i; y_j) + u(x_{i-1}; y_j)}{h^2} \quad (2.2)$$

Serie de Taylor en la variable y alrededor de y_i

$$\frac{\partial^2 u(x_i; y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{u(x_i; y_{j+1}) - 2u(x_i; y_j) + u(x_i; y_{j-1}))}{k^2} \quad (2.3)$$

De las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_{i+1}; y_j) - 2u(x_i; y_j) + u(x_{i-1}; y_j)}{h^2} \\ & + \frac{u(x_i; y_{j+1}) - 2u(x_i; y_j) + u(x_i; y_{j-1}))}{k^2} = f(x; y) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para $i = 0; 1; 2; \dots; n - 1$ y $j = 0; 1; 2; \dots; m - 1$

Y las condiciones de frontera son (Figuras 2.5 y 2.6)

$$\begin{cases} u(x_0; y_j) = g(x_0; y_j) \quad \text{y} \quad u(x_n; y_j) = g(x_n; y_j) \quad \text{para } j = 0; 1; 2; \dots; m \\ u(x_i; y_0) = g(x_i; y_0) \quad \text{y} \quad u(x_i; y_m) = g(x_i; y_m) \quad \text{para } i = 0; 1; 2; \dots; n - 1 \end{cases}$$

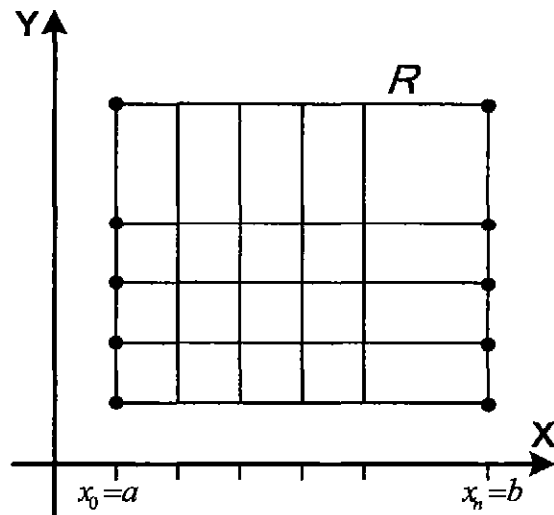


FIGURA 2.5 Condiciones de frontera 1

FUENTE: Burden, Richard L. & Faires J. Douglas. (2002). *Análisis Numérico*.

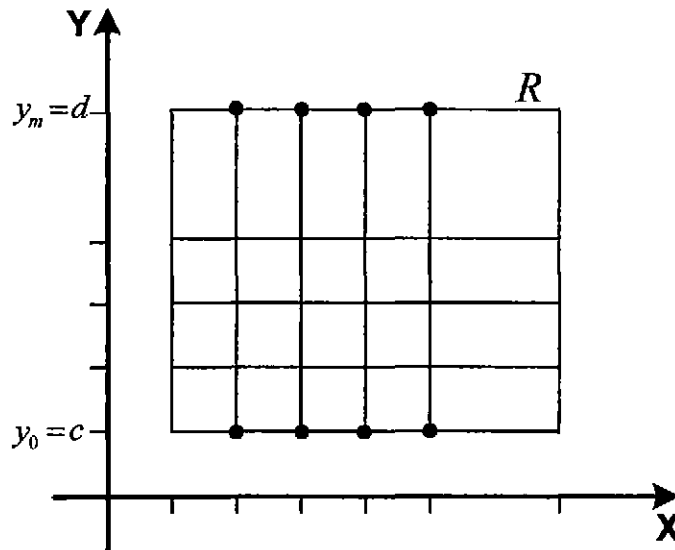


FIGURA 2.6 Condiciones de frontera 2

FUENTE: Burden, Richard L. & Faires J. Douglas. (2002). *Análisis Numérico*.

Esto da como resultado el método de las diferenciales centrales con un error local de truncamiento.

$$2 \left[\left(\frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] w_{ij} - (w_{i+1,j}; w_{i-1,j}) - \left(\frac{h}{k} \right)^2 (w_{i,j+1}; w_{i,j-1}) = -h^2 f(x; y) \quad (2.5)$$

Para $i = 0; 1; 2; \dots; n - 1$ y $j = 0; 1; 2; \dots; m - 1$

$$\begin{cases} w_{0j} = g(x_0; y_j) \text{ y } w_{nj} = g(x_n; y_j) & \text{para } j = 0; 1; 2; \dots; m \\ w_{i0} = g(x_i; y_0) \text{ y } w_{im} = g(x_i; y_m) & \text{para } i = 0; 1; 2; \dots; n - 1 \\ \text{donde } w_{ij} \text{ aproxima a } u(x_i; y_j) \end{cases}$$

La ecuación (2.5) contiene aproximaciones a $u(x_i; y_j)$, en los puntos $(x_{i-1}; y_j)$, $(x_i; y_j)$, $(x_{i+1}; y_j)$, $(x_i; y_{j-1})$ y $(x_i; y_{j+1})$, tal como se muestra en la figura 2.7.

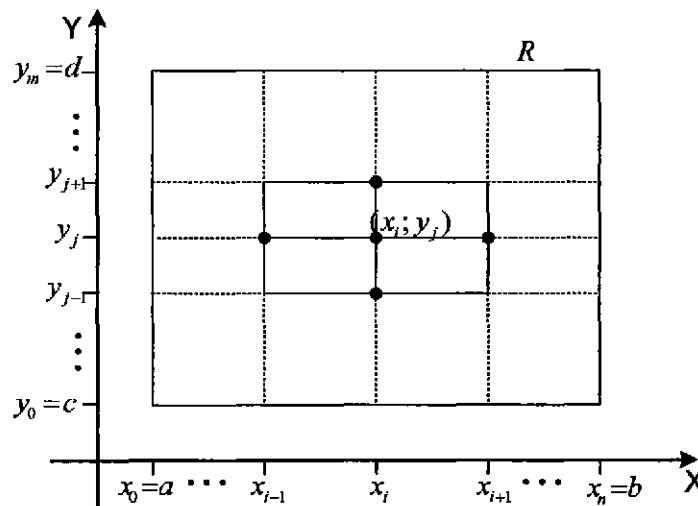


FIGURA 2.7 Puntos de aproximación

Fuente: Elaboración Propia

Un sistema de manejo de estos puntos consiste en utilizar:

$$P_L = (x_i; y_j), \quad w_L = w_{ij}$$

Donde:

$$L = i + (m - 1 - j)(n - 1) \quad \forall i = 0; 1; 2; \dots; n - 1, \quad j = 0; 1; 2; \dots; m - 1$$

Por ejemplo, si $n = 4$ y $m = 5$, entonces $i = 0; 1; 2; 3$ y $j = 0; 1; 2; 3; 4$.

Para $i = 1$ y $j = 1$: $L = 1 + (5 - 1 - 1)(4 - 1) = 10$;

$$P_L(x_1; y_1) \Rightarrow P_{10}(x_1; y_1)$$

Para $i = 1$ y $j = 2$: $L = 1 + (5 - 1 - 2)(4 - 1) = 7$;

$$P_L(x_1; y_2) \Rightarrow P_7(x_1; y_2)$$

Para $i = 1$ y $j = 3$: $L = 1 + (5 - 1 - 3)(4 - 1) = 4$;

$$P_L(x_1; y_3) \Rightarrow P_4(x_1; y_3)$$

Para $i = 1$ y $j = 4$: $L = 1 + (5 - 1 - 4)(4 - 1) = 1$;

$$P_L(x_1; y_4) \Rightarrow P_1(x_1; y_4)$$

Para $i = 2$ y $j = 1$: $L = 2 + (5 - 1 - 1)(4 - 1) = 11$;

$$P_L(x_2; y_1) \Rightarrow P_{11}(x_2; y_1)$$

Para $i = 1$ y $j = 1$: $L = 1 + (5 - 1 - 1)(4 - 1) = 10$;

$$P_L(x_1; y_1) \Rightarrow P_{10}(x_1; y_1)$$

Para $i = 2$ y $j = 2$: $L = 2 + (5 - 1 - 2)(4 - 1) = 8$;

$$P_L(x_1; y_1) \Rightarrow P_8(x_2; y_2)$$

Y así sucesivamente se tiene la siguiente cuadrícula con sus respectivos puntos, tal como se muestra en la figura 2.8.

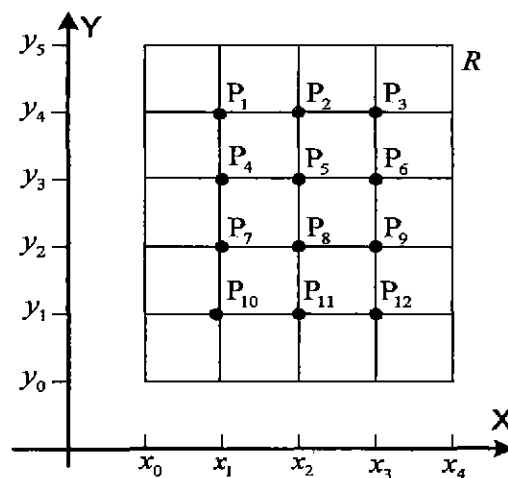


FIGURA 2.8 Puntos de evaluación

FUENTE: Burden, Richard L. & Faires J. Douglas. (2002). *Análisis Numérico*.

2.21. Cálculo de variaciones

Uno de los problemas característicos a los que dan solución las técnicas propias del cálculo de variaciones, es el de hallar la curva que hace extrema una integral curvilínea dada.

Consideremos el problema en forma unidimensional, es decir, determinaremos la curva $y = f(x)$ entre los valores x_1 y x_2 tal que la integral curvilínea de cierta función $f(y; \dot{y}; x)$, donde $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$, sea extrema, es decir, que la integral:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y; \dot{y}; x) dx \quad (2.6)$$

ha de ser máxima o mínima. En este caso la variable x desempeña el papel del parámetro t .

Vamos a plantear el problema de forma que nos permita emplear los métodos ordinarios del cálculo diferencial, para obtener valores extremos. Para ello, hacemos corresponder a cada una de las posibles curvas $y(x)$, un valor diferente de determinado parámetro α , de modo que para ciertos valores de α , la curva coincida con la trayectoria o trayectorias que extreman la integral. Por lo tanto, y será función de x y α . De ese modo, si representamos la función $y(x; \alpha)$ por:

$$y(x; \alpha) = y(x; 0) + \alpha \cdot \eta(x)$$

donde $\eta(x)$ es una función cualquiera de x que se anula para $x = x_1$ y $x = x_2$. También la integral J de (2.6) será función de α :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x; \alpha); \dot{y}(x; \alpha); x) dx \quad (2.7)$$

La condición para obtener un máximo o un mínimo de J como función de α , será la misma que se necesita en el cálculo diferencial, es decir:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0, \quad \text{para } \alpha = 0$$

Derivando (2.7) bajo el signo integral, tenemos:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx$$

Si tomamos la segunda de las integrales podemos hacer:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx$$

e integrando por partes, tenemos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx \quad (2.8)$$

Puesto que partimos de la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha}$$

Donde se considera $\frac{d}{dx}$ por ser f función sólo de x .

Todas las curvas que estamos considerando han de cumplir la condición de pasar por los puntos $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ y, por tanto, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ se anulará en x_1 y x_2 . Por ello se hace cero el primer término de (2.8) y la derivada parcial de J respecto α se puede poner:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

Multiplicando todos los términos por $d\alpha$ y singularizando para $\alpha = 0$, resulta:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_0 dx d\alpha$$

Si ponemos ahora: $\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha = \delta J$; $\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha = \delta y$; $\left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha = \delta \dot{y}$

donde δJ ; δy ; $\delta \dot{y}$, son respectivamente la variación de J , y e \dot{y} , la ecuación anterior queda en la forma:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] \delta y dx = 0$$

En esta expresión, δy representa cierta variación arbitraria de $y(x)$, obtenida por variación del parámetro α , en un entorno del punto 0.

Es lo que se define como desplazamiento virtual. Como δy es arbitraria, podemos decir que para que la expresión anterior sea nula ha de hacerse 0 el término entre corchetes, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (2.9)$$

Vemos entonces que J sólo es extrema para las curvas $y(x)$, tales que f satisfaga la ecuación diferencial anterior, que tiene una forma semejante a la de las ecuaciones de Lagrange y se conocen con ecuaciones de Euler.

2.22. Distancia mínima entre dos puntos de un plano

Como podemos ver en la Figura 2.9.

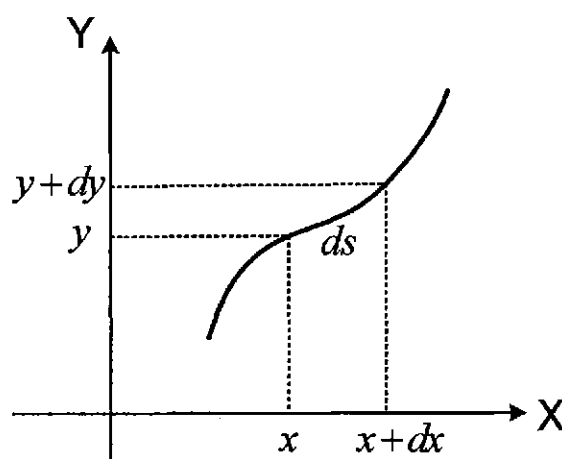


FIGURA 2.9 Puntos de evaluación

FUENTE: Lozano Marreros, Javier. (2010). *Método computacional del elemento finito para Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas con frontera irregular*. Perú.

Un elemento de longitud ds de una línea cualquiera, independientemente de su forma, está dado por:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Por lo tanto, la longitud I de una línea cualquiera que va desde el punto 1 al punto 2, viene dada por:

$$I = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Según lo visto en el apartado anterior, la condición para que dicha curva corresponda a la trayectoria más corta es que I sea mínimo.

En este caso, la función f toma la forma:

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$$

De donde resulta: $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$

Y sustituyendo en la ecuación (2.9): $\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0$

O lo que es igual: $\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = k$

De la anterior expresión podemos hacer:

$$\dot{y}^2 = k(1 + \dot{y}^2) \Rightarrow \dot{y} = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} = a$$

De donde, integrando, tenemos:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = a \Rightarrow dy = a dx \Rightarrow y = ax + b$$

Expresión que corresponde a la ecuación de una recta. Las constantes de integración, a y b quedan determinadas si se considera que la curva ha de pasar por los puntos extremos $(x_1; x_1)$ y $(x_2; x_2)$.

2.23. Métodos variacionales

El problema más simple de la rama de las matemáticas, conocida con el nombre de cálculo de variaciones, consiste en determinar la función $y(x)$ que hace estacionaria la integral

$$\int_a^b f[x; y(x); y'(x)] dx \quad (2.10)$$

En donde a y b son límites de integración, dados y $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$. En algunas situaciones el valor estacionario será un valor mínimo, en otras será un valor máximo.

Si $y(x)$ hace estacionaria la integral, entonces $y(x)$ es la solución de la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Para una función específica f , (2.11) se transforma en una ecuación diferencial ordinaria en $y(x)$.

Ahora suponemos que deseamos resolver una ecuación diferencial que es la ecuación de Euler-Lagrange asociada a cierta $f(x; y; y')$. La solución de la ecuación diferencial la buscaremos entre las funciones $y(x)$ que hace estacionaria la integral (2.10).

Consideremos, por ejemplo, la ecuación:

$$y'' + y + x = 0 \quad (2.12)$$

con las condiciones de contorno $y(0) = 0$; $y(1) = 0$. Esta ecuación es, como se ve fácilmente, la ecuación de Euler-Lagrange asociada a la función:

$$f(x; y; y') = (y')^2 - y^2 - 2xy$$

Pues como:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y - 2x \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 2y' \quad (2.13)$$

Tenemos por (2.11) y (2.13)

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = -2y - 2x - \frac{d}{dx} (2y') = -2(y'' + y + x) = 0$$

que es (2.12).

La solución de (2.12), se buscará entre las funciones $y(x)$ que hace estacionaria la integral:

$$I = \int_0^1 [(y')^2 - y^2 - 2xy] dx \quad (2.14)$$

Si ahora sustituimos en (2.14) una solución “de prueba” que satisfaga las condiciones de contorno y que tenga un número finito de constantes $c_1; c_2; c_3; \dots; c_n$, entonces I será una función de estas n constantes, y como es usual, será estacionaria para aquellos valores de las constantes que sean soluciones de las ecuaciones:

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = 0; \quad \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0; \quad \frac{\partial I}{\partial c_3} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial I}{\partial c_n} = 0$$

Por ejemplo, si elegimos:

$$y_1(x) = c_1 x(1 - x) \quad (2.15)$$

como solución “de prueba” de (2.12) que satisface las condiciones de contorno $y(0) = 0$; $y(1) = 0$, entonces substituyendo (2.15) en (2.14), obtenemos después de haber integrado:

$$I = \frac{3}{10}c_1^2 - \frac{1}{6}c_1$$

Luego:

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = \frac{3}{5}c_1 - \frac{1}{6} = 0$$

que da:

$$c_1 = \frac{5}{18}$$

Por consiguiente, la primera aproximación a la solución de (2.12), sujeta a las condiciones de contorno es:

$$y_1(x) = \frac{5}{18}x(1-x)$$

Obtendríamos una mejor aproximación si hubiésemos adoptado:

$$y_n(x) = x(1-x)(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_nx^{n-1})$$

como solución de prueba; y, calculando de forma análoga c_1 ; c_2 ; c_3 ; ...; c_n .

es posible utilizar una extensión directa del problema básico del cálculo de variaciones, para obtener aproximaciones a las soluciones de ciertos tipos de ecuaciones en derivadas parciales.

2.24. Método de Rayleigh-Ritz

Este método se basa en el cálculo variacional. Con éste método se resuelven problemas con valor en la frontera, al aproximar la solución con una combinación lineal finita de funciones básicas simples que se escogen para cumplir ciertos criterios, entre ellos la satisfacción de las condiciones de frontera.

El círculo de variaciones busca optimizar (a menudo minimizar), una clase especial de funciones denominadas funcionales. La forma para denotar una funcional en problemas de una variable independiente es:

$$I[Y] = \int_a^b f(x; y; y') dx \quad (2.16)$$

$I[Y]$ no es una función de x , puesto que x desaparece cuando se evalúa la integral finita. El argumento y de $I[Y]$ no es una simple variable sino una función $y = f(x)$.

Una funcional puede entenderse como una “función de funciones”. El valor del lado derecho de la ecuación (2.16), cambia cuando se hace variar la función $y(x)$, pero cuando $y(x)$ es fija, se evalúa una cantidad escalar (una constante). Se busca la $y(x)$ que minimiza $I[Y]$.

Consideremos el problema de valor en la frontera lineal de segundo orden sobre $[a; b]$:

$$\begin{cases} y'' + Q(x)y = R(x) \\ y(a) = y_0 \\ y(b) = y_n \end{cases} \quad (2.17)$$

Como los valores de la variable son conocidos en la frontera, a estas se denominan condiciones de Dirichlet. La funcional de la ecuación (2.17) es:

$$I[u] = \int_a^b \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 - Qu^2 + 2Ru \right] dx \quad (2.18)$$

La ecuación (2.18) puede transformarse en la ecuación (2.17) por medio de las ecuaciones Euler-Lagrange, de modo que al optimizar la ecuación (2.18), se obtiene la solución de la ecuación (2.17).

Si se conoce la solución de la ecuación diferencial que está trabajándose, cuando la sustituimos con u en la ecuación (2.18), se hace mínimo a $I[Y]$. En caso de no conocerse la solución, quizás podamos aproximarnos a esta mediante alguna función (casi) arbitraria y ver si es posible minimizarse la funcional por medio de una elección adecuada de los parámetros de aproximación. El método de Rayleigh-Ritz se basa en ésta idea. Se hace que $u(x)$ que es la aproximación a $y(x)$ (la solución exacta), sea una suma:

$$u(x) = c_0 v_0(x) + c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + \dots + c_n v_n(x)$$

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i v_i(x)$$

Las funciones v deben escogerse de modo que $u(x)$ cumpla las condiciones en la frontera, y deben ser linealmente independientes.

Las funciones v se denominan funciones de ensayo; las c_i y las v deben escogerse para hacer de $u(x)$ una aproximación aceptable a la solución verdadera de la ecuación (2.17).

Como funciones de aproximación normalmente se usan polinomios. Debe encontrarse una forma para obtener valores de los c_i a fin de obligar a que $u(x)$ esté cerca de $y(x)$.

Usamos la funcional definidas por la ecuación (2.18)

$$I(c_0; c_1; c_2; \dots; c_n) = \int_a^b \left[\left(\frac{d}{dx} \sum c_i v_i \right)^2 - Q \left(\sum c_i v_i \right)^2 + 2R \left(\sum c_i v_i \right) \right] dx$$

Para minimizar la función, se toman las derivadas:

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = \int_a^b 2 \left(\frac{du}{dx} \right) \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\frac{du}{dx} \right) dx - \int_a^b 2Qu \left(\frac{\partial u}{\partial c_i} \right) dx + 2 \int_a^b R \left(\frac{\partial u}{\partial c_i} \right) dx$$

Ejemplo 2.3.

Resuelva la ecuación diferencial ordinaria $y'' + y = 3x^2$, con puntos en la frontera $y(0) = 0$ y $y(2) = 3,5$

Solución:

La ecuación es de la forma

$$\begin{cases} y'' + Q(x)y = R(x) \\ y(a) = y_0; y(b) = y_n \end{cases}$$

En este caso

$$Q(x) = 1; R(x) = 3x^2$$

Usamos una función polinomial de grado 2. Si $u(x)$ se define como:

$$u(x) = \frac{7x}{4} + c_2x(x-2) + c_3x^2(x-2) \quad (2.19)$$

Se tienen las v linealmente independientes y cumplen también las condiciones de frontera:

$$\frac{du}{dx} = \frac{7}{4} + c_2(2x - 2) + c_3(3x^2 - 4x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial c_2} \left(\frac{du}{dx} \right) = 2x - 2$$

$$\frac{\partial y}{\partial c_3} \left(\frac{du}{dx} \right) = 3x^2 - 4x$$

$$\frac{\partial u}{\partial c_2} = x(x - 2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial c_3} = x^2(x - 2)$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial c_2} &= \int_0^2 2 \left[\frac{7}{4} + c_2(2x - 2) + c_3(3x^2 - 4x) \right] (2x - 2) dx - \\ &- \int_0^2 2(1) \left[\frac{7x}{4} + c_2(2x^2 - 2x) + c_3(3x^3 - 4x^2) \right] (x^2 - 2x) dx \\ &+ 2 \int_0^2 3x^2(x^2 - 2x) dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial c_3} &= \int_0^2 2 \left[\frac{7}{4} + c_2(2x - 2) + c_3(3x^2 - 4x) \right] (3x^2 - 4) dx - \\ &- \int_0^2 2(1) \left[\frac{7x}{4} + c_2(2x^2 - 2x) + c_3(x^3 - 4x^2) \right] (x^3 - 4x^2) dx \\ &+ 2 \int_0^2 3x^2(x^3 - 2x^2) dx = 0 \end{aligned}$$

Integrando se obtiene:

$$\frac{16}{5} c_2 + \frac{16}{5} c_3 = \frac{74}{15}, \quad \frac{16}{5} c_2 + \frac{128}{21} c_3 = \frac{36}{5}$$

Reemplazando en (2.19) se obtiene:

$$u(x) = \frac{119}{152} x^3 - \frac{46}{57} x^2 + \frac{53}{228} x$$

La solución analítica es:

$$y(x) = 6 \cos x + (x^2 - 2)$$

sobre el intervalo $[0; 2]$, cuya gráfica coincide adecuadamente con la solución de Rayleigh-Ritz.

2.25. MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO PARA ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES PARABOLICAS

Método de elementos finitos Galerkin estándar para la solución aproximada del modelo problema de valor frontera-inicial para la ecuación del calor,

$$(2.20) \quad u_t - \Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \text{ para } t > 0, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \text{ para } t > 0, \text{ con } u(\cdot; 0) = v \text{ en } \Omega$$

donde Ω es un dominio en \mathcal{R}^d con frontera suave $\partial\Omega$, y donde $u = u(x; t)$, $u_t = \partial u / \partial t$, y $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial^2 / \partial x_j^2$, el Laplaciano.

Haremos un breve repaso del **método de elementos finitos** para el correspondiente problema estacionario, el problema Dirichlet para la ecuación de Poisson:

$$(2.21) \quad -\Delta u = f \text{ en } \Omega; \text{ con } u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

Usando una formulación variacional de este problema, nos definirá una aproximación de la solución u de (2.21) como una función u_h que pertenece a un espacio lineal finito dimensional S_h de funciones de x . En el caso de una función lineal a trozos sobre una

partición de Ω , será una solución de un sistema finito de ecuaciones lineales algebraicas.

Usando una forma variacional de (2.20), procedemos a discretizar primero el problema parabólico en la variable espacial x , el cual resulta en una solución aproximada $u_h(\cdot; t)$, en el espacio del elemento finito S_h , como una solución del sistema dimensional finito de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Luego definimos un esquema discreto para discretizar este sistema, en vez de varias aproximaciones de diferencias finitas. Esto produce una solución aproximada U de (2.20), el cual pertenece a S_h niveles de tiempo discreto.

Ω es un dominio convexo en el plano con frontera suave $\partial\Omega$. \mathcal{T}_h denota una partición de Ω en triángulos disjuntos τ , de tal modo que ningún vértice de cualquier triángulo se encuentra en el interior de un lado de otro triángulo y tal que la unión de los triángulos determinen un dominio poligonal $\Omega_h \subset \Omega$ con vértices en la frontera $\partial\Omega$.

Sea h la longitud máxima de los lados de triangulación \mathcal{T}_h . Por lo tanto h , es un parámetro que disminuye a medida que la triangulación se hace más fino.

Supongamos que los ángulos de las triangulaciones están acotadas inferiormente por una constante positiva, independientemente de h , y a veces también las triangulaciones son cuasi uniformes en el sentido que los triángulos de \mathcal{T}_h son esencialmente del mismo tamaño, el cual expresamos que el área de $\tau \in \mathcal{T}_h$, es acotado inferiormente por ch^2 , con $c > 0$, independiente de h . Sea S_h las funciones continuas sobre la clausura $\bar{\Omega}$, el cual son lineales en cada triángulo de \mathcal{T}_h y que desaparecen fuera de Ω_h .

