

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática

**ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE CAMPOS VECTORIALES EN
LOS SISTEMAS DINÁMICOS**

TESIS

Presentada por:

Bach. MAGALY EVA YUFRA GUTIERREZ

Bach. ROXANA EDITH YUFRA GUTIERREZ

Para optar el Título Profesional de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TACNA – PERÚ

2025



ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS Nro. 454

En la ciudad de Tacna, en el auditorium de la Facultad de Ciencias, de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann; siendo las 11:00 horas del día VIERNES, 24 de OCTUBRE del 2025, estando presente el jurado calificador nominado con Resolución de Facultad Nro. 11443 - 2025 FACI/UNJBG, conformado por los siguientes docentes:

<u>Dr. LUIS ANDRÉS AMAYA CEDRÓN</u>	(Presidente)
<u>Dr. HEBER MELBIN CABRERA CRUZ</u>	(Secretario)
<u>MSc. JHONY ALFONSO CHÁVEZ DELGADO</u>	(Vocal)

Acto seguido, se dio lectura a la Resolución correspondiente, y del mismo modo se informa a las Bachilleres que el acto de sustentación constará de dos partes: (I) exposición y sustentación de la tesis, (II) absolución de preguntas del jurado. Todo ello en un tiempo no mayor a 60 minutos ni menor a 30 minutos. A continuación, el presidente del Jurado instó a las Bachilleres:

BACH. ROXANA EDITH YUFRA GUTIERREZ

BACH. MAGALY EVA YUFRA GUTIERREZ

, a exponer la Tesis titulada:

ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE CAMPOS VECTORIALES EN LOS
SISTEMAS DINÁMICOS

para optar el Título Profesional de LICENCIADO EN MATEMÁTICA.

Siendo las 11:45 horas, las tesisistas concluyen su exposición, luego se procedió a la formulación de las preguntas por parte de los miembros del jurado calificador, terminado este proceso, se invitó al público presente a abandonar la sala de sustentación para que los miembros del jurado emitan su calificación de acuerdo a reglamento. El promedio de la calificación dio el siguiente resultado: APROBADAS POR UNANIMIDAD, con nota de DIECISIETE (17), de acuerdo al Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann.

Siendo las 12:15 horas, se dio por concluido el acto de sustentación de la tesis, firmando los miembros del jurado calificador, en señal de conformidad.

Dr. LUIS ANDRÉS AMAYA CEDRÓN

Presidente

Dr. HEBER MELBIN CABRERA CRUZ

Secretario

MSc. JHONY ALFONSO CHÁVEZ DELGADO

Vocal

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, **JHONY ALFONSO CHÁVEZ DELGADO**, en mi condición de Asesor acreditado por la Resolución de Facultad R.F. N° 10213-2022 -FACI-UN/JBG de la tesis titulada: **ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE CAMPOS VECTORIALES EN LOS SISTEMAS DINÁMICOS**, presentado por los Bachilleres **ROXANA EDITH YUFRA GUTIERREZ** y **MAGALY EVA YUFRA GUTIERREZ** para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, habiendo cumplido con lo establecido en el reglamento de originalidad y de similitud de trabajos de investigación y producción intelectual, considerando que según la revisión, evaluación y análisis realizado a través del software de similitud textual TURNITIN cuenta con el nivel de similitud cuyo porcentaje es **02%** por lo que **CERTIFICO LA SIMILARIDAD** de la tesis, la cual está de acuerdo al nivel **PERMITIDO**, para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio Institucional**.

Se emite el presente certificado con fines de continuar con los trámites respectivos para su obtención del título profesional.



Firma del Asesor

MSc. Jhony Alfonso Chávez Delgado

DNI: N°18124030



Firma del Tesista

Bach. Roxana Edith Yufra Gutierrez

DNI: N° 75008396



Firma del Tesista

Bach. Magaly Eva Yufra Gutierrez

DNI: N° 75008411

DEDICATORIA

Dedicamos esta tesis a nuestros seres queridos, y de manera especial a nuestros padres, por haber sido nuestro mayor respaldo desde el comienzo de nuestra vida académica. Su esfuerzo diario ha sido nuestra fuente de inspiración constante para avanzar en nuestra carrera. Les agradecemos profundamente por inculcarnos valores y enseñarnos la importancia del respeto hacia Dios.

Yufra Gutierrez, Magaly

Yufra Gutierrez, Roxana

AGRADECIMIENTO

Agradecemos de todo corazón, en primer lugar, al Señor de la sabiduría, nuestro Padre creador, quien ha sido nuestra luz y escudo para alcanzar esta meta. Su cuidado sostuvo nuestro caminar y puso entendimiento en nuestra mente, brindándonos la diligencia necesaria para culminar esta investigación.

A nuestros padres, los ángeles que Dios envió para iluminar nuestra vida y guiarnos con su amor incondicional. Asimismo, a nuestros hermanos, quienes han sido un apoyo en nuestra etapa.

De manera muy especial, expresamos nuestra profunda gratitud a nuestro asesor, el MSc. Jhony Alfonso Chávez Delgado, por su invaluable orientación y apoyo durante el desarrollo satisfactorio de esta investigación. Su compromiso y experiencia fueron claves para el éxito de esta investigación.

Finalmente, extendemos nuestro agradecimiento a nuestros Docentes, quienes con sus conocimientos y aptitudes nos inspiraron a profundizar en esta ciencia. Gracias también a nuestros amigos y seres queridos por acompañarnos con su presencia y aliento en esta etapa tan importante de nuestras vidas.

Yufra Gutierrez, Magaly

Yufra Gutierrez, Roxana

ÍNDICE DE CONTENIDO

DEDICATORIA.....	i
AGRADECIMIENTO	ii
RESUMEN	vii
ABSTRACT.....	viii
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
1.1. Descripción de la realidad problemática	1
1.2. Definición del problema.....	2
1.3. Objetivos de la investigación	2
1.4. Justificación e importancia de la investigación.....	3
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO	4
2.1. Antecedentes del problema	4
2.1.1. Antecedentes Internacionales	4
2.1.2. Antecedentes Nacionales.....	5
2.1.3. Antecedentes Locales	5
2.2. Bases Teóricas.....	6
2.2.1. Sistemas lineales homogéneos	6
2.2.2. Sumideros y Fuente	16
2.2.3. Sistemas dinámicos	21
2.2.4. Sumideros no lineales.....	23
2.2.5. Estabilidad	25
2.2.6. Punto de Equilibrio Hiperbólico.....	28
2.2.7. Conjuntos Límites	32
2.3. Marco Conceptual	33

2.3.1. Estabilidad asintótica de orbitas cerradas.....	33
2.3.2. Estabilidad y orbitas cerradas.....	36
2.3.3. Perturbación de un Campo Vectorial	38
2.3.4. Estabilidad estructural	39
CAPÍTULO III: MATERIALES Y MÉTODOS	42
3.1. Materiales.....	42
3.2. Métodos.....	42
3.2.1. Procedimiento del Método Deductivo	42
CAPÍTULO IV: RESULTADOS	44
4.1. Perturbación de un Campo Vectorial	44
4.2. Estabilidad estructural.....	48
4.3. Aplicaciones.....	55
4.3.1. Análisis del sistema de Van der Pol	55
4.3.2. Punto de equilibrio hiperbólico	61
4.3.3. Campo estructuralmente estable en un entorno	62
CAPÍTULO V: DISCUSIÓN.....	65
CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES.....	67
CAPITULO VII: RECOMENDACIONES	68
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	69

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Punto de silla	11
Figura 2.2 Foco.....	12
Figura 2.3 Nodo.....	12
Figura 2.4 Nodo impropio	13
Figura 2.5 Sumidero espiral	14
Figura 2.6 Centro	15
Figura 2.7 Trayectorias que apuntan al interior de la superficie	17
Figura 2.8 Diagrama de fase en el plano	19
Figura 2.9 Diagrama de fase tridimensional	20
Figura 2.10 Diagrama de fase tridimensional,.....	20
Figura 2.11 Estabilidad del punto crítico	26
Figura 2.12 Estabilidad asintótica del punto crítico	26
Figura 2.13 Inestabilidad del punto crítico	27
Figura 2.14 Homeomorfismo de órbitas	31
Figura 2.15 Órbita cerrada	32
Figura 2.16 Sistema estructuralmente estable	40
Figura 2.17 Sistema estructuralmente estable	41
Figura 2.18 Sistema estructuralmente inestable	41
Figura 2.19 Sistema estructuralmente estable	41
Figura 2.20. Sistema estructuralmente inestable	41
Figura 4.1. Diagrama de fase del sistema (4.1)	53
Figura 4.2. Diagrama de fase del sistema (4.2), con $\gamma = 1.15$	54

Figura 4.3. Diagrama de fase del sistema (4.2), con $\gamma = 1.2$	54
Figura 4.4. Diagrama de fase del sistema (4.2), con $\gamma = 1.25$	55
Figura 4.5. Diagrama de fase del sistema (4.3)	57
Figura 4.6. Diagrama de fase del sistema (4.4), con $\gamma = 1.2$	59
Figura 4.7. Diagrama de fase del sistema (4.4), con $\gamma = 1.5$	59
Figura 4.8. Diagrama de fase del sistema (4.4), con $\gamma = 1.8$	60
Figura 4.9. Diagrama de fase del sistema (4.4), con $\gamma = 2$	60

RESUMEN

Esta tesis tuvo como objetivo establecer la estabilidad de diagramas de fase persistentes bajo el efecto de perturbaciones del campo vectorial. Para ello, se emplearon métodos inductivos y deductivos para determinar las condiciones bajo las cuales una pequeña perturbación de las funciones involucradas en la definición de un sistema dinámico conlleva una variación arbitrariamente pequeña de su solución.

De ello se deduce que cualquier flujo cercano al flujo inicial es topológicamente equivalente a este; en otras palabras, para cualquier perturbación suficientemente pequeña, existe un homeomorfismo que transforma cada trayectoria del flujo inicial en una trayectoria correspondiente en el flujo perturbado. Un homeomorfismo es una función continua con una inversa continua, que establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de equilibrio y las órbitas cerradas de ambos flujos. En este contexto, se dice que el flujo inicial (o su campo vectorial) es estructuralmente estable.

La importancia de la estabilidad estructural de los campos vectoriales reside en que su estudio permite resolver problemas globales, ya que el diagrama de fases de un sistema dinámico persiste a pesar de pequeñas perturbaciones del campo vectorial. Esto resultó particularmente útil para la aplicación de la ecuación diferencial ordinaria no lineal de Van der Pol, cuyo atractor periódico admite una solución periódica, así como en modelos ecológicos de interacciones depredador-presa.

Palabras clave: Sistema dinámicos, estabilidad asintótica de orbitas cerradas, persistencia de orbitas cerradas, estabilidad estructural.

ABSTRACT

This thesis aimed to establish the stability of persistent phase diagrams under the effect of perturbations in the vector field. To this end, inductive and deductive methods were employed to determine the conditions under which a small perturbation of the functions involved in the definition of a dynamic system leads to an arbitrarily small variation in its solution.

It follows that any flow close to the initial flow is topologically equivalent to it; in other words, for any sufficiently small perturbation, there exists a homeomorphism that transforms each path of the initial flow into a corresponding path in the perturbed flow. A homeomorphism is a continuous function with a continuous inverse, establishing a one-to-one correspondence between the equilibrium points and the closed orbits of both flows. In this context, the initial flow (or its vector field) is said to be structurally stable.

The importance of the structural stability of vector fields lies in the fact that their study allows us to solve global problems, since the phase diagram of a dynamic system persists despite small perturbations of the vector field. This proved particularly useful for applying the nonlinear Van der Pol ordinary differential equation, whose periodic attractor admits a periodic solution, as well as in ecological models of predator-prey interactions.

Keywords: Dynamic systems, asymptotic stability of closed orbits, persistence of closed orbits, structural stability.

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN

1.1. Descripción de la realidad problemática

Aunque sus comienzos se remontan a la labor de Newton sobre la mecánica celeste y de Henri Poincaré sobre el estudio específico de las ecuaciones diferenciales, la teoría de sistemas dinámicos se considera un campo matemático relativamente reciente. Sin embargo, solo hace unos cuarenta años que se consolidó como un dominio formal y bien definido, gracias al notable trabajo de matemáticos e ingenieros como S. Smale, V. Arnold y Aleksandr Lyapunov, entre otros.

Para aclarar la idea de sistemas dinámicos, podemos decir, en términos genéricos, que se trata del análisis de sistemas deterministas. Estos sistemas describen situaciones que precisan de un parámetro específico, generalmente el tiempo, y cuya evolución se rige por leyes precisas. Así, al conocer el estado de un sistema en un momento dado, es posible restaurar su pasado y predecir su comportamiento futuro.

El estado de un sistema dinámico se describe mediante las coordenadas de un punto en el espacio físico. Con el tiempo, este punto sigue una trayectoria u órbita, y si finalmente regresa a su posición inicial, se dice que la órbita está cerrada. La existencia de soluciones periódicas depende de las pertenencias topológicas del sistema y de la explicación entre la posición de un punto en un instante dado y su posición después de un intervalo de tiempo determinado.

La pertenencia más significativa de un sistema dinámico es su comportamiento específico a largo plazo. Un atractor es un subconjunto del espacio de fases hacia cualquier punto al que se acerca tiende inexorablemente a moverse con el tiempo. Esto proyecta un problema de gran importancia práctica: determinar las condiciones bajo las cuales una variación arbitrariamente pequeña de las funciones que definen el sistema dinámico conlleva una variación igualmente pequeña de su solución.

En el marco de la estabilidad periódica, ciertas particularidades de un flujo pueden conservarse a pesar de pequeñas perturbaciones. Así, si un flujo posee un sumidero o un

atractor, cualquier flujo vecino conservara un sumidero vecino. Lo mismo ocurre con los atractores periódicos, que también se conservan a pesar de pequeñas perturbaciones.

Si variaciones arbitrariamente pequeñas en los campos involucradas en el sistema pueden alterar significativamente la solución, esta no puede describir el problema, ni siquiera de forma aproximada. En consecuencia, surge un problema de gran significancia práctica: resolver las condiciones bajo las cuales una mínima perturbación de los campos que definen el sistema dinámico produce una variación arbitrariamente pequeña de la solución.

1.2. Definición del problema

1.2.1. Problema General

¿En qué condiciones es posible establecer la estabilidad de diagramas de fases persistentes ante perturbaciones en el campo vectorial?

1.2.2. Problema Específico

- a) ¿Cuáles son las características que permiten la conservación de un flujo ante pequeñas perturbaciones del campo vectorial?
- b) ¿Bajo qué condiciones es posible establecer la estabilidad estructural de un campo vectorial en un disco unitario en un espacio euclidiano n -dimensional?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo General

Establecer la estabilidad de diagramas de fases persistente ante perturbaciones en el campo vectorial.

1.3.2. Objetivos Específicos

- a) Establecer características que permiten la conservación de un flujo ante pequeñas perturbaciones del campo vectorial.
- b) Establecer la estabilidad estructural de un campo vectorial en un disco unitario en un espacio euclidiano n -dimensión.

1.4. Justificación e importancia de la investigación

La tesis sobre la estabilidad estructural de campos vectoriales en sistemas dinámicos se justifica principalmente por su capacidad por abordar problemas globales donde el diagrama de fase de un sistema dinámico persiste a pesar de diminutas perturbaciones del campo vectorial. En particular, se obtienen condiciones generales para la estabilidad de los puntos críticos bajo dichas perturbaciones, así como resultados análogos para órbitas periódicas. Su importancia radica en su aplicación a diversos modelos, como la ecuación diferencial ordinaria no lineal de Van der Pol, que admite una solución periódica que constituye un atractor, y las ecuaciones que describen sistemas ecológicos depredador-presa. Actualmente, la investigación sobre estabilidad estructural sigue siendo un área importante de investigación en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes del problema

2.1.1. Antecedentes Internacionales

Pontryagin (1980) indica que los problemas más importantes en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales se han equilibrado en la observación de la naturaleza de los puntos críticos, los ciclos límite, el comportamiento global y asintótico de las trayectorias en la proximidad de estos puntos y ciclos, las teorías de bifurcación y los conceptos de estabilidad estructural. El concepto de estabilidad estructural fue introducido por Andronov y Pontryagin en 1937. Básicamente, un sistema dinámico puede considerarse estructuralmente estable cuando una diminuta variación en las ecuaciones induce una transformación de las trayectorias apenas perceptible de las anteriores, preservando así la misma estructura de puntos críticos y ciclos límite. Andronov y Pontryagin investigaron las condiciones para la estabilidad estructural en un sistema bidimensional.

Poincaré, Russell, Zermelo et Peano (1986) consideran que la noción de estabilidad es fundamental para la hipótesis moderna de ecuaciones diferenciales. Existen esencialmente dos tratamientos para estudiar la estabilidad. El primero consiste en resolver si un sistema dinámico dado, por ejemplo, mediante las soluciones de una ecuación diferencial, puede ser perturbado sin que sus soluciones o su comportamiento asintótico (a lo largo del tiempo) se alteren completamente. El segundo tratamiento, influenciado por Lyapunov, busca instaurar si, para una solución dada de una ecuación diferencial, las soluciones bastantes cercanas a esta solución fija se conservan cerca de ella a lo largo del tiempo. En particular, en presencia de una singularidad (una solución estacionaria), la cuestión es si las soluciones que surgen de puntos suficientemente cercanos a esta singularidad permanecen cerca de ella o, en el caso de estabilidad asintótica, si estas soluciones convergen a la solución estacionaria a lo largo del tiempo. La idea de Lyapunov fue encajar funciones que garantizaran esta estabilidad mediante condiciones en la derivada de la función a lo largo de las órbitas del campo vectorial que retrata la ecuación diferencial en cuestión.