Sea $\{P_j\}_{j=1}^{N_h}$ los vértices interiores de \mathcal{T}_h . Una función en S_h esta determinada únicamente por sus valores en los puntos P_j y por lo tanto depende de los parámetros N_h .

Sea Φ_j la función pirámide en S_h el cual toma valor 1 en P_j pero desaparece en otros vértices. Luego $\{\Phi_j\}_{j=1}^{N_h}$ forma una base para S_h , y cada χ en S_h admite la representación:

$$\chi(x) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \Phi_j(x), \quad \text{con } \alpha_j = \chi(P_j)$$

dada una función suave v sobre Ω el cual desaparece sobre $\partial\Omega$ ahora se puede aproximar, por ejemplo, su interpolante $I_h v$ en S_h ,

que definimos como elemento de S_h , que coincide con v en el interior de los vértices, es decir:

$$(2.22) \quad I_h v(x) = \sum_{j=1}^{N_h} v(P_j) \Phi_j(x),$$

Por lo general $\Omega \subset \mathcal{R}^d$ denotaremos por $\|\cdot\|$ la norma en $L_2 = L_2(\Omega)$ y por $\|\cdot\|_r$ que en el espacio Sobolev $H^r = H^r(\Omega) = W_2^r(\Omega)$, de modo que para las funciones reales v :

$$\|v\| = \|v\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{1/2}$$

y para r un entero positivo:

$$(2.23) \quad \|v\|_r = \|v\|_{H^r} = \left(\sum_{|\alpha| \leq r} |D^\alpha v|^2 \right)^{1/2}$$

donde, con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $D^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_d)^{\alpha_d}$ denota una derivada arbitraria con respecto a x de orden $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$, de modo que la suma en (2.23), contiene todas las derivadas de orden a lo más r . Recordamos que para las funciones en $H_0^1 = H_0^1(\Omega)$,

es decir, las funciones v con $\nabla v = \text{grad } v$ en L_2 y que desaparece sobre $\partial\Omega$. $\|\nabla v\|$ y $\|v\|_1$ son normas equivalentes:

$$(2.24) \quad c\|v\|_1 \leq \|\nabla v\| \leq \|v\|_1, \quad \forall v \in H_0^1, \text{ con } c > 0$$

Usando esta notación en nuestro plano dominio Ω , los siguientes errores estimados para el interpolante definido en (2.22), están bien definidos es decir para $v \in H^2 \cap H_0^1$:

$$(2.25) \quad \|I_h v - v\| \leq Ch^2 \|v\|_2 \quad \text{y} \quad \|\nabla(I_h v - v)\| \leq Ch \|v\|_2$$

pueden ser derivados mostrando la estimación correspondiente para cada $\tau \in \mathcal{T}_h$ y luego tomando cuadrados y agregando. Para un individuo $\tau \in \mathcal{T}_h$, la prueba se realiza por medio del lema de Bramble-Hilbert, señalando que $I_h v - v$ desaparece en τ para v lineal. Ahora regresamos al caso general de un dominio Ω en \mathcal{R}^d y asumimos que tenemos una familia $\{S_h\}$ de sub espacios de dimensión finita de H_0^1 tal que para algún entero $r \geq 2$ y h pequeño:

$$(2.26) \quad \inf_{\chi \in S_h} \{\|v - \chi\| + h\|\nabla(v - \chi)\|\} \leq Ch^s \|v\|_s, \quad 1 \leq s \leq r,$$

Cuando $\partial\Omega$ es curva y $r > 2$ existen dificultades en la construcción y análisis de tales operadores cerca de la frontera, pero la situación anterior puede llevarse a cabo, en principio, mediante la asignación de una curva en un triángulo de un borde recto.

Observamos como referencia que si la familia $\{S_h\}$, esta basada sobre una familia de triangulaciones cuasi uniforme, \mathcal{T}_h y S_h consta de polinomios por tramos de grado a lo más $r - 1$, luego se tiene la desigualdad inversa:

$$(2.27) \quad \|\nabla\chi\| \leq Ch^{-1}\|\chi\|, \quad \forall \chi \in S_h$$

El orden óptimo en que las funciones y sus gradientes se pueden aproximar en nuestra hipótesis (2.26), son $O(h^r)$ y $O(h^{r-1})$ respectivamente y ahora vamos a tratar de construir aproximaciones de estas órdenes para la solución del problema de Dirichlet (2.21). Para este propósito primero escribiremos este problema en la debilidad o la forma variacional: Se multiplica la ecuación elíptica por una función suave φ el cual desaparece en $\partial\Omega$ (es suficiente requerir $\varphi \in H_0^1$), integrar sobre Ω , y aplicar la fórmula de Green en el lado izquierdo, para obtener:

$$(2.28) \quad (\nabla u; \nabla \varphi) = (f; \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1,$$

donde hemos utilizado el producto interno L_2 :

$$(2.29) \quad (v; w) = \int_{\Omega} vw \, dx, \quad (\nabla v; \nabla w) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_j} \, dx.$$

En el método del elemento finito nos planteamos los problemas aproximados, encontrando una función $u_h \in S_h$ tal que:

$$(2.30) \quad (\nabla u_h; \nabla \chi) = (f; \chi), \quad \forall \chi \in S_h,$$

Esta forma de definir una solución aproximada en términos de la formulación variacional del problema, se conoce como el método de Galerkin.

Note que como resultado de (2.28) y (2.30):

$$(2.31) \quad (\nabla(u_h; u); \nabla \chi) = 0 \quad \forall \chi \in S_h,$$

Esto es, el error en la solución discreta es ortogonal a S_h con respecto al producto interno de Dirichlet $(\nabla v; \nabla w)$.

En términos de una base $\{\Phi_j\}_1^{N_h}$ para el espacio de elementos finitos, nuestro problema discreto puede ser expresado. Encontrar los coeficientes α_j en:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \Phi_j(x)$$

tal que:

$$\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j (\nabla \Phi_j; \nabla \Phi_k) = (f; \Phi_k), \quad k = 1, \dots, N_h$$

La notación matricial puede ser expresada como:

$$B\alpha = \tilde{f}$$

donde $B = (b_{jk})$, es la matriz rígida con elementos $b_{jk} = (\nabla \Phi_j; \nabla \Phi_k)$, $\tilde{f} = (f; \Phi_k)$ el vector con entradas $f_k = (f; \Phi_k)$, y α el vector de incógnitas α_j . La dimensión de estas matrices es igual N_h , la dimensión S_h .

La matriz rígida B, es una matriz de Gram, y por tanto, en particular positivo definido e inversa de modo que nuestro problema discreto tiene una única solución. Ver que $B = (b_{jk})$ es positivo definido, notamos que:

$$\sum_{j,k=1}^d b_{jk} \xi_j \xi_k = \left\| \nabla \left(\sum_{j=1}^d \xi_j \Phi_j \right) \right\|^2 \geq 0$$

la igualdad se cumple solo si $\nabla(\sum_{j=1}^d \xi_j \Phi_j) \equiv 0$, de modo que $\sum_{j=1}^d \xi_j \Phi_j = 0$ por (2.24), y por lo tanto $\xi_j = 0$, $j = 1, \dots, N_h$

Cuando N_h consiste de funciones polinomiales por tramos, los elementos de la matriz B, podrían ser calculados exactamente. Sin embargo, a menos que f tenga una forma particular sencilla, los elementos $(f; \Phi_j)$ de f tienen que ser calculados por una formula de cuadratura.

Además tenemos la ecuación diferencial parcial parabólica de segundo orden en su forma general:

$$d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f \quad \text{sobre } \Omega \quad \circ$$

$$d \frac{\partial u}{\partial t} - c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + au = f \quad \text{sobre } \Omega$$

Los coeficientes c , a , d , e , f de la Ecuación Diferencial Parcial se pueden administrar en una variedad de maneras. Los coeficientes pueden depender de t , que determina el tiempo.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1. Identificación de las variables

Variable dependiente:

- SEDP: Solución de la ecuación diferencial parcial parabólica.

Variable independiente:

- PMEF: Programa del método del elemento finito.

3.2. Definición operacional de las variables

La solución de una ecuación diferencial parcial parabólica está en función del método del elemento finito:

$$\text{SEDP} = \text{función (MEF)}$$

3.3. Definición conceptual de la variable dependiente

Solución de la ecuación diferencial parcial

La solución de la ecuación diferencial parcial parabólica:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = S$$

donde $B^2 - 4AC = 0$, es una función $u(x, y)$, si en alguna región del espacio de sus variables independientes, la función y sus derivadas satisfacen la ecuación idénticamente en x y y .

Indicadores

- **Solución analítica de la Ecuación diferencial parcial parabólica**

Es la que se obtiene utilizando los fundamentos matemáticos, como por ejemplo el método analítico de separación de variables.

- **Solución numérica de la Ecuación diferencial parcial parabólica**

Es la que se obtiene utilizando métodos numéricos, que aproximan la solución en puntos discretos, por ejemplo tenemos el método de diferencias finitas y la del elemento finito.

3.4. Definición conceptual de la variable independiente

Programa del método del elemento finito

El método del elemento finito divide el dominio de la solución en regiones, con formas sencillas o “elementos” en lugar de una malla rectangular, proporcionando una mejor aproximación en la solución para sistemas con forma convexa. Incluye las condiciones de frontera como integrales en una funcional que va a reducirse al mínimo, de modo que el procedimiento de construcción es independiente de las condiciones particulares de frontera del problema.

Indicadores

- **Métodos para desarrollar las ecuaciones de los elementos**

Una vez que se tienen las funciones lineales, para desarrollar las ecuaciones de los elementos, se puede utilizar el método de residuos ponderados, el método directo o el método variacional.

- **Discretización del dominio**

Los “elementos” pueden ser intervalos si el dominio es unidimensional, regiones triangulares o rectangulares si es bidimensional, y tetraedros si es tridimensional.

3.5. El software MATLAB

MATLAB (**MAT**rix **LAB**oatory-Laboratorio de matrices) es un medio computacional técnico, con un gran desempeño para el cálculo numérico computacional y de visualización. MATLAB integra análisis numérico, matrices, procesamiento de señales y gráficas. El ambiente de desarrollo de Interfaz de Usuario en MATLAB (GUIDE), contiene un conjunto de herramientas para crear interfaces graficas muy parecidas a las aplicaciones Windows. Estas herramientas simplifican el proceso de creación y de programación.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado se muestra la implementación del algoritmo del método del elemento finito, para la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas con frontera convexa en el lenguaje de programación MATLAB. Primero, mostraremos el desarrollo analítico para encontrar la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica con frontera convexa en el ejemplo 4.1, y posteriormente en los problemas 4.2 y 4.3 aplicaremos el programa hecho en MATLAB, del método del elemento finito, en el desarrollo de un problema con las mismas características del ejemplo 4.1.

EJEMPLO 4.1. Supóngase que la región rectangular es una placa delgada en que la temperatura u es función del tiempo t y de la posición (x, y) . De la temperatura $u(x, y, t)$ de la placa que muestra el gráfico 4.1, si la temperatura inicial es $f(x; y)$ en toda ella y si los bordes se mantienen a la temperatura cero.

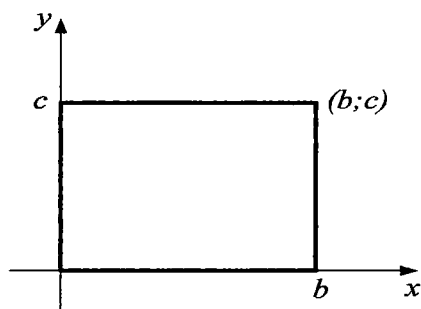


FIGURA 4.1.: Placa delgada.

FUENTE: Zill, Dennis G. (1997). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*. México

SOLUCION.- Debemos resolver:

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c, \quad t > 0$$

sujeta a:

$$u(0; y; t) = 0, \quad u(b; y; t) = 0, \quad 0 < y < c, \quad t > 0$$

$$u(x; 0; t) = 0, \quad u(x; c; t) = 0, \quad 0 < x < b, \quad t > 0$$

$$u(x; y; 0) = f(x; y), \quad 0 < x \leq b, \quad 0 < y < c$$

Para separar las variables en la ecuación, en derivadas parciales contra variables independientes, trataremos de hallar una solución producto $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$. Al sustituir esta hipótesis se obtiene:

$$k(X''YT + XY''T) = XYT''$$

o sea:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{T'}{kT} \quad (1)$$

Dado que el lado izquierdo de la ecuación (1) solo depende de x y el derecho nada más de y y t , debemos igualar ambos lados a una constante: $-\lambda^2$:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{T'}{kT} = -\lambda^2 \quad (2)$$

y, así:

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{T'}{kT} + \lambda^2 \quad (3)$$

Por las mismas razones, si ensayamos otra constante de separación $-\mu^2$ en la ecuación (3), entonces:

$$\frac{Y''}{Y} = -\mu^2 \quad y \quad \frac{T'}{kT} + \lambda^2 = -\mu^2$$

$$Y'' + \mu^2 Y = 0 \quad y \quad T' + k(\lambda^2 + \mu^2)T = 0 \quad (4)$$

Las soluciones de las ecuaciones en (2) y en (4), son respectivamente:

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x \quad (5)$$

$$Y(y) = c_3 \cos \mu y + c_4 \operatorname{sen} \mu y \quad (6)$$

$$T(t) = c_5 e^{-k(\lambda^2 + \mu^2)t} \quad (7)$$

Pero las condiciones en la frontera:

$$\begin{cases} u(0; y; t) = 0, & u(b; y; t) = 0 \\ u(x; 0; t) = 0, & u(x; c; t) = 0 \end{cases} \quad implican \quad \begin{cases} X(0) = 0, & X(b) = 0 \\ Y(0) = 0, & Y(c) = 0 \end{cases}$$

Al aplicar esas condiciones a las ecuaciones en (5) y (6) se obtiene $c_1 = 0$, $c_3 = 0$ y $c_2 \text{sen} \lambda b = 0$, $c_4 \text{sen} \mu c = 0$. Estas últimas implican a su vez:

$$\lambda = \frac{m\pi}{b}, \quad m = 1; 2; 3, \dots; \quad \mu = \frac{n\pi}{c}, \quad n = 1; 2; 3, \dots$$

Así, una solución producto de la ecuación del calor en dos dimensiones que satisface las condiciones en la frontera, es:

$$u_{mn}(x; y; t) = A_{mn} e^{-k \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 \right] t} \text{sen} \frac{m\pi}{b} x \text{sen} \frac{n\pi}{c} y,$$

en que A_{mn} es una constante arbitraria. Puesto que tenemos dos conjuntos independientes de valores propios, ensayaremos el principio de superposición en forma de una suma doble:

$$u_{mn}(x; y; t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-k \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 \right] t} \text{sen} \frac{m\pi}{b} x \text{sen} \frac{n\pi}{c} y \quad (8)$$

ahora bien, en $t = 0$ se debe cumplir:

$$u_{mn}(x; y; 0) = f(x; y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \text{sen} \frac{m\pi}{b} x \text{sen} \frac{n\pi}{c} y \quad (9)$$

Los coeficientes A_{mn} se pueden hallar multiplicando la suma doble (9) por el producto $\text{sen} \frac{m\pi}{b} x \text{sen} \frac{n\pi}{c} y$ e integrando en el rectángulo $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq c$, entonces:

$$A_{mn} = \frac{4}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x; y) \text{sen} \frac{m\pi}{b} x \text{sen} \frac{n\pi}{c} y \, dx \, dy \quad (10)$$

PROBLEMA 4.1. Hallar la solución de la siguiente ecuación diferencial parcial parabólica:

$$u_t - \Delta_{xx} u(x, y, t) = 2yt(x^2 - t), \quad t \in (0; 1) \quad \text{o}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 2yt(x^2 - t)$$

con las condiciones de frontera:

$$\begin{cases} u(x, 0, t) = 0 \text{ en } 0 \leq x \leq 10 \\ u(10, y, t) = 100yt^2 \text{ en } 0 \leq y \leq 10 \\ u(x, 10, t) = 10x^2t^2 \text{ en } 0 \leq x \leq 10 \\ u(0, y, t) = 0 \text{ en } 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$$

y sujeta a la condición inicial:

$$u(x, y, 0) = 0 \text{ en } 0 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 10$$

Solución aplicando el programa en MATLAB

1. Construcción de la región

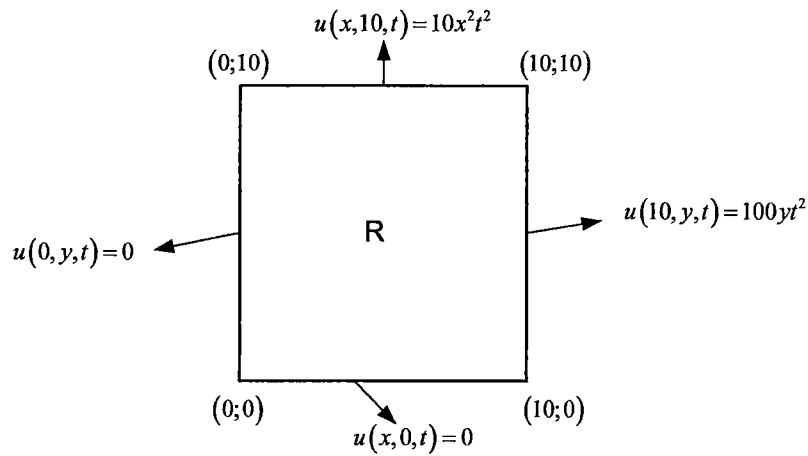


FIGURA 4.1.1. Construcción de la región del problema 4.1
Fuente: Elaboración Propia

2. Ingreso de puntos de la región:

$$V1 = (0;0), \quad V2 = (10;0), \quad V3 = (10;10), \quad V4 = (0;10)$$

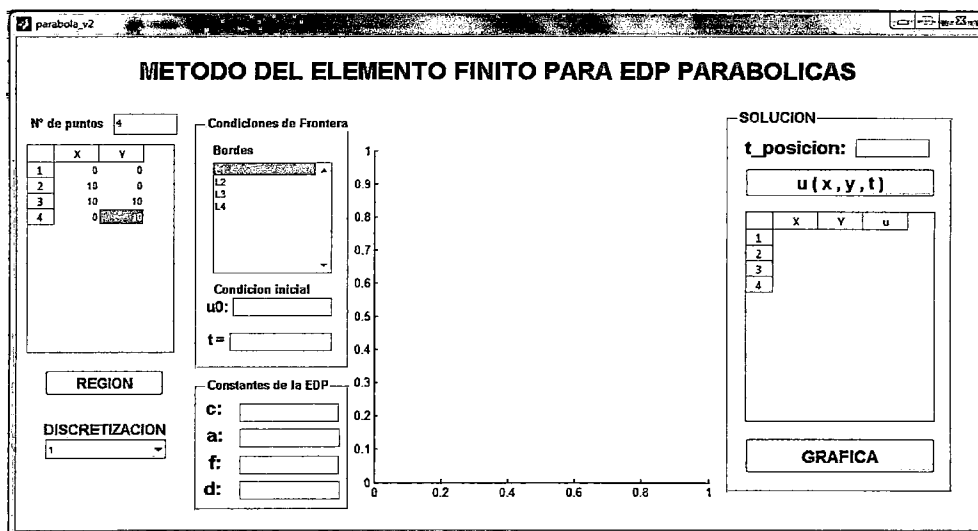


FIGURA 4.1.2. Ingreso de puntos (vértices)

Fuente: Elaboración Propia

3. Construir la región:

Hacer clic en el botón **REGION** para mostrar la región, tal como se muestra en la Figura 4.1.3.

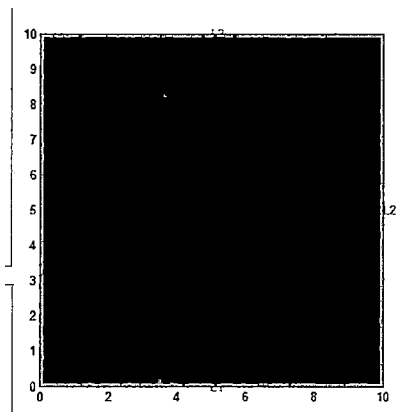
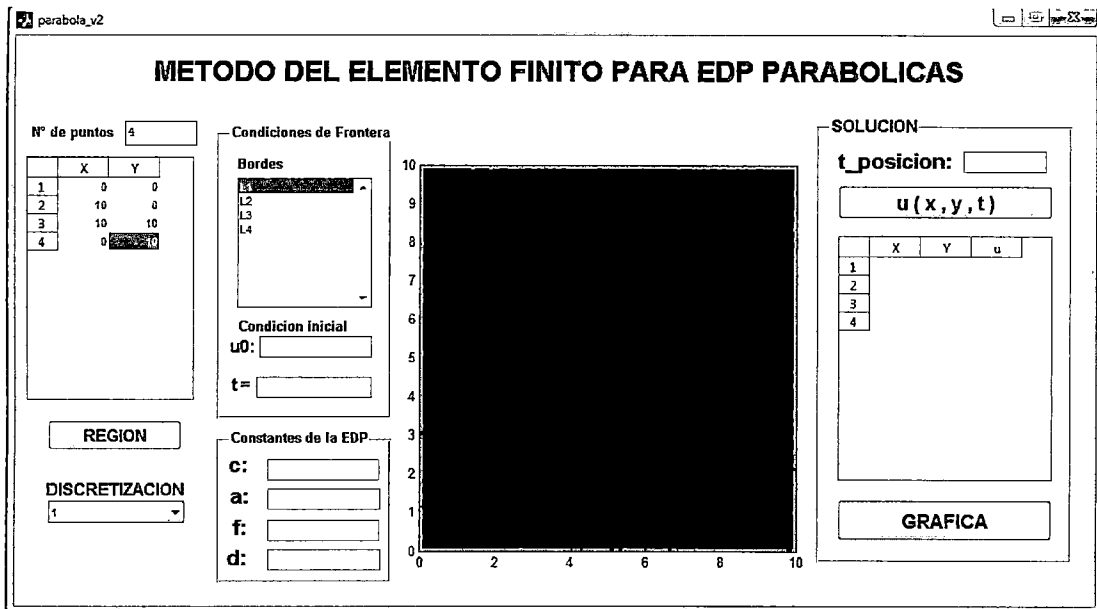


FIGURA 4.1.3. Region del problema 4.1

Fuente: Elaboración Propia

4. Discretización de la región:

Hacer clic en el Botón **DISCRETIZACION** para mostrar la región discretizada (dividida en triángulos), tal como se muestra en la Figura 4.1.4

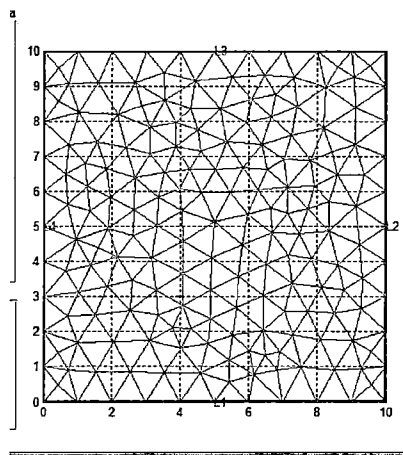
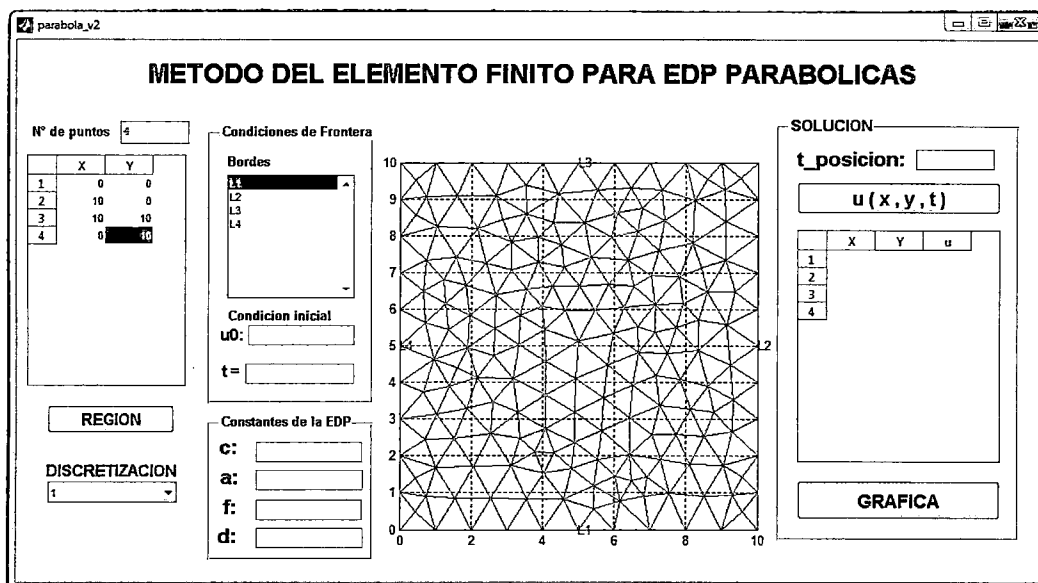


FIGURA 4.1.4. Dominio discretizado

Fuente: Elaboración Propia

5. Ingreso de las condiciones de frontera (bordes)

Hacer clic en cada una de las líneas de borde, para ingresar las condiciones de frontera de Dirichlet

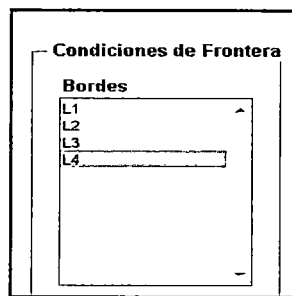


FIGURA 4.1.5. Condiciones de frontera
Fuente: Elaboración Propia

Para el borde de la frontera (recta L1), ingresar la condición de frontera $u(x; 0; t) = 0$