Mendiola (2013) infiere en su trabajo que el análisis de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos requiere acometer la cuestión de sus resultados, sin aludir, no obstante, el artículo de G. Floquet publicado en 1883. Esta investigación es particularmente significativo para resolver las soluciones de una ecuación diferencial con coeficientes periódicos. Cabe remarcar que el artículo de Floquet se exponen resultados matemáticos más absolutos que una simple pormenorización de la estructura de las soluciones.

2.1.2. Antecedentes Nacionales

Sotomayor (1979) cita que el problema de análisis que más fascinó a Bendixson fue la investigación de las curvas integrales de ecuaciones diferenciales de primer orden; le intrigaba especialmente el complejo comportamiento de estas curvas en la vecindad de puntos singulares. El teorema de Poincaré-Bendixson, que instaure que una curva integral que no finaliza en un punto singular posee un ciclo límite, fue explicado inicialmente por Henri Poincaré, pero Bendixson ofreció una demostración más rigurosa, bajo conjeturas menos condicionadas, en 1901. En 1902, implantó la desigualdad de Bendixson, que restringen las raíces características de las matrices.

Mendoza (2013) expone concepciones iniciales, como los teoremas de existencia y unicidad de los resultados de ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas lineales bidimensionales, el teorema de Hartman-Grobman, ahora mencionado, y el teorema de Poincaré-Bendixson, que proporciona una clasificación de muchos conjuntos α -límite y ω -límite en el plano. A posteriori, analiza el teorema de reducción de Lyapunov-Schmidt, que permite derivar el teorema del valor medio clásico como deducción de una consecuencia general, y presenta una perturbación de sistemas que admiten un centro isócrono. La indagación concluye con aplicaciones, como la bifurcación de Hopf (o bifurcación cero) del sistema de Michelson y el número de órbitas periódicas para la ecuación diferencial de tercer orden de tipo

2.1.3. Antecedentes Locales

Chávez & et al. (2019) determinó un principio de estabilidad y estabilidad asintótica a través de los puntos críticos de un sistema autónomo no lineal, el cual se puede

conseguir mediante la pertenencia de una función de Lyapunov multivariable, que tiene el siguiente dominio: es una función de valor real de una variable vectorial en la que, en un punto crítico, es cero y tiene un mínimo local estricto, y además, la función multivariable decae a lo largo de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales autónomas no lineales.

2.2. Bases Teóricas

En nuestra investigación, definimos sistemas lineales homogéneos, sistemas lineales y equilibrio estable; sistemas dinámicos; sumideros no lineales; así como estabilidad y conjuntos límite. Las referencias bibliográficas citan algunas de las obras consultadas, como Elsgolts (1979), Kreider (1978), Krasnov (1978), La Salle (1973) y Liapunov (1949).

2.2.1. Sistemas lineales homogéneos

Definición 2.2.1.1. (Sistema lineal homogéneo)

Sea $\mathbb{M}$ un operador en $\mathbb{R}^n$. Consideremos el sistema de ecuaciones diferencial lineal de la forma:

$$x' = \mathbb{M}x + \mathbb{B}(x),$$

donde, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es una función vectorial del tiempo y $\mathbb{B}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación.

Se dice que el sistema es lineal homogéneo si $\mathbb{B}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, en caso contrario, se dice que no es homogéneo.

Observación 2.2.1.1.

Un sistema lineal homogéneo es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$x' = \mathbb{M}x, \quad \mathbb{M} \in L(\mathbb{R}^n) \tag{2.1}$$

donde, $x \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.2.1.2. (Conjunto de operadores)

El conjunto de operadores en $\mathbb{R}^n$, $L(\mathbb{R}^n)$, se identifica con el conjunto de matrices $n \times n$, $\mathbb{M}_n$.

Proposición 2.2.1.1. Sea $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ la aplicación que asocia el operador e^{tM} a cada $t \in \mathbb{R}$. Entonces, $\frac{d}{dt}e^{tM} = Me^{tM}$

Demostración

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{tM} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)M} - e^{tM}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{tM}e^{hM} - e^{tM}}{h} \\ &= e^{tM} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{hM} - I}{h} \right) \\ &= Me^{tM}\end{aligned}$$

Proposición 2.2.1.2. Sea M un operador en $\mathbb{R}^n$. Entonces, la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = Mx, \\ x(0) = K \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.2)$$

está dado por

$$x(t) = Ke^{tM}, \quad (2.3)$$

y no existen otras soluciones.

Demostración

Según la proposición 2.2.1.1, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Ke^{tM}) &= K \frac{d}{dt}(e^{tM}) \\ &= KM e^{tM} = M e^{tM} K.\end{aligned}$$

Dado que $e^{tM}K = K$, la función definida en (2.3) satisface la ecuación diferencial y la condición inicial de (2.2), por lo tanto es una solución.

Para demostrar la unicidad, supongamos que $x(t)$ es cualquiera solución de (2.2), y definamos la función

$$z(t) = e^{-tM}x(t).$$

Diferenciando, obtenemos:

$$\begin{aligned} z'(t) &= \left(\frac{d}{dt} e^{-tM} \right) x(t) + e^{-tM} x'(t) \\ &= -Me^{-tM}x(t) + e^{-tM}Nx(t) \\ &= e^{-tM}(-M + M)x(t) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $z(t)$ es una constante. Evaluando en $t = 0$, obtenemos $z(0) = z(0) = K$, por lo que $z(t) \equiv K$ para todo t . Esto implica que

$$x(t) = e^{tM}z(t) = e^{tM}K,$$

es decir, toda solución coincide con (2.3).

Definición 2.2.1.3. (Diagrama de fase)

El diagrama de fase es la representación gráfica de las trayectorias del sistema en el espacio de fase.

Observación 2.2.1.2.

1. El espacio de fase es un espacio geométrico donde cada punto representa un estado completo del sistema dinámico en un instante dado.
2. Para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

$$x' = Mx, \quad M \in L(\mathbb{R}^n),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, el espacio de fase es simplemente $\mathbb{R}^n$, y el diagrama de fases consiste en las curvas representadas en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.2.1.4. (Sumidero)

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

$$x' = Mx, \quad M \in L(\mathbb{R}^n).$$

El origen $0 \in \mathbb{R}^n$ se denomina sumidero si todos los valores propios de M tienen una parte real negativa.

Definición 2.2.1.5. (Punto silla)

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

$$x' = Mx, \quad M \in L(\mathbb{R}^n).$$

El origen $0 \in \mathbb{R}^n$ se denomina punto silla si M tiene al menos un valores propios con parte real positiva y al menos otro valor propio con parte real negativa.

Definición 2.2.1.6. (Fuente)

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

$$x' = Mx, \quad M \in L(\mathbb{R}^n).$$

El origen $0 \in \mathbb{R}^n$ se denomina fuente si todos los valores propios de N tienen parte real positiva.

Definición 2.2.1.7. (Foco)

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

$$x' = Mx, \quad M \in L(\mathbb{R}^n).$$

El origen $0 \in \mathbb{R}^n$ se denomina foco si todos los valores propios de M tienen parte real negativa, pero sus valores propios son iguales.

Definición 2.2.1.8. (Nodo impropio)

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

$$x' = Mx, \quad M \in L(\mathbb{R}^n).$$

El origen $0 \in \mathbb{R}^n$ se denomina nodo impropio si todos los valores propios de M tienen parte real negativa, pero M no es diagonalizable.

Definición 2.2.1.9. (Centro)

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

$$x' = Mx, \quad M \in L(\mathbb{R}^n).$$

El origen $0 \in \mathbb{R}^n$ se denomina centro si todos los valores propios de M son imaginarios puros.

Ejemplo 2.2.1.1. Calculemos la solución general del sistema lineal homogéneo bidimensional:

$$\begin{cases} x_1' = cx_1, \\ x_2' = dx_1 + cx_2, \end{cases} \quad (2.4)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes.

Solución: En forma matricial, el sistema se escribirse:

$$x' = Mx; \quad \text{con} \quad M = \begin{bmatrix} c & 0 \\ d & c \end{bmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La solución general, con la condición inicial $x(0) = K = (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$, viene dada por:

$$x(t) = e^{tM}K.$$

Como la matriz M es triangular, su exponencial matricial se puede calcular explícitamente de la siguiente manera:

$$e^{tM} = e^{tc} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ td & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la solución se expresa de la siguiente manera:

$$x(t) = e^{tM}K = \begin{pmatrix} e^{tc}K_1 \\ e^{tc}(tdK_1 + K_2) \end{pmatrix}$$

En consecuencia, la solución del sistema (2.4) que satisface las condiciones iniciales

$$x_1(0) = K_1, \quad x_2(0) = K_2$$

es

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{tc}K_1 \\ x_2(t) = e^{tc}(tdK_1 + K_2) \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.1.2. Resuelva explícitamente cualquier sistema lineal homogéneo bidimensional de la forma $x' = Mx$, $M \in L(\mathbb{R}^2)$, sin buscar una solución explícita.

Solución: A partir de los valores propios de la matriz M , es posible obtener información cualitativa relevante sobre las soluciones del sistema. A continuación, analizamos los casos especiales más representativos.

Caso I. La matriz M tiene valores propios reales de signos opuestos.

En este caso, el origen es un punto silla (o puerto). Mediante un cambio apropiado de coordenadas, $x = Qz$, la ecuación diferencial se transforma en

$$z' = Nz,$$

donde

$$\mathbb{N} = \mathbb{Q}\mathbb{M}\mathbb{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2.$$

En el plano (z_1, z_2) , el diagrama de fases tiene el aspecto mostrado en la Figura 2.1.

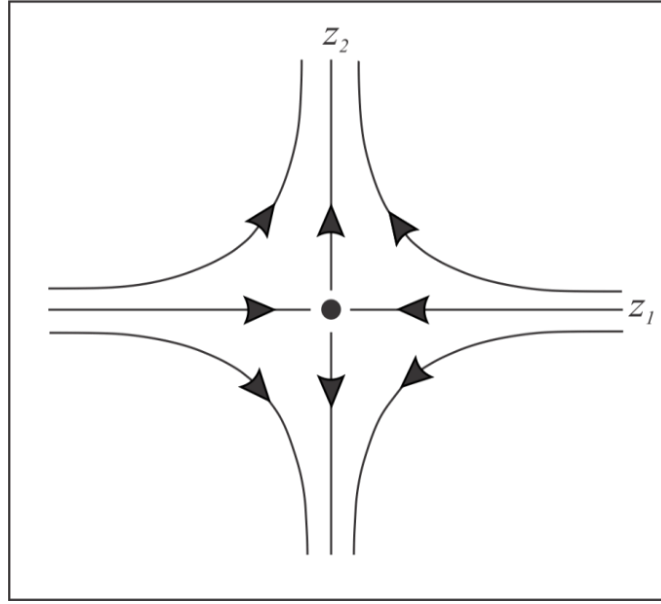


Figura 2.1. Punto de silla: $\mathbb{N} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Fuente: Hirsh (2013)

Caso II. Todos los valores propios de la matriz $\mathbb{N}$ tienen parte real negativa.

En este caso, el origen se denomina sumidero. La característica fundamental de este tipo de punto es que las soluciones del sistema convergen al origen cuando $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \text{ para toda la solución } x(t).$$

Si la matriz $\mathbb{M}$ es diagonal, esta propiedad es obvia, ya que la solución tiene la forma:

$$z(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}; \quad \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

Si $\mathbb{N}$ es diagonalizable, existe una matriz invertible $\mathbb{Q} \in L(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$x(t) = \mathbb{Q}z(t),$$

y las soluciones conservan la misma forma funcional en las nuevas coordenadas. Dado que $z(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, se deduce que $x(t) \rightarrow 0$.

El diagrama de fase para estos subcasos es el siguiente:

Si los valores propios son reales e iguales, el origen es un foco y el diagrama de fase se asemeja a la Figura 2.2.

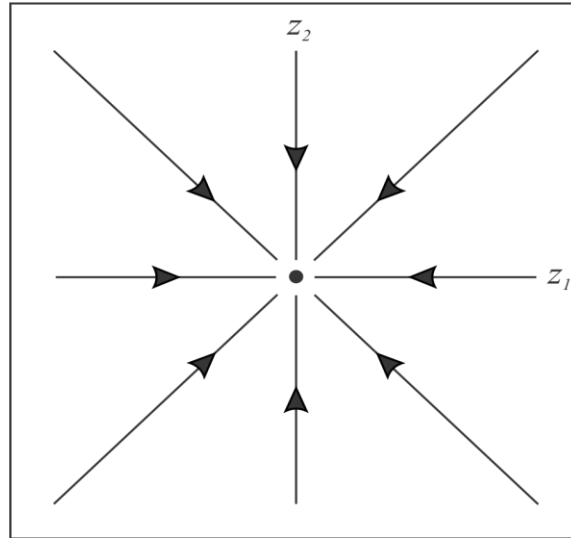


Figura 2.2. Foco: $\mathbb{N} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 < 0$.

Fuente: Hirsh (2013)

Si los valores propios son reales y diferentes, el origen es un nodo y el diagrama de fase se asemeja a la Figura 2.3.

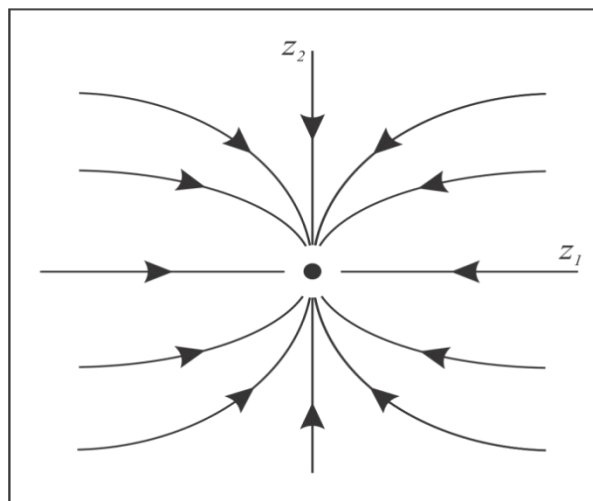


Figura 2.3. Nodo: $\mathbb{N} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

Fuente: Hirsh (2013)

Si los valores propios son negativos, pero M no es diagonalizable, existe un cambio de coordenadas $x = Qz$ tal que el sistema se convierte en:

$$z' = Nz, \text{ con}$$

$$N = Q^{-1}MQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 < 0.$$

Las soluciones del sistema, en coordenadas y , son:

$$\begin{cases} z_1(t) = K_1 e^{t\lambda_1} \\ z_2(t) = K_2 e^{t\lambda_1} + K_1 t e^{t\lambda_1} \end{cases}$$

que también tienden a cero cuando $t \rightarrow \infty$. El diagrama de fase correspondiente se muestra en la Figura 2.4, que ilustra un nodo impropio.

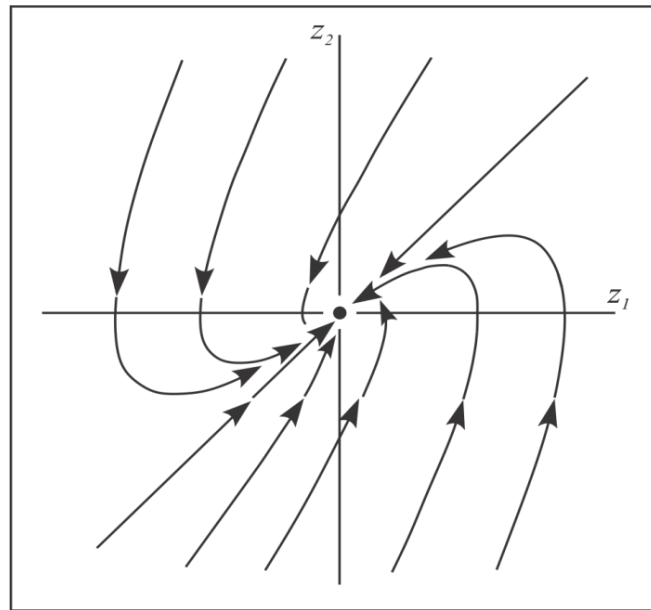


Figura 2.4. Nodo impropio: $N = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 < 0$.

Fuente: Hirsh (2013)

Si los valores propios son $a + ib$, con $a < 0$, podemos cambiar las coordenadas para obtener el sistema equivalente

$$z' = Nz, \quad N = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Mediante la exponencial de los operadores, tenemos:

$$e^{tN} = e^{ta} \begin{bmatrix} \cos tb & -\sin tb \\ \sin tb & \cos tb \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución general en las coordenadas y es:

$$z(t) = \begin{pmatrix} e^{ta}(K_1 \cos tb - K_2 \sin tb) \\ e^{ta}(K_2 \cos tb + K_1 \sin tb) \end{pmatrix}$$

Como $|\cos tb| \leq 1$ y $|\sin tb| \leq 1$ y $a < 0$, deducimos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

El comportamiento del sistema en el plano de fase depende del signo de b :

Si $b > 0$, las trayectorias forman espirales que convergen hacia el origen en sentido antihorario, como se ilustra en la Figura 2.5.

Si $b < 0$, las espirales convergen en sentido horario.