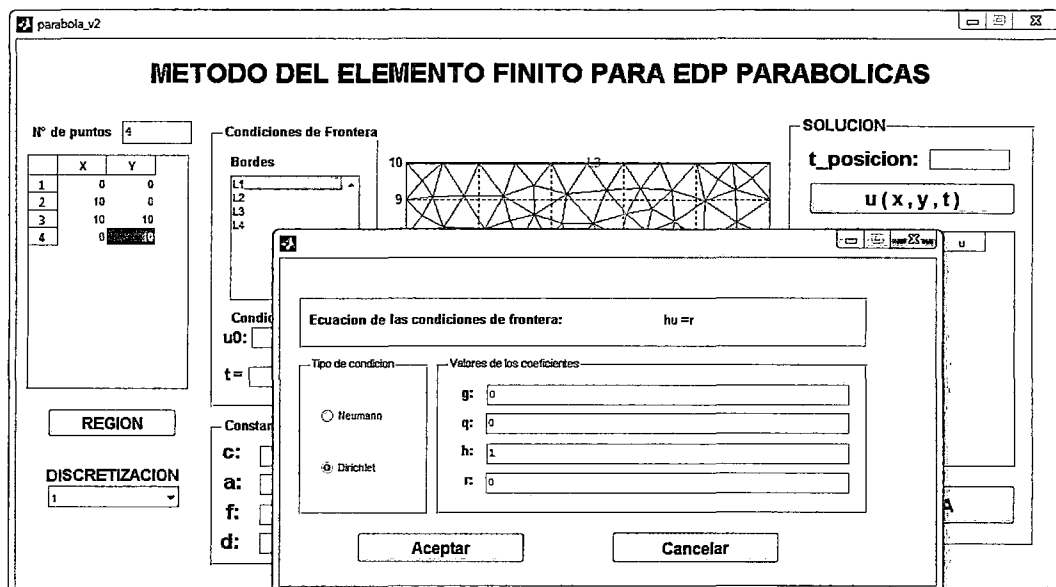


FIGURA 4.1.6. Condición de frontera para L1
Fuente: Elaboración Propia

Para el borde de la frontera (recta L2), ingresar la condición de frontera $u(10; y; t) = 100yt^2$

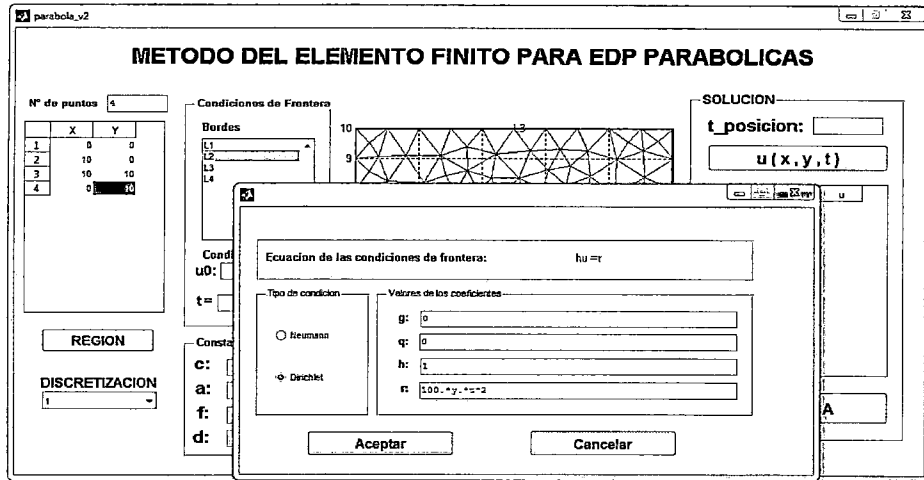


FIGURA 4.1.7. Condición de frontera para L2

Fuente: Elaboración Propia

Para el borde de la frontera (recta L3), ingresar la condición de frontera $u(x; 100; t) = 10x^2t^2$

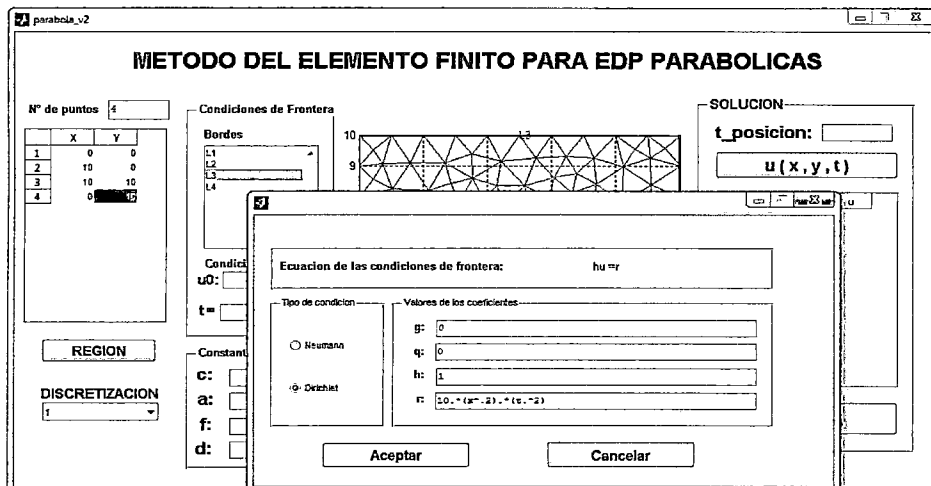


FIGURA 4.1.8. Condición de frontera para L3

Fuente: Elaboración Propia

Para el borde de la frontera (recta L4), ingresar la condición de frontera $u(0; y; t) = 0$

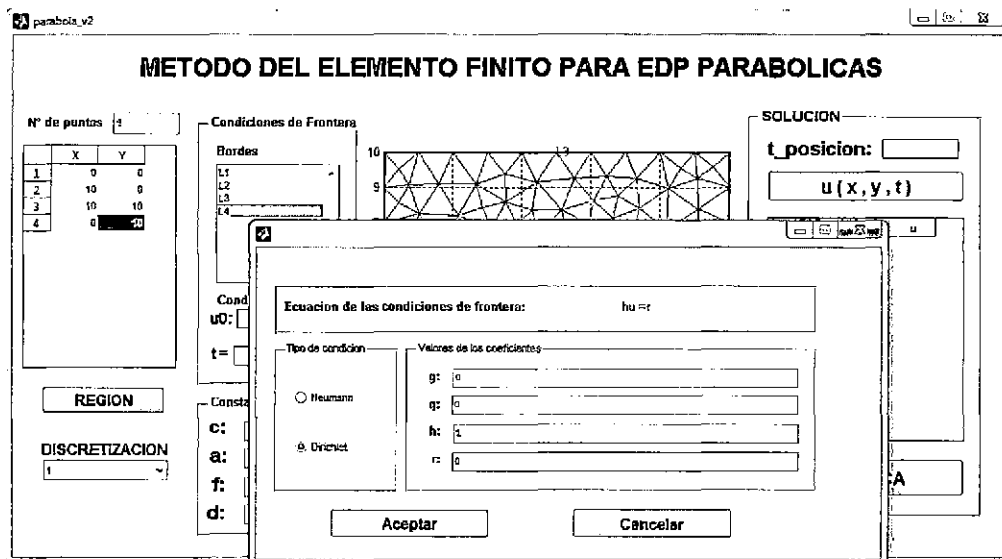


FIGURA 4.1.9. Condición de frontera para L4
Fuente: Elaboración Propia

6. Ingreso de las condiciones iniciales: $u(x; y; 0) = 0$

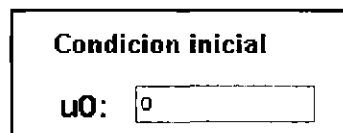


FIGURA 4.1.10. Condición inicial
Fuente: Elaboración Propia

7. Ingresar los valores que va a tomar t, es decir $t=[0:0.1:1]$

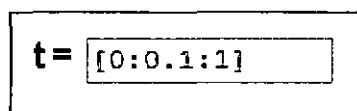


FIGURA 4.1.11. Ingreso de los valores de t para el problema 4.1
Fuente: Elaboración Propia

8. Ingreso de las condiciones de las constantes de la Ecuación Diferencial Parcial Parabólica. La EDP parabólica general es:

$$d \frac{\partial u}{\partial t} + c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + au = f$$

La EDP parabólica del problema 4.1. es:

$$u_t - \Delta_{xx} u(x, y, t) = 2yt(x^2 - t), \quad t \in (0; 1) \quad o$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2yt(x^2 - t), \quad t \in (0; 1)$$

Constantes de la EDP	
c:	<input type="text" value="1"/>
a:	<input type="text" value="0"/>
f:	<input type="text" value="2.*y.*t.*t"/>
d:	<input type="text" value="1"/>

FIGURA 4.1.12. Constante de la EDP
Fuente: Elaboración Propia

9. Obtención de la solución aproximada

Para obtener la solución aproximada de Ecuación Diferencial Parcial

$$u_t - \Delta_{xx} u(x, y, t) = 2yt(x^2 - t), \quad t \in (0; 1) \quad o$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2yt(x^2 - t), \quad t \in (0; 1)$$

sujeta a la condición inicial:

$$u(x, y, 0) = 0 \quad \text{en } 0 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 10$$

haga clic en el botón

u(x,y,t)

SOLUCION

t_posicion:

u(x,y,t)

	X	Y	u
178	4.2676	6.6152	120.3385
179	7.9205	6.1449	385.5595
180	3.7825	2.1191	30.1049
181	3.5420	6.5482	81.5794
182	6.5254	6.6226	281.9357
183	6.6360	5.5348	243.1064
184	7.1551	4.1965	214.5477
185	6.1719	0.7781	29.8420
186	6.8203	0.9060	41.8022
187	4.3157	2.0902	38.9069
188	6.0126	1.4523	52.4525

FIGURA 4.1.13. Solución del problema 4.1

Fuente: Elaboración Propia

Para obtener la gráfica hacer clic en el botón

GRAFICA

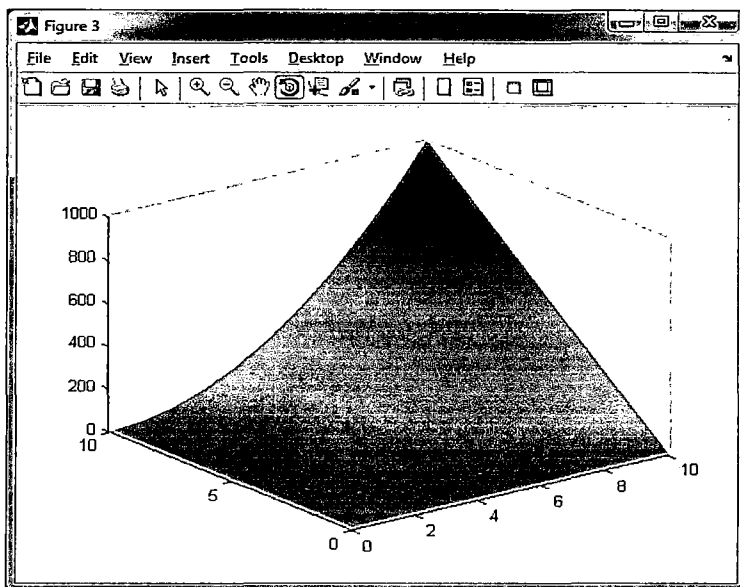


FIGURA 4.1.14. Gráfica de la superficie del problema 4.1 obtenida con el programa

Fuente: Elaboración Propia

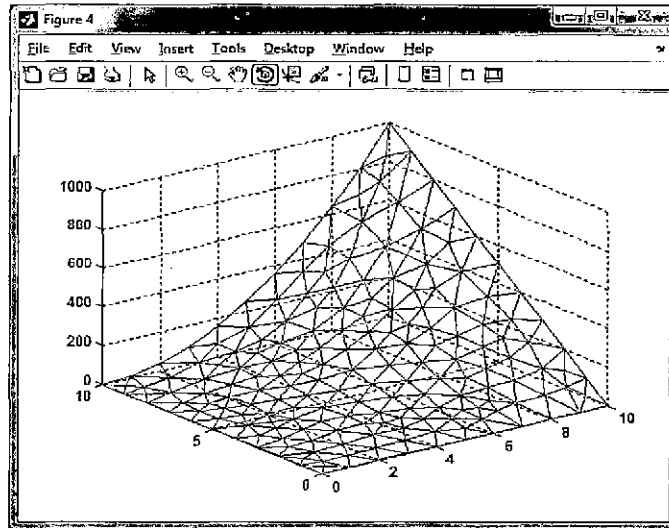


FIGURA 4.1.15. Gráfica de la superficie en forma de malla obtenida con el programa

Fuente: Elaboración Propia

Gráfica de la solución exacta cuya función es: $u(x, y, z) = x^2yt^2$ para $t=1$

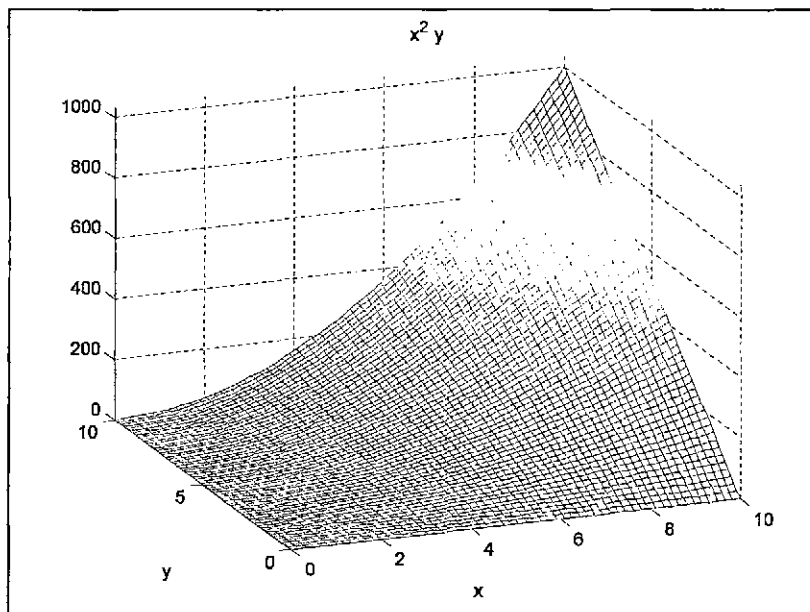


FIGURA 4.1.16. Gráfica de la solución exacta del problema 4.1 obtenida con el programa de MATLAB

PROBLEMA 4.2.

Hallar la solución aproximada de la siguiente Ecuación Diferencial Parcial Parabólica, con valores en la frontera

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad 0 < x, y < 1, t > 0$$

con condición inicial:

$$u(x, y, 0) = 100 \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \pi y \quad 0 < x, y < 1$$

y con condiciones de frontera:

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0 & 0 < x, y < 1, t > 0 \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0 & 0 < x, y < 1, t > 0 \end{cases}$$

Solución aplicando el programa en MATLAB

1. Construcción de la región

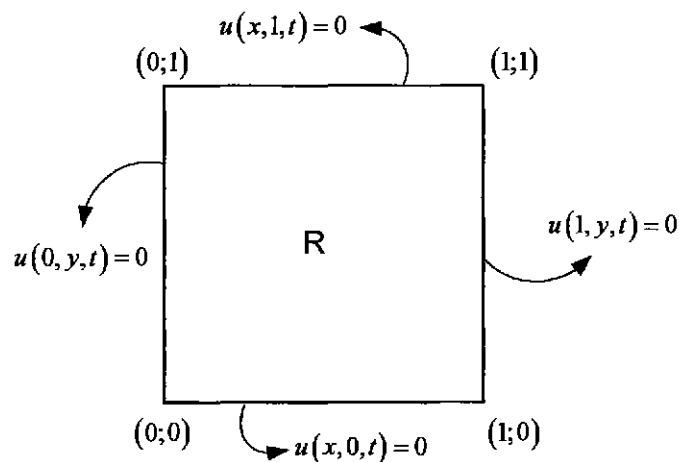
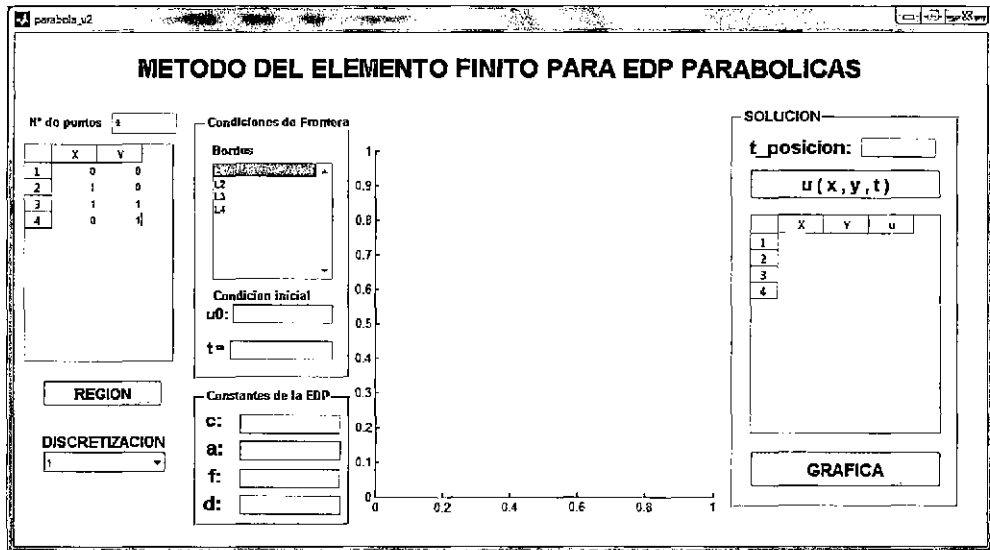


FIGURA 4.2.1. Construcción de la región del problema 4.2.

Fuente: Elaboración Propia

2. Ingresar los puntos de la región:

$$V1 = (0; 0), V2 = (1; 0), V3 = (1; 1) \text{ y } V4 = (0; 1)$$



		N° de puntos 4	
	X	Y	
1	0	0	
2	1	0	
3	1	1	
4	0	1	

FIGURA 4.2.2. Ingreso de puntos (vértices)

Fuente: Elaboración Propia

3. Construir la región:

Hacer clic en el Botón **REGION** para mostrar la región, tal como se muestra en la Figura 4.2.3.

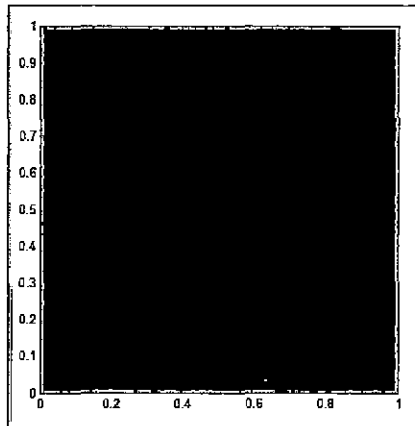
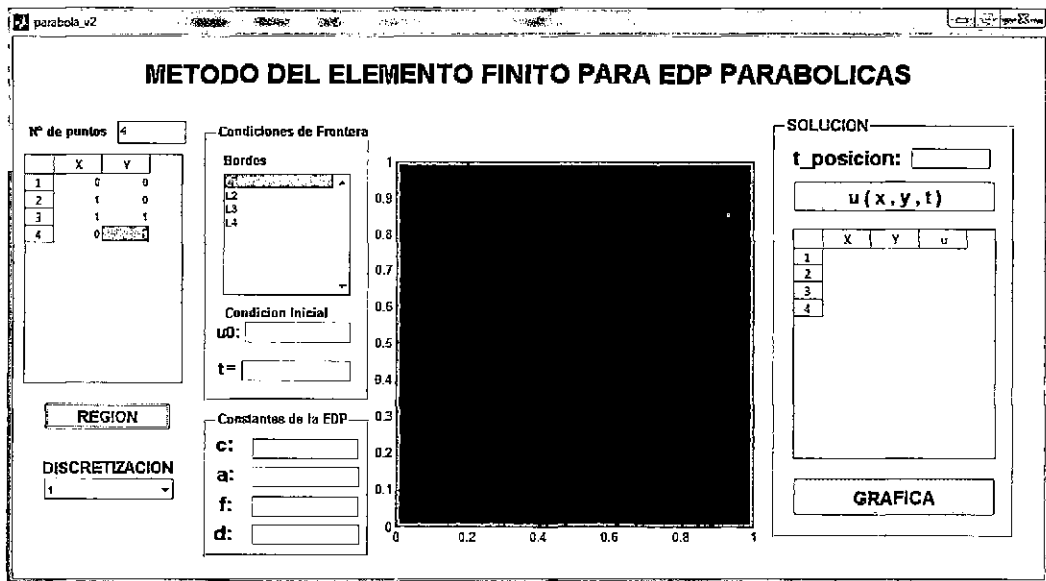


FIGURA 4.2.3. Región del problema 2.

Fuente: Elaboración Propia

4. Discretización de la región:

Hacer clic en el Botón **DISCRETIZACION** para mostrar la región discretizada (dividida en triángulos), tal como se muestra en la Figura 4.2.4.

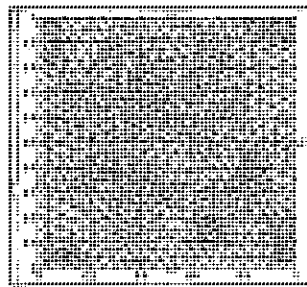
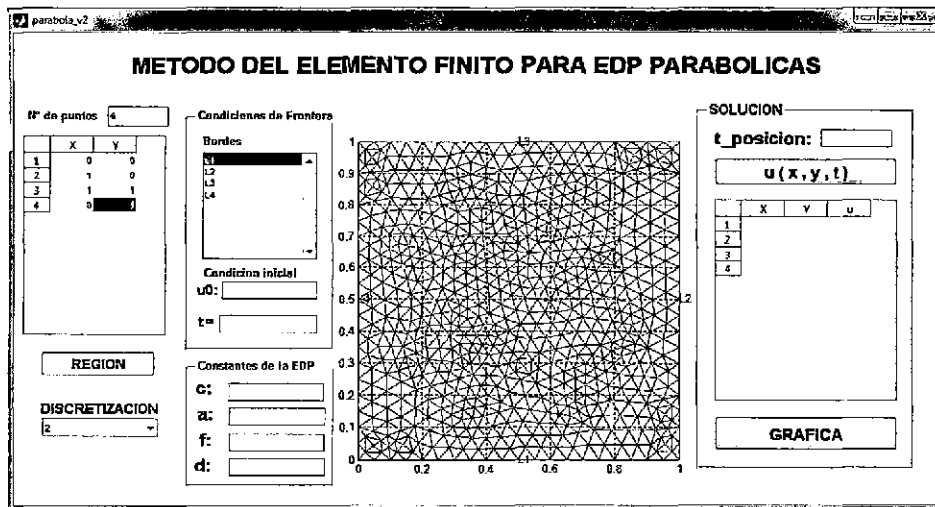


FIGURA 4.2.4. Dominio discretizado del problema 4.2

Fuente: Elaboración Propia

5. Ingreso de las condiciones de frontera (bordes)

Hacer clic en cada una de las líneas de borde, para ingresar las condiciones de frontera de Dirichlet

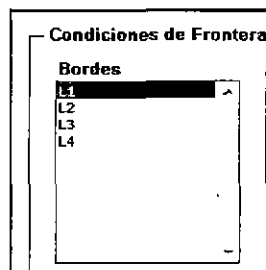


FIGURA 4.2.5. Condiciones de frontera

Fuente: Elaboración Propia

Para el borde de la frontera (recta L1), ingresar la condición de frontera $u(x; 0; t) = 0$

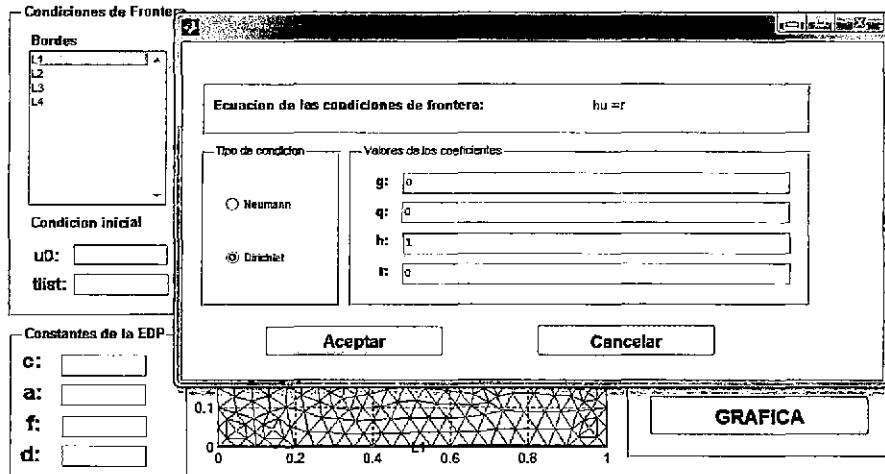


FIGURA 4.2.6. Condición de frontera para L1
Fuente: Elaboración Propia

Para el borde de la frontera (recta L2), ingresar la condición de frontera $u(1; y; t) = 0$

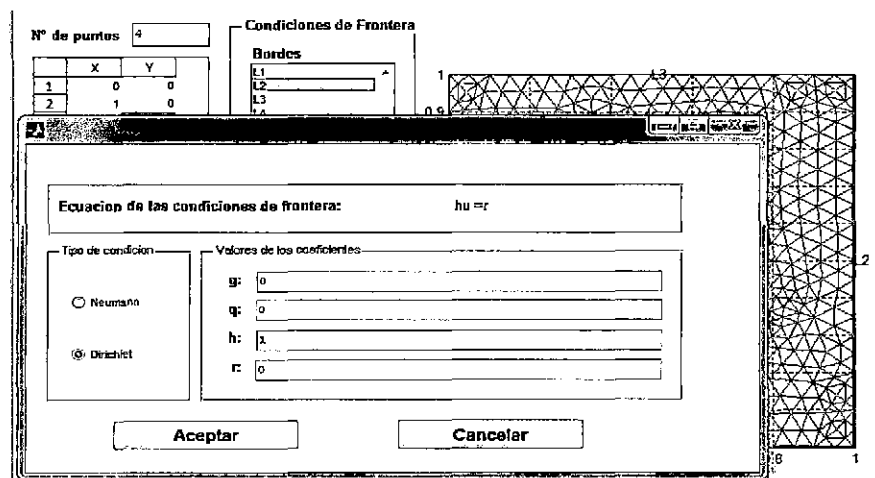


FIGURA 4.2.7. Condición de frontera para L2
Fuente: Elaboración Propia

Para el borde de la frontera (recta L3), ingresar la condición de frontera $u(x; 1; t) = 0$

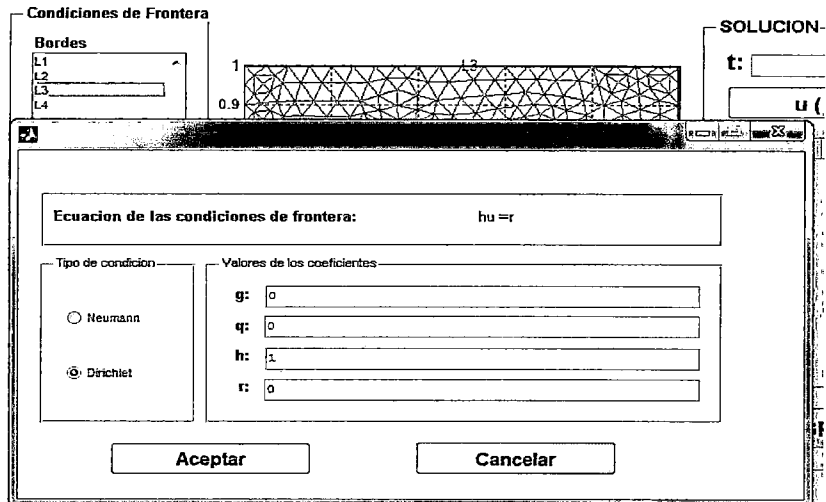


FIGURA 4.2.8. Condición de frontera para L3
Fuente: Elaboración Propia

Para el borde de la frontera (recta L4), ingresar la condición de frontera $u(0; y; t) = 0$

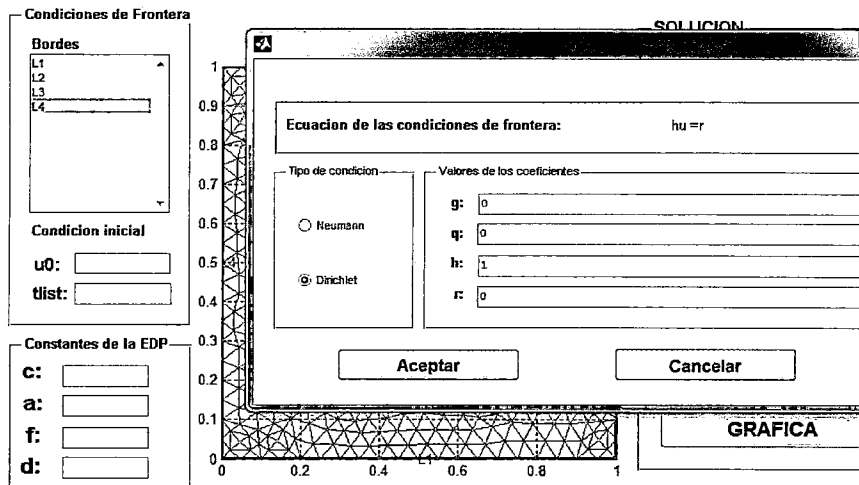


FIGURA 4.2.9. Condición de frontera para L4
Fuente: Elaboración Propia

6. Ingreso de las condiciones iniciales:

$$u(x; y; 0) = 100 \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \pi y \quad x > 0, y < 1$$

Condición inicial	
u0:	<input type="text"/>

FIGURA 4.2.10. Condición inicial
Fuente: Elaboración Propia

7. Ingresar los valores que va a tomar t, es decir $t = [0:0.1:1]$

t =	<input type="text" value="[0:0.1:1]"/>
-----	--

FIGURA 4.2.11. Ingreso de los valores de t para el problema 4.1
Fuente: Elaboración Propia

8. Ingreso de las condiciones de las constantes de la Ecuación Diferencial Parabólica.

Constantes de la EDP	
c:	<input type="text" value="1"/>
a:	<input type="text" value="0"/>
f:	<input type="text" value="0"/>
d:	<input type="text" value="1"/>

FIGURA 4.2.12. Condiciones constantes del EDP
Fuente: Elaboración Propia

9. Obtención de la solución

SOLUCION

t_posicion:

u(x, y, t)

	X	Y	u
164	0.5172	0.2908	0.0287
165	0.7913	0.4314	0.0217
166	0.6425	0.2745	0.0249
167	0.6633	0.3537	0.0285
168	0.6768	0.6021	0.0293
169	0.3094	0.7009	0.0243
170	0.2975	0.3067	0.0241
171	0.6320	0.4934	0.0333
172	0.4046	0.5461	0.0344
173	0.4363	0.3855	0.0334
174	0.7412	0.5877	0.0255

FIGURA 4.2.13. Solución del problema 4.2 aplicando el programa
Fuente: Elaboración Propia

10. Gráfica de la solución aproximada

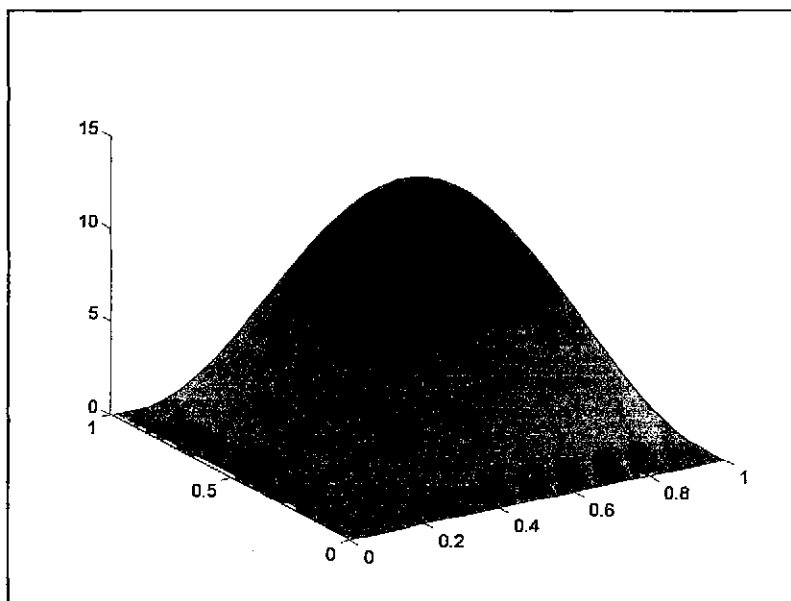


FIGURA 4.2.14. Gráfica de la superficie del problema 4.2 obtenida con el programa
Fuente: Elaboración Propia

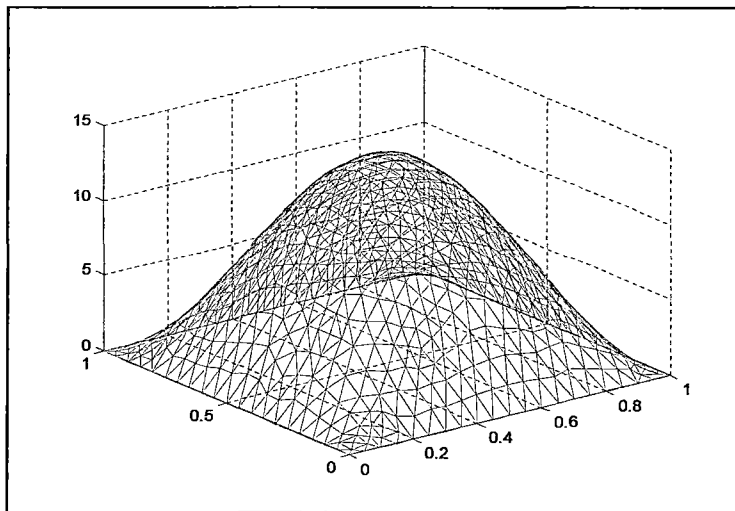


FIGURA 4.2.15. Gráfica de la superficie en forma de malla obtenida con el programa
Fuente: Elaboración Propia

Gráfica de la solución exacta para $t=0.1$, función es:

$$u(x, y, t) = 100 e^{-2.01 \pi^2 t} \text{sen} \pi x \text{sen} \pi y \text{ cuya}$$

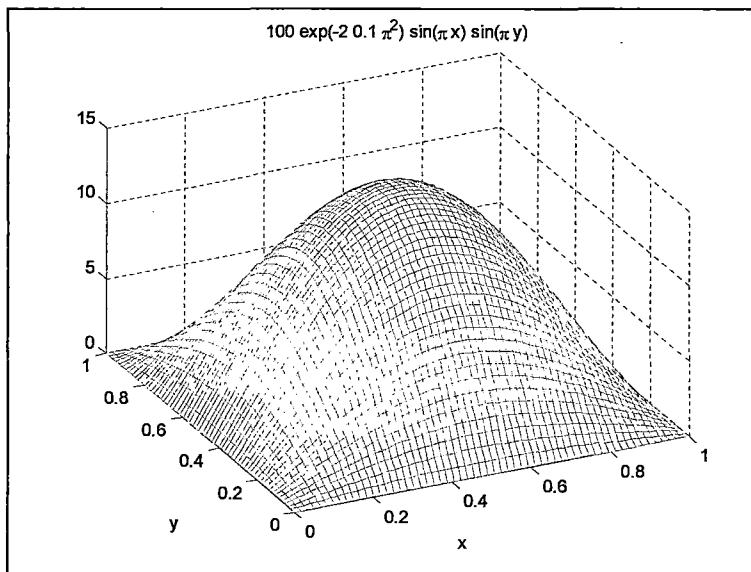


FIGURA 4.2.16. Gráfica de la solución exacta del problema 4.2
Obtenida en MATLAB

PROBLEMA 4.3. Hallar la solución aproximada de la ecuación diferencial parcial parabólica:

$$u_t - (u_{xx} + u_{yy}) = (1 + 2t) \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad t \in \langle 0; 1 \rangle \text{ o}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = (1 + 2t) \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

sujeta a la condición inicial:

$$u(x; y; 0) = 0 \quad \text{en } 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi$$

con las condiciones de frontera:

$$\begin{cases} u(0, y, t) = 0 \quad \text{en } 0 \leq x \leq 2\pi \\ u(x, 0, t) = 0 \quad \text{en } 0 \leq x \leq 2\pi \\ u_x(2\pi, y, t) = t \operatorname{sen} y \quad \text{en } 0 \leq y \leq 2\pi \\ u_y(x, 2\pi, t) = t \operatorname{sen} x \quad \text{en } 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Solución aplicando el programa en MATLAB

1. Construcción de la región

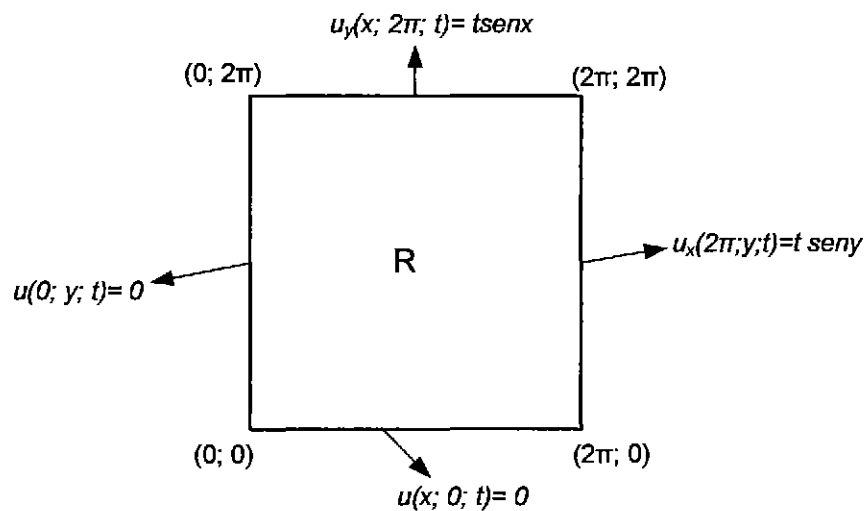


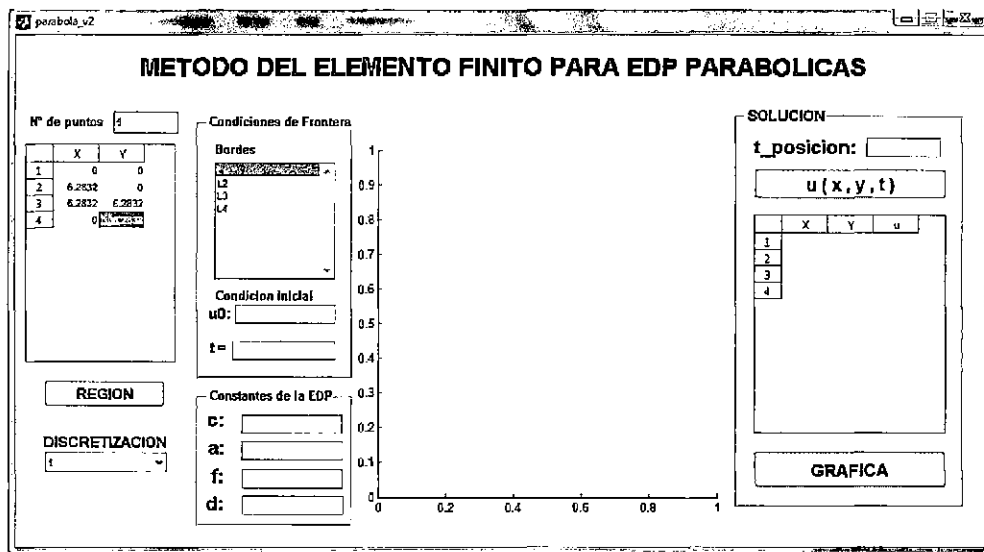
FIGURA 4.3.1. Construcción de la región del problema 4.3

Fuente: Elaboración Propia

2. Ingreso de puntos de la región:

$$V1 = (0; 0), \quad V2 = (2\pi; 0),$$

$$V3 = (2\pi; 2\pi), \quad V4 = (0; 2\pi)$$



Nº de puntos

	X	Y
1	0	0
2	6.2832	0
3	6.2832	6.2832
4	0	6.2832

FIGURA 4.3.2. Ingreso de puntos (vértices)

Fuente: Elaboración Propia

3. Construir la región:

Hacer clic en el Botón para mostrar la región, tal como se muestra en la Figura 4.3.3.

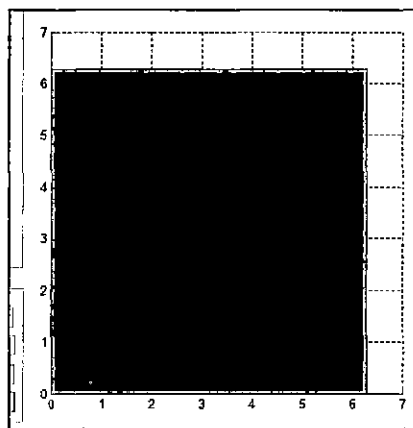
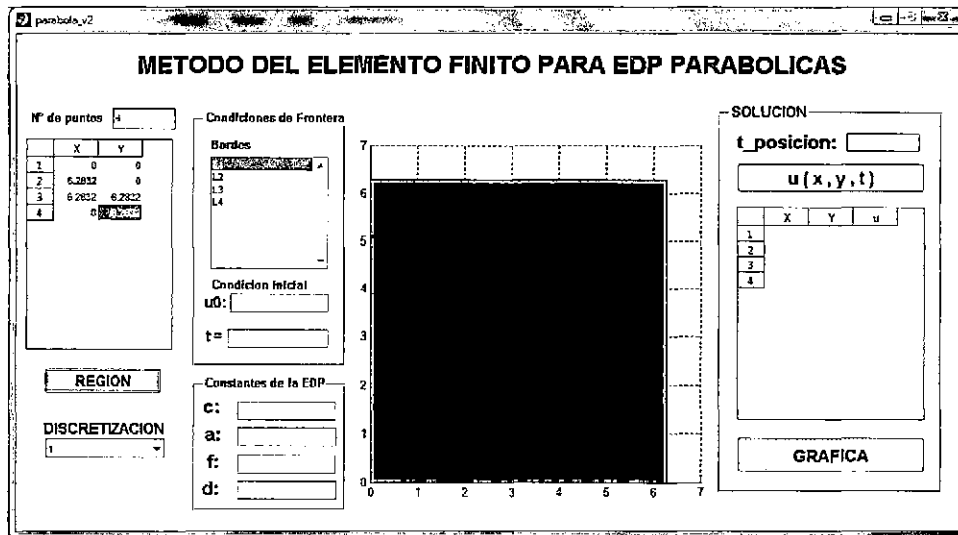


FIGURA 4.3.3. Región del problema 4.3

Fuente: Elaboración Propia

4. Discretización de la región:

Elegir el tipo de discretización y hacer clic para mostrar la región discretizada (dividida en triángulos), tal como se muestra en la Figura 4.3.4.

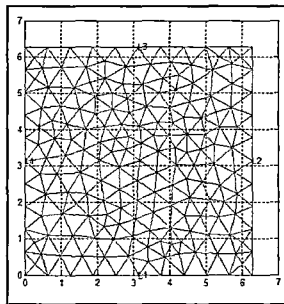
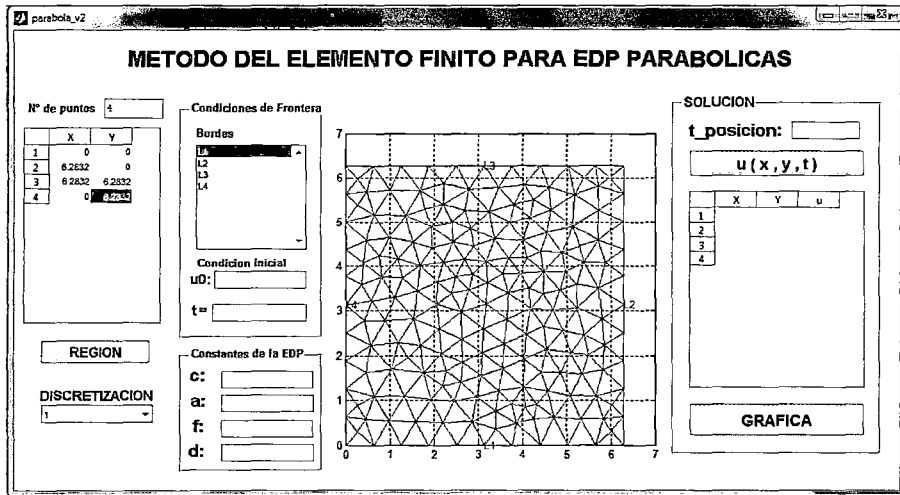


FIGURA 4.3.4. Dominio discretizado del problema 4.3

Fuente: Elaboración Propia

5. Ingreso de las condiciones de frontera (bordes):

Hacer clic en cada una de las líneas de borde, para ingresar las condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann

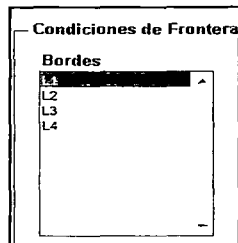


FIGURA 4.3.5. Condiciones de frontera

Fuente: Elaboración Propia

Para el borde de la frontera (recta L1), ingresar la condición de frontera $u(x; 0; t) = 0$

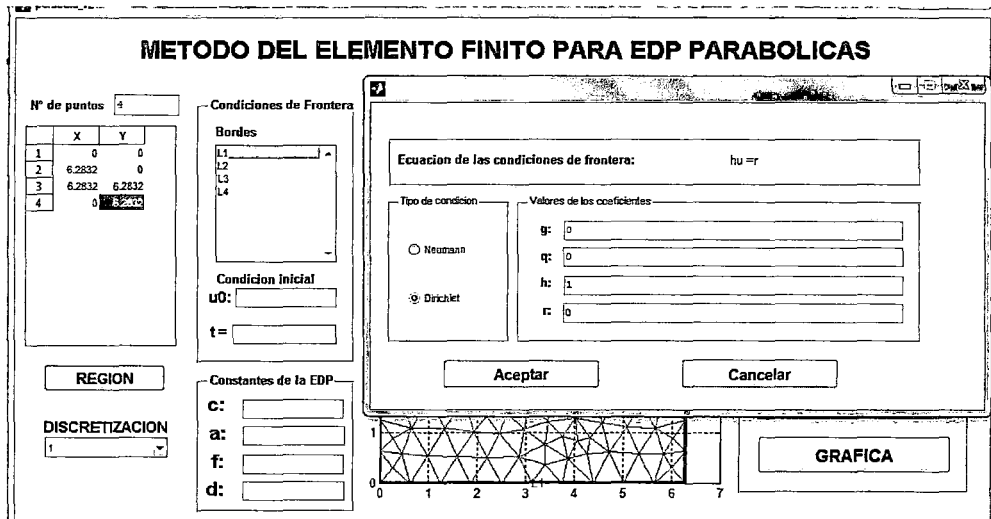


FIGURA 4.3.6. Condiciones de frontera para L1
Fuente: Elaboración Propia

Para el borde de la frontera (recta L2), ingresar la condición de frontera $u_x(2\pi; y; t) = t \sin y$

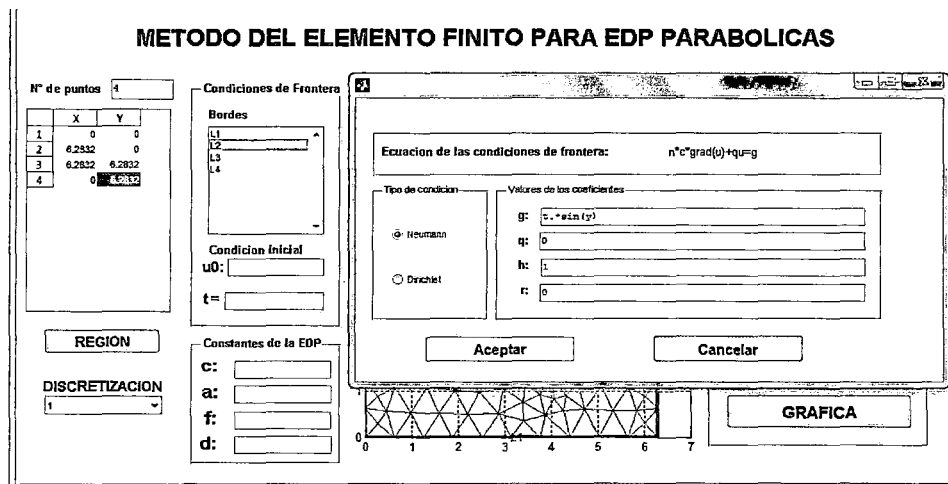


FIGURA 4.3.7. Condiciones de frontera para L2
Fuente: Elaboración Propia

Para el borde de la frontera (recta L3) ingresar la condición de frontera

$$u_y(x; 2\pi; t) = t \operatorname{sen} x$$

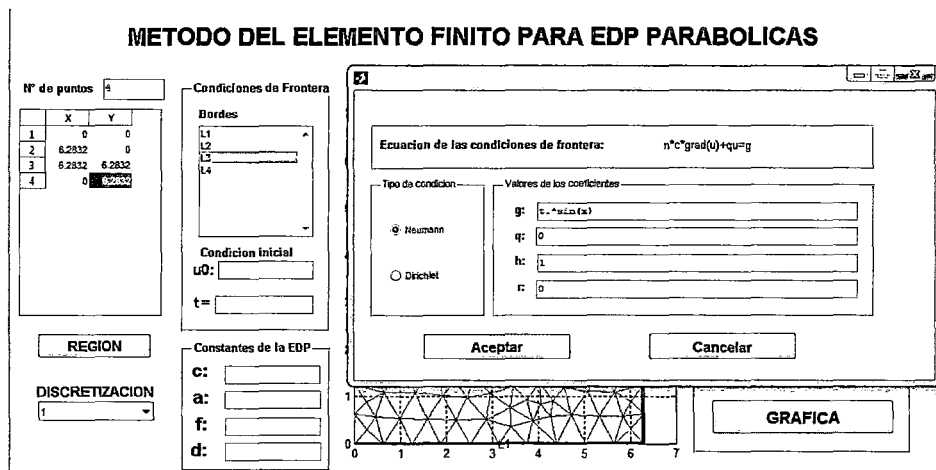


FIGURA 4.3.8. Condiciones de frontera para L3

Fuente: Elaboración Propia

Para el borde de la frontera (recta L4) ingresar la condición de frontera

$$u(0; y; t) = 0$$

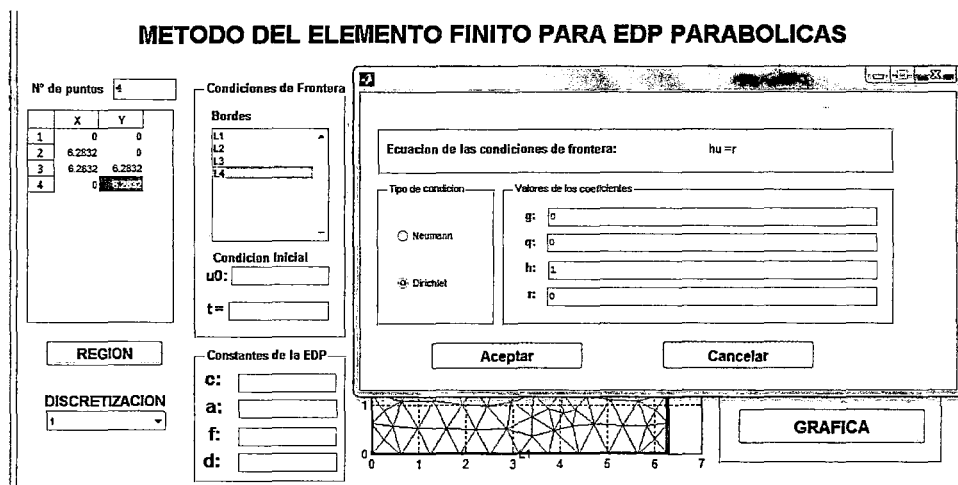


FIGURA 4.3.9. Condiciones de frontera para L4

Fuente: Elaboración Propia

6. Ingreso de las condiciones iniciales: $u(x; y; 0) = 0$

FIGURA 4.3.10. Condición inicial
Fuente: Elaboración Propia

7. Ingresar los valores que va a tomar t, es decir $t = [0:0.1:1]$

FIGURA 4.3.11. Ingreso de los valores de t para el problema 4.3
Fuente: Elaboración Propia

8. Ingreso de las condiciones de las constantes de la Ecuación Diferencial

Parcial Parabólica. La EDP parabólica general es:

$$d \frac{\partial u}{\partial t} + c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + au = f$$

La EDP parabólica del problema 4.3. es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = (1 + 2t) \text{sen } x \text{ sen } y, \quad t \in (0; 1)$$

FIGURA 4.3.12. Constantes de la EDP
Fuente: Elaboración Propia

9. Obtención de la solución aproximada:

Para obtener la solución aproximada de Ecuación Diferencial Parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = (1 + 2t) \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad t \in (0; 1)$$

sujeta a la condición inicial:

$$u(x; y; 0) = 0 \quad \text{en } 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi$$

Luego hacer clic en

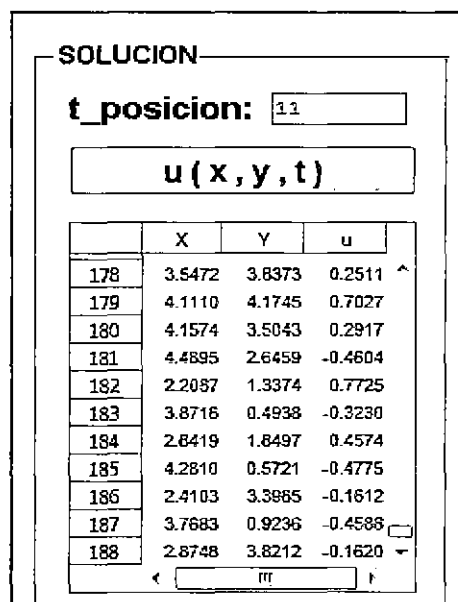


FIGURA 4.3.13. Solución del problema 4.3 aplicando el programa

Fuente: Elaboración Propia

10. Obtención de la gráfica haciendo clic en

GRAFICA

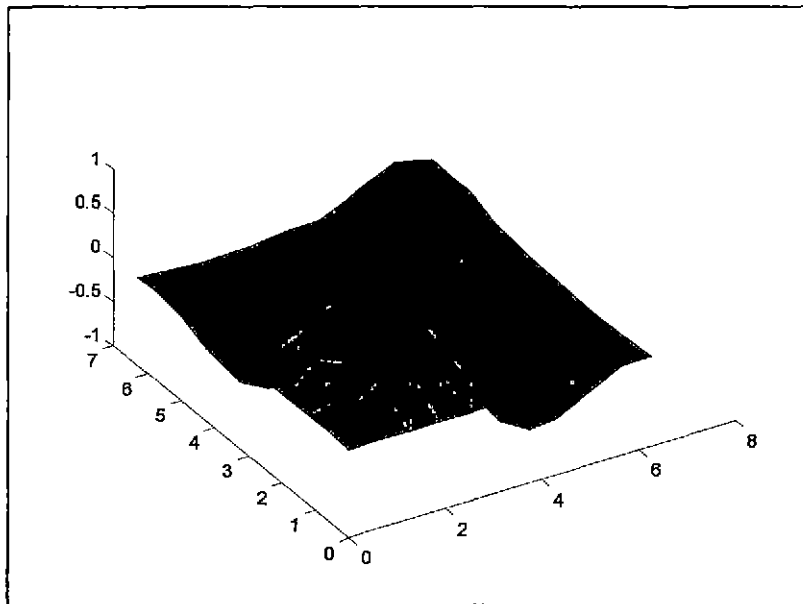


FIGURA 4.3.14. Gráfica de la superficie del problema 4.3 obtenida con el programa.