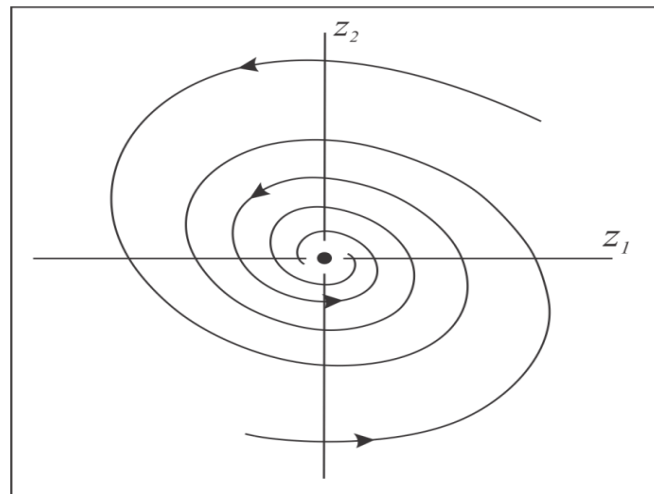


Figura 2.5. Sumidero espiral: $N = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $b > 0 > a$.

Fuente: Hirsh (2013)

Caso III. Todos los valores propios de la matriz M tienen parte real positiva.

En este caso, denominado caso fuente, el origen es un punto de equilibrio inestable. Las soluciones del sistema divergen cuando $t \rightarrow \infty$, mientras que convergen al origen cuando $t \rightarrow -\infty$; en otras palabras,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = 0$$

Los diagramas de fase correspondientes son análogos a los de las Figuras 2.2 a 2.5, pero con las flechas apuntando en dirección opuesta, lo que indica la dirección de alejamiento.

Caso IV. Los valores propios de la matriz $\mathbb{M}$ son imaginarios puros.

En este caso, decimos que existe un centro, caracterizado por el hecho de que todas las soluciones son periódicas y tienen el mismo período. Para verificar esto, cambiamos las coordenadas para obtener la ecuación equivalente.

$$z' = \mathbb{N}z,$$

$$\mathbb{N} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que

$$e^{t\mathbb{N}} = e^{tb} \begin{bmatrix} \cos tb & -\sin tb \\ \sin tb & \cos tb \end{bmatrix}$$

Por tanto, si $z(t)$ es cualquier solución, entonces:

$$z\left(t + \frac{2\pi}{b}\right) = z(t)$$

El diagrama de fase, en coordenadas y , consiste en círculos concéntricos. En coordenadas x , las orbitas pueden ser elipses, como en la Figura 2.6. Si $b < 0$, las flechas apuntan en sentido horario.

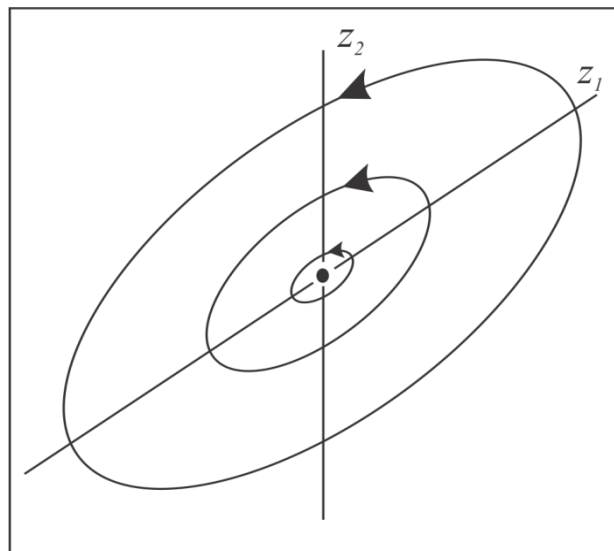


Figura 2.6. Centro: $\mathbb{N} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $b > 0$

Fuente: Hirsh (2013)

Definición 2.2.1.10. (Flujo lineal)

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

$$x' = Mx, \quad x(0) = x_0,$$

donde $M \in L(\mathbb{R}^n)$ es una matriz constante, el flujo del sistema es la función:

$$\varphi_t(x_0) = e^{tM}x_0.$$

Observación 2.2.1.4.

a) El flujo puede visualizarse como puntos de $\mathbb{R}^n$ que se mueven simultáneamente a lo largo de las curvas solución del sistema. La posición de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ en el instante t se denota :

$$\varphi_t(x) = e^{tM}x.$$

b) El conjunto de aplicaciones $\{\varphi_t\}$ se denomina flujo asociado a la ecuación lineal homogénea $x' = Mx$.

2.2.2. Sumideros y Fuente**Definición 2.2.2.1. (Contracción)**

Decimos que el flujo lineal e^{tM} es una contracción si todos los valores propios de M tienen parte real negativa, es decir, existe $\lambda > 0$ tal que $\|e^{tM}\| \leq e^{-\lambda t}$ para todo $t \geq 0$.

Proposición 2.2.2.1. (Aproximación exponencial al sumidero)

Sea M un operador lineal en un espacio vectorial E . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) El origen es un sumidero para el sistema lineal homogéneo $x' = Mx$,
- (b) Para cualquier norma en E , existen constantes $k > 0$ y $b > 0$ tales que:

$$\|e^{tM}x\| \leq ke^{-tb}\|x\|$$

para todo $t \geq 0, x \in E$.

- (c) Existe una constante $b > 0$ y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{E}$ tal que la norma asociada a la base satisface:

$$\|e^{tM}x\|_{\mathcal{B}} \leq e^{-tb}\|x\|_{\mathcal{B}}$$

para todo $t \geq 0$, $x \in \mathbb{E}$.

Ejemplo 2.2.2.1. Supongamos que $0 \in \mathbb{R}^n$ es un sumidero para el sistema lineal homogéneo $x' = Mx$. Consideremos las superficies esféricas

$$S_a = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| = a, \quad a > 0\}$$

donde $\|x\|$ denota la norma de la derivada de un producto interior como la proposición. Dado que, para esta norma, la derivada de $\|x\|$ a lo largo de las trayectorias es negativa, todas las soluciones apuntan al interior de la superficie S_a , como se ilustra en la Figura 2.7.

Observación 2.2.2.1.

El flujo lineal e^{tM} que tiene el carácter absolutamente opuesto a una contracción es una expansión.

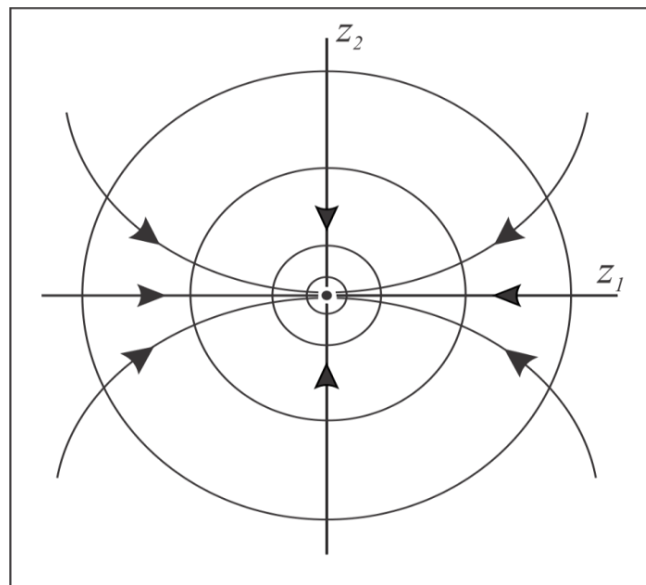


Figura 2.7. Trayectorias que apuntan al interior de la superficie

Fuente: Hirsh (2013)

Proposición 2.2.2.2. (Base con producto interno y norma)

Sea M un operador lineal en un espacio vectorial E , y supongamos que todos los valores propios λ de M satisfacen

$$\alpha < \operatorname{Re}(\lambda) < \beta.$$

Entonces, existe una base de E con un producto interno y una norma tal que, para todo $x \in E$, tenemos:

$$\alpha \|x\|^2 < \langle Mx, x \rangle < \beta \|x\|^2$$

Proposición 2.2.2.3. (Alejamiento exponencial de una fuente)

Sea $L(E)$ el conjunto de operadores de $E = \mathbb{R}^n$. Entonces, si $M \in L(E)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) El origen es una fuente para el sistema lineal homogéneo $x' = Mx$;
- (b) Para cualquier norma de E , existen constantes $L > 0$, $a > 0$ tales que

$$\|e^{tM}x\| \geq Le^{ta}\|x\|$$

para todo $t \geq 0, x \in E$.

- (c) Existe una constante $a > 0$ y una base $\mathcal{B}$ de E tal que la norma asociada a la base satisface

$$\|e^{tM}x\|_{\mathcal{B}} \geq e^{ta}\|x\|_{\mathcal{B}}$$

para todo $t \geq 0, x \in E$.

Definición 2.2.2.3. (Flujo hiperbólico)

El flujo lineal e^{tM} asociado al sistema lineal homogéneo

$$x'(t) = Mx(t),$$

se dice que es hiperbólico si todos los valores propios de M tienen una parte real distinta de cero; es decir $\operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0$ para todo valor propio λ_i de M .

Observación 2.2.2.2.

Tras contracciones y expansiones, los flujos lineales hiperbólicos presentan los diagramas de fase más simples. Su importancia radica en que casi todos los flujos lineales son hiperbólicos.

Proposición 2.2.2.4. (Suma directa de un espacio vectorial)

Sea $M \in L(E)$ un operador lineal tal que el flujo e^{Mt} es hiperbólico. Entonces, el espacio vectorial E admite una descomposición en suma directa

$$E = E^s \oplus E^u,$$

invariante bajo M , tal que el flujo inducido en E^s es una contracción y el flujo inducido en E^u es una expansión. Esta descomposición es única.

Observación 2.2.2.3.

- 1) Los subespacios E^s y E^u se denominan subespacios estable e inestable del flujo hiperbólico e^{Mt} , respectivamente.
- 2) Si ambos subespacios E^s y E^u son distintos de cero, entonces, en el caso bidimensional, el diagrama de fase tendrá la apariencia en la Figura 2.8.

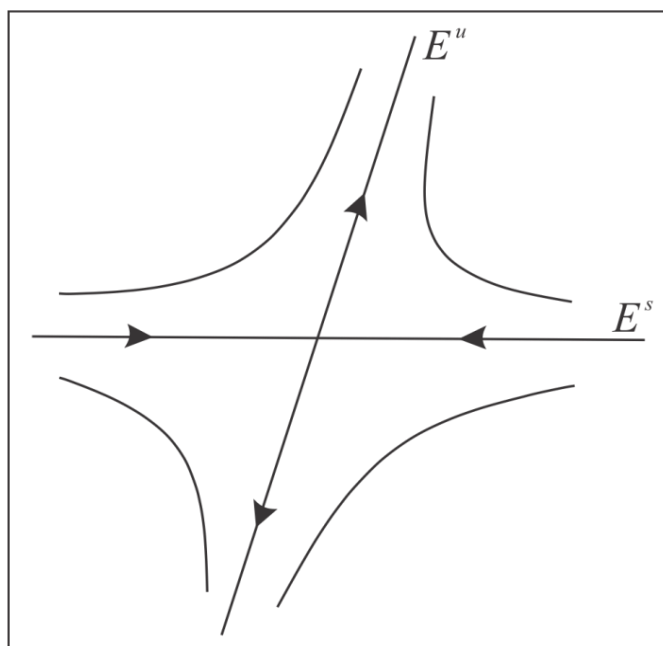


Figura 2.8. Diagrama de fase en el plano E^s y E^u

Fuente: Hirsh (2013)

- 3) Si ambos subespacios E^s y E^u son distintos de cero, entonces, en el caso tridimensional, el diagrama de fase se asemejaría a la Figura 2.9.

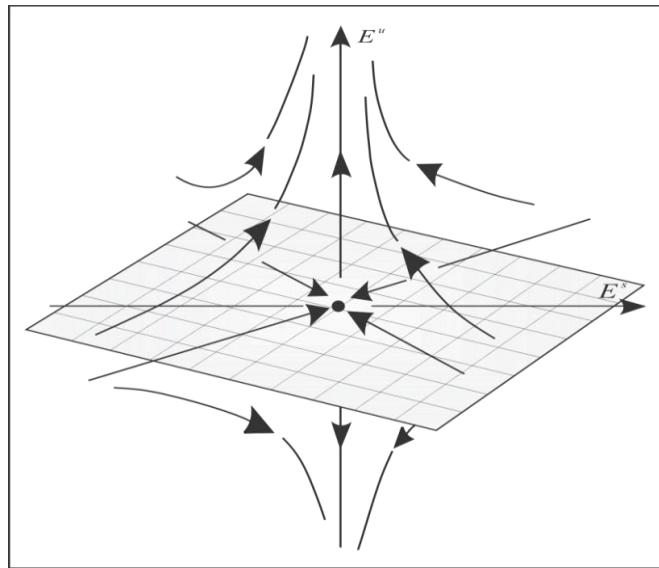


Figura 2.9. Diagrama de fase tridimensional E^s y E^u

Fuente: Hirsh (2013)

4) Si los valores propios del operador $M|_{E^u}$ tienen una parte imaginaria distinta de cero, entonces las trayectorias del flujo e^{Mt} en el subespacio E^u se desviarán en espiral hacia el origen. En el caso tridimensional, el diagrama de fase se asemejaría a la Figura 2.10.

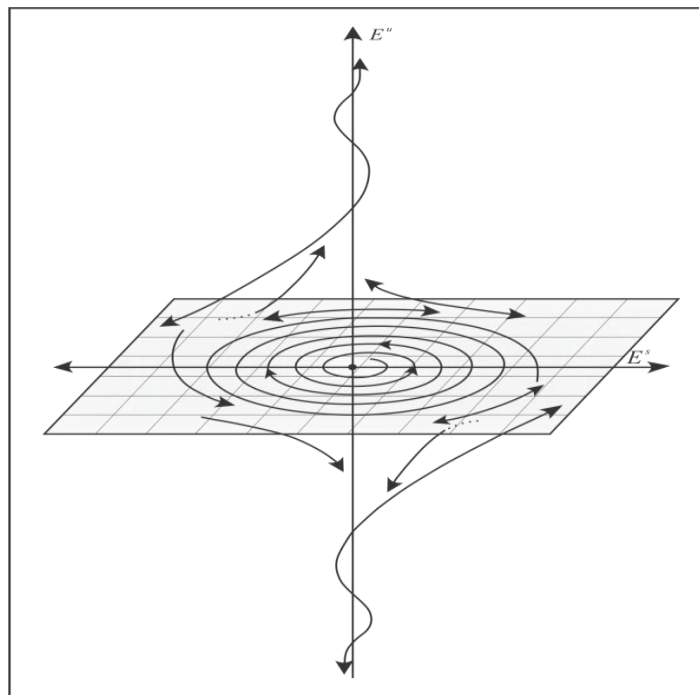


Figura 2.10. Diagrama de fase tridimensional $M|_{E^s}$

Fuente: Hirsh (2013)

2.2.3. Sistemas dinámicos

Sea $\mathbb{F}$ un espacio euclidiano o un subconjunto abierto de un espacio. Un sistema dinámico en $\mathbb{F}$ describe la evolución temporal de los puntos de $\mathbb{F}$. En otras palabras, a cada punto inicial $x \in \mathbb{F}$ se le asocia su posición después una unidad de tiempo después, dos unidades después, y así sucesivamente. Denotamos estas posiciones sucesivas $x_1, x_2, \dots$, donde x_0 representa la posición del punto en el instante inicial $t = 0$, y x_{-1} su posición una unidad de tiempo antes.

Si esta evolución se extiende a todos los tiempos reales $t \in \mathbb{R}$, obtenemos una trayectoria x_t que describe la posición del punto en cada instante. Esta trayectoria puede interpretarse como una aplicación $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}$, donde cada $t \in \mathbb{R}$ está asociado a la posición $x_t \in \mathbb{F}$. Esta función define una curva en $\mathbb{F}$ que representa la evolución completa del sistema: la historia del punto x a lo largo del tiempo, desde $t = -\infty$ hasta $t = +\infty$.

Definición 2.2.3.1. (Sistema dinámico)

Un sistema dinámico es una aplicación C^1 $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ de clase C^1 , donde $\mathbb{F}$ es un conjunto abierto de un espacio euclidiano, tal que, denotando $\varphi(t, x) = \varphi_t(x)$, la aplicación $\varphi_t: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ satisface:

- 1) $\varphi_0: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ es la identidad;
- 2) La composición $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s} \forall t, s \in \mathbb{R}$.

Observación 2.2.3.1.

Nótese que, por definición, la aplicación $\varphi_t: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ es de clase C^1 para cada t , y que tiene una inversa φ_{-t} es de clase C^1 (esto ocurre al tomar $s = -t$ en la condición (2) de la definición).

Ejemplo 2.2.3.1.

Sea M un operador lineal en un espacio vectorial E ; y sea $F = E$. Definimos la aplicación $\varphi: \mathbb{R} \times F \rightarrow F$, $\varphi(t, x) = e^{tM}$. Claramente, $\varphi_0 = e^0 = I$, y como

$$\varphi_t \circ \varphi_s = e^{tM} e^{sM} = e^{(t+s)M} = \varphi_{t+s},$$

hemos definido un sistema dinámico sobre E .

Ejemplo 2.2.3.2.

El sistema dinámico está asociado a la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = Mx \text{ en } E.$$

De forma más general, un sistema dinámico φ_t definido en un conjunto abierto $F \subset E$ induce un campo vectorial $X: F \rightarrow E$, es decir, una ecuación diferencial en F .

Dado φ_t , X se define por:

$$X(x) = \frac{d}{dt} \varphi_t(x)|_{t=0}. \quad (2.6)$$

Entonces, para todo $x \in F$, el vector $F(x)$ puede considerarse como el vector tangente a la curva $\varphi_t(x)$ en $t = 0$. En consecuencia, todo sistema dinámico induce una ecuación diferencial.