Fuente: Elaboración Propia

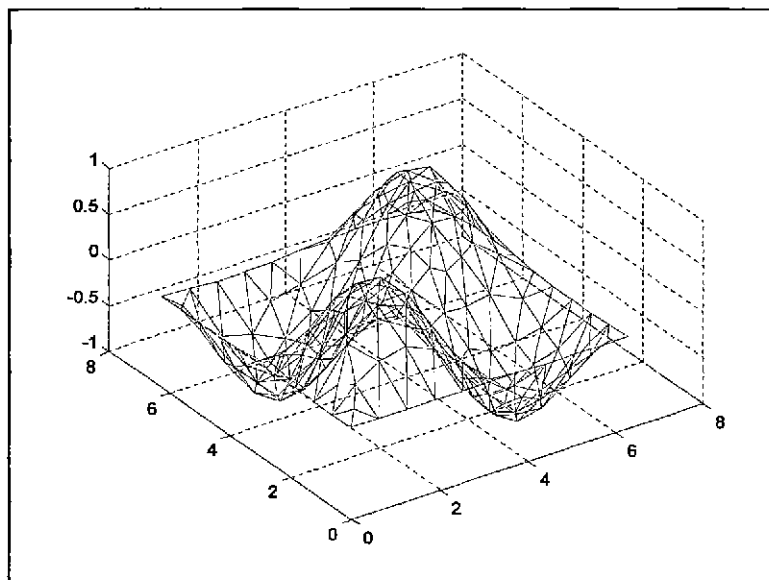


FIGURA 4.2.15. Gráfica de la superficie en forma de malla obtenida con el programa.

Fuente: Elaboración Propia

11. Gráfica de la solución exacta con el programa MATLAB:

La solución exacta de la ecuación diferencial está dada por la función:

$$u(x, y, t) = t \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad t \in (0; 1)$$

El gráfico para $t = 1$, es:

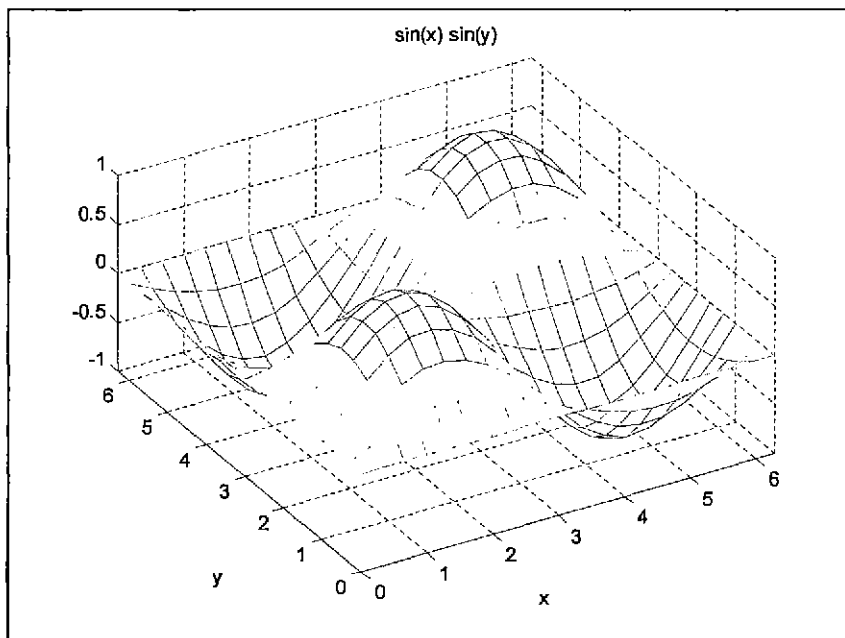


FIGURA 4.3.16. Gráfica de la solución exacta del problema 4.3 obtenida en MATLAB

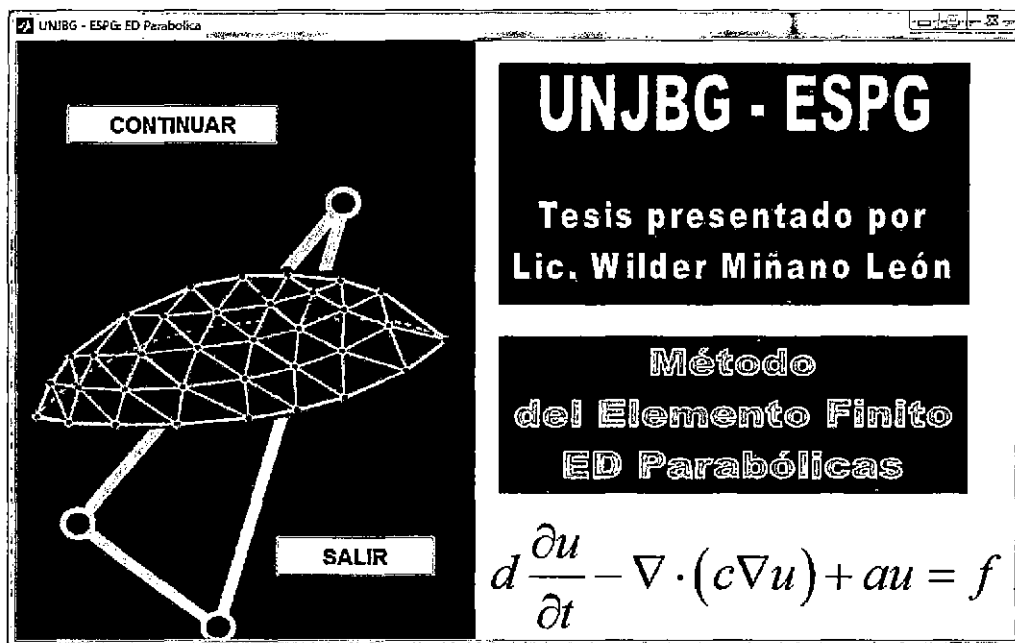
4.2. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Desarrollando las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas con frontera convexa en forma analítica, nos damos cuenta que es extenso, laborioso y complicado de resolver.

De acuerdo con los resultados obtenidos, en los diferentes problemas que mostramos en el presente trabajo, nos damos cuenta que tan importante y útil es utilizar un programa que tiene como algoritmo el método de elementos finitos; este método numérico nos permite encontrar una solución aproximada de una ecuación diferencial parcial parabólica, con frontera convexa en forma rápida, optimizando el tiempo en su solución y controlando inclusive la discretización del dominio, es decir tener una solución más exacta del problema. Además, el programa permite visualizar el gráfico correspondiente al problema, en tres dimensiones.

4.3. PROGRAMA DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO PARA EDP PARABÓLICO CON FRONTERA CONVEXA

CODIGO DE LA FIGURA parabola_v1:



```
function varargout = parabola_v1(varargin)

gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',    mfilename, ...
'gui_Singleton', gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @parabola_v1_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn',  @parabola_v1_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn',  [], ...
'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end
if nargout
[varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
```

```

gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
function parabola_v1_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);
%b1

set(hObject, 'Units', 'pixels');
info = imfinfo('im16_edp.jpg');
foto1=imread('im16_edp.jpg');
axes(handles.axes1);
image(foto1)
set(handles.axes1,'Visible', 'off','Units', 'pixels','Position', [440 2 info.Widthinfo.Height]);

%b2
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);
set(hObject, 'Units', 'pixels');
info = imfinfo('im04_edp.jpg');
foto3=imread('im04_edp.jpg');
axes(handles.axes3);
image(foto3)
set(handles.axes3,'Visible', 'off','Units', 'pixels','Position', [2 2 info.Widthinfo.Height]);
%b5
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);
set(hObject, 'Units', 'pixels');
info = imfinfo('im08_edp.jpg');
foto5=imread('im08_edp.jpg');
axes(handles.axes5);
image(foto5)
set(handles.axes5,'Visible', 'off','Units', 'pixels','Position', [460 320 info.Widthinfo.Height]);

% b6

```

```

handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);
set(hObject, 'Units', 'pixels');
info = imfinfo('im10_edp.jpg');
foto6=imread('im10_edp.jpg');
axes(handles.axes6);
image(foto6)
set(handles.axes6,'Visible', 'off','Units', 'pixels','Position', [460 140 info.Widthinfo.Height]);

function varargout = parabola_v1_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;

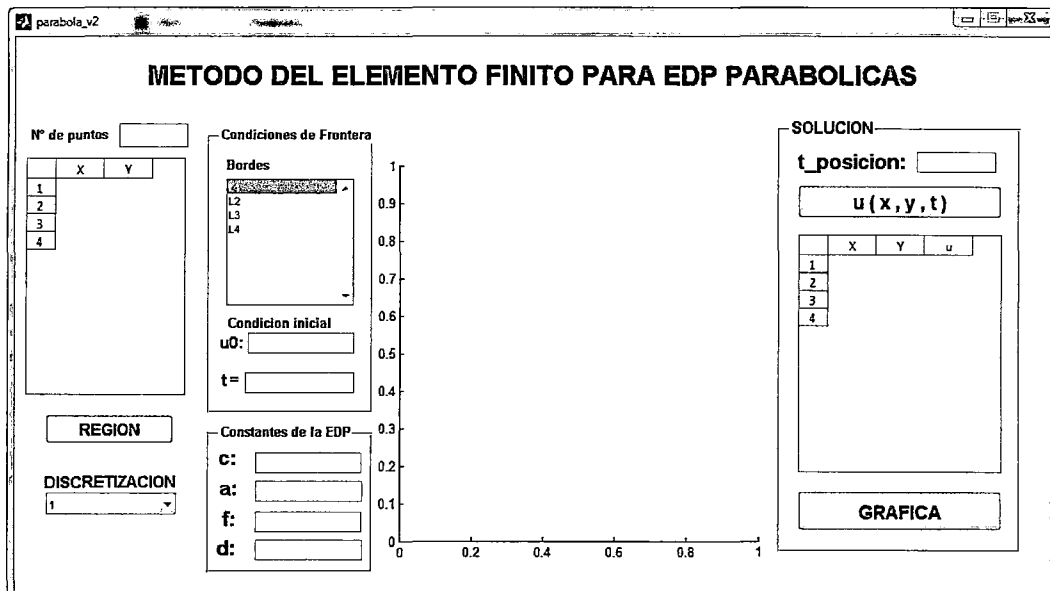
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
parabola_v2

function pushbutton7_Callback(hObject, eventdata, handles)
close();

function varargout = parabola_v1_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;

```

CÓDIGO DE LA FIGURA parabola_v2:



```

function varargout = parabola_v2(varargin)

% Begin initialization code - DO NOT EDIT

gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',    mfilename, ...
'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @parabola_v2_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn',  @parabola_v2_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn',  [], ...
'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargin
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT
% --- Executes just before parabola_v2 is made visible.
function parabola_v2_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)

% Choose default command line output for parabola_v2

handles.output = hObject;
% Update handles structure
guidata(hObject, handles)
% UIWAIT makes parabola_v2 wait for user response (see UIRESUME)
uiwait(handles.figure);

% --- Executes when user attempts to close figure.
function figure_CloseRequestFcn(hObject, eventdata, handles)
% Hint: delete(hObject) closes the figure
if isequal(get(hObject, 'waitstatus'), 'waiting')

```

```

% The GUI is still in UIWAIT, use UIRESUME and return
uiresume(hObject);
else
% The GUI is no longer waiting, so destroy it now.
delete(hObject);
end

function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
npuntos=str2double(get(hObject,'String'));
FilasColumnas=zeros(npuntos,2);
tablaeditable = true;
set(handles.uitable1,'Data',FilasColumnas,'ColumnEditable',tablaeditable);

function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
global n
a=get(handles.uitable1,'data');
x=a(:,1);
y=a(:,2);
xx=[a(:,1); a(1,1)];
yy=[a(:,2); a(2,1)];
n=length(x);
hh=patch(x,y,'b');
fronteraA="";
fori=1:n
    frontera1=sprintf('L%d',i);
fronteraA=[fronteraA;frontera1];
end

set(handles.listbox1,'string',fronteraA);
gdom=zeros(7,n);
gdom(1,:)=2*ones(1,n);
gdom(2,:)=x';
gdom(3,:)=x([2:n]); x(1)';
gdom(4,:)=y';
gdom(5,:)=y([2:n]); y(1)';

```

```

gdom(6,:)=ones(1,n);
gdom(7,:)=zeros(1,n);
gdom;
gridon
function pushbutton3_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FL pTM eTM tTM
    u0=str2num(get(handles.edit2,'string'));
tlist=str2num(get(handles.edit3,'string'));
    c=get(handles.edit4,'string');
    a=get(handles.edit5,'string');
    f=get(handles.edit6,'string');
    d=str2double(get(handles.edit7,'string'));
tparticular=str2double(get(handles.edit8,'string'));
FL(:,:);
mele=max(FL(:,51));
FronteraL=FL(:,[1:mele]);
b=FronteraL';
    p=pTM';
    u=parabolic(u0,tlist,b,pTM,eTM,tTM,c,a,f,d);
solucion=[p u(:,tparticular)];
set(handles.uitable2,'Data',solucion);

function listbox1_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FL n
a=get(handles.uitable1,'data');
x=a(:,1);
y=a(:,2);
xx=[a(:,1); a(1,1)];
yy=[a(:,2); a(1,2)];
lista_entradas = get(handles.listbox1,'String');
indice_seleccionado = get(handles.listbox1,'Value');
k=indice_seleccionado;
holdon
plot([xx(k),xx(k+1)].,[yy(k),yy(k+1)],'Linewidth',3)

```

```

holdoff
varargout=parabola_v3('parabola_v2', handles.figure);
FL(k,[1:51])=varargout;

function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
global pTM eTM tTM
a=get(handles.uitable1,'data');
x=a(:,1);
y=a(:,2);
hh=patch(x,y,'b');
n=length(x);
gdom=zeros(7,n);
gdom(1,:)=2*ones(1,n);
gdom(2,:)=x';
gdom(3,:)=x([2:n]); x(1)';
gdom(4,:)=y';
gdom(5,:)=y([2:n]); y(1)';
gdom(6,:)=ones(1,n);
gdom(7,:)=zeros(1,n);
gdom;
pdegplot(gdom);
gridon
[pTM,eTM,tTM] = initmesh(gdom);
[pTM,eTM,tTM] = refinemesh(gdom,pTM,eTM,tTM);
pTM;
pdemesh(pTM,eTM,tTM);
gridon
a=get(handles.uitable1,'data');
x=a(:,1);
y=a(:,2);
xL=[a(:,1); a(1,1)];
yL=[a(:,2); a(1,2)];
n=length(x);
fori=1:n

```

```

xm(i)=(xL(i)+xL(i+1))/2;
ym(i)=(yL(i)+yL(i+1))/2;
cad=sprintf('L%d',i);
text(xm(i),ym(i),cad,'color','red');
end

function pushbutton4_Callback(hObject, eventdata, handles)
global FL pTMeTMtTM
    u0=str2num(get(handles.edit2,'string'));
tlist=str2num(get(handles.edit3,'string'));
    c=str2double(get(handles.edit4,'string'));
    a=str2double(get(handles.edit5,'string'));
    f=get(handles.edit6,'string');
    d=str2double(get(handles.edit7,'string'));
tparticular=str2double(get(handles.edit8,'string'));
FL(:,:);
mele=max(FL(:,51));
FronteraL=FL(:,[1:mele]);
b=FronteraL';
    p=pTM';
    u=parabolic(u0,tlist,b,pTM,eTM,tTM,c,a,f,d);
solucion=[p u(:,tparticular)];
figure(3)
pdesurf(pTM,tTM,u(:,tparticular));
figure(4)
pdemesh(pTM,eTM,tTM,u(:,tparticular));
gridon
function popupmenu1_Callback(hObject, eventdata, handles)
contents = cellstr(get(hObject,'String'));
valor=str2double(contents{get(hObject,'Value')});
switch valor
case 1
globalpTMeTMtTM
a=get(handles.uitable1,'data');

```

```

x=a(:,1);
y=a(:,2);
hh=patch(x,y,'b');
n=length(x);
gdom=zeros(7,n);
gdom(1,:)=2*ones(1,n);
gdom(2,:)=x';
gdom(3,:)=x([2:n]); x(1)';
gdom(4,:)=y';
gdom(5,:)=y([2:n]); y(1)';
gdom(6,:)=ones(1,n);
gdom(7,:)=zeros(1,n);
gdom;
pdegplot(gdom);
gridon
[pTM,eTM,tTM] = initmesh(gdom);
pTM;
pdemesh(pTM,eTM,tTM);
gridon
a=get(handles.uitable1,'data');
x=a(:,1);
y=a(:,2);
xL=[a(:,1); a(1,1)];
yL=[a(:,2); a(1,2)];
n=length(x);
fori=1:n
xm(i)=(xL(i)+xL(i+1))/2;
ym(i)=(yL(i)+yL(i+1))/2;
cad=sprintf('L%d',i);
text(xm(i),ym(i),cad,'color','red');
end
case 2

globalpTMeTMtTM

```

```

a=get(handles.uitable1,'data');
x=a(:,1);
y=a(:,2);
hh=patch(x,y,'b');
n=length(x);
gdom=zeros(7,n);
gdom(1,:)=2*ones(1,n);
gdom(2,:)=x';
gdom(3,:)=x([2:n]); x(1)';
gdom(4,:)=y';
gdom(5,:)=y([2:n]); y(1)';
gdom(6,:)=ones(1,n);
gdom(7,:)=zeros(1,n);
gdom;
pdegplot(gdom);
gridon
[pTM,eTM,tTM] = initmesh(gdom);
[pTM,eTM,tTM] = refinemesh(gdom,pTM,eTM,tTM);
pTM;
pdemesh(pTM,eTM,tTM);
gridon
a=get(handles.uitable1,'data');
x=a(:,1);
y=a(:,2);
xL=[a(:,1); a(1,1)];
yL=[a(:,2); a(1,2)];
n=length(x);
fori=1:n
xm(i)=(xL(i)+xL(i+1))/2;
ym(i)=(yL(i)+yL(i+1))/2;
cad=sprintf('L%d',i);
text(xm(i),ym(i),cad,'color','red');
end
end

```

CÓDIGO DE LA FIGURA parábola_v3:

Ecuacion de las condiciones de frontera: $hu = r$

Tipo de condicion

Neumann

Dirichlet

Valores de los coeficientes

g: 0

q: 0

h: 1

r: 0

Aceptar Cancelar

CÓDIGO:

```
function varargout = parabola_v3(varargin)
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',    mfilename, ...
'gui_Singleton', gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @parabola_v3_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn', @parabola_v3_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn', [], ...
'gui_Callback', []);
if nargin && ischar(varargin{1})
gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
[varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
```

```

function parabola_v3_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
    globalki g q
    dontOpen = false;
    mainGuiInput = find(strcmp(varargin, 'parabola_v2'));
    if (isempty(mainGuiInput)) || (length(varargin) <= mainGuiInput) ||
    (~ishandle(varargin{mainGuiInput+1}))
    dontOpen = true;
    else
    handles.changeMeMain = varargin{mainGuiInput+1};
    mainHandles = guidata(handles.changeMeMain);
    ki = get(mainHandles.listbox1, 'Value');
    parentPosition = getpixelposition(handles.changeMeMain);
    currentPosition = get(hObject, 'Position');
    newX = parentPosition(1) + (parentPosition(3)/2 - currentPosition(3)/2);
    newY = parentPosition(2) + (parentPosition(4)/2 - currentPosition(4)/2);
    newW = currentPosition(3);
    newH = currentPosition(4);
    set(hObject, 'Position', [newX, newY, newW, newH]);
    end

    guidata(hObject, handles);
    if dontOpen
    disp('-----');
    disp('No ingreso bien los argumentos')
    disp('whose name is "changeme_main" and value is the handle')
    disp('Debe llamar la funcion parabola_v2, por ejemplo:');
    disp(' x = parabola_v2()');
    disp(' parabola_v3 ("parabola_v2", x)');
    disp('-----');
    else
    uiwait(hObject);
    end

```

```

function varargout = parabola_v3_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
global LK
varargout{1} = LK;
delete(hObject);
function figure_CloseRequestFcn(hObject, eventdata, handles)
uiresume(hObject);
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
global q g h r LK t
N=1;
L=zeros(50,50);
if strcmp(get(handles.edit1,'enable'),'on')
    g=get(handles.edit1,'string');
    q=get(handles.edit2,'string');
LL(1,:)= [N 0 length(q) length(g) double(q) double(g)];
    t=length(LL);
L(1,1:length(LL))=LL(1,1:length(LL));
    LK=[L(1,:) t];
end
if strcmp(get(handles.edit3,'enable'),'on')
    h=get(handles.edit3,'string');
    r=get(handles.edit4,'string');
LL(1,:)= [N 1 length(q) length(g) length(h) length(r) double(q) double(g) double(h)
double(r)];
    t=length(LL);
L(1,1:length(LL))=LL(1,1:length(LL));
    LK=[L(1,:) t];
end

uiresume(handles.figure);
function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
uiresume(handles.figure);
function uipanel6_SelectionChangeFcn(hObject, eventdata, handles)
switch get(eventdata.NewValue,'Tag')
case 'radiobutton1'

```

```
set(handles.text10,'string','n*c*grad(u)+qu=g')
set(handles.edit1,'enable','on')
set(handles.edit2,'enable','on')
set(handles.edit3,'enable','off')
set(handles.edit4,'enable','off')
case'radiobutton2'
set(handles.text10,'string','hu=r')
set(handles.edit1,'enable','off')
set(handles.edit2,'enable','off')
set(handles.edit3,'enable','on')
set(handles.edit4,'enable','on')
otherwise

end
```

CONCLUSIONES

1. Se utilizó el lenguaje de programación MATLAB, para implementar el algoritmo computacional del método del elemento finito, que optimice el tratamiento de datos en la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica con frontera convexa.
2. Se elaboró el programa del método del elemento finito, para la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas, con frontera convexa en el lenguaje de programación MATLAB.
3. Se desarrolló el algoritmo del elemento finito, para la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas, con frontera convexa.