Definición 2.2.3.2. (Sistema de ecuaciones autónomas)

Si $\varphi_t: F \rightarrow F$ es un sistema dinámico, donde F es un subconjunto abierto de un espacio euclidiano y $x \in F$, sea $x(t) = \varphi_t(x)$ y supongamos $X: F \rightarrow E$ se define como en (2.6). Entonces (2.6) es un sistema de ecuaciones autónomas

$$x' = X(x) \quad (2.7)$$

Observación 2.2.3.2.

- 1) Sea $x(t)$ ó $\varphi_t(x)$ la curva solución que satisface la condición inicial $x(0) = x$.
- 2) Existe un proceso inverso al anterior: dada una ecuación diferencial, la asociamos con un objeto que sería un sistema dinámico si estuviera definido para todo t .

Definición 2.2.3.3. (Flujo de una ecuación diferencial)

Consideremos la ecuación diferencial:

$$x' = X(x), \quad (2.8)$$

donde $X: A \rightarrow B$ es una aplicación C^1 , con $A \subset B$ abierto. Sea ω un conjunto abierto en $\mathbb{R} \times A$ y sea $\varphi: \omega \rightarrow A$ una aplicación. Se denomina flujo φ a la aplicación asociada a la ecuación (2.8) y se escribe frecuentemente $\varphi(t, x) = \varphi_t(x)$.

2.2.4. Sumideros no lineales**Definición 2.2.4.1. (Sistema autónomo no lineal)**

Un sistema autónomo no lineal es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden cuyo campo vectorial es independiente del tiempo. Se representa de la siguiente manera:

$$x' = X(x), \quad (2.9)$$

donde, $X: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación C^1 definida en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 2.2.4.1. (Punto de equilibrio)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Se dice que un punto $\bar{x} \in A$ es un punto de equilibrio de la ecuación (2.9) si $X(\bar{x}) = 0$.

Definición 2.2.4.2. (Sumidero según $DX(\bar{x})$)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Un punto de equilibrio $\bar{x} \in A$, según la ecuación (2.9), se denomina sumidero si la matriz Jacobiana $DX(\bar{x})$ tiene todos sus valores propios con una parte real negativa.

Definición 2.2.4.3. (Ecuación de Lienard)

Una ecuación de Lienard es un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + g(x), \end{cases}$$

donde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada.

Observación 2.2.4.1.

Si $g(x) = (1 - x^2)y$, el sistema se puede escribir como

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + (1 - x^2)y, \end{cases}$$

que corresponde la ecuación de Van der Pol.

Proposición 2.2.4.1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $x \in A$ un sumidero de la ecuación (2.9). Supongamos que todo valor propio de $DX(\bar{x})$ tiene parte real menor que $-c$, $c > 0$. Entonces existe un entorno $A_1 \subset A$ de $\bar{x}$ tal que:

(a) $\varphi_t(x)$ esta definida y pertenece a A_1 para todo $x \in A_1$, $t > 0$.

(b) Existe una norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$|\varphi_t(x) - \bar{x}| \leq e^{-tc}|x - \bar{x}|$$

para todo $x \in A_1$, $t \geq 0$.

(c) Para cualquier norma en $\mathbb{R}^n$, existe una constante $c_1 > 0$ tal que

$$|\varphi_t(x) - \bar{x}| \leq c_1 e^{-tc}|x - \bar{x}|$$

para todo $x \in A_1$, $t \geq 0$.

En particular, $\varphi_t(x) \rightarrow \bar{x}$ cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $t \in A_1$.

Demostración.

Por conveniencia, suponemos que el punto de equilibrio es $\bar{x} = 0$ y que $M = DX(0)$ la matriz Jacobiana evaluada en dicho punto. Supongamos que existe un número $b > 0$ tal que, las partes reales de los valores propios de M son menores que $-b < -c$ para cierta constante $c > 0$.

La proposición 2.2.2.2 establece que $\mathbb{R}^n$ tiene una base $\mathcal{B}$ respecto de la cual la norma inducida y el producto interno satisfacen la siguiente propiedad:

$$\langle Mx, x \rangle \leq -b\|x\|^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Dado que $N = Df(0)$ y $f(0) = 0$, por definición de la derivada tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|X(x) - Mx\|}{\|x\|} = 0,$$

y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se deduce que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\langle X(x) - Mx, x \rangle}{\|x\|^2} = 0.$$

Por tanto, existe un $\delta > 0$ suficientemente pequeño, tal que si $\|x\| \leq \delta$, entonces $x \in A$ y

$$\langle X(x), x \rangle \leq -c \|x\|^2.$$

Definamos el conjunto $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \delta\}$. Sea $x(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, una curva solución contenida en A_1 , tal que $x(t) \neq 0$ para todo t . Entonces, tenemos:

$$\frac{d}{dt} \|x\| = \frac{1}{\|x\|} \langle x', x \rangle$$

Como $x' = X(x)$, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \|x\| \leq -c \|x\| \quad (2.10)$$

Este es el primer punto que demuestra que $\|x(t)\|$ es una función decreciente. Por lo tanto $\|x(t)\| \leq \delta$ y deducimos que $x(t) \in A_1$ para todo $t \in [0, t_0]$. Dado que A_1 es un conjunto compacto, concluimos que la función $x(t)$ está definida y permanece en A_1 para todo $t \geq 0$.

En segundo lugar, la descripción (2.10) implica que

$$\|x(t)\| \leq e^{-tc} \|x(0)\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Por lo tanto, se ha demostrado los puntos (a) y (b) y el punto (c) se deduce de la equivalencia de normas en $\mathbb{R}^n$.

2.2.5. Estabilidad

Supongamos que $\bar{x} \in A$ es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial

$$x' = X(x) \quad (2.11)$$

donde $X: A \rightarrow \mathbb{E}$ es una aplicación C^1 , definida en un conjunto abierto A y que toma valores en el espacio vectorial $\mathbb{E}$.

Definición 2.2.5.1. (Punto de equilibrio estable)

Sea $\bar{x} \in A$ un punto de equilibrio de la ecuación diferencial $x' = X(x)$. Decimos que $\bar{x}$ es estable sí, para todo entorno B de $\bar{x}$ en A , existe un entorno $B_1 \subset B$ de $\bar{x}$ tal que toda solución $x(t)$ con condición inicial $x(0) \in B_1$ está definida en todo $t > 0$ y permanece en B para todo $t > 0$ (Ver la Figura 2.11)

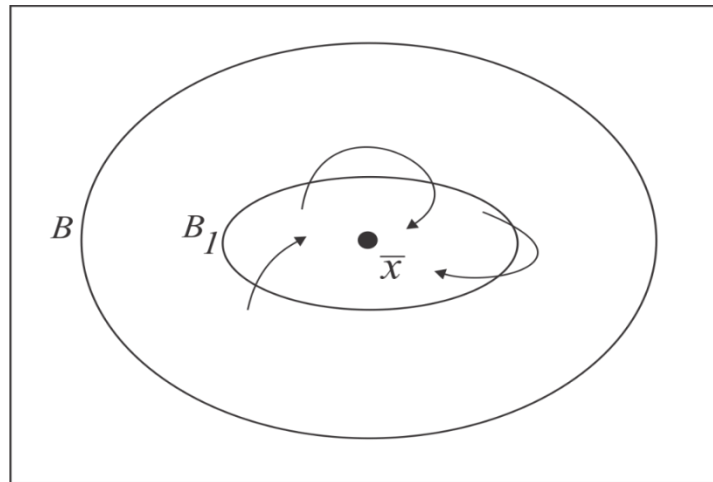


Figura 2.11. Estabilidad del punto crítico $\bar{x}$

Definición 2.2.5.2. (Punto de equilibrio asintóticamente estable)

Para cualquier entorno B de $\bar{x}$ en A , existe un entorno $B_1 \subset B$ de $\bar{x}$ tal que toda solución $x(t)$ con $x(0) \in B_1$ está definida para todo $t > 0$ y satisface $x(t) \in B$, $\forall t > 0$. Además, para tales soluciones, se cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x},$$

Por lo tanto, $\bar{x}$ es asintóticamente estable, como se puede observar en la Figura 2.12.

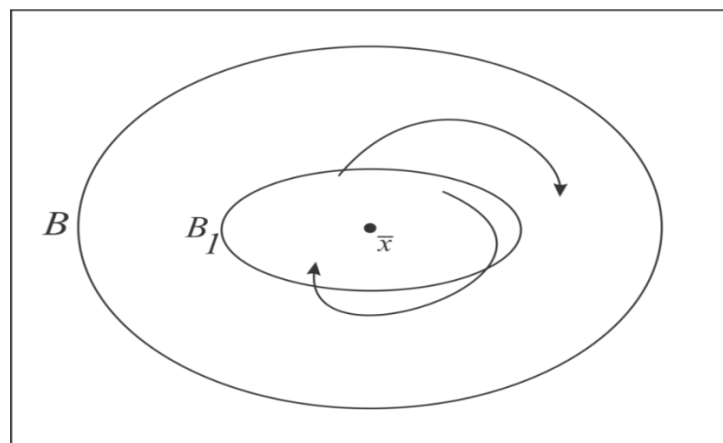


Figura 2.12. Estabilidad asintótica del punto crítico $\bar{x}$

Definición 2.2.5.3. (Punto de equilibrio inestable)

Sea $\bar{x} \in A$ un punto de equilibrio de ecuación diferencial $x' = X(x)$. Decimos que $\bar{x}$ es inestable si no es estable; es decir, si existe un entorno $B_1 \subset B$ de $\bar{x}$ tal que existe al menos una solución $x(t)$ que comienza en $x(0) \in B_1$ y no permanece enteramente en B , como se puede ver en la Figura 2.13.

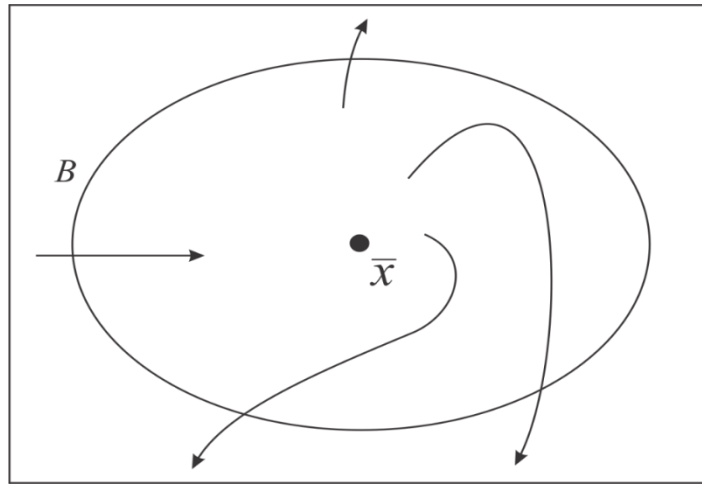


Figura 2.13. Inestabilidad del punto crítico $\bar{x}$

Definición 2.2.5.4. (Estabilidad de Lyapunov)

Sea $\bar{x} \in A$ un punto de equilibrio de una ecuación diferencial, $x' = X(x)$. Una función de Lyapunov para $\bar{x}$ es una función $V: B(\bar{x}) \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciable definida en una vecindad B de $\bar{x}$, que satisfaga las siguientes condiciones:

a) $V(\bar{x}) = 0$, $V(x) > 0$, $\forall x \neq \bar{x}$,

b) $V'(\bar{x}) \leq 0$ en $B(\bar{x})$.

Entonces $\bar{x}$ es estable. Además

c) $V'(\bar{x}) < 0$ en $B(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$.

Entonces $\bar{x}$ es asintóticamente estable.

Ejemplo 2.2.5.1. Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} x_1' = -2x_2 + 2x_2x_3 \\ x_2' = x_1 - x_1x_3 \\ x_3' = -x_3^3 \end{cases}$$

El campo asociado a este sistema viene dado por

$$X(x_1, x_2, x_3) = (-2x_2 + 2x_2x_3, x_1 - x_1x_3, -x_3^3).$$

Para calcular los puntos de equilibrio del sistema, resolvemos:

$$X(x_1, x_2, x_3) = 0: (-2x_2 + 2x_2x_3, x_1 - x_1x_3, -x_3^3) = (0, 0, 0)$$

Esto implica que:

$$-2x_2 + 2x_2x_3 = 0, x_1 - x_1x_3 = 0, -x_3^3 = 0$$

Por lo tanto, $\bar{x}_0 = (0, 0, 0)$ es el único punto de equilibrio de X y

$$X'(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, no podemos utilizar la dinámica hiperbólica. Consideremos la función $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$V(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2, \text{ donde } a_1, a_2, a_3 > 0 \text{ se determinará:}$$

$$V'(x_1, x_2, x_3) = \langle \nabla V(x_1, x_2, x_3), X(x_1, x_2, x_3) \rangle$$

$$= \langle (2a_1x_1, 2a_2x_2, 2a_3x_3), (-2x_2 + 2x_2x_3, x_1 - x_1x_3, -x_3^3) \rangle$$

$$= 2(a_2 - 2a_1)x_1x_2 - 2(a_2 - 2a_1)x_1x_2x_3 - 2a_3x_3^4$$

Si $a_3 = 1, a_1 = 1$ y $a_2 = 2$, entonces $V'(x_1, x_2, x_3) = -2x_3^4 \leq 0$ para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Por lo tanto, V es una función de Lyapunov para X en el punto $(0, 0, 0)$ y, por definición 2.2.5.4, el punto $(0, 0, 0)$ es asintóticamente estable

2.2.6. Punto de Equilibrio Hiperbólico

Definición 2.2.6.1. (Punto de equilibrio hiperbólico)

Sea $\bar{x}$ un punto de equilibrio de la ecuación diferencial no lineal:

$$x' = X(x) \tag{2.12}$$

Decimos que $\bar{x}$ es un punto de equilibrio hiperbólico, si todos los valores propios de la parte lineal del sistema $\bar{x}$, es decir, del Jacobiano $DX(\bar{x})$, tienen una parte real distinta de cero.

Observación 2.2.6.1.

Un punto de equilibrio hiperbólico siempre es inestable o asintóticamente estable; nunca es simplemente estable. En particular, un punto de silla (es decir, un punto de equilibrio donde la matriz Jacobiano tiene valores propios con parte real positiva y negativa) es inestable.

Definición 2.2.6.2. (Índice de estabilidad)

El índice de estabilidad del sistema

$$x' = X(x)$$

en un punto de equilibrio $\bar{x}$, se define como el número de valores propios de la parte lineal del sistema en $\bar{x}$ (es decir, del factor de estabilidad Jacobiano $DX(\bar{x})$) que tienen una parte real negativa.

Proposición 2.2.6.1.(Teorema de Hartman)

Consideremos el siguiente sistema autónomo no lineal:

$$x' = X(x)$$

donde $X: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial C^1 , definido en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, y sea $\bar{x} \in A$ un punto de equilibrio hiperbólico de X . Entonces existe un homeomorfismo $h_0: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido en el abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo $x \in A$, tenemos:

$$h_0(\varphi_t(x)) = e^{tM} h_0(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Demostración

Consideremos el sistema autónomo no lineal definido por:

$$x' = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $X: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suficientemente diferenciable. Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un punto de equilibrio, es decir, $X(\bar{x}) = 0$, y supongamos que el Jacobiano $M = DX(\bar{x})$ tiene todos sus valores propios con parte real distinto de cero. Esta condición implica que $\bar{x}$ es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema.

Entonces, existe un entorno abierto A de $\bar{x}$ y un homeomorfismo $h_0: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que el flujo del sistema no lineal en A es topológicamente equivalente al flujo del sistema linealizado:

$$h_0(\varphi_t(x)) = e^{tM} h_0(x) \quad \forall x \in A \text{ y } t \in \mathbb{R}$$

Considérese la perturbación $z = x - \bar{x}$. Al realizar esta transformación, el sistema inicial se convierte en:

$$z' = \frac{d}{dt}(x - \bar{x}) = \frac{dx}{dt} = X(x) = X(\bar{x} + z)$$

Si X es suficientemente diferenciable, podemos realizar la expansión en serie de Taylor de $X(x)$:

$$X(x) = X(\bar{x}) + DX(\bar{x})(x - \bar{x}) + O(\|x - \bar{x}\|^2)$$

Como $X(\bar{x}) = 0$, esto se reduce a:

$$X(x) = DX(\bar{x})z + O(\|z\|^2),$$

lo que nos da el sistema linealizado:

$$z' = \mathbb{M}z,$$

donde $\mathbb{M} = DX(\bar{x})$. Este es un sistema lineal cuyo comportamiento está completamente determinado por la matriz $\mathbb{M}$.

Dado que $\bar{x}$ es un punto de equilibrio hiperbólico, los valores propios de la matriz $\mathbb{M}$ tienen una parte real distinta de cero. Esto implica que el sistema lineal $z' = \mathbb{M}z$ admite soluciones de la forma:

$$z(t) = e^{t\mathbb{M}}z(0)$$

donde $e^{t\mathbb{M}}$ es la matriz exponencial de $\mathbb{M}$. Las soluciones del sistema linealizado son trayectorias que se alejan o se acercan exponencialmente a $\bar{x}$, dependiendo de la parte real de los valores propios de $\mathbb{M}$.

Analizando el comportamiento del sistema no lineal $x' = X(x)$ en el entorno del punto de equilibrio $\bar{x}$, y considerando que $X(x)$ puede aproximarse mediante $\mathbb{M}z$ en el entorno de $\bar{x}$, podemos concluir que el flujo del sistema no lineal en una vecindad de $\bar{x}$ es muy similar al del sistema lineal $z' = \mathbb{M}z$ para pequeños valores de t .

En otras palabras, si consideramos una solución $\varphi_t(x)$ del sistema no lineal con condiciones iniciales cercanas a $\bar{x}$, esta solución seguirá aproximadamente la misma trayectoria que una solución del sistema lineal $z' = \mathbb{M}z$ para tiempos cortos, de la forma:

$$\varphi_t(x) \approx \bar{x} + e^{t\mathbb{M}}(x - \bar{x}).$$

Sea $x(t)$ una solución del sistema no lineal con $x(0) = x \in A$. Definimos $h(x)$ como la solución $z(t)$, del sistema lineal $z' = \mathbb{M}z$, que satisface $z(0) = x - \bar{x}$.

Definimos $h_0(\varphi_t(x)) = e^{t\mathbb{M}}h_0(x) \forall t \in \mathbb{R}$. Esta aplicación es un homeomorfismo, es decir, es continuo y biyectivo. Su inversa también es continua, lo cual se puede verificar mediante la naturaleza de las soluciones del sistema no lineal y su equivalencia topológica con el sistema linealizado. Esto concluye la demostración del Teorema de Estabilidad de Hartman-Grobman.

Ejemplo 2.2.6.1. (Homeomorfismo)

Consideremos los sistemas:

$$(2.13) \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad (2.14) \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = -x_2 + x_1^3 \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos: Los diagramas de fase de la ecuación (2.13) vienen dados por $x_2 = \frac{c}{x_1}$ mientras que los de la ecuación (2.14) vienen dados por $x_2 = \frac{c}{x_1} + \frac{x_1^3}{4}$.

Observamos que

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \rightarrow h(x_1, x_2) = \left(x_1, \frac{c}{x_1} + \frac{x_1^3}{4} \right) = \left(x_1, x_2 + \frac{x_1^3}{4} \right),$$

es un homeomorfismo que transforma los diagramas de fase de (2.13) en los de (2.14).

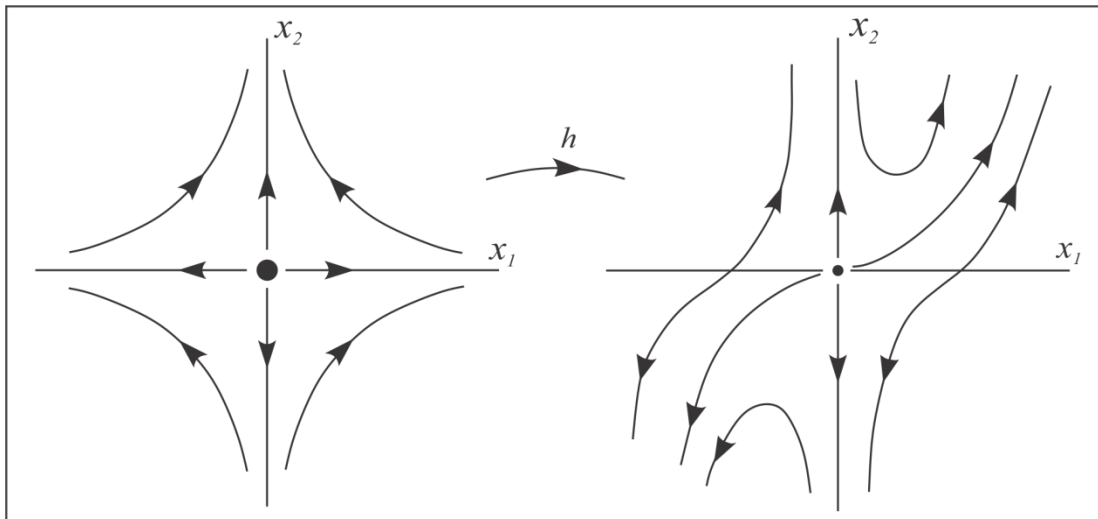


Figura 2.14. Homeomorfismo de órbitas

2.2.7. Conjuntos Límites

Consideremos un sistema dinámico en un conjunto abierto A de un espacio vectorial E , es decir el flujo φ_t definido por un campo vectorial C^1 , $X: A \rightarrow E$.

Definición 2.2.7.1. (β – límite)

Un punto $y \in A$ se denomina punto límite β de $x \in A$ si existe una sucesión $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{t_n}(x) = y.$$

El conjunto de todos los puntos límite β de y se denota $L_\beta(y)$.

Definición 2.2.7.2. (α – límite)

Un punto $y \in A$ se denomina punto límite α de $x \in A$ si existe una sucesión $t_n \rightarrow -\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi_{t_n}(x) = y.$$

El conjunto de todos los puntos límite α de y se denota $L_\alpha(y)$.

Definición 2.2.7.3. (Conjunto límite)

Un conjunto límite se define como un conjunto de la forma $L_\beta(y)$ o $L_\alpha(y)$.

Definición 2.2.7.4. (Órbita cerrada)

Una órbita cerrada γ es el conjunto de límites α y β de cada uno de sus puntos.

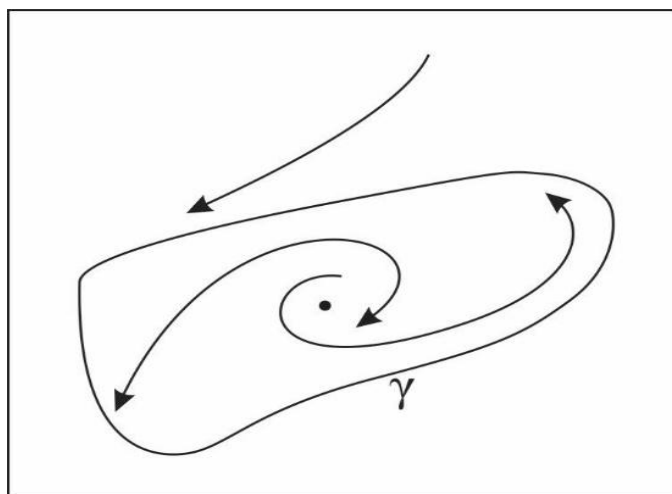


Figura 2.15. Órbita cerrada γ

Fuente: Hirsh (2013)

Ejemplo 2.2.7.1.

- 1) Si $\bar{x}$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable, entonces constituye el conjunto límite ω de cada punto de su cuenca.
- 2) Cada punto de equilibrio tiene su propio conjunto α y también su propio límite ω .

Observación 2.2.7.1.

Si $\bar{x}$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable de un sistema dinámico, entonces, por definición existe un entorno B de $\bar{x}$ tal que toda curva solución desde B tiende hacia $\bar{x}$. El conjunto de todas las curvas solución que tienden hacia $\bar{x}$ (cuando t tiende al infinito) se denomina cuenca de $\bar{x}$ y se denota por $C(\bar{x})$.

2.3. Marco Conceptual

Para el análisis de nuestras variables de estudio, introducimos definiciones y proposiciones relacionadas con la estabilidad asintótica de orbitas cerradas, la estabilidad y las orbitas cerradas. También, abordamos la perturbación de un campo vectorial y estabilidad estructural. Las referencias bibliográficas cita algunas de las obras consultados, como Hirsh (2013), Mello (1979), Peixoto (1978), Perko (1991) y Sotomayor (1979).

2.3.1. Estabilidad asintótica de orbitas cerradas

Sea $X: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial C^1 en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$; el flujo de la ecuación diferencial

$$x' = X(x) \quad (2.10)$$

se denota φ_t .

Definición 2.3.1.1. (Órbita asintóticamente estable)

Sea $\gamma \subset A$ una órbita cerrada de φ_t , es decir, una curva solución periódica no trivial del sistema. Decimos que γ es asintóticamente estable sí, para cada conjunto abierto $U_1 \subset A$ tal que $\gamma \subset U_1$, existe un conjunto abierto B_2 con $\gamma \subset B_2 \subset U_1$ tal que $\varphi_t(B_2) \subset U_1$ para todo $t > 0$ y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_t(x_1), \gamma) = 0.$$

Observación 2.3.1.1.

- 1) $d(x_1, \gamma)$ denota la distancia mínima entre un punto x_1 y una órbita γ .
- 2) La órbita cerrada del oscilador de Van der Pol es asintóticamente estable, es decir, todas las trayectorias cercanas convergen a la órbita periódica cuando t tiende al infinito.
- 3) Las órbitas cerradas del oscilador armónico no son asintóticamente estables porque una órbita cerrada asintóticamente estable debe estar necesariamente aislada de otras órbitas cerradas, es decir, no puede haber otras órbitas cerradas en las inmediaciones.

Definición 2.3.1.2. (Periodo asintótico)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y φ_t el flujo asociado al sistema. Decimos que un punto $x_1 \in A$ tiene periodo asintótico $\lambda \in \mathbb{R}$ si se cumple la siguiente condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_{\lambda+t}(x_1) - \varphi_t(x_1)| = 0$$

Proposición 2.3.1.1. Sea γ una órbita cerrada asintóticamente estable de periodo λ . Entonces, γ tiene una vecindad $B \subset A$ tal que cada punto de B tiene periodo asintótico λ .

Demostración.

Afirmación: $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_{\lambda+t}(x_1) - \varphi_t(x_1)| = 0$

Sea B el subconjunto abierto de B_2 de la definición de estabilidad asintótica, con $A = B_1$. Sea $x_1 \in B$ y fijemos $\varepsilon > 0$. Por continuidad del flujo φ_t , existe $\delta > 0$ con $0 < \delta \leq \varepsilon$, tal que si $z_1 \in \gamma$ y $|y_1 - z_1| < \delta$, entonces $|\varphi_\lambda(y_1) - \varphi_\lambda(z_1)| < \varepsilon$. Observamos que, al ser una órbita cerrada con periodo λ , tenemos:

$$\varphi_\lambda(z_1) = z_1, \quad \forall z_1 \in \gamma.$$

Como $d(\varphi_t(x_1), \gamma) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, existe $t_0 \geq 0$ tal que para todo $t \geq t_0$, existe un punto $z_{1_t} \in \gamma$ con $|\varphi_t(x_1) - z_{1_t}| < \delta$.

Entonces, para $t \geq t_0$, tenemos:

$$|\varphi_{\lambda+t}(x_1) - \varphi_t(x_1)| \leq |\varphi_\lambda(\varphi_t(x_1)) - \varphi_\lambda(z_{1_t})| + |\varphi_\lambda(z_{1_t}) - \varphi_t(x_1)|.$$

Con $\varphi_\lambda(z_1) = z_1$ obtenemos:

$$|\varphi_{\lambda+t}(x_1) - \varphi_t(x_1)| < \varepsilon + \delta \leq 2\varepsilon$$

Esto demuestra que la trayectoria de x_1 tiende hacia una periodicidad de período λ cuando $t \rightarrow \infty$; en otras palabras, x tiene un período asintótico λ .

Proposición 2.3.1.2. Sea γ una órbita cerrada de periodo λ del sistema dinámico

$$x' = X(x)$$

y sea, $p_1 \in \gamma$ un punto en esta órbita. Supongamos que $(n - 1)$ de los valores propios de la transformación lineal $D\varphi_\lambda(p_1): \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ son menores que 1 en valor absoluto. Entonces, la órbita cerrada γ es asintóticamente estable.

Demostración

Sea S un subconjunto abierto de un subespacio de dimensión $(n - 1)$, transversal al campo vectorial en $p_1 \in \gamma$. Siguiendo las trayectorias del sistema dinámico de un punto de S a otro, definimos una aplicación C^1 , $h_0: S_0 \rightarrow S$, donde S_0 es el conjunto abierto en S que contiene p_1 . Esta aplicación h_0 se denomina aplicación de Poincaré. En particular, $p_1 \in S_0$ es un punto fijo de h_0 , y si los valores propios del diferencial $Dh_0(p_1)$ tienen un módulo estrictamente menor que 1, entonces p_1 es un punto fijo asintóticamente estable de h_0 , lo que implica que la órbita cerrada γ es asintóticamente estable.

Observación 2.3.1.1.

1) Supongamos que φ_λ es diferenciable. Entonces, la aplicación

$$(t, x_1) \mapsto \varphi_t(x_1)$$

es de clase C^1 , es decir, $\varphi_t(x_1)$ depende continua y diferenciablemente de (t, x_1) .

2) La condición sobre $D\varphi_\lambda(p_1)$ es independiente del punto $p_1 \in \gamma$. De hecho, si $q \in \gamma$ es otro punto en la órbita, entonces existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_r(p_1) = q$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} D\varphi_\lambda(p_1) &= D(\varphi_{-\lambda} \circ \varphi_\lambda \circ \varphi_\lambda)(p_1) \\ &= D\varphi_{-\lambda}(p_1)^{-1} D\varphi_\lambda(q) D\varphi_\lambda(p_1), \end{aligned}$$

lo que demuestra que $D\varphi_\lambda(p_1)$ y $D\varphi_\lambda(q_1)$ son matrices semejantes y, por consiguiente, tienen los mismos valores propios.

3) Uno (1) siempre es un valor propio de $D\varphi_\lambda(p_1)$ ya que

$$D\varphi_\lambda(p_1)F(p_1) = F(p_1),$$

porque el campo vectorial F es tangente a su propio flujo.

2.3.2. Estabilidad y orbitas cerradas

Sea φ_t el flujo asociado a un campo vectorial C^1 , $X: A \rightarrow \mathbb{E}$ y sea $\gamma \subset A$ una órbita cerrada con periodo $\lambda > 0$, suponiendo que $0 \in \gamma$. Considérese una sección S en el punto 0. Alrededor del punto 0, definamos una vecindad $B \subset S$ tal que, para todo $x_1 \in B$, la trayectoria $\varphi_t(x_1)$ intersecta a S en un instante $\tau(x_1)$ cercano a λ . Esta propiedad nos permite definir una aplicación C^1 :

$$j: S_0 \rightarrow S, \quad j(x_1) = \varphi_{\tau(x_1)}(x_1),$$

donde $S_0 = S \cap B$ y $\tau: B \rightarrow S$ también es C^1 con $\tau(0) = \lambda$.

Observación 2.3.2.1.

La aplicación j se conoce como la aplicación de Poincaré asociada a la órbita γ . Esta aplicación define un sistema dinámico discreto en S_0 con un punto fijo en 0.

Proposición 2.3.2.1. Sea $j: S_0 \rightarrow S$ una aplicación de Poincaré en una órbita cerrada γ , como se construyó previamente. Supongamos que existe $x \in S_0$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} j^n(x_1) = 0. \text{ Entonces,}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_t(x_1), \gamma) = 0.$$

Demostración

Sea $x_n = j^n(x) \in S$. Como $j^{n+1}(x)$ está definido, tenemos $x_n \in S_0$. Definamos $\tau(x_n) = \lambda_n$. Cuando $x_n \rightarrow 0$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$ (el periodo de γ). Por lo tanto, existe una cota mínima superior r de $\{|\lambda_n|: n \geq 0\}$. Por la continuidad de flujo, cuando $n \rightarrow \infty$ tendremos

$$|\varphi_s(x_n) - \varphi_s(0)| \rightarrow 0$$

uniformemente en $s \in [0, r]$. Para todo $t > 0$, existe $s(t) \in [0, r]$ y un entero $n(t) \geq 0$ tal que:

$$\varphi_t(x) = \varphi_{s(t)}(x_{n(t)}),$$

y además $n(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, para $t > 0$,

$$d(\varphi_t(x), \gamma) \leq |\varphi_t(x) - \varphi_{s(t)}(0)| = |\varphi_{s(t)}(x_{n(t)}) - \varphi_{s(t)}(0)|$$

Debido a la convergencia uniforme de $\varphi_s(x_n) \rightarrow \varphi_s(0)$, el lado derecho tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_t(x), \gamma) = 0.$$

Observación 2.3.2.2.

Nótese que la aplicación de Poincaré puede no estar definida en todos los puntos de S .

Proposición 2.3.2.2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $\gamma \subset A$ una órbita cerrada. Si el origen es un sumidero de la aplicación j de Poincaré, entonces γ es asintóticamente estable.

Demostración

Sea B un entorno de γ en A . Necesitamos encontrar una vecindad B_1 de γ contenido en B tal que $\varphi_1(B_1) \subset B$ para todo $t \geq 0$ y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_t(x), \gamma) = 0 \text{ para todo } x \in B_1.$$

Sea $B_1 \subset B$ una vecindad de γ suficientemente pequeño tal que, si $x \in B_1$ y $|t| < 2\lambda$ (donde λ el periodo de γ), entonces $\varphi_t(x) \in B$.

Sea $H \subset \mathbb{E}$ el hiperplano que contiene a la sección local S . Como el origen es un sumidero, existe una norma $\|\cdot\|$ en H y una constante $\mu \in (0,1)$, así como una vecindad V de 0 en S_0 , tal que:

$$\|j(x)\| \leq \mu \|x\|, \quad \forall x \in V.$$

Sea $\xi > 0$ suficientemente pequeño para que el disco $B_\xi \subset H$, centrado en 0 y de radio ξ , este contenida en

$V \cap B_1$, tal que $\tau(x) < 2\lambda$ si $x \in B_\xi$.

Definir:

$$B_2 = \{\varphi_t(x) : x \in B_\xi, t \geq 0\}$$

Claramente, B_2 es una vecindad de γ y es positivamente invariante, ya que $\varphi_t(B_\xi)$.

Además, $B_1 \subset B$. De hecho, sea $y \in B_2$. Entonces $y = \varphi_t(x)$ para algún $x \in B_\xi$, $t \geq 0$.

Afirmación: Para (t, x) , podemos elegir tal que $0 \leq t \leq 2\lambda$.

De hecho, basta con tomar $j^n(x) = x_n$; entonces $x_n \in B_\xi$, para todo $n \geq 0$. Existe n tal que y se encuentre entre x_n y x_{n+1} a lo largo de la órbita de x ; es decir,

$$y = \varphi_s(x), 0 \leq s \leq \tau(x_n) < 2\lambda.$$

Dado que $x_n \in B_\xi \subset N$ y N se eligió de manera que $\varphi_s(x) \in B$ para $s < 2\lambda$, deducimos que $y \in B$. En consecuencia, $B_2 \subset B$

Para $y \in B_1$ escribimos $y = \varphi_t(x)$ con $x \in B_\xi$. Dado que $j^n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, de la Proposición 2.3.3.1 se deduce que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_t(x), \gamma) = 0$$

Por lo tanto, la órbita cerrada γ es asintóticamente estable.