RECOMENDACIONES

1. Se debe realizar la elaboración de un programa que de la solución, mediante el elemento finito de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas con frontera convexa.
2. Se debe elaborar un programa donde se encuentre la solución aproximada, de una Ecuación Diferencial Parcial utilizando el método de volúmenes finitos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Alkis Constantinides & Mostoufi, Navid (2000). *Numerical Methods for Chemical Engineers with MATLAB Applications*. United States of América: EDITORIAL PRENTICE HALL.
- [2] Burden, Richard L. & Faires J. Douglas. (2002). *Análisis Numérico*. (7ª ed). México: International Thomson Editores.
- [3] Cairó Battistutti, Osvaldo (1996). *Metodología de la Programación*. (Tomo I y II). México: Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C. V.
- [4] Carrasco Venegas, Luis (2007). *Métodos Numéricos aplicados a la ingeniería*. (2ª ed). Perú: Ediciones RFG.
- [5] Cutipa, C. Miguel & Gutierrez, P. Daniel A. (2007). *MATLAB 7*. (1ª ed). Perú: Editorial macro EIRL.
- [6] C.H. Edwards, Jr. & Penney, David E. (1994). *Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera*. (3ª ed). México: Editorial PRENTICE HALL.
- [7] Chandrupatla, Tirupathi R. & Belegundu Ashok D. (1999). *Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería*. (2da ed). México: Prentice Hall Hispanoamericana S.A.
- [8] Delores M., Etter (1987). *Solución de problemas de Ingeniería con*

- matlab*. (2ª ed). México: PRENTICE HALL.
- [9] Duchateau, Paul & Zachmann, David W. (1988). *Ecuaciones Diferenciales Parciales*". (1ª ed). México: McGraw-Hill.
- [10] Espinoza Ramos, Eduardo (2000) *Análisis Matemático III*. (3ª ed). Perú: Servicios Gráficos J. J.
- [11] Fornons, José María (1982). *El Método de los elementos finitos en la Ingeniería de Estructuras*. (1ª ed). Barcelona: MARCOMBO,S.A. DE BOIXEREU.
- [12] Juárez, Isaías Uña; San Martín Moreno, Jesús & Tomeo Perucha, Venancio. (2007). *Problemas Resueltos de Cálculo en Varias Variables*. España: Editorial Paraninfo.
- [13] Kwon, Young W. & Bang, Hyochoong (1997). *The Finite Element Method Using MATLAB*". London: Published Entropy Generation Minimization.
- [14] Larson-Hostetler-Edwards (2010). *Cálculo y Geometría Analíticao Vol. 2*. (9ª ed). España: Mc Graw Hill. Interamericana Editorial S.A.
- [15] López Pérez, Eloísa & Vázquez Fernández, Manuel. (2001). *El método de los elementos finitos aplicado al análisis estructural*. (1ª ed). España: Editorial Noela.

- [16] Lozano Marreros, Javier. (2010). *Método computacional del elemento finito para Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas con frontera irregular*. Perú.
- [17] Mathews, Jhon H. & Fink, Kurtis D. (2000). *Métodos Numéricos con MATLAB*. (3ª. Ed). Madrid: PRENTICE HALL.
- [18] Nakamura, Shoichiro (1997). *Análisis Numérico y visualización Gráfica con MATLAB*. (1ª ed). México: Editorial PRENTICE HALL
- [19] Nieves Hurtado, Antonio & Domínguez Sánchez Federico C. (1999). *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería*. (5ª ed). México: Continental S. A. de C. V.
- [20] Nakamura, Shoichiro (1992). *Métodos Numéricos Aplicados con Software*. (1ª ed). México: PRENTICE HALL.
- [21] Pérez López; César (2002). *MATLAB y sus Aplicaciones en las Ciencias y la Ingeniería*. España: PRENTICE HALL.
- [22] Saez Perez, Andres (1999). *El método de los elementos finitos. Introducción a Ansys*. España: Editor: Universidad De Sevilla. Servicio De Publicaciones.
- [23] Stephenson G. (1982). *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*. (2da ed). España: Editorial Reverté S. A.

- [24] Seeley, Robert T. (1978). *Cálculo de una y varias variables*. México: Editorial Trillas.
- [25] Senn, James A. (1992). *Análisis y Diseño de Sistemas de Información*. (2ª ed). México: MC. GRAW-HILL.
- [26] Zienkiewicz, O.C. & Taylor, Richard. (2004). *El método de los elementos finitos, vol. 1: las bases*. España: Editorial: Centro Internacional de Método.
- [27] Zill, Dennis G. (1997). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*. (1ª ed). México: Internacional Thomson Editores.

SOFTWARE

- [28] Lenguaje de Programación MATLAB Versión 7.2.0.232(R2006a).
- [29] Microsoft Word, Microsoft Visio para redactar la tesis, y Microsoft Power Point para sustentar la tesis.

SITIOS WEB:

- [30] Elementos Finitos. Disponible en URL- 2001-2011 Universidad de la Rioja (España)
<http://dialnet.unirioja.es/servlet/busquedadoc?t=elementos+finitos&db=1&td=TES&idi=0&fi=&ff=> [Consulta 4 de Junio del 2011]

ANEXOS

ANEXO 01

TABLA I: Comparación de la solución aproximada y solución exacta del problema 4.1

Nº	x	Y	Sol. aprox: t=1,0	Exacta t = 1,0
1	0	0	0	0
2	10	0	0	0
3	10	10	1000	1000
4	0	10	0	0
5	1	0	0	0
6	2	0	0	0
7	3	0	0	0
8	4	0	0	0
9	5	0	0	0
10	6	0	0	0
11	7	0	0	0
12	8	0	0	0
13	9	0	0	0
14	10	1	100	100
15	10	2	200	200
16	10	3	300	300
17	10	4	400	400
18	10	5	500	500
19	10	6	600	600
20	10	7	700	700
21	10	8	800	800
22	10	9	900	900
23	9	10	810	810
24	8	10	640	640
25	7	10	490	490
26	6	10	360	360
27	5	10	250	250
28	4	10	160	160
29	3	10	90	90
30	2	10	40	40
31	1	10	10	10
32	0	9	0	0

N°	x	Y	Sol. aprox: t=1,0	Exacta t = 1,0
33	0	8	0	0
34	0	7	0	0
35	0	6	0	0
36	0	5	0	0
37	0	4	0	0
38	0	3	0	0
39	0	2	0	0
40	0	1	0	0
41	4,988	5,1301	126,9064	127,6376
42	0,4339	0,4761	0,0908	0,0896
43	0,4381	9,5193	2,2605	1,8271
44	9,5188	9,5614	867,074	866,3351
45	9,5707	0,4816	43,9211	44,1137
46	2,6115	3,4705	23,5892	23,6686
47	2,6933	6,3867	45,7865	46,3283
48	6,3648	7,333	296,0175	297,0648
49	7,2648	3,3832	178,2209	178,5562
50	1,5539	0,8602	2,0276	2,077
51	1,6048	9,1073	23,0752	23,4548
52	9,1018	8,3929	694,0846	695,291
53	8,4926	0,9078	64,9317	65,4744
54	4,8812	2,3828	58,9093	56,7729
55	7,7288	5,5045	329,0721	328,8077
56	4,5203	7,7609	158,43	158,5793
57	1,896	4,9553	17,4295	17,8134
58	8,51	2,541	183,7258	184,0195
59	7,4049	8,4139	461,8791	461,3555
60	1,5699	7,4211	17,9592	18,2899
61	1,5334	2,4883	5,7044	5,8508
62	2,5443	0,8564	5,4407	5,5439
63	2,6706	9,1067	63,8127	64,9499
64	9,0967	7,3293	607,4976	606,4992
65	7,5213	0,9908	55,512	56,0495
66	3,3255	5,0356	55,5827	55,6884
67	6,4248	2,0453	84,6899	84,426
68	4,0288	1,5454	24,8519	25,0837

Nº	x	Y	Sol. aprox: t=1,0	Exacta t = 1,0
69	5,0214	6,6346	167,1036	167,2878
70	6,671	4,8035	212,6705	213,7665
71	8,6058	3,9045	289,5361	289,1665
72	6,083	8,6287	318,3396	319,2868
73	7,7909	6,8895	417,8517	418,1797
74	3,1143	7,8383	75,1028	76,0226
75	1,2858	6,1456	9,8633	10,1604
76	1,3782	3,8905	7,2566	7,3898
77	9,1259	5,5738	463,8432	464,1975
78	4,4342	9,1382	179,4115	179,6765
79	2,0486	1,7099	6,9942	7,176
80	1,0012	1,6897	1,5869	1,6938
81	1,04	8,2475	8,2037	8,9205
82	8,2401	8,9536	606,8038	607,9427
83	9,037	1,7491	142,1871	142,8444
84	5,7029	3,5741	115,9901	116,2407
85	4,0776	3,6561	60,6011	60,7893
86	5,4317	1,1993	35,268	35,3834
87	6,2605	6,045	236,1541	236,9269
88	3,9701	6,0871	95,8151	95,943
89	3,3678	2,4809	27,8536	28,1386
90	7,4802	4,8013	268,4331	268,649
91	5,3481	7,4146	211,9311	212,0737
92	7,2937	1,905	101,4643	101,3423
93	3,5357	8,6084	107,0436	107,6151
94	8,5842	6,469	477,0169	476,6908
95	0,9485	4,6324	3,5732	4,1675
96	2,1787	8,2067	37,8802	38,955
97	8,1889	7,8178	524,3724	524,2467
98	2,6416	5,4703	37,8685	38,172
99	2,1641	4,127	19,1273	19,3281
100	5,5228	9,2418	280,6705	281,8871
101	9,2331	4,4811	382,4822	382,0144
102	0,7059	5,6196	2,6263	2,8002
103	3,5495	0,8285	10,3578	10,4382
104	1,0266	3,1456	3,1097	3,3152

N°	x	Y	Sol. aprox: t=1,0	Exacta t = 1,0
105	9,3159	3,5403	307,7945	307,2485
106	6,4525	9,311	387,1312	387,6612
107	6,6375	8,1176	357,3846	357,6323
108	8,1232	3,2787	216,1396	216,3495
109	1,8504	6,6497	22,6018	22,7684
110	1,8751	3,2922	11,4512	11,5754
111	0,7449	7,3292	3,7659	4,0668
112	7,3156	9,2394	495,1652	494,4742
113	9,2744	2,6695	229,2007	229,6157
114	0,6569	6,4859	2,619	2,7988
115	9,2813	0,9263	79,3597	79,7938
116	9,0742	9,2442	760,6135	761,1776
117	0,7365	0,9042	0,4866	0,4905
118	0,7537	9,0765	5,1762	5,156
119	6,4741	1,3242	55,4663	55,5025
120	3,8572	7,2812	107,782	108,3296
121	4,0878	2,7322	45,6504	45,6554
122	4,6082	0,8286	17,2784	17,5957
123	5,6487	2,6935	86,0648	85,9437
124	7,1309	6,1299	311,3455	311,7038
125	5,9689	5,3286	188,6305	189,8461
126	8,3392	4,8658	338,1722	338,3787
127	5,1623	8,364	222,5354	222,8951
128	6,5079	3,9146	165,4013	165,7941
129	3,1715	4,1173	41,1346	41,4135
130	3,1222	1,7385	16,7018	16,9471
131	4,0899	4,5848	76,2191	76,8912
132	4,6255	5,982	127,8977	127,9864
133	7,0357	2,592	128,1457	128,3068
134	7,2393	7,586	397,6675	397,563
135	2,4153	7,2654	41,9658	42,384
136	5,8315	6,6721	226,4615	226,894
137	7,1329	5,3568	272,2996	272,5447
138	4,6018	7,1437	151,2048	151,279
139	3,3686	5,8321	65,8589	66,1796
140	4,8882	3,1945	76,217	76,331

N°	x	Y	Sol. aprox: t=1,0	Exacta t = 1,0
141	8,1019	1,7796	116,3032	116,8143
142	0,7111	2,4649	1,248	1,2464
143	1,9497	5,8457	22,0193	22,2214
144	2,5499	2,6243	16,723	17,0632
145	5,9226	7,9749	279,3349	279,7371
146	7,8322	4,0725	249,5068	249,8208
147	2,8698	8,4425	69,2445	69,5303
148	8,4197	7,1307	506,3409	505,5049
149	5,4436	0,5615	16,6313	16,6388
150	3,5262	9,3717	116,4456	116,5285
151	9,3634	6,4762	567,9069	567,7896
152	2,6372	4,7443	32,9511	32,9958
153	0,6698	3,7344	1,6914	1,6754
154	1,2177	6,8095	9,9933	10,0971
155	8,3438	5,7142	397,9688	397,8169
156	4,3005	8,3716	154,9947	154,8269
157	1,3545	5,4428	9,8112	9,9857
158	6,7824	8,7454	402,4446	402,2967
159	8,7695	3,1868	245,1452	245,0781
160	1,5948	4,4034	11,2296	11,1996
161	8,5794	9,5505	703,0023	702,9751
162	0,4473	8,5815	2,0673	1,717
163	0,4338	1,3986	0,3303	0,2632
164	9,5806	1,4189	130,1632	130,2378
165	4,9244	4,1065	99,2694	99,5815
166	4,8014	1,6609	38,0107	38,2895
167	5,5371	1,908	58,3463	58,4983
168	5,7957	4,4789	149,8348	150,4469
169	4,0595	5,4447	89,4752	89,7262
170	3,3088	3,1825	34,6303	34,8425
171	6,4359	3,0365	125,4025	125,7743
172	6,9129	1,4351	68,7485	68,5808
173	3,8616	7,9748	118,7032	118,9199
174	7,0158	6,9164	340,8097	340,4352
175	3,1191	7,0675	68,3601	68,7582
176	7,7275	2,5809	154,1894	154,1165

N°	x	Y	Sol, aprox: t=1,0	Exacta t = 1,0
177	5,4508	5,9674	176,6158	177,2987
178	4,2676	6,6152	120,3385	120,4787
179	7,9205	6,1449	385,5595	385,4961
180	3,7825	2,1191	30,1049	30,3186
181	3,542	6,5482	81,5794	82,1522
182	6,5254	6,6226	281,9357	281,9959
183	6,636	5,5348	243,1064	243,7332
184	7,1551	4,1965	214,5477	214,8417
185	6,1719	0,7781	29,842	29,6397
186	6,8203	0,906	41,8022	42,1439
187	4,3157	2,0902	38,9069	38,9305
188	6,0126	1,4523	52,4525	52,5026

ANEXO 02

TABLA II: Obtención de la condición inicial del problema 4.2

Nº	u_0	Nº	u_0	Nº	u_0	Nº	u_0	Nº	u_0	Nº	u_0	Nº	u_0
1	0	101	33,665	201	0	301	29,5981	401	89,3416	501	53,0344	601	77,1723
2	0	102	24,5367	202	0	302	46,8006	402	71,8076	502	63,1797	602	60,8182
3	0	103	22,4315	203	0	303	33,6505	403	82,0317	503	48,6086	603	71,0912
4	0	104	24,0267	204	0	304	21,6348	404	86,7732	504	65,4145	604	85,6859
5	0	105	23,4645	205	0	305	38,9519	405	12,984	505	53,2129	605	82,3834
6	0	106	19,7916	206	0	306	33,7594	406	12,682	506	54,0469	606	79,8922
7	0	107	19,3414	207	0	307	26,7485	407	36,3666	507	64,5075	607	73,9799
8	0	108	19,0014	208	0	308	24,1825	408	25,542	508	51,3322	608	82,1768
9	0	109	48,1662	209	0	309	23,1169	409	38,7336	509	67,1306	609	74,3112
10	0	110	17,5711	210	0	310	35,4975	410	25,3283	510	55,4871	610	86,9237
11	0	111	15,6087	211	0	311	28,5392	411	59,1146	511	56,6068	611	81,517
12	0	112	48,6566	212	0	312	43,5681	412	49,6147	512	30,566	612	67,9427
13	0	113	17,696	213	0	313	25,7899	413	42,9998	513	46,4382	613	60,4323
14	0	114	17,6835	214	0	314	23,1756	414	59,6565	514	38,2741	614	71,0473
15	0	115	49,2828	215	0	315	35,6507	415	41,2293	515	37,2804	615	59,8442
16	0	116	6,6304	216	0	316	28,6065	416	51,0593	516	29,1458	616	67,2015
17	0	117	6,7457	217	0	317	43,7592	417	70,6546	517	45,4242	617	59,9869
18	0	118	6,5841	218	0	318	25,8656	418	64,1433	518	38,4406	618	70,389
19	0	119	6,7402	219	0	319	22,9344	419	81,6596	519	36,2759	619	59,3282
20	0	120	84,5948	220	0	320	34,2784	420	70,3098	520	59,9701	620	87,6207
21	0	121	79,6098	221	0	321	28,6897	421	63,6474	521	52,9857	621	92,3437
22	0	122	25,5584	222	0	322	42,9865	422	80,6148	522	44,2925	622	92,5727
23	0	123	51,1327	223	0	323	25,1396	423	74,2582	523	46,1968	623	86,2798
24	0	124	74,1795	224	0	324	12,1745	424	85,8806	524	29,0825	624	95,4803
25	0	125	73,5278	225	0	325	12,4833	425	74,9231	525	45,2465	625	97,9243
26	0	126	81,1919	226	0,5198	326	35,7912	426	87,3883	526	38,3379	626	91,8003
27	0	127	27,2002	227	1,5871	327	11,1225	427	13,2016	527	36,1776	627	91,799
28	0	128	95,2551	228	1,6918	328	11,4174	428	14,3188	528	9,2427	628	95,8474
29	0	129	95,2116	229	0,5162	329	31,1168	429	30,821	529	8,5373	629	95,6023
30	0	130	50,5878	230	1,6867	330	23,1451	430	37,8131	530	19,8136	630	89,8397
31	0	131	49,6823	231	1,5779	331	11,9204	431	26,3704	531	22,3195	631	89,8416
32	0	132	48,3303	232	0,5199	332	12,228	432	21,2696	532	28,4037	632	89,4997
33	0	133	67,2516	233	1,6921	333	33,0006	433	98,4222	533	10,9061	633	94,1812

N°	u ₀	N°	u ₀	N°	u ₀	N°	u ₀	N°	u ₀	N°	u ₀	N°	u ₀
34	0	134	49,6642	234	1,5873	334	25,8814	434	92,3229	534	10,1025	634	87,3863
35	0	135	52,5592	235	0,5148	335	11,6379	435	91,4481	535	21,697	635	95,0033
36	0	136	52,1756	236	1,6845	336	11,9393	436	98,2505	536	22,4643	636	76,7772
37	0	137	79,3523	237	1,5742	337	31,9836	437	92,7983	537	28,868	637	69,227
38	0	138	83,8471	238	7,5441	338	25,4554	438	92,0539	538	9,2823	638	60,7733
39	0	139	82,2402	239	5,5959	339	9,505	439	58,6562	539	8,5733	639	69,1683
40	0	140	96,8724	240	7,552	340	10,2863	440	46,2054	540	19,8652	640	64,8853
41	99,7089	141	78,819	241	5,6023	341	30,3669	441	39,2527	541	22,4879	641	75,7099
42	2,0682	142	98,2276	242	7,3565	342	22,099	442	62,0734	542	28,5027	642	61,5674
43	2,0543	143	56,4986	243	5,4262	343	9,2825	443	37,6725	543	57,518	643	55,5502
44	2,0687	144	57,2453	244	7,5541	344	10,0436	444	58,1524	544	38,3218	644	48,0267
45	2,0486	145	61,107	245	5,5911	345	29,4405	445	45,0193	545	44,0641	645	65,8507
46	62,6151	146	39,9056	246	11,277	346	21,5838	446	38,6533	546	50,2281	646	53,2823
47	66,9743	147	37,4547	247	9,706	347	9,1209	447	61,9867	547	57,3089	647	61,737
48	67,8165	148	52,3473	248	17,5518	348	9,8707	448	36,9142	548	38,0433	648	55,7801
49	66,4365	149	37,363	249	11,018	349	28,9217	449	58,371	549	43,8728	649	48,1959
50	13,4602	150	17,7844	250	9,4889	350	20,8959	450	44,0089	550	49,6489	650	66,2803
51	13,4773	151	21,1166	251	17,4064	351	57,8772	451	36,2519	551	52,7161	651	53,5119
52	12,9219	152	17,8558	252	10,9978	352	41,4568	452	61,065	552	63,8926	652	54,0164
53	13,3939	153	48,9747	253	9,4716	353	44,0896	453	35,6983	553	55,544	653	38,8038
54	65,528	154	48,7028	254	17,3813	354	7,9541	454	75,6294	554	33,9396	654	46,8398
55	66,6514	155	59,5686	255	11,8218	355	9,2316	455	57,3955	555	35,7159	655	36,6928
56	65,3764	156	32,2723	256	11,5523	356	26,4384	456	59,4447	556	25,9881	656	47,9213
57	82,7354	157	32,6031	257	13,7801	357	17,932	457	74,3008	557	40,3254	657	73,3223
58	45,6638	158	33,0666	258	13,4169	358	18,5445	458	56,4786	558	24,7152	658	83,0655
59	34,6252	159	42,0814	259	13,6336	359	7,1585	459	41,2731	559	34,205	659	76,6789
60	32,5488	160	6,0686	260	13,2766	360	8,3576	460	51,7267	560	36,2206	660	81,2724
61	34,8312	161	5,9055	261	67,8472	361	24,2232	461	41,8964	561	26,3254	661	72,4072
62	34,2188	162	5,9222	262	56,9285	362	16,5454	462	60,5958	562	40,7393	662	88,5317
63	21,3121	163	6,0759	263	12,9218	363	58,5597	463	43,8997	563	24,9413	663	87,805
64	20,8756	164	79,0596	264	11,9485	364	41,805	464	53,8521	564	34,123	664	81,1296
65	20,8388	165	59,5555	265	36,2226	365	44,6692	465	43,5629	565	37,1361	665	91,5768
66	46,5487	166	68,4482	266	10,753	366	8,0092	466	51,3608	566	26,8113	666	83,4664
67	87,6946	167	78,0805	267	9,2055	367	9,2945	467	59,964	567	25,1601	667	87,3545
68	86,8593	168	80,6292	268	16,6227	368	26,6047	468	43,6015	568	41,3259	668	86,6534
69	88,5977	169	66,6863	269	32,5456	369	18,0133	469	53,531	569	44,5796	669	80,2782

Nº	u ₀	Nº	u ₀	Nº	u ₀	Nº	u ₀	Nº	u ₀	Nº	u ₀	Nº	u ₀
70	40,929	170	66,0619	270	22,6933	370	18,7727	470	43,319	570	45,4076	670	91,262
71	38,8732	171	91,51	271	9,0952	371	8,0168	471	50,9275	571	33,6133	671	82,7882
72	39,5568	172	94,5451	272	16,396	372	9,3098	472	72,8015	572	34,6806	672	72,3406
73	52,4573	173	91,7347	273	25,2982	373	26,3354	473	84,7227	573	2,6157	673	81,7957
74	53,2507	174	69,8968	274	8,8314	374	17,6515	474	76,2363	574	3,6074	674	75,8109
75	52,9853	175	57,1486	275	15,7964	375	18,981	475	77,3744	575	11,134	675	79,8821
76	23,3193	176	57,3597	276	24,783	376	58,2033	476	76,3422	576	6,7749	676	71,5375
77	26,9667	177	45,1032	277	9,1163	377	41,7622	477	86,4336	577	2,5481	677	55,1704
78	26,6934	178	77,7386	278	16,4248	378	45,7472	478	86,433	578	3,5163	678	33,4588
79	67,2766	179	86,9795	279	25,4181	379	3,9104	479	79,1449	579	10,73	679	39,5547
80	24,823	180	86,1074	280	8,7525	380	3,4733	480	75,0303	580	6,6372	680	46,1087
81	19,9664	181	76,6649	281	16,0224	381	4,0339	481	85,1126	581	2,5556	681	48,0971
82	16,9184	182	42,7047	282	23,9635	382	10,1375	482	84,896	582	3,5267	682	31,9228
83	16,3609	183	75,837	283	48,8611	383	11,0636	483	78,0001	583	10,8022	683	71,5134
84	16,9628	184	97,521	284	49,2011	384	3,9463	484	99,4305	584	6,6184	684	82,8173
85	16,2301	185	63,6752	285	37,8151	385	3,5288	485	92,7435	585	2,6187	685	74,5708
86	91,8438	186	0	286	55,8811	386	4,089	486	95,5097	586	3,6114	686	79,1099
87	87,6851	187	0	287	69,4223	387	10,2542	487	91,9673	587	11,158	687	68,8506
88	86,3296	188	0	288	81,3053	388	11,4411	488	97,3237	588	6,7812	688	99,2411
89	50,5925	189	0	289	70,4463	389	3,893	489	72,4346	589	73,2233	689	93,8997
90	48,2143	190	0	290	70,2771	390	3,4533	490	83,6605	590	83,2877	690	95,5161
91	72,3043	191	0	291	80,1197	391	4,0117	491	76,3738	591	76,0056	691	96,9401
92	72,1667	192	0	292	71,212	392	9,897	492	76,7492	592	82,3097	692	98,5509
93	72,7722	193	0	293	69,7461	393	11,0836	493	99,7941	593	61,7917	693	63,8058
94	92,086	194	0	294	80,9298	394	3,5264	494	95,9028	594	53,5526	694	58,3598
95	35,9938	195	0	295	88,3073	395	3,9443	495	96,0308	595	54,0614	695	56,8368
96	38,6118	196	0	296	91,7751	396	4,0866	496	98,6316	596	70,2813	696	66,5881
97	38,7348	197	0	297	28,4858	397	10,2437	497	62,3927	597	63,9268	697	71,1573
98	31,4305	198	0	298	29,5199	398	11,4192	498	47,8873	598	51,0553		
99	34,0512	199	0	299	46,6195	399	76,5317	499	64,7116	599	68,4376		
100	34,1605	200	0	300	33,4587	400	86,4986	500	52,59	600	60,6741		

ANEXO 03

TABLA III, Comparación de la solución aproximada y solución exacta del problema 4.2

Nº	X	y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0
5	0,1	0	0	0	0
6	0,2	0	0	0	0
7	0,3	0	0	0	0
8	0,4	0	0	0	0
9	0,5	0	0	0	0
10	0,6	0	0	0	0
11	0,7	0	0	0	0
12	0,8	0	0	0	0
13	0,9	0	0	0	0
14	1	0,1	0	0	0
15	1	0,2	0	0	0
16	1	0,3	0	0	0
17	1	0,4	0	0	0
18	1	0,5	0	0	0
19	1	0,6	0	0	0
20	1	0,7	0	0	0
21	1	0,8	0	0	0
22	1	0,9	0	0	0
23	0,9	1	0	0	0
24	0,8	1	0	0	0
25	0,7	1	0	0	0
26	0,6	1	0	0	0
27	0,5	1	0	0	0
28	0,4	1	0	0	0
29	0,3	1	0	0	0
30	0,2	1	0	0	0
31	0,1	1	0	0	0