2.3.3. Perturbación de un Campo Vectorial

Definición 2.3.3.1. (Perturbación de un campo vectorial)

Sea A un subconjunto abierto en un espacio vectorial $\mathbb{E}$, y sea $X: A \rightarrow \mathbb{E}$ un campo vectorial de clase C^1 . Una perturbación de X se define como otro campo vectorial $Y: A \rightarrow \mathbb{E}$, también de clase C^1 en A , que se considera "próximo a la norma F en C^1 ", es decir, existen constantes positivas $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ tales que

$$|X(x) - Y(x)| < \varepsilon_1 \text{ y } |DX(x) - DY(x)| < \varepsilon_2 ,$$

para todo $x \in A$.

Definición 2.3.3.2. (C^1 –norma $|H|_1$ de un campo vectorial)

Sea $U(A)$ el conjunto de campos vectoriales C^1 definidos en un abierto $A \subset \mathbb{E}$. Si el espacio vectorial $\mathbb{E}$ tiene la norma $\|\cdot\|$, definimos la norma C^1 de un campo vectorial $H \in U(A)$, denotado $|H|_1$, como sigue:

$$|H|_1 := \sup_{x \in A} \|H(x)\| + \sup_{x \in A} \|DH(x)\|$$

Observación 2.3.3.1.

Es posible que $|H|_1 = \infty$ si estos números no están acotados.

Definición 2.3.3.3. (Entorno de un campo vectorial)

Un entorno de un campo vectorial $X \in U(A)$ es un subconjunto $B_1 \subset U(A)$ que contiene un conjunto de la forma:

$$\{Y \in U(A): |Y - X|_1 < \varepsilon_1\}$$

para algún $\varepsilon_1 > 0$, donde $|\cdot|_1$ denota la norma C^1 en el espacio vectorial $\mathbb{E}$.

Observación 2.3.3.2

1) El conjunto $U(A)$ satisface las propiedades formales de un espacio vectorial para las operaciones habituales de adición y multiplicación escalar aplicadas a funciones vectoriales.

2) La norma C^1 satisface las siguientes propiedades formales de normas definidas en espacios vectoriales:

- a) $|H|_1 \geq 0$,
- b) $|H|_1 = 0$ si y sólo si $H = 0$,
- c) $|H + Y|_1 \leq |H|_1 + |Y|_1$,
incluso cuando $|H|_1$ o $|Y|_1$ sean infinitos.

2.3.4. Estabilidad estructural

Definición 2.3.4.1.(Estabilidad estructural)

Sea el disco (o bola) unidad en $\mathbb{R}^n$

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq 1\},$$

y su frontera definido por:

$$\partial B^n = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| = 1\}.$$

Considérense los campos vectoriales de clase C^1 , $X: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, definidos en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a B^n y que satisface la condición

$$\langle X(x), x \rangle < 0$$

para todo x de ∂B^n . Se dice que un campo X es estructuralmente estable en B^n si existe un entorno $N \subset U(A)$ tal que, para todo $Y: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ en N , los flujos generados por X y Y son topológicamente equivalentes en B^n .

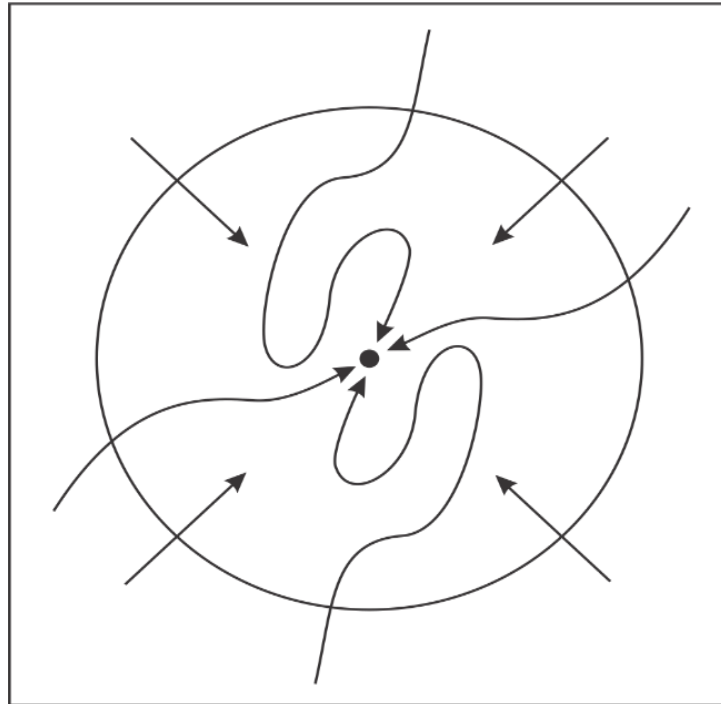


Figura 2.16. Sistema estructuralmente estable

Fuente: Hirsh (2013)

Definición 2.3.4.1. (Campos topológicamente equivalente)

Sean $X, Y: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos campos vectoriales C^1 , definidos en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $B^n \subset A$, y sea $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq 1\}$.

Se dice que los dos campos vectoriales X y Y son topológicamente equivalentes en B^n si existe un homeomorfismo $h_0: B^n \rightarrow B^n$ tal que, para todo $x \in B^n$, tenemos:

$$h_0(\{\varphi_t^X(x): t \geq 0\}) = \{\psi_t^Y(h_0(x)): t \geq 0\},$$

donde ψ_t y φ_t , denotan los flujos generados por los campos vectoriales X e Y .

Ejemplo 2.3.4.1. Las figuras ilustran dos sistemas estructuralmente estables (izquierda) y dos estructuralmente inestables (derecha). En estos últimos, una pequeña perturbación puede provocar un desplazamiento del equilibrio (o, en su caso, del ciclo límite) ubicado en la frontera de ω , ya sea hacia dentro o hacia fuera de este dominio, modificando así el número de conjuntos invariantes del sistema en ω .

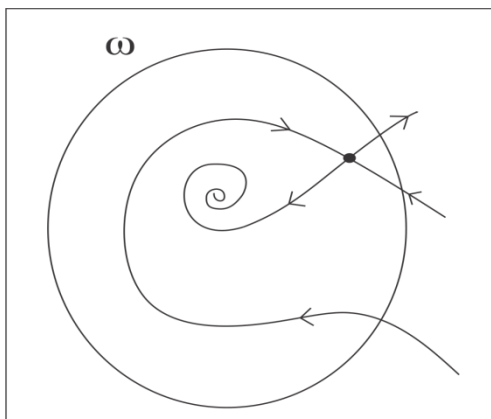


Figura 2.17. Estructuralmente Estable

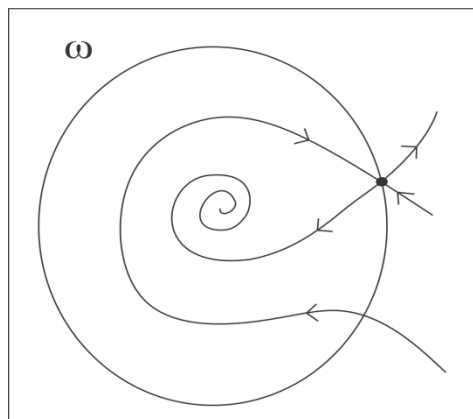


Figura 2.18. Estructuralmente inestable

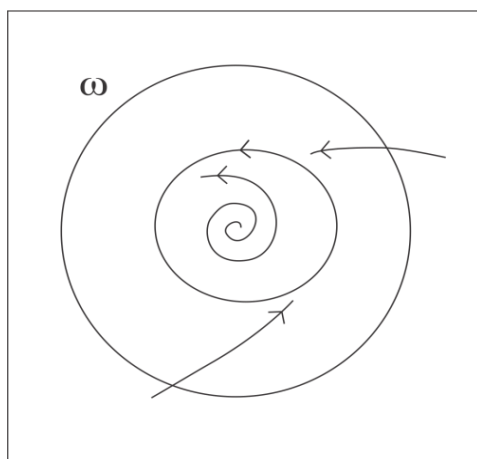


Figura 2.19. Estructuralmente Estable

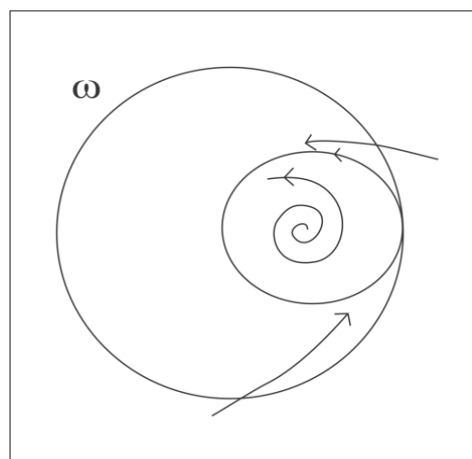


Figura 2.20. Estructuralmente Inestable

CAPÍTULO III: MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Materiales

La tesis sobre la Estabilidad Estructural de Campos Vectoriales en los Sistemas Dinámicos se enmarca en la investigación fundamental y busca generar nuevos conocimientos sobre sistemas gradientes, sistemas Hamiltonianos y sistemas simétricos. En trabajo se centra en los flujos de campos vectoriales topológicamente equivalentes en un disco unidad en $\mathbb{R}^n$.

3.2. Métodos

En esta tesis, se emplearon los métodos lógico inductivo y deductivo para analizar la estabilidad de diagramas de fase sometidos a perturbaciones de campo vectoriales. El método deductivo estableció las condiciones necesarias para la estabilidad estructural de un campo vectorial, mientras que el método inductivo se aplicó al estudio de la ecuación de Van der Pol mediante ejemplos específicos de estabilidad estructural. Además, los métodos de Pontryagin y Andronov para la estabilidad estructural sirvieron como modelos para validar y verificar la hipótesis.

3.2.1. Procedimiento del Método Deductivo

a) Revisión bibliográfica

Se examinaron minuciosamente libros, revistas especializadas y artículos científicos que, gracias a su fiabilidad, permitieron validar los conceptos clave y un conjunto de proposiciones sobre la existencia y unicidad de la solución en problemas de valores en frontera de ecuaciones diferenciales.

b) Inducción

Se ha ilustrado la estabilidad de los diagramas de fase ante perturbaciones de campos vectoriales. A partir de estos ejemplos, se han generalizado proposiciones relativas a la estabilidad estructural de los campos vectoriales en sistemas dinámicos.

c) Deducción

Se ha ilustrado la estabilidad de los diagramas de fase ante perturbaciones de campos vectoriales. A partir de estos ejemplos, se generalizaron proposiciones relativas a la estabilidad estructural de los campos vectoriales en sistemas dinámicos.

d) Analogía

Se han comparado las proposiciones relativas a la estabilidad de las soluciones periódicas en sistemas dinámicos con aquellas relacionadas con la estabilidad estructural de los campos vectoriales en dichos sistemas.

e) Generalización

la estabilidad estructural de un campo vectorial en sistemas dinámicos se ha generalizado, formulando teoremas, corolarios y proposiciones basados en las reglas de inferencia lógica y en las definiciones establecidas.

CAPÍTULO IV: RESULTADOS

4.1. Perturbación de un Campo Vectorial

Proposición 4.1.1. Sea H un espacio normado y $x_0 \in A$. Sea $v > \|DX(x_0)^{-1}\|$ y $A_1 \subset A$ un disco abierto centrada en x_0 , tal que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\|DX(y)^{-1}\| < v \quad (4.1)$$

y

$$\|DX(y) - DX(z)\| < 1/v \quad (4.2)$$

para todos los pares $y, z \in A_1$. Entonces, la restricción $X|_{A_1}$ es inyectiva.

Demostración:

Afirmación: la restricción $X|_{A_1}$ es inyectiva

Sean $y \in A_1$ y $u \in H$, con $u \neq 0$. Entonces:

$$u = DX(y)^{-1} (DX(y)u);$$

lo que implica

$$|u| \leq \|DX(y)^{-1}\| |DX(y)u|.$$

Por la cota (4.1), obtenemos:

$$|DX(y)(u)| > \frac{|u|}{v}, \quad (4.3)$$

Ahora, sea $z = y + u$ con $u \neq 0$, $y, z \in A_1$. Como A_1 es un disco abierta, el segmento $y + tu \in V$ para todo $t \in [0,1]$. Definimos la aplicación C^1 :

$$\phi : [0,1] \rightarrow H, \quad \phi(t) = X(y + tu).$$

Tenemos

$$\phi(0) = X(y), \quad \phi(1) = X(z).$$

y por la regla de la cadena,

$$\phi'(t) = DX(y + tu)u.$$

Por lo tanto

$$X(z) - X(y) = \int_0^1 DX(y + tu)u \, dt = \int_0^1 DX(y)u \, dt + \int_0^1 [DX(y + tu) - DX(y)]u \, dt$$

Tomando la norma y aplicando la desigualdad, obtenemos la desigualdad triangular

$$|X(z) - X(y)| \geq |DX(y)u| - \int_0^1 \|DX(y + tu) - DX(y)\| |u| \, dt$$

Utilizando las ecuaciones (4.3) y (4.2) podemos concluir que

$$|X(z) - X(y)| > \frac{|u|}{v} - \frac{|u|}{v} = 0$$

Por lo tanto, $X(y) \neq X(z)$. Como la elección arbitraria de $y, z \in A_1$ resulta en arbitrariedad ($y \neq z$), concluimos que la restricción $X|_{A_1}$ es inyectiva

Proposición 4.1.2. Sea $\mathbb{E}$ es un espacio vectorial normado cuya norma se deriva de un producto interior. Sea $A_1 \subset A$ un disco cerrado centro en $x_0 \in A$ y borde ∂A_1 , y sea $X: A \rightarrow \mathbb{E}$ una aplicación C^1 . Supóngase que $DX(y)$ es invertible para todo $y \in A_1$. Supóngase además

$$\min \{|X(y) - X(x_0)| : y \in \partial A_1\} > 2\delta > 0.$$

Entonces, si $|w - X(x_0)| < \delta$, se cumple que $w \in X(A_1)$.

Demostración

Afirmación: $|X(y) - w|$ no es mínimo si $y \in \partial A_1$.

Sea $h_0: A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $H(y) = \frac{1}{2} |X(y) - w|^2$

Como A_1 es compacto y h_0 es continuo, existe un $y_0 \in A_1$ tal que

$$h_0(y_0) = \min_{y \in A_1} h_0(y).$$

Para todo $y \in \partial A_1$, la hipótesis de separación resulta:

$$|X(y) - w| \geq |X(y) - X(x_0)| - |X(x_0) - w| > 2\delta - \delta = \delta.$$

Ahora, $|X(x_0) - w| < \delta$; por lo tanto

$$h_0(x_0) < h_0(y) \text{ para todo } y \in \partial A_1,$$

lo que implica que $y_0 \notin \partial A_1$. Por lo tanto, y_0 pertenece al interior de A_1 .

$$|X(y) - w| > \delta > |X(x_0) - w|,$$

lo que demuestra que $|X(y) - w|$ no es mínimo si $y \in \partial A_1$.

Afirmación: $w \in X(A_1)$

Como la norma se induce mediante un producto interno, la función $Y(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ es diferenciable, y $Y(x)z = \langle x, z \rangle$. Aplicando la regla de la cadena,

$$Dh_0(y)z = \langle X(y) - w, DX(y)z \rangle.$$

Como y_0 es un mínimo interior, $Dh_0(y_0) = 0$; es decir,

$$\langle X(y_0) - w, DX(y_0)z \rangle = 0 \text{ para todo } z \in \mathbb{E}.$$

Como $DX(y_0)$ es invertible, existe un $v \in \mathbb{E}$ tal que

$$DX(y_0)v = X(y_0) - w.$$

Tomando $z = v$ en la identidad anterior:

$$0 = \langle X(y_0) - w, X(y_0) - w \rangle = |X(y_0) - w|^2,$$

y, en consecuencia,

$$X(y_0) = w.$$

Hemos demostrado que w pertenece a la imagen de A_1 bajo X . Además, como y_0 es un interior de A_1 , obtenemos la inclusión

$$w \in X(A_1 - \partial A_1).$$

Por lo tanto, $w \in X(A_1)$

Proposición 4.1.3. Sea $X: A \rightarrow \mathbb{E}$ una aplicación C^1 , y supongamos que $x_0 \in A$ es tal que el operador $DX(x_0): \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ es invertible. Entonces, existe un entorno $N \subset U(A)$ de X y un conjunto abierto $A_1 \subset A$ que contiene a x_0 tal que, para cualquier función $X \in N$, $Y|_{A_1}$ es inyectiva y $X(x_0) \in Y(A_1)$.

Demostración

Equipamos $\mathbb{E}$ con una norma inducida por un producto interno; todas las normas en espacios dimensión finita son equivalentes.

El conjunto $GL(\mathbb{E}) = \{A \in L(\mathbb{E}): A \text{ es invertible}\}$ es abierto en $(L(\mathbb{E}), \|\cdot\|)$.

Por lo tanto, existe un $\alpha > 0$ tal que:

$$|A - DX(x_0)| < \alpha \Rightarrow A \in GL(\mathbb{E}) \quad (4.4)$$

Por continuidad de $x \mapsto DX(x)$, existe un entorno $N_1 \subset A$ con $x_0 \in N_1$ tal que:

$$\|DX(x) - DX(x_0)\| < \frac{\alpha}{2}, \quad x \in N_1$$

Sea $\mathfrak{N}_1 \subset U(A)$ un entorno de X tal que $g \in \mathfrak{N}_1$ y $x \in N_1$. Entonces

$$\|DX(x) - DX(x_0)\| < \frac{\alpha}{2}. \quad (4.5)$$

De las ecuaciones (4.4) y (4.5) se deduce que $DY(x) \in GL(\mathbb{E})$ para todo $g \in \mathfrak{N}_1$ y $x \in N_1$.

Sea $v > |DX(x_0)^{-1}|$. La aplicación $GL(\mathbb{E}) \rightarrow L(\mathbb{E})$, $A \mapsto A^{-1}$, es continua. Por lo tanto, existe una vecindad $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}_1$ de X y un abierto $N_2 \subset N_1$ con $x_0 \in N_2$ tale que, $Y \in \mathfrak{N}_3$ e $y \in N_3$,

$$|DY(y)^{-1}| > v. \quad (4.6)$$

Utilizando la continuidad de $(y, z) \mapsto DY(y) - DY(z)$, podemos encontrar vecindades menores, $\mathfrak{N}_3 \subset \mathfrak{N}_2$ de X y $N_3 \subset N_2$ de x , (con $x_0 \in N_3$) tales que si $Y \in \mathfrak{N}_3$; para todo $y, z \in N_3$, tenemos

$$|DY(y) - DY(z)| < \frac{1}{v} \quad (4.7)$$

Por (4.6) y (4.7), la proposición 4.1.1, garantiza que, para todo $Y \in \mathfrak{N}_3$ y todo subconjunto abierto y conexo $V \subset N_3$, la restricción $Y|_V$ es inyectiva.

Sea $V \subset N_3$ un disco abierto centrada en x_0 . Sea $V_1 \subset V$ el disco cerrado centrado en x_0 . La proposición 4.1.2 nos da un número $\delta > 0$ y un entorno $N \subset \mathfrak{N}_3$ de X tal que, para todo $Y \in N$

$$\min \{\|Y(y) - Y(x_0)\| : y \in \partial V_1\} > 2\delta > 0.$$

Esto implica que si $|w - Y(x_0)| < \delta$ y $Y \in N$, entonces existe $y \in V_1$ talque $Y(y)=w$; en otras palabras, $w \in Y(V_1) \subset Y(V)$.

Al establecer $A_1 := V$, se deduce que $Y|_{A_1}$ es inyectiva para todo $Y \in N$. De manera similar, tenemos $X(x_0) \in Y(A_1)$ para todo $Y \in N$.

Proposición 4.1.4. Sea $X: A \rightarrow \mathbb{E}$ un campo vectorial C^1 , y sea $\bar{x} \in A$ un punto de equilibrio del sistema $x' = X(x)$ tal que la matriz $DX(\bar{x})$ es invertible. Entonces, existe una vecindad $A_1 \subset A$ de $\bar{x}$ y una vecindad $N \subset U(A)$ de X tales que, para toda $Y \in N$ existe un único punto de equilibrio $\bar{y} \in A_1$ del sistema $y' = Y(y)$. Además, si $\mathbb{E}$ es un espacio normado, para todo $\varepsilon > 0$, N puede elegir tal que $\|\bar{y} - \bar{x}\| < \varepsilon$.

Demostración

Al establecer $x_0 = \bar{x}$ y $X(\bar{x}) = 0$, se deduce que existe único $\bar{y} \in U$ tal que

$Y(\bar{y}) = 0$. Para garantizar que $\|\bar{y} - \bar{x}\| < \varepsilon$, y suponiendo que $\mathbb{E}$ es un espacio normado, reemplazamos A con $A_0 = \{x \in A: \|x - \bar{x}\| < \varepsilon\}$. La proposición 4.1.3 asegura que es posible elegir N tal que $U \subset A_0$ y, en consecuencia, $\bar{y} \in A_0$ para todo $Y \in N$.

4.2. Estabilidad estructural

Proposición 4.2.1. Sea $\mathbb{E}$ un espacio normado y $0 \in \mathbb{E}$ un sumidero para un campo vectorial C^1 , $X: A \rightarrow \mathbb{E}$, donde A es un conjunto abierto que contiene el origen. Entonces, existe un producto interno $\mathbb{E}$, un número $r > 0$, y una vecindad $N \subset U(A)$ de X tal que: para cada $Y \in N$, existe un sumidero $x_0 = x_0(Y)$ de Y tal que el conjunto

$$B^r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\},$$

contiene el punto x_0 , está incluido en la cuenca de atracción de x_0 , y es positivamente invariante bajo el flujo de Y .

Demostración

Sabemos que $\mathbb{E}$ admite un producto interno tal que, para algún $\nu < 0$ y $2r > 0$, tenemos:

$$\langle X(x), x \rangle < \nu |x|^2 \text{ si } 0 < |x| \leq 2r.$$

Esto implica que B^r está en la cuenca de atracción de 0 , y que $X(x)$ se dirige hacia dentro a lo largo de ∂B^r . Es evidente que existe una vecindad $N_0 \subset U(A)$ de X tal que, si $G \in N_0$, entonces $Y(x)$ también se dirige hacia dentro a lo largo de ∂B^r .

Elijamos $s > 0$ y $0 < \varepsilon < r$ tales que, si $|y| \leq \varepsilon$, entonces el disco cerrado

$$B^s(y) = \{x \in \mathbb{E}: |x - y| \leq s\} \text{ satisface } B^r \subset B^s(y) \subset B^{2r}.$$

Afirmación: Si, para $\nu < \mu < 0$, tenemos que si $\|Y - X\|_{C^1}$ es suficientemente pequeño, entonces el sumidero x_0 de X pertenecerá a B^s , y además, tendremos:

$$\langle Y(x), x - x_0 \rangle \leq \mu |x - x_0|^2, \text{ si } x \in B^r(x_0) \quad (4.8)$$

De hecho, partimos de la identidad:

$$\langle Y(x), x - x_0 \rangle = \langle X(x - x_0), x - x_0 \rangle + \langle Y(x) - X(x - x_0), x - x_0 \rangle.$$

Según la hipótesis,

$$\langle X(x - x_0), x - x_0 \rangle \leq v|x - x_0|^2.$$

Sea $J(x) = Y(x) - X(x - x_0)$, que se anula en x_0 . Estimamos la norma de su derivada:

$$\|DJ(x)\| \leq \|DY(x) - DX(x)\| + \|DX(x) - DX(x - x_0)\|.$$

Cuando $\|Y - X\|_{C^1} \rightarrow 0$, entonces $\|DY(x) - DX(x)\| \rightarrow 0$ uniformemente en $|x| \leq 2r$, y además $(x - x_0) \rightarrow 0$ también; en consecuencia,

$$\|DX(x) - DX(x - x_0)\| \rightarrow 0$$

uniformemente en el mismo intervalo.

Por lo tanto, si $\|Y - X\|_{C^1}$ es suficientemente pequeño, entonces se cumple

$$\|D\alpha(x)\| \leq \mu - v,$$

donde $\mu - v$ es una constante de Lipschitz para α . De este modo,

$$\|J(x)\| = \|J(x) - J(x_0)\| \leq (\mu - v)|x - x_0|.$$

Como consecuencia,

$$\langle Y(x), x - x_0 \rangle \leq v|x - x_0|^2 + (\mu - v)|x - x_0|^2 = \mu|x - x_0|^2,$$

lo que prueba (4.8).

Sea $N_1 = \{Y \in U(W) : \|Y - X\|_{C^1} < \delta\}$, y defina $N = N_0 \cap N_1$. Si $Y \in N$ tiene un sumidero $x_0 \in B^\varepsilon$, por (4.8), el conjunto $B^s(x_0)$ está en la cuenca de atracción de x_0 . Como $B^r \subset B^s(x_0)$ y $Y(x)$ apunta hacia dentro a lo largo de ∂B^r , se deduce que B^r está contenido en la cuenca de atracción de x_0 , y que el flujo de Y mantiene invarianza positiva de B^r .

Proposición 4.2.2. (Sistema Estructuralmente Estable)

Sea $X: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial C^1 definido en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al disco unidad $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. Supóngase que se cumplen las siguientes condiciones:

(a) F tiene exactamente un punto de equilibrio en B^n , denotado como $0 \in B^n$, y 0 es un sumidero.

(b) F está orientado hacia el interior a lo largo de la frontera ∂B^n , es decir,

$$\langle X(x), x \rangle < 0 \quad \text{si para todo } x \in \partial B^n.$$

(c) Para todo $x \in B^n$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x) = 0$, donde φ_t es el flujo asociado con X .

Por lo tanto, X es estructuralmente estable en B^n .

Demostración

Dado que B^n es compacto y $X(x)$ apunta hacia dentro a lo largo de la frontera ∂B^n , ninguna curva solución puede salir de B^n . Por lo tanto, B^n es positivamente invariante bajo el flujo de X .

Elijamos $r > 0$ y un entorno $N \subset U(A)$ de X como en la proposición 4.2.1. Sea $N_0 \subset N$ un entorno de X suficientemente pequeño tal que, si $Y \in N_0$, entonces $Y(x)$ también apunta hacia dentro a lo largo de ∂B^n . Sea ψ_t el flujo asociado con $Y \in N_0$. En estas condiciones, B^n permanece positivamente invariante bajo el flujo ψ_t , porque ninguna órbita puede salir del dominio, ya que el campo Y apunta hacia dentro a lo largo de toda la frontera.

Para todo $x \in (C^n \setminus \text{int}(B^r))$, existe un entorno abierto $U_x \subset A$ de x , y un $t_x > 0$ tal que si, $y \in U_x$, y $t \geq t_x$, entonces

$$|\varphi_t(y)| < r.$$

Como ∂B^n es compacto, podemos extraer un número finito de entornos $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ que cubren ∂B^n . Definimos

$$t_0 = \max\{t_{x_1}, \dots, t_{x_n}\}.$$

Por lo tanto, para todo $t \geq t_0$, tenemos:

$$\varphi_t(B^n \setminus \text{int}(B^r)) \subset C_r.$$

Debido a la continuidad del flujo con respecto al campo F , existe un entorno $N_1 \subset N$ tal que, si $G \in N_1$, entonces

$$\psi_t(B^n \setminus \text{int}(B^r)) \subset B^r, \quad \text{para } t \geq t_0.$$

Afirmación: $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(x) = 0$ para todo $x \in C^n$.

De hecho, sea $x \in B^n$. Entonces, $y = \psi_{t_0}(x) \in B^r$, y como B^r está incluido en la cuenca de atracción de 0 , la trayectoria de x converge hacia 0 como $t \rightarrow \infty$.

Además, cualquier punto $y \in (B^n \setminus \{b\})$ puede escribirse en la forma $y = \psi_t(x)$ para algún $x \in \partial B^n$ y $t \geq 0$. De lo contrario, el conjunto limite

$$L_\alpha(y) = \{z \in B^n: \exists t_k \rightarrow -\infty \text{ con } \psi_{t_k}(y) \rightarrow z\}$$

sería no vacío. Sin embargo, si $z \in L_\alpha(y)$, entonces $\psi_t(z) \rightarrow b$ cuando $t \rightarrow \infty$, lo que implica que $y = b$, contradiciendo la hipótesis $y \neq b$.

Fijemos $G \in N_1$. Hemos demostrado que la aplicación

$$\Psi: [0, \infty) \times (\partial B^n \setminus B^n) \rightarrow (B^n \setminus \{b\}), \Psi(t, x) = \psi_t(x)$$

tiene imagen $(B^n \setminus \{b\})$,

Análogamente, la aplicación

$$\Phi: [0, \infty) \times (\partial B^n \setminus B^n) \rightarrow (B^n \setminus \{0\}), \Phi(x, t) = \varphi_t(x)$$

tiene como imagen $(B^n \setminus \{0\})$. Definimos ahora la aplicación $h_0: B^n \rightarrow B^n$ como:

$$h_0(y) = \begin{cases} \Psi \circ \Phi^{-1}(y) & \text{si } y \neq 0, \\ b & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Otra forma de interpretación es la siguiente: la aplicación satisface

$h_0(\varphi_t(x)) = \psi_t(x)$, para todo $x \in \partial B^n$, $t \geq 0$, y también $h_0(0) = b$. Por lo tanto, h_0 envía trayectorias de flujo φ en trayectorias de flujo ψ , preservando la orientación temporal. Es inmediatamente que $h_0(B^n) = B^n$.

La continuidad de h_0 se deduce de la continuidad de los flujos φ_t y ψ_t . Además, si se intercambian los roles del flujo original y su perturbación, se puede obtener el continuo inverso de h_0 . Por lo tanto, h_0 es un homeomorfismo de B^n sobre si mismo.

Ejemplo 4.2.1. Analizar la estabilidad del sistema autónomo no lineal

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 + x_1(2 - x_1^2 - x_2^2) \\ x'_2 = -x_1 + x_2(2 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases} \quad (4.1)$$

donde las funciones son de clase C^1

Solución

Definimos la aplicación $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como sigue:

$$X(x_1, x_2) = (X_1(x_1, x_2), X_2(x_1, x_2)) = (x_2 + x_1(2 - x_1^2 - x_2^2), -x_1 + x_2(2 - x_1^2 - x_2^2))$$

Para hallar los puntos de equilibrio, resolvemos $X(x_1, x_2) = (0, 0)$, lo que nos lleva al siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_2 + x_1(2 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ -x_1 + x_2(2 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases}$$

La única solución es $(x_1, x_2) = (0, 0)$, ya que al sustituir $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ en las dos ecuaciones, se obtiene $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.

Analizamos la estabilidad del origen $(0, 0)$ linealizada del sistema (4.1). La matriz Jacobiana $JX(x_1, x_2)$ es:

$$JX(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_1x_2 \\ -1 - 2x_1x_2 & 2 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{pmatrix}$$

Evaluable en $(0, 0)$, obtenemos la matriz Jacobiana $JX(0, 0)$:

$$JX(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios de la matriz $JX(0, 0)$ resolviendo el determinante $|J(0, 0) - \beta I| = 0$:

Resolviendo esta ecuación cuadrática obtenemos los siguientes valores propios:

$$\beta_1 = 2 + i; \beta_2 = 2 - i$$

Dado que ambos valores propios tienen una parte real positiva, el origen $(0, 0)$ es un punto de equilibrio hiperbólico y un foco inestable, también llamado fuente.

El espacio de fase del sistema autónomo no lineal (4.1) será

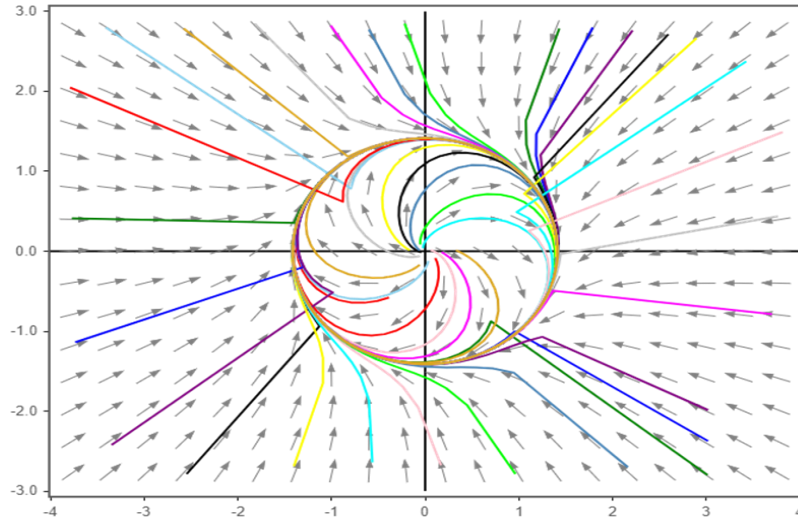


Figura 4.1. Diagrama de fase del sistema (4.1)

Consideremos ahora el sistema perturbado:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + \gamma x_1(2 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_2' = -x_1 + x_2(2 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases} \quad (4.2)$$

donde $\gamma > 0$ es un parámetro real. Definimos la aplicación $Y: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como sigue:

$$Y(x_1, x_2, \mu) = (Y_1(x_1, x_2, \gamma), Y_2(x_1, x_2, \gamma)) = (x_2 + \gamma x_1(2 - x_1^2 - x_2^2), -x_1 + x_2(2 - x_1^2 - x_2^2))$$

Como antes, el único punto de equilibrio del sistema perturbado es $(0,0)$ para todo $\gamma > 0$.