N°	x	y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
32	0	0,9	0	0	0
33	0	0,8	0	0	0
34	0	0,7	0	0	0
35	0	0,6	0	0	0
36	0	0,5	0	0	0
37	0	0,4	0	0	0
38	0	0,3	0	0	0
39	0	0,2	0	0	0
40	0	0,1	0	0	0
41	0,4795	0,5131	99,7089	13,7755	13,8506
42	0,0481	0,0439	2,0682	0,2862	0,2875
43	0,9564	0,048	2,0543	0,2842	0,2849
44	0,0439	0,9519	2,0687	0,2863	0,2875
45	0,952	0,9565	2,0486	0,2833	0,2843
46	0,7547	0,3557	62,6151	8,6537	8,699
47	0,3608	0,2649	66,9743	9,2581	9,3048
48	0,268	0,6367	67,8165	9,3755	9,421
49	0,6565	0,7283	66,4365	9,1782	9,2288
50	0,0898	0,1607	13,4602	1,8616	1,8704
51	0,1607	0,9101	13,4773	1,8641	1,8725
52	0,9114	0,8441	12,9219	1,7879	1,7955
53	0,8412	0,0903	13,3939	1,8536	1,8602
54	0,452	0,7694	65,528	9,0522	9,1015
55	0,5579	0,237	66,6514	9,221	9,258
56	0,2298	0,4531	65,3764	9,0324	9,0803
57	0,6871	0,5344	82,7354	11,4299	11,4923
58	0,8146	0,6883	45,6638	6,3202	6,3427
59	0,259	0,158	34,6252	4,7843	4,8082
60	0,8521	0,2589	32,5488	4,5087	4,5228
61	0,1588	0,7405	34,8312	4,8129	4,8377
62	0,7456	0,8416	34,2188	4,7272	4,7531
63	0,7341	0,0928	21,3121	2,9539	2,9607
64	0,2672	0,9095	20,8756	2,8889	2,9
65	0,0903	0,2672	20,8388	2,8836	2,8938
66	0,8458	0,4896	46,5487	6,4289	6,4657
67	0,3405	0,5046	87,6946	12,1137	12,1821

N°	x	y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
68	0,4829	0,3358	86,8593	11,9964	12,0661
68	0,4829	0,3358	86,8593	11,9964	12,0661
69	0,5328	0,6502	88,5977	12,261	12,3075
70	0,6097	0,8568	40,929	5,6553	5,6854
71	0,3906	0,1355	38,8732	5,3705	5,4008
72	0,1379	0,6086	39,5568	5,4649	5,4954
73	0,7111	0,2318	52,4573	7,2414	7,2855
74	0,3117	0,7783	53,2507	7,3626	7,3972
75	0,2209	0,3107	52,9853	7,3255	7,3594
76	0,5426	0,0756	23,3193	3,2218	3,239
77	0,443	0,9116	26,9667	3,7322	3,7475
78	0,0874	0,4437	26,6934	3,6943	3,7076
79	0,7189	0,6637	67,2766	9,2964	9,3454
80	0,911	0,6438	24,823	3,4314	3,449
81	0,9102	0,7453	19,9664	2,7587	2,7745
82	0,1759	0,1045	16,9184	2,3574	2,351
83	0,8258	0,8982	16,3609	2,2802	2,2725
84	0,1047	0,824	16,9628	2,3638	2,3566
85	0,8991	0,1744	16,2301	2,2602	2,2554
86	0,6051	0,423	91,8438	12,6927	12,7582
87	0,397	0,6242	87,6851	12,1129	12,1803
88	0,3715	0,388	86,3296	11,9241	11,9918
89	0,8242	0,585	50,5925	6,9931	7,0295
90	0,825	0,374	48,2143	6,6515	6,6968
91	0,5249	0,7417	72,3043	9,9887	10,0444
92	0,4596	0,2593	72,1667	9,9808	10,024
93	0,2616	0,5362	72,7722	10,0644	10,1081
94	0,6069	0,5709	92,086	12,7348	12,7911
95	0,6628	0,1354	35,9938	4,9629	4,9988
96	0,1418	0,3537	38,6118	5,3391	5,3644
97	0,3535	0,8577	38,7348	5,3563	5,3803
98	0,8244	0,7953	31,4305	4,3472	4,3658
99	0,1809	0,218	34,0512	4,7088	4,7293
100	0,2184	0,8187	34,1605	4,7242	4,7459
101	0,7884	0,1838	33,665	4,6596	4,6776
102	0,9201	0,4496	24,5367	3,3882	3,4072

N°	x	y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
103	0,4451	0,0731	22,4315	3,0994	3,1152
104	0,5522	0,9217	24,0267	3,3204	3,3373
105	0,0765	0,5525	23,4645	3,2424	3,2616
106	0,646	0,9292	19,7916	2,7332	2,7476
107	0,0691	0,6454	19,3414	2,6712	2,6852
108	0,354	0,068	19,0014	2,6241	2,6406
109	0,3351	0,1871	48,1662	6,6543	6,6922
110	0,2681	0,0757	17,5711	2,4314	2,4418
111	0,9304	0,2558	15,6087	2,1583	2,1691
112	0,1889	0,664	48,6566	6,7221	6,7598
113	0,0762	0,7316	17,696	2,4489	2,4597
114	0,7331	0,9236	17,6835	2,447	2,4556
115	0,6709	0,8056	49,2828	6,8098	6,8452
116	0,9255	0,0923	6,6304	0,9212	0,9211
117	0,0756	0,9074	6,7457	0,9372	0,9374
118	0,9079	0,9258	6,5841	0,9141	0,9156
119	0,0926	0,0755	6,7402	0,9363	0,9362
120	0,568	0,3331	84,5948	11,7012	11,7516
121	0,6999	0,4428	79,6098	11,0119	11,0597
122	0,9169	0,5445	25,5584	3,5315	3,5505
123	0,7385	0,7539	51,1327	7,0665	7,1032
124	0,389	0,7104	74,1795	10,2591	10,3054
125	0,2878	0,3851	73,5278	10,1682	10,2135
126	0,6299	0,6545	81,1919	11,2129	11,2777
127	0,9007	0,3468	27,2002	3,7687	3,7792
128	0,4113	0,4568	95,2551	13,1717	13,2325
129	0,4655	0,5929	95,2116	13,1528	13,2256
130	0,5148	0,831	50,5878	6,9966	7,026
131	0,1658	0,5169	49,6823	6,871	6,903
132	0,4842	0,1608	48,3303	6,6865	6,7144
133	0,765	0,5114	67,2516	9,2909	9,3429
134	0,7728	0,2741	49,6642	6,8571	6,8987
135	0,242	0,7238	52,5592	7,2623	7,3024
136	0,2753	0,2405	52,1756	7,209	7,2487
137	0,4695	0,7063	79,3523	10,9526	11,0236
138	0,3348	0,5837	83,8471	11,5825	11,6473

N°	x	y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
139	0,4092	0,3277	82,2402	11,358	11,4242
140	0,5063	0,4204	96,8724	13,4021	13,4564
141	0,2916	0,4638	78,819	10,8777	10,9476
142	0,56	0,4974	98,2276	13,5706	13,6446
143	0,4058	0,2011	56,4986	7,7987	7,8472
144	0,2039	0,5929	57,2453	7,9014	7,951
145	0,5939	0,7795	61,107	8,4432	8,4881
146	0,7084	0,1678	39,9056	5,5024	5,5433
147	0,2872	0,8416	37,4547	5,1645	5,2034
148	0,6452	0,1982	52,3473	7,2289	7,273
149	0,1581	0,287	37,363	5,1514	5,1918
150	0,0637	0,3528	17,7844	2,4541	2,4713
151	0,638	0,0748	21,1166	2,9153	2,9351
152	0,3525	0,936	17,8558	2,4643	2,4816
153	0,4296	0,8326	48,9747	6,7562	6,8034
154	0,1662	0,4306	48,7028	6,7184	6,7639
155	0,7748	0,6311	59,5686	8,2111	8,2732
156	0,3211	0,1246	32,2723	4,4547	4,4845
157	0,1258	0,6784	32,6031	4,5006	4,5299
158	0,6811	0,8716	33,0666	4,5644	4,5937
159	0,8567	0,4178	42,0814	5,8037	5,8441
160	0,142	0,0449	6,0686	0,8395	0,8426
161	0,9562	0,1416	5,9055	0,8173	0,8199
162	0,8584	0,956	5,9222	0,8195	0,8237
163	0,045	0,8579	6,0759	0,8406	0,845
164	0,5172	0,2908	79,0596	10,9007	10,9814
165	0,7913	0,4314	59,5555	8,2263	8,2731
166	0,6425	0,2745	68,4482	9,4555	9,5092
167	0,6633	0,3537	78,0805	10,7915	10,8469
168	0,6768	0,6021	80,6292	11,1259	11,2009
169	0,3094	0,7009	66,6863	9,2063	9,2638
170	0,2975	0,3067	66,0619	9,1196	9,1759
171	0,632	0,4934	91,51	12,6302	12,711
172	0,4046	0,5461	94,5451	13,0621	13,1329
173	0,4363	0,3855	91,7347	12,6599	12,7426
174	0,7412	0,5877	69,8968	9,6538	9,7097

N°	x	y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
175	0,2088	0,3864	57,1486	7,8849	7,9387
176	0,3866	0,7904	57,3597	7,9148	7,9664
177	0,8211	0,3213	45,1032	6,2238	6,2664
178	0,3391	0,6518	77,7386	10,7308	10,7978
179	0,4505	0,6573	86,9795	12,0055	12,0816
180	0,3403	0,4396	86,1074	11,8832	11,9606
181	0,3451	0,3342	76,6649	10,582	10,6502
182	0,5884	0,1465	42,7047	5,8984	5,9336
183	0,5875	0,7111	75,837	10,4651	10,5357
184	0,529	0,5649	97,521	13,4578	13,547
185	0,709	0,2972	63,6752	8,7874	8,8442
186	0,05	0	0	0	0
187	0,15	0	0	0	0
188	0,25	0	0	0	0
189	0,35	0	0	0	0
190	0,45	0	0	0	0
191	0,55	0	0	0	0
192	0,65	0	0	0	0
193	0,75	0	0	0	0
194	0,85	0	0	0	0
195	0,95	0	0	0	0
196	1	0,05	0	0	0
197	1	0,15	0	0	0
198	1	0,25	0	0	0
199	1	0,35	0	0	0
200	1	0,45	0	0	0
201	1	0,55	0	0	0
202	1	0,65	0	0	0
203	1	0,75	0	0	0
204	1	0,85	0	0	0
205	1	0,95	0	0	0
206	0,95	1	0	0	0
207	0,85	1	0	0	0
208	0,75	1	0	0	0
209	0,65	1	0	0	0
210	0,55	1	0	0	0

N°	x	y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
211	0,45	1	0	0	0
212	0,35	1	0	0	0
213	0,25	1	0	0	0
214	0,15	1	0	0	0
215	0,05	1	0	0	0
216	0	0,95	0	0	0
217	0	0,85	0	0	0
218	0	0,75	0	0	0
219	0	0,65	0	0	0
220	0	0,55	0	0	0
221	0	0,45	0	0	0
222	0	0,35	0	0	0
223	0	0,25	0	0	0
224	0	0,15	0	0	0
225	0	0,05	0	0	0
226	0,0241	0,0219	0,5198	0,0721	0,0722
227	0,0741	0,0219	1,5871	0,2201	0,2203
228	0,0241	0,0719	1,6918	0,2346	0,2353
229	0,9782	0,024	0,5162	0,0716	0,0716
230	0,9282	0,024	1,6867	0,234	0,234
231	0,9782	0,074	1,5779	0,2189	0,219
232	0,0219	0,9759	0,5199	0,0721	0,0722
233	0,0719	0,9759	1,6921	0,2347	0,2353
234	0,0219	0,9259	1,5873	0,2202	0,2203
235	0,976	0,9782	0,5148	0,0713	0,0716
236	0,976	0,9282	1,6845	0,2335	0,234
237	0,926	0,9782	1,5742	0,2183	0,219
238	0,0449	0,1803	7,5441	1,0436	1,048
239	0,0449	0,1303	5,5959	0,775	0,7773
240	0,1804	0,9551	7,552	1,0448	1,0485
241	0,1304	0,9551	5,6023	0,7759	0,7779
242	0,9557	0,8221	7,3565	1,0177	1,0218
243	0,9557	0,8721	5,4262	0,7515	0,7536
244	0,8206	0,0452	7,5541	1,0458	1,0503
245	0,8706	0,0452	5,5911	0,7747	0,7774
246	0,7171	0,0464	11,277	1,56	1,5664

N°	x	y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
247	0,7671	0,0464	9,706	1,3437	1,3481
248	0,7877	0,0916	17,5518	2,4293	2,4388
249	0,2836	0,9547	11,018	1,5233	1,5322
250	0,2336	0,9547	9,4889	1,3125	1,3196
251	0,214	0,9098	17,4064	2,4074	2,4188
252	0,0452	0,2836	10,9978	1,5203	1,5288
253	0,0452	0,2336	9,4716	1,31	1,3167
254	0,0901	0,2139	17,3813	2,4038	2,4153
255	0,5213	0,0378	11,8218	1,6336	1,642
256	0,5713	0,0378	11,5523	1,5959	1,6046
257	0,4715	0,9558	13,7801	1,9054	1,915
258	0,4215	0,9558	13,4169	1,8551	1,8645
259	0,0437	0,4718	13,6336	1,8851	1,8936
260	0,0437	0,4218	13,2766	1,8357	1,844
261	0,6877	0,696	67,8472	9,3729	9,4248
262	0,7667	0,676	56,9285	7,8643	7,909
263	0,9555	0,6219	12,9218	1,7859	1,7955
264	0,9555	0,6719	11,9485	1,6516	1,6602
265	0,8628	0,666	36,2226	5,0076	5,0323
266	0,9551	0,7226	10,753	1,4862	1,4946
267	0,9551	0,7726	9,2055	1,2726	1,2795
268	0,9108	0,7947	16,6227	2,2986	2,3097
269	0,8624	0,7168	32,5456	4,5003	4,5212
270	0,9106	0,6945	22,6933	3,1372	3,1536
271	0,1879	0,0522	9,0952	1,262	1,2623
272	0,1328	0,1326	16,396	2,2726	2,2776
273	0,2175	0,1313	25,2982	3,5029	3,5159
274	0,8129	0,9491	8,8314	1,2255	1,2265
275	0,8686	0,8712	15,7964	2,1898	2,1939
276	0,7857	0,8699	24,783	3,4313	3,4424
277	0,0523	0,812	9,1163	1,265	1,2653
278	0,1327	0,8671	16,4248	2,2768	2,2808
279	0,1318	0,7823	25,4181	3,5197	3,5312
280	0,9496	0,1872	8,7525	1,2143	1,2151
281	0,8702	0,1324	16,0224	2,2214	2,2259
282	0,8756	0,2166	23,9635	3,3213	3,3293

N°	x	y	Condición Inicial u_0	Aprox $t=0,1$	exacta $t=0,1$
283	0,8194	0,6366	48,8611	6,7495	6,7884
284	0,835	0,5373	49,2011	6,7972	6,8353
285	0,8676	0,6144	37,8151	5,2259	5,2542
286	0,7899	0,3649	55,8811	7,7171	7,7617
287	0,4884	0,7555	69,4223	9,5895	9,6449
288	0,5288	0,696	81,3053	11,234	11,2935
289	0,4102	0,2621	70,4463	9,7342	9,7859
290	0,5088	0,2482	70,2771	9,7102	9,7631
291	0,4712	0,2976	80,1197	11,0672	11,1306
292	0,2648	0,5865	71,212	9,8408	9,8916
293	0,2457	0,4947	69,7461	9,6369	9,6876
294	0,3011	0,5204	80,9298	11,1817	11,2432
295	0,647	0,5527	88,3073	12,1995	12,2659
296	0,5698	0,6105	91,7751	12,6826	12,7497
297	0,6985	0,1141	28,4858	3,9344	3,9561
298	0,1161	0,3105	29,5199	4,0779	4,1026
299	0,1814	0,3322	46,6195	6,4393	6,4773
300	0,1146	0,3987	33,4587	4,6226	4,6481
301	0,3103	0,8836	29,5981	4,089	4,111
302	0,3326	0,818	46,8006	6,4648	6,501
303	0,3983	0,8847	33,6505	4,6494	4,6733
304	0,8679	0,8197	21,6348	2,9936	3,0055
305	0,8195	0,7418	38,9519	5,386	5,4103
306	0,785	0,8184	33,7594	4,6682	4,6906
307	0,8673	0,7703	26,7485	3,6989	3,7157
308	0,8251	0,8467	24,1825	3,3489	3,3602
309	0,1354	0,1893	23,1169	3,1977	3,2116
310	0,22	0,188	35,4975	4,908	4,9309
311	0,1356	0,2426	28,5392	3,9443	3,9635
312	0,2009	0,2643	43,5681	6,0199	6,0504
313	0,1784	0,1612	25,7899	3,5701	3,5817
314	0,1896	0,8644	23,1756	3,2061	3,2205
315	0,1886	0,7796	35,6507	4,9294	4,9522
316	0,2428	0,8641	28,6065	3,9539	3,9744
317	0,2651	0,7985	43,7592	6,0467	6,0799
318	0,1616	0,8214	25,8656	3,5808	3,5934

N°	x	y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
319	0,8148	0,1371	22,9344	3,1746	3,1873
320	0,8203	0,2213	34,2784	4,7426	4,7608
321	0,7613	0,1383	28,6897	3,9671	3,9853
322	0,7498	0,2078	42,9865	5,9384	5,9702
323	0,8438	0,1791	25,1396	3,4822	3,492
324	0,96	0,4248	12,1745	1,6819	1,6927
325	0,96	0,4748	12,4833	1,7243	1,7356
326	0,8829	0,4696	35,7912	4,9428	4,973
327	0,4226	0,0366	11,1225	1,5369	1,5468
328	0,4726	0,0366	11,4174	1,5779	1,5878
329	0,4179	0,1043	31,1168	4,2997	4,3228
330	0,4939	0,0744	23,1451	3,1992	3,2168
331	0,5761	0,9608	11,9204	1,6473	1,6578
332	0,5261	0,9608	12,228	1,6901	1,7006
333	0,5809	0,8892	33,0006	4,5605	4,5861
334	0,4976	0,9167	25,8814	3,5783	3,5938
335	0,0382	0,5763	11,6379	1,6081	1,6155
336	0,0382	0,5263	11,9393	1,6501	1,6574
337	0,1072	0,5806	31,9836	4,4195	4,4439
338	0,0819	0,4981	25,4554	3,5192	3,5348
339	0,673	0,9646	9,505	1,3135	1,3195
340	0,623	0,9646	10,2863	1,4212	1,428
341	0,6279	0,893	30,3669	4,1955	4,2171
342	0,5991	0,9254	22,099	3,0533	3,0708
343	0,0346	0,6727	9,2825	1,2829	1,2906
344	0,0346	0,6227	10,0436	1,3877	1,3964
345	0,1035	0,627	29,4405	4,0673	4,0891
346	0,0728	0,5989	21,5838	2,9819	2,9986
347	0,327	0,034	9,1209	1,2605	1,2676
348	0,377	0,034	9,8707	1,3638	1,3718
349	0,3723	0,1017	28,9217	3,9955	4,0167
350	0,3996	0,0705	20,8959	2,8869	2,901
351	0,3479	0,226	57,8772	7,9963	8,0405
352	0,2971	0,1726	41,4568	5,7278	5,7609
353	0,3629	0,1613	44,0896	6,0902	6,126
354	0,2341	0,0378	7,9541	1,1019	1,1041

N°	x	y	Condición Inicial u_0	Aprox $t=0,1$	exacta $t=0,1$
355	0,2841	0,0378	9,2316	1,2769	1,2815
356	0,2636	0,1168	26,4384	3,6554	3,6712
357	0,222	0,0901	17,932	2,4849	2,4917
358	0,3111	0,0718	18,5445	2,5623	2,5756
359	0,9652	0,2279	7,1585	0,9917	0,9948
360	0,9652	0,2779	8,3576	1,1567	1,1614
361	0,8913	0,2573	24,2232	3,3533	3,364
362	0,9148	0,2151	16,5454	2,294	2,298
363	0,2284	0,6504	58,5597	8,0909	8,1331
364	0,1739	0,7023	41,805	5,7761	5,808
365	0,1634	0,6363	44,6692	6,1703	6,2058
366	0,0381	0,7658	8,0092	1,1096	1,1133
367	0,0381	0,7158	9,2945	1,2857	1,2919
368	0,1175	0,7361	26,6047	3,6786	3,6954
369	0,0904	0,7778	18,0133	2,4964	2,5017
370	0,0726	0,6885	18,7727	2,5939	2,6061
371	0,7665	0,9618	8,0168	1,1106	1,1134
372	0,7165	0,9618	9,3098	1,2877	1,293
373	0,7394	0,8826	26,3354	3,641	3,6571
374	0,7795	0,9109	17,6515	2,446	2,4509
375	0,6895	0,9264	18,981	2,6226	2,6357
376	0,6637	0,7669	58,2033	8,0414	8,0861
377	0,7082	0,8236	41,7622	5,7704	5,8014
378	0,6403	0,8312	45,7472	6,3205	6,3545
379	0,9127	0,0461	3,9104	0,5425	0,543
380	0,9627	0,0961	3,4733	0,482	0,4829
381	0,9409	0,0702	4,0339	0,5596	0,561
382	0,8834	0,0913	10,1375	1,405	1,4076
383	0,9123	0,1334	11,0636	1,5362	1,5378
384	0,0878	0,9537	3,9463	0,5474	0,5484
385	0,0378	0,9037	3,5288	0,4896	0,4903
386	0,0597	0,9296	4,089	0,5672	0,5682
387	0,1182	0,9088	10,2542	1,4208	1,4245
388	0,0901	0,8657	11,4411	1,5887	1,5888
389	0,954	0,9129	3,893	0,5397	0,5406
390	0,904	0,9629	3,4533	0,479	0,4798

N°	x	y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
391	0,93	0,9412	4,0117	0,5562	0,5566
392	0,9097	0,885	9,897	1,3713	1,3743
393	0,8669	0,912	11,0836	1,539	1,5396
394	0,0963	0,0378	3,5264	0,4892	0,4903
395	0,0463	0,0878	3,9443	0,547	0,5484
396	0,0703	0,0597	4,0866	0,5668	0,5674
397	0,0912	0,1181	10,2437	1,4192	1,4234
398	0,1342	0,09	11,4192	1,5855	1,5859
399	0,563	0,2851	76,5317	10,5758	10,6321
400	0,5254	0,3344	86,4986	11,9518	12,0149
401	0,5866	0,3781	89,3416	12,3503	12,411
402	0,7273	0,3992	71,8076	9,9246	9,9755
403	0,6935	0,4886	82,0317	11,3349	11,3952
404	0,6525	0,4329	86,7732	11,9923	12,0543
405	0,9585	0,5222	12,984	1,7938	1,8016
406	0,9585	0,5722	12,682	1,7525	1,7597
407	0,8813	0,517	36,3666	5,0237	5,0537
408	0,914	0,5941	25,542	3,5299	3,5467
409	0,8706	0,5647	38,7336	5,352	5,3797
410	0,9185	0,497	25,3283	3,4982	3,5178
411	0,6975	0,7411	59,1146	8,1679	8,212
412	0,7765	0,7211	49,6147	6,8582	6,893
413	0,742	0,7978	42,9998	5,9423	5,9729
414	0,7287	0,7088	59,6565	8,2428	8,287
415	0,7814	0,7746	41,2293	5,7001	5,7283
416	0,7047	0,7798	51,0593	7,0553	7,0912
417	0,4205	0,7399	70,6546	9,7605	9,8149
418	0,3504	0,7444	64,1433	8,862	8,9102
419	0,393	0,6673	81,6596	11,2808	11,3437
420	0,2588	0,4191	70,3098	9,7121	9,7661
421	0,2544	0,3479	63,6474	8,7931	8,842
422	0,3297	0,3866	80,6148	11,1354	11,1996
423	0,6432	0,6914	74,2582	10,2561	10,3149
424	0,5814	0,6523	85,8806	11,8676	11,9302
425	0,6744	0,6591	74,9231	10,3481	10,4072
426	0,6184	0,6127	87,3883	12,0745	12,1385

N°	x	Y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
427	0,9504	0,3234	13,2016	1,8269	1,8324
428	0,9504	0,3734	14,3188	1,9797	1,9875
429	0,8764	0,3029	30,821	4,2622	4,2829
430	0,8629	0,3604	37,8131	5,224	5,2509
431	0,9104	0,3982	26,3704	3,6425	3,6631
432	0,9156	0,3013	21,2696	2,9427	2,9537
433	0,4454	0,4849	98,4222	13,602	13,6719
434	0,3759	0,4807	92,3229	12,7553	12,8251
435	0,3914	0,4224	91,4481	12,6332	12,7034
436	0,4725	0,553	98,2505	13,5721	13,6479
437	0,4992	0,6215	92,7983	12,8223	12,8913
438	0,4312	0,6085	92,0539	12,7157	12,7873
439	0,4834	0,8002	58,6562	8,104	8,1468
440	0,5623	0,8439	46,2054	6,386	6,4175
441	0,4789	0,8713	39,2527	5,4255	5,4527
442	0,5198	0,7863	62,0734	8,5774	8,6243
443	0,5335	0,8763	37,6725	5,2077	5,2343
444	0,1978	0,485	58,1524	8,0352	8,0781
445	0,1518	0,5628	45,0193	6,2209	6,2526
446	0,1266	0,4803	38,6533	5,3425	5,37
447	0,2137	0,5266	61,9867	8,5667	8,6108
448	0,1211	0,5347	36,9142	5,1024	5,1276
449	0,5211	0,1989	58,371	8,0698	8,1083
450	0,4374	0,1481	44,0089	6,082	6,1123
451	0,5134	0,1182	36,2519	5,0111	5,0361
452	0,4719	0,2101	61,065	8,4411	8,4842
453	0,4647	0,1169	35,6983	4,9345	4,957
454	0,726	0,5229	75,6294	10,4484	10,5072
455	0,8054	0,5005	57,3955	7,9287	7,9732
456	0,7946	0,5482	59,4447	8,212	8,2589
457	0,7325	0,4771	74,3008	10,2678	10,3206
458	0,7638	0,3149	56,4786	7,8002	7,8446
459	0,8125	0,2665	41,2731	5,7043	5,7325
460	0,7419	0,253	51,7267	7,1428	7,1868
461	0,7806	0,2289	41,8964	5,7903	5,8193
462	0,255	0,6803	60,5958	8,372	8,4176

N°	x	Y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
463	0,2004	0,7322	43,8997	6,0662	6,0977
464	0,2768	0,7511	53,8521	7,4416	7,4791
465	0,2302	0,7713	43,5629	6,0212	6,0512
466	0,2154	0,6939	51,3608	7,0964	7,1343
467	0,318	0,2527	59,964	8,2843	8,3299
468	0,2672	0,1993	43,6015	6,0247	6,0585
469	0,2481	0,2756	53,531	7,3967	7,4363
470	0,2281	0,2292	43,319	5,9872	6,0166
471	0,3052	0,2138	50,9275	7,0363	7,0755
472	0,4608	0,7378	72,8015	10,0546	10,1145
473	0,5012	0,6783	84,7227	11,7058	11,7682
474	0,4972	0,724	76,2363	10,5297	10,5908
475	0,4293	0,7084	77,3744	10,6881	10,7481
476	0,3014	0,6102	76,3422	10,548	10,605
477	0,3376	0,5441	86,4336	11,941	12,0059
478	0,3659	0,6039	86,433	11,9393	12,0072
479	0,2982	0,56	79,1449	10,9368	10,9936
480	0,385	0,2963	75,0303	10,3655	10,4232
481	0,446	0,3317	85,1126	11,7553	11,8221
482	0,3904	0,3578	84,896	11,7241	11,7926
483	0,4344	0,2935	78,0001	10,7768	10,8348
484	0,4929	0,4668	99,4305	13,7427	13,8122
485	0,4946	0,3781	92,7435	12,8167	12,883
486	0,5557	0,4217	95,5097	13,2023	13,2672
487	0,5372	0,3768	91,9673	12,7126	12,7758
488	0,4588	0,4386	97,3237	13,4508	13,5194
489	0,2607	0,4584	72,4346	10,0041	10,0605
490	0,3161	0,4842	83,6605	11,5534	11,6222
491	0,2766	0,5	76,3738	10,5513	10,6081
492	0,2897	0,4245	76,7492	10,6006	10,661
493	0,5197	0,5053	99,7941	13,7873	13,8626
494	0,5825	0,4602	95,9028	13,2514	13,3223
495	0,5834	0,5342	96,0308	13,2674	13,3397
496	0,5331	0,4589	98,6316	13,6325	13,7011
497	0,3833	0,233	62,3927	8,6196	8,6672
498	0,3982	0,1683	47,8873	6,6148	6,6519

N°	x	y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
499	0,4327	0,2302	64,7116	8,942	8,9882
500	0,3704	0,1941	52,59	7,2642	7,305
501	0,445	0,181	53,0344	7,3293	7,3687
502	0,236	0,6148	63,1797	8,7286	8,7776
503	0,1709	0,6008	48,6086	6,7142	6,7517
504	0,2328	0,5645	65,4145	9,0388	9,0878
505	0,1964	0,6284	53,2129	7,3503	7,3923
506	0,1848	0,5549	54,0469	7,468	7,5062
507	0,6252	0,7539	64,5075	8,9108	8,9606
508	0,6018	0,8181	51,3322	7,0931	7,1321
509	0,5594	0,7606	67,1306	9,2736	9,3253
510	0,6324	0,7925	55,4871	7,6663	7,7089
511	0,5544	0,8052	56,6068	7,8226	7,8641
512	0,7212	0,1303	30,566	4,2229	4,2467
513	0,7097	0,1998	46,4382	6,4097	6,4507
514	0,6856	0,1516	38,2741	5,2805	5,3163
515	0,7484	0,1758	37,2804	5,1505	5,1791
516	0,2772	0,8756	29,1458	4,027	4,0475
517	0,2995	0,81	45,4242	6,2734	6,3096
518	0,3204	0,8497	38,4406	5,3088	5,3388
519	0,2528	0,8302	36,2759	5,0114	5,0385
520	0,6016	0,2176	59,9701	8,2876	8,3304
521	0,6781	0,215	52,9857	7,3159	7,3609
522	0,654	0,1668	44,2925	6,1138	6,1529
523	0,6768	0,183	46,1968	6,3764	6,4179
524	0,1242	0,2771	29,0825	4,0179	4,0403
525	0,1895	0,2988	45,2465	6,2484	6,2849
526	0,1499	0,3204	38,3379	5,2943	5,3257
527	0,1695	0,2525	36,1776	4,9975	5,0258
528	0,0318	0,3764	9,2427	1,277	1,2823
529	0,0318	0,3264	8,5373	1,1795	1,1845
530	0,077	0,31	19,8136	2,7379	2,7522
531	0,0755	0,3982	22,3195	3,0846	3,0985
532	0,1027	0,3532	28,4037	3,924	3,9443
533	0,619	0,0374	10,9061	1,5062	1,5159
534	0,669	0,0374	10,1025	1,3957	1,4042

Nº	x	Y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
535	0,6861	0,0838	21,697	2,9971	3,0145
536	0,5903	0,0752	22,4643	3,1026	3,1213
537	0,6504	0,1051	28,868	3,9848	4,0103
538	0,3763	0,968	9,2823	1,2826	1,2902
539	0,3263	0,968	8,5733	1,1846	1,1917
540	0,3098	0,9228	19,8652	2,7452	2,758
541	0,3978	0,9238	22,4879	3,108	3,1254
542	0,353	0,8969	28,5027	3,9379	3,9579
543	0,4408	0,801	57,518	7,9425	7,9895
544	0,4363	0,8721	38,3218	5,2953	5,3242
545	0,3916	0,8452	44,0641	6,0851	6,1195
546	0,4722	0,8318	50,2281	6,9384	6,9767
547	0,198	0,4419	57,3089	7,9138	7,9598
548	0,1268	0,4371	38,0433	5,2566	5,2835
549	0,154	0,3922	43,8728	6,0583	6,0945
550	0,166	0,4738	49,6489	6,8586	6,8969
551	0,7947	0,6597	52,7161	7,2823	7,3218
552	0,7468	0,6474	63,8926	8,821	8,8759
553	0,7995	0,608	55,544	7,6697	7,7161
554	0,2901	0,1413	33,9396	4,6889	4,7151
555	0,3559	0,13	35,7159	4,9331	4,9611
556	0,3375	0,0963	25,9881	3,5895	3,611
557	0,3281	0,1558	40,3254	5,5698	5,6015
558	0,2946	0,1001	24,7152	3,4154	3,4328
559	0,1423	0,7095	34,205	4,7258	4,7508
560	0,1318	0,6435	36,2206	5,0029	5,0305
561	0,0975	0,6619	26,3254	3,6362	3,6585
562	0,1573	0,6712	40,7393	5,627	5,6584
563	0,101	0,705	24,9413	3,4468	3,4659
564	0,7133	0,8566	34,123	4,7142	4,7405
565	0,6454	0,8642	37,1361	5,1298	5,1589
566	0,6635	0,9004	26,8113	3,7033	3,7242
567	0,7071	0,8976	25,1601	3,4768	3,4948
568	0,676	0,8386	41,3259	5,7086	5,7404
569	0,8512	0,4537	44,5796	6,1548	6,1936
570	0,8408	0,3959	45,4076	6,2665	6,3084

N°	x	Y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
571	0,8884	0,4337	33,6133	4,6409	4,668
572	0,8787	0,3823	34,6806	4,7904	4,8172
573	0,121	0,0225	2,6157	0,3626	0,364
574	0,171	0,0225	3,6074	0,5005	0,5021
575	0,159	0,0747	11,134	1,5462	1,5472
576	0,1173	0,0602	6,7749	0,9399	0,9407
577	0,9781	0,1208	2,5481	0,3534	0,3538
578	0,9781	0,1708	3,5163	0,4879	0,4882
579	0,9277	0,158	10,73	1,49	1,4897
580	0,9408	0,1169	6,6372	0,921	0,9223
581	0,8792	0,978	2,5556	0,3543	0,3554
582	0,8292	0,978	3,5267	0,4894	0,4904
583	0,8421	0,9271	10,8022	1,5005	1,501
584	0,8832	0,9409	6,6184	0,9182	0,92
585	0,0225	0,879	2,6187	0,3631	0,364
586	0,0225	0,829	3,6114	0,5011	0,5021
587	0,0748	0,841	11,158	1,5497	1,5492
588	0,0603	0,8827	6,7812	0,9409	0,9423
589	0,5375	0,2639	73,2233	10,116	10,1709
590	0,5	0,3133	83,2877	11,4992	11,5694
591	0,4884	0,2751	76,0056	10,4978	10,5587
592	0,5426	0,312	82,3097	11,3704	11,4347
593	0,773	0,3935	61,7917	8,5369	8,5838
594	0,8185	0,4605	53,5526	7,3962	7,4408
595	0,8081	0,4027	54,0614	7,4646	7,5113
596	0,7456	0,4371	70,2813	9,7126	9,7636
597	0,7782	0,4714	63,9268	8,832	8,879
598	0,824	0,4246	51,0553	7,0487	7,0915
599	0,6002	0,2557	68,4376	9,4585	9,5056
600	0,6768	0,2532	60,6741	8,3789	8,4294
601	0,6053	0,3038	77,1723	10,6662	10,7202
602	0,6439	0,2363	60,8182	8,4011	8,4474
603	0,709	0,3547	71,0912	9,8237	9,8763
604	0,6342	0,3884	85,6859	11,843	11,9037
605	0,6157	0,3434	82,3834	11,3876	11,4437
606	0,6816	0,3982	79,8922	11,0429	11,0983

Nº	x	Y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
607	0,6529	0,3141	73,9799	10,2219	10,2772
608	0,6819	0,5683	82,1768	11,3489	11,4161
609	0,6979	0,6329	74,3112	10,2619	10,3218
610	0,6418	0,5865	86,9237	12,008	12,0754
611	0,6533	0,6283	81,517	11,2572	11,3245
612	0,2887	0,6688	67,9427	9,3857	9,4385
613	0,3105	0,7396	60,4323	8,3499	8,394
614	0,3492	0,7057	71,0473	9,8148	9,8687
615	0,2757	0,7124	59,8442	8,2672	8,3128
616	0,3291	0,2858	67,2015	9,2825	9,3344
617	0,2592	0,3087	59,9869	8,2879	8,3321
618	0,2927	0,3459	70,389	9,7233	9,7784
619	0,2864	0,2736	59,3282	8,1954	8,2414
620	0,6595	0,5139	87,6207	12,1024	12,1718
621	0,6185	0,4582	92,3437	12,7569	12,8282
622	0,6194	0,5321	92,5727	12,7888	12,8596
623	0,6659	0,4681	86,2798	11,9217	11,9863
624	0,596	0,4954	95,4803	13,1885	13,2627
625	0,4421	0,5296	97,9243	13,5295	13,6029
626	0,3726	0,5253	91,8003	12,6827	12,7529
627	0,4008	0,5851	91,799	12,6815	12,7523
628	0,408	0,5014	95,8474	13,2446	13,3148
629	0,4351	0,5695	95,6023	13,2072	13,2804
630	0,3697	0,5649	89,8397	12,4112	12,4795
631	0,4596	0,3807	89,8416	12,408	12,4808
632	0,4039	0,3868	89,4997	12,3597	12,433
633	0,4238	0,4212	94,1812	13,0117	13,0836
634	0,4228	0,3566	87,3863	12,0668	12,1392
635	0,4713	0,403	95,0033	13,1279	13,1973
636	0,7141	0,5611	76,7772	10,6045	10,666
637	0,73	0,6257	69,227	9,5589	9,6179
638	0,7827	0,5864	60,7733	8,3935	8,4426
639	0,7531	0,5496	69,1683	9,5543	9,6085
640	0,758	0,6094	64,8853	8,956	9,0127
641	0,709	0,5949	75,7099	10,454	10,5174
642	0,2193	0,4187	61,5674	8,502	8,5515

N°	x	Y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
643	0,2149	0,3485	55,5502	7,6732	7,717
644	0,1753	0,37	48,0267	6,6326	6,6714
645	0,2483	0,3857	65,8507	9,096	9,1468
646	0,1875	0,4085	53,2823	7,3546	7,4008
647	0,4193	0,7799	61,737	8,5255	8,5747
648	0,3492	0,7843	55,7801	7,7055	7,7499
649	0,3701	0,824	48,1959	6,6564	6,6962
650	0,3878	0,7504	66,2803	9,1558	9,207
651	0,4081	0,8115	53,5119	7,3866	7,4328
652	0,7879	0,3385	54,0164	7,4593	7,5046
653	0,8366	0,2901	38,8038	5,3632	5,3915
654	0,8231	0,3477	46,8398	6,4653	6,5057
655	0,8609	0,3341	36,6928	5,0709	5,0984
656	0,797	0,2977	47,9213	6,6178	6,6557
657	0,3036	0,6443	73,3223	10,129	10,1854
658	0,3681	0,638	83,0655	11,4723	11,5391
659	0,3641	0,6811	76,6789	10,5928	10,6524
660	0,337	0,6177	81,2724	11,2251	11,2908
661	0,3243	0,6763	72,4072	9,9987	10,0598
662	0,4917	0,6537	88,5317	12,2322	12,2988
663	0,4237	0,6407	87,805	12,1267	12,197
664	0,4198	0,6839	81,1296	11,2068	11,2692
665	0,458	0,6251	91,5768	12,6485	12,7205
666	0,46	0,6818	83,4664	11,5241	11,5942
667	0,3404	0,4721	87,3545	12,0637	12,1345
668	0,3559	0,4138	86,6534	11,9667	12,0366
669	0,3141	0,4124	80,2782	11,0882	11,1526
670	0,3758	0,4482	91,262	12,6071	12,6773
671	0,316	0,4517	82,7882	11,4293	11,5005
672	0,3529	0,2995	72,3406	9,9924	10,0478
673	0,3583	0,3611	81,7957	11,2955	11,3625
674	0,3164	0,3597	75,8109	10,472	10,5309
675	0,3771	0,3309	79,8821	11,0314	11,0949
676	0,3213	0,3205	71,5375	9,8778	9,9383
677	0,5732	0,1917	55,1704	7,6257	7,6621
678	0,5655	0,111	33,4588	4,6226	4,6463

N°	x	Y	Condición Inicial u0	Aprox t=0,1	exacta t=0,1
679	0,6256	0,141	39,5547	5,4607	5,4965
680	0,5363	0,1536	46,1087	6,3738	6,4041
681	0,6168	0,1723	48,0971	6,6431	6,6809
682	0,6132	0,1106	31,9228	4,4084	4,4341
683	0,622	0,7197	71,5134	9,876	9,9344
684	0,5602	0,6807	82,8173	11,4434	11,5034
685	0,5562	0,7264	74,5708	10,2995	10,3595
686	0,6087	0,6828	79,1099	10,9252	10,9893
687	0,5907	0,7453	68,8506	9,5089	9,5646
688	0,5043	0,539	99,2411	13,7066	13,7857
689	0,5309	0,6076	93,8997	12,9749	13,0433
690	0,5679	0,5679	95,5161	13,196	13,2686
691	0,4972	0,5789	96,9401	13,3887	13,466
692	0,5445	0,5312	98,5509	13,6119	13,6896
693	0,7318	0,3264	63,8058	8,8133	8,8637
694	0,71	0,2645	58,3598	8,0575	8,1067
695	0,7409	0,2857	56,8368	7,8478	7,8956
696	0,6757	0,2858	66,5881	9,1961	9,2496
697	0,6862	0,3255	71,1573	9,8296	9,8843

ANEXO 04

TABLA IV, Comparación de la solución aproximada y solución exacta del problema 4,3

Nº	x	y	Aprox t=1	Exacto t=1
1	0	0	0	0
2	6,2832	0	0	0
3	6,2832	6,2832	-0,0736	0
4	0	6,2832	0	0
5	0,6283	0	0	0
6	1,2566	0	0	0
7	1,885	0	0	0
8	2,5133	0	0	0
9	3,1416	0	0	0
10	3,7699	0	0	0
11	4,3982	0	0	0
12	5,0266	0	0	0
13	5,6549	0	0	0
14	6,2832	0,6283	-0,0141	0
15	6,2832	1,2566	-0,0333	0
16	6,2832	1,885	-0,0286	0
17	6,2832	2,5133	-0,021	0
18	6,2832	3,1416	-0,0042	0
19	6,2832	3,7699	0,0262	0
20	6,2832	4,3982	0,0317	0
21	6,2832	5,0266	0,043	0
22	6,2832	5,6549	0,0133	0
23	5,6549	6,2832	0,0146	0
24	5,0266	6,2832	0,0383	0
25	4,3982	6,2832	0,0302	0
26	3,7699	6,2832	0,0208	0
27	3,1416	6,2832	0,0039	0
28	2,5133	6,2832	-0,0254	0
29	1,885	6,2832	-0,031	0
30	1,2566	6,2832	-0,0421	0

Nº	x	y	Aprox t=1	Exacto t=1
31	0,6283	6,2832	-0,0155	0
32	0	5,6549	0	0
33	0	5,0266	0	0
34	0	4,3982	0	0
35	0	3,7699	0	0
36	0	3,1416	0	0
37	0	2,5133	0	0
38	0	1,885	0	0
39	0	1,2566	0	0
40	0	0,6283	0	0
41	3,1807	3,1468	-0,0044	0,0002
42	0,2746	0,3016	0,0806	0,0805
43	6,0132	0,3026	-0,084	-0,0795
44	0,2756	5,9808	-0,0862	-0,081
45	5,9807	6,0074	0,0685	0,0811
46	1,6935	4,0164	-0,7674	-0,7617
47	4,0074	4,6098	0,7637	0,7576
48	1,7006	2,2274	0,7829	0,7854
49	4,5605	2,132	-0,8455	-0,8369
50	5,7181	5,2727	0,4743	0,4536
51	5,3345	0,5707	-0,4453	-0,439
52	1,0103	5,7203	-0,471	-0,452
53	0,9889	0,5484	0,4398	0,4355
54	3,0576	1,5577	0,0823	0,0839
55	2,8451	4,8673	-0,2845	-0,2887
56	4,8524	3,4658	0,3115	0,3154
57	0,9056	2,7751	0,2889	0,2819
58	2,061	3,1481	0,0029	-0,0057
59	4,652	5,2856	0,8511	0,8386
60	5,3439	1,5976	-0,8158	-0,8068
61	1,0549	1,7042	0,8746	0,8621
62	0,9919	4,6525	-0,8422	-0,8356
63	1,6802	5,7198	-0,5512	-0,5309
64	1,599	0,5254	0,5039	0,5014

N°	x	y	Aprox t=1	Exacto t=1
65	5,7144	4,6046	0,5566	0,5355
66	4,7228	0,624	-0,5846	-0,5843
67	4,031	1,2963	-0,7564	-0,7476
68	2,6297	2,3549	0,3469	0,3468
69	2,4668	0,9782	0,5149	0,5182
70	3,1827	4,1089	0,0352	0,0338
71	4,1788	3,0365	-0,0936	-0,0903
72	3,823	5,4195	0,4809	0,4789
73	0,8157	3,7653	-0,4259	-0,4253
74	5,4042	2,4551	-0,491	-0,4881
75	1,9602	4,9195	-0,9153	-0,9054
76	4,8943	4,3316	0,9242	0,9131
77	5,7323	3,5028	0,1895	0,185
78	2,7877	5,7397	-0,1838	-0,1792
79	0,5743	2,2256	0,4406	0,4309
80	1,3296	1,0866	0,8689	0,8594
81	1,5306	2,8278	0,3163	0,3084
82	5,6764	1,0993	-0,5328	-0,508
83	5,1766	5,6248	0,5785	0,5471
84	0,6534	1,1	0,5604	0,5418
85	0,6559	5,1781	-0,5674	-0,5449
86	3,5925	2,2674	-0,3348	-0,3343
87	3,397	0,767	-0,1731	-0,1753
88	3,9493	3,8327	0,4564	0,4606
89	2,5091	3,7618	-0,3393	-0,3436
90	2,2787	1,6567	0,7473	0,7569
91	3,3721	4,6474	0,2318	0,228
92	4,6936	3,0256	-0,118	-0,1157
93	4,578	1,2007	-0,9246	-0,9239
94	1,6266	3,4493	-0,2968	-0,3024
95	5,3917	4,0653	0,6265	0,6207
96	2,2244	5,4055	-0,6159	-0,6107
97	5,1441	4,9115	0,9112	0,8903
98	1,3729	5,1518	-0,9057	-0,8873

Nº	x	y	Aprox t=1	Exacto t=1
99	1,9279	1,0108	0,7949	0,7938
100	3,4708	5,8053	0,1554	0,1487
101	5,7998	2,8165	-0,1548	-0,1484
102	0,6029	3,2266	-0,0444	-0,0481
103	1,1964	2,2879	0,7023	0,7015
104	2,2107	0,5068	0,3895	0,3894
105	0,4017	4,0635	-0,3129	-0,3115
106	5,8518	2,225	-0,3452	-0,3318
107	4,054	5,8492	0,3462	0,3326
108	2,118	2,5966	0,4447	0,4427
109	2,6154	2,959	0,0946	0,0912
110	0,4156	2,777	0,1419	0,144
111	4,172	5,0995	0,798	0,7941
112	4,5959	5,8044	0,475	0,4576
113	5,1002	2,0625	-0,8206	-0,8161
114	0,4556	1,6344	0,439	0,4391
115	1,1768	4,1669	-0,7896	-0,7894
116	0,4685	4,5961	-0,4507	-0,4485
117	5,8257	1,6777	-0,4547	-0,4392
118	0,4747	5,7017	-0,2629	-0,2511
119	0,4705	0,5782	0,2526	0,2478
120	5,8309	0,582	-0,2524	-0,2402
121	5,7011	5,8078	0,2638	0,2516
122	4,0613	0,8381	-0,5804	-0,5913
123	2,426	4,5639	-0,6542	-0,6488
124	2,8747	0,5266	0,1384	0,1326
125	3,5501	1,7217	-0,3947	-0,3927
126	1,7618	1,6303	0,9975	0,9801
127	4,4805	3,8648	0,652	0,6441
128	3,6959	3,4026	0,1332	0,1358
129	3,247	5,2508	0,0891	0,0903
130	5,2363	3,0606	-0,0705	-0,0701
131	4,0864	2,4713	-0,504	-0,5034
132	2,0837	3,6474	-0,4198	-0,4222

Nº	x	y	Aprox t=1	Exacto t=1
133	4,4162	1,6349	-0,9467	-0,9545
134	1,5228	4,5594	-0,9924	-0,9872
135	4,5496	4,7674	0,9928	0,9853
136	2,798	3,4546	-0,0994	-0,1037
137	2,9002	4,4678	-0,2277	-0,2319
138	4,4746	3,3801	0,2234	0,2296
139	3,6959	4,2038	0,4595	0,4597
140	2,6046	1,4099	0,4993	0,5049
141	3,1263	2,603	0,0095	0,0078
142	2,1864	2,0535	0,7218	0,7231
143	5,0872	1,1193	-0,8439	-0,8373
144	1,1253	3,2996	-0,139	-0,142
145	3,7257	5,0076	0,522	0,5276
146	4,9167	2,5635	-0,5354	-0,5351
147	1,8067	5,3009	-0,7967	-0,8087
148	5,2886	4,4803	0,805	0,8161
149	3,4119	0,3573	-0,0938	-0,0934
150	2,217	5,887	-0,3216	-0,3081
151	5,8821	4,0689	0,3262	0,3123
152	5,2398	3,593	0,373	0,377
153	2,7051	5,2554	-0,3582	-0,362
154	0,3632	3,5943	-0,1494	-0,1554
155	1,2847	3,742	-0,5343	-0,542
156	4,2612	5,4935	0,6421	0,6391
157	0,769	4,2508	-0,6187	-0,6226
158	5,5074	2,0033	-0,6382	-0,6358
159	6,019	0,8916	-0,2194	-0,2032
160	5,3903	6,0003	0,235	0,2174
161	0,2821	5,3907	-0,2192	-0,2168
162	0,2806	0,8908	0,2153	0,2153
163	3,0998	2,0601	0,0364	0,0369
164	3,466	1,2241	-0,2958	-0,2998
165	3,6438	2,8222	-0,1543	-0,1511
166	2,9786	1,0774	0,145	0,1429

Nº	x	y	Aprox t=1	Exacto t=1
167	3,212	3,6303	0,0361	0,033
168	4,0422	1,921	-0,7382	-0,7361
169	1,4261	1,9629	0,8933	0,9145
170	4,3383	0,906	-0,7227	-0,7326
171	2,4296	5,0046	-0,6209	-0,6256
172	4,4113	4,3518	0,888	0,8936
173	1,9615	4,434	-0,8834	-0,889
174	4,8511	1,6244	-0,9931	-0,989
175	2,6834	4,1392	-0,3701	-0,3716
176	2,2227	4,0966	-0,6502	-0,6489
177	4,9744	3,8656	0,6351	0,6398
178	3,5472	3,8373	0,2511	0,2529
179	4,111	4,1745	0,7027	0,7081
180	4,1574	3,5043	0,2917	0,3016
181	4,4895	2,6459	-0,4604	-0,4639
182	2,2067	1,3374	0,7725	0,7827
183	3,8716	0,4938	-0,323	-0,3161
184	2,6419	1,8497	0,4574	0,4606
185	4,281	0,5721	-0,4775	-0,4918
186	2,4103	3,3965	-0,1612	-0,1684
187	3,7683	0,9236	-0,4586	-0,4679
188	2,8748	3,8212	-0,162	-0,1657