Al linealizar el sistema (4.2), obtenemos la matriz Jacobiana $JY(x_1, x_2)$:

$$JY(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2\gamma - 3\gamma x_1^2 - \gamma x_2^2 & 1 - 2\gamma x_1 x_2 \\ -1 - 2\gamma x_1 x_2 & 2 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{pmatrix}$$

Evalando en el punto de equilibrio $(0,0)$, obtenemos:

$$JY(0,0) = \begin{pmatrix} 2\gamma & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos los valores propios del sistema linealizado:

$$|JY(0,0) - \beta I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2\gamma - \beta & 1 \\ -1 & 2 - \beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2\gamma - \beta)(2 - \beta) + 1 = 0 \Rightarrow \beta^2 - 2(\gamma + 1)\beta + (4\gamma + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \gamma + 1 + \sqrt{\gamma^2 - 2\gamma}; \beta_2 = \gamma + 1 - \sqrt{\gamma^2 - 2\gamma}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática, obtenemos los valores propios:

$$\{\gamma + 1 + \sqrt{\gamma^2 - 2\gamma}; \gamma + 1 - \sqrt{\gamma^2 - 2\gamma}\}.$$

Dado $\gamma > 0$, ambos valores propios tienen una parte real positiva, por lo tanto, el origen (0,0) sigue siendo un punto de equilibrio hiperbólico, un foco inestable y una fuente. La siguiente figura ilustra la evolución del espacio de fases al introducir pequeñas perturbaciones en los valores de los parámetros:

Para $\gamma = 1.15$, el espacio de fase del sistema perturbado (4.2) será:

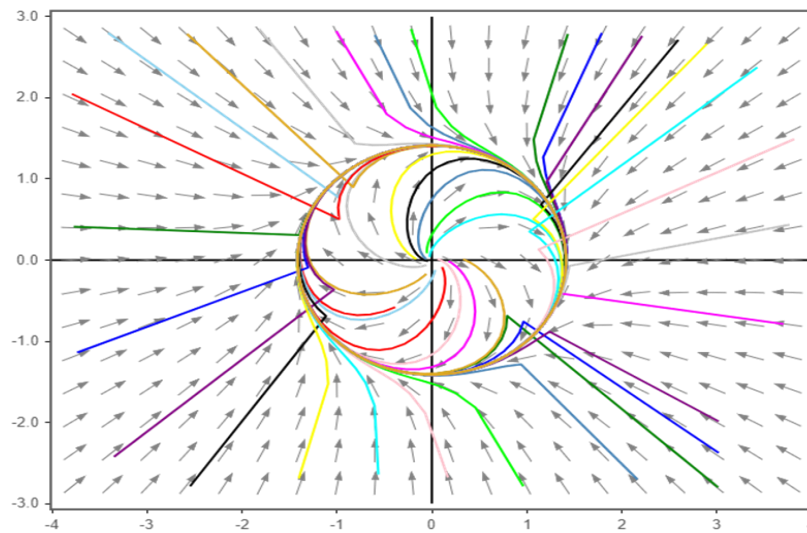


Figura 4.2. Diagrama de fase del sistema (4.2), con $\gamma = 1.15$

Para $\gamma = 1.2$, el diagrama de fase del sistema perturbado (4.2), será

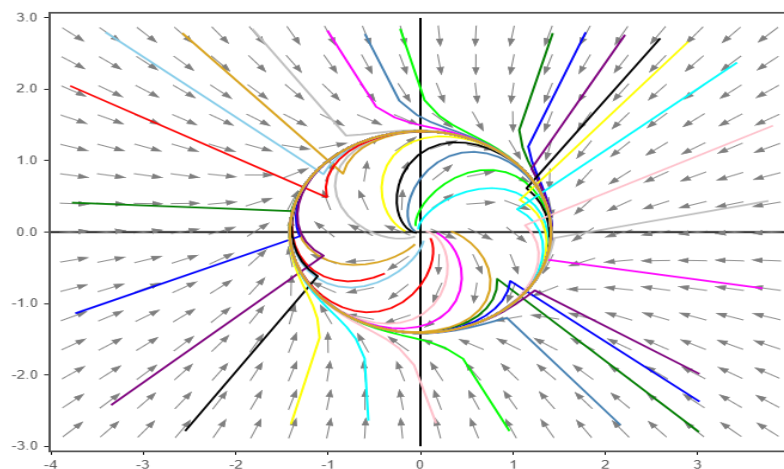


Figura 4.3. Diagrama de fase del sistema (4.2), con $\gamma = 1.2$

Para $\gamma = 1.25$, el diagrama de fase del sistema perturbado (4.2), será

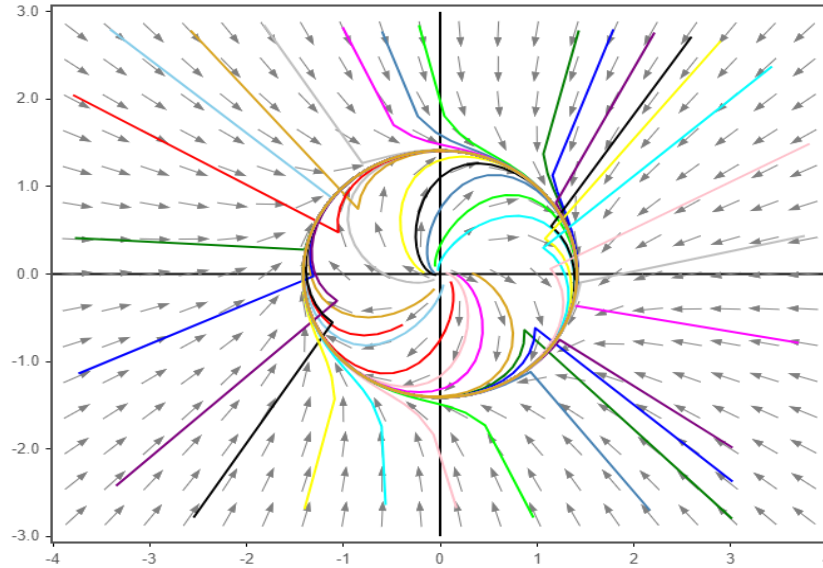


Figura 4.4. Diagrama de fase del sistema (4.2), con $\gamma = 1.25$

Cuando el parámetro $\gamma > 0$ varía, el diagrama de fase del sistema perturbado permanece topológicamente inalterado. Pequeñas perturbaciones de γ no alteran la estructura del sistema, lo que indica su estabilidad estructural. Además, existe al menos una trayectoria cerrada aislada, denominada ciclo límite, ubicada en $r = \sqrt{2}$. Cualquier trayectoria adyacente es una espiral, que se acerca o se aleja del ciclo límite según la dirección del flujo.

4.3. Aplicaciones

4.3.1. Análisis del sistema de Van der Pol

Consideremos el sistema oscilador de Van Der Pol:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 \end{cases} \quad (4.3)$$

Definimos la aplicación $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por:

$$X(x_1, x_2) = (X_1(x_1, x_2), X_2(x_1, x_2)) = (x_2, -x_1 + (1 - x_1^2)x_2)$$

Para calcular los puntos de equilibrio del sistema, resolvemos:

$$X(x_1, x_2) = 0: (x_2, -x_1 + (1 - x_1^2)x_2) = (0, 0)$$

Esto implica que:

$$x_2 = 0 \text{ e } (1 - x_1^2)x_2 = 0$$

Por lo tanto, $\bar{x}_0 = (0,0)$ es el único punto de equilibrio del sistema (4.3).

A continuación, analizaremos la estabilidad del origen $\bar{x}_0 = (0,0)$ en (4.3). Para ello, linealizamos el sistema alrededor de este punto. La matriz Jacobiana de $F(x_1, x_2)$ es:

$$JX(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x_1x_2 & 1 - x_1^2 \end{pmatrix}$$

Evaluación de la matriz Jacobiana en $(0,0)$:

$$\mathbb{M} = JX(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular los valores propios del sistema linealizado, resolvemos el determinante de $\mathbb{M} - \beta I = 0$:

$$\begin{vmatrix} -\beta & 1 \\ -1 & 1 - \beta \end{vmatrix} = 0$$

lo que da la ecuación cuadrática:

$$-\beta(1 - \beta) + 1 = 0 \Rightarrow \beta^2 - \beta + 1 = 0$$

Al resolver esta ecuación se obtienen los siguientes valores propios:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad \beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Estos valores propios son números complejos con parte real positiva ($\frac{1}{2} > 0$), lo que indica que el origen $\bar{x}_0 = (0,0)$, es una singularidad hiperbólica (punto singular hiperbólico). Dado que ambos valores propios tienen la parte real positiva, el origen es un punto singular hiperbólico, un foco inestable. Por lo tanto es una fuente.

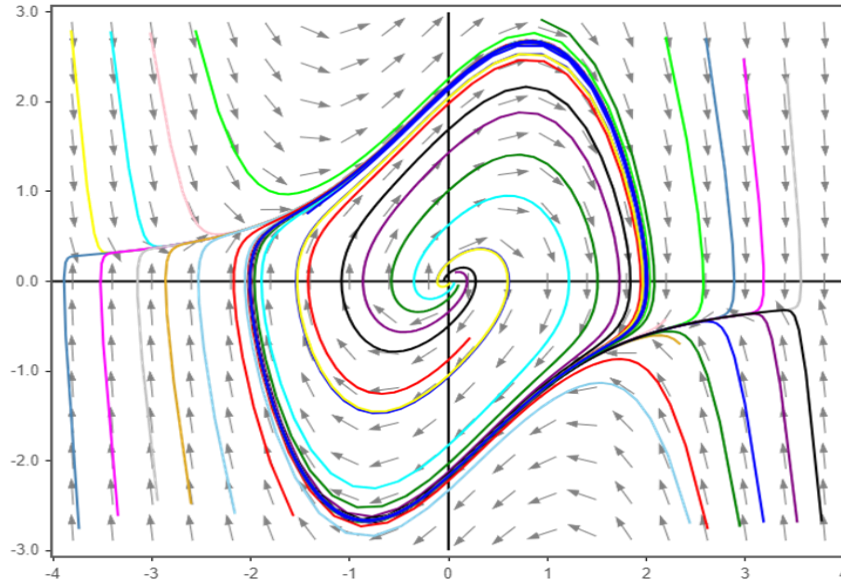


Figura 4.5. Diagrama de fase del sistema (4.3)

Consideremos ahora pequeñas perturbaciones de las funciones escalares del sistema no lineal (4.3). En otras palabras, consideremos el siguiente sistema perturbado:

$$\begin{cases} x' = x_2 \\ y' = -x_1 + \gamma(1 - x_1^2)x_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

donde $\gamma > 0$ es un parámetro real que mide la no linealidad del sistema.

Este sistema perturbado de Van der Pol describe el comportamiento de circuitos electrónicos no lineales, como aquellos que contienen un triodo (una válvula electrónica de tres electrodos) cuya resistencia depende de la corriente aplicada.

Definimos la aplicación $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como:

$$Y(x_1, x_2) = (Y_1(x_1, x_2, \gamma), Y_2(x_1, x_2, \gamma)) = (x_2, -x_1 + \gamma(1 - x_1^2)x_2)$$

El primer paso es calcular las singularidades del sistema (4.4). Resolviendo $Y(x_1, x_2) = (0, 0)$, es decir,

$$(x_2, -x_1 + \gamma(1 - x_1^2)x_2) = (0, 0)$$

obtenemos:

$$x_2 = 0 \text{ y } \gamma(1 - x_1^2)x_2 = 0$$

Sustituyendo $x_2 = 0$:

$$-x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Por lo tanto, el origen $\bar{x}_0 = (0,0)$; $\forall \gamma > 0$, es el único punto de equilibrio del sistema (4.4).

Ahora linealizamos el sistema (4.4) alrededor del origen. La matriz Jacobiana de $Y(x, y)$ es:

$$JY(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\gamma x_1 x_2 & \gamma - \gamma x_1^2 \end{pmatrix}$$

Evalando en (0,0):

$$\mathbb{M} = \frac{\partial Y}{\partial x_1}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

Para calcular los valores propios de $\mathbb{M}$, resolvemos el determinante de $\mathbb{M} - \beta I = 0$:

$$\begin{vmatrix} -\beta & 1 \\ -1 & \gamma - \beta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\beta(\gamma - \beta) + 1 = 0 \Rightarrow \beta^2 - \gamma\beta + 1 = 0$$

Lo que nos da

$$-(\gamma - \beta) + 1 = 0 \Rightarrow \beta^2 - \gamma\beta + 1 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática:

$$\beta_1 = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}, \quad \beta_2 = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}$$

Dado que $\gamma > 0$, los valores propios siempre tienen una parte real positiva, lo que indica que $\bar{x}_0 = (0,0)$ es una singularidad hiperbólica (punto singular hiperbólico). Dado que la parte real de ambos valores propios es positiva, el origen es un punto singular hiperbólico de tipo foco inestable y, en consecuencia, una fuente.

Los valores propios del sistema linealizado son entonces:

$$\left\{ \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}, \quad \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2} \right\}$$

Por lo tanto, dado que $\gamma > 0$, según el teorema de Hartman $\bar{x}_0 = (0,0)$ es una singularidad hiperbólica (punto singular hiperbólico). Como ambos valores propios tienen partes reales positivas, el origen $\bar{x}_0 = (0,0)$ es un punto singular hiperbólico foco inestable. Además, es una fuente.

Para diferentes valores del parámetro γ , observamos cómo evoluciona el espacio de fase del sistema perturbado (4.4):

Para $\gamma = 1.2$, el espacio de fase presenta un comportamiento característico.

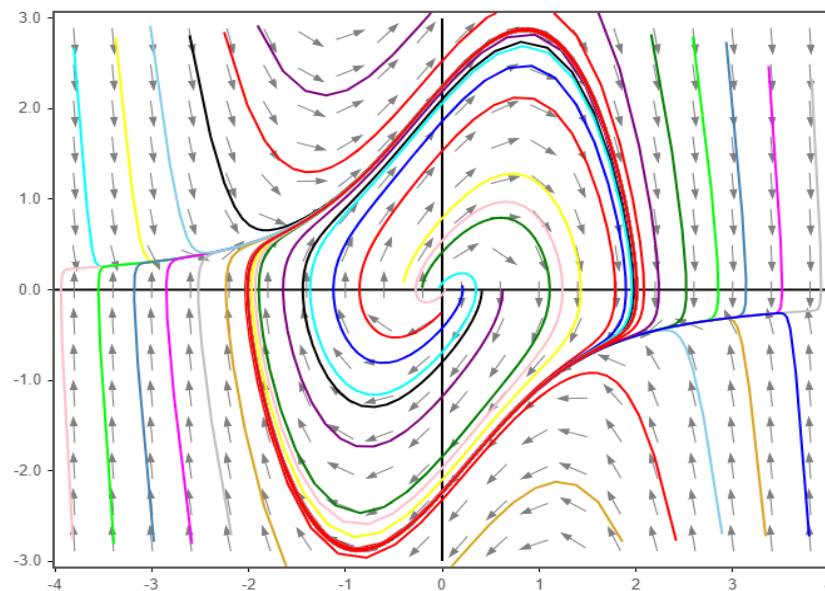


Figura 4.6. Diagrama de fase del sistema (4.4), con $\gamma = 1.2$

Para $\gamma = 1.5$, el espacio de fases sigue mostrando una dinámica similar.

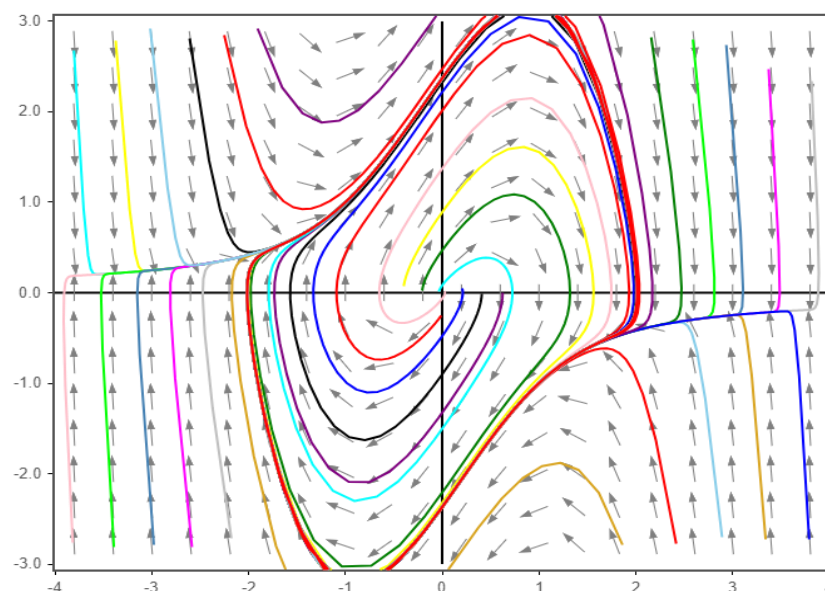


Figura 4.7. Espacio de fase del sistema (4.4), con $\gamma = 1.5$

Para $\gamma = 1.8$, el espacio de fases sigue mostrando una dinámica similar.

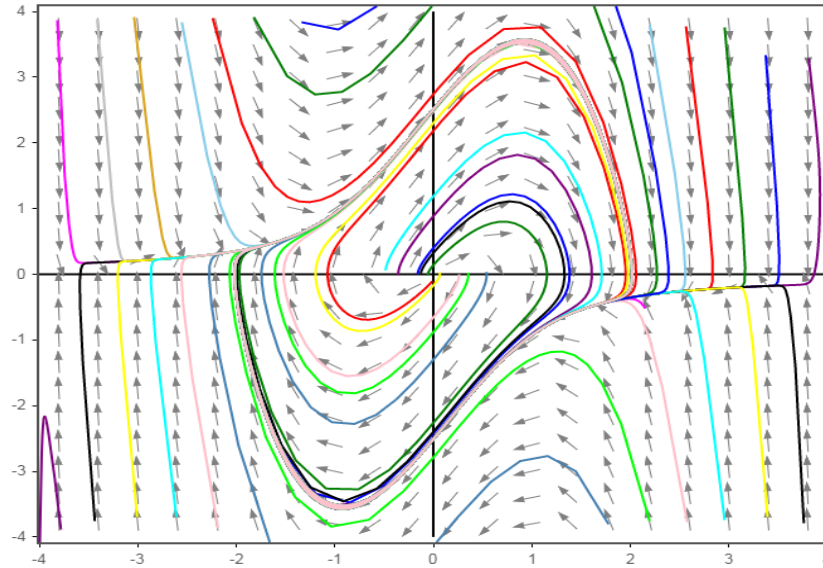


Figura 4.8. Diagrama de fase del sistema (4.4), con $\gamma = 1.8$

Para $\gamma = 2$, el comportamiento del sistema perturbado es aún más pronunciado.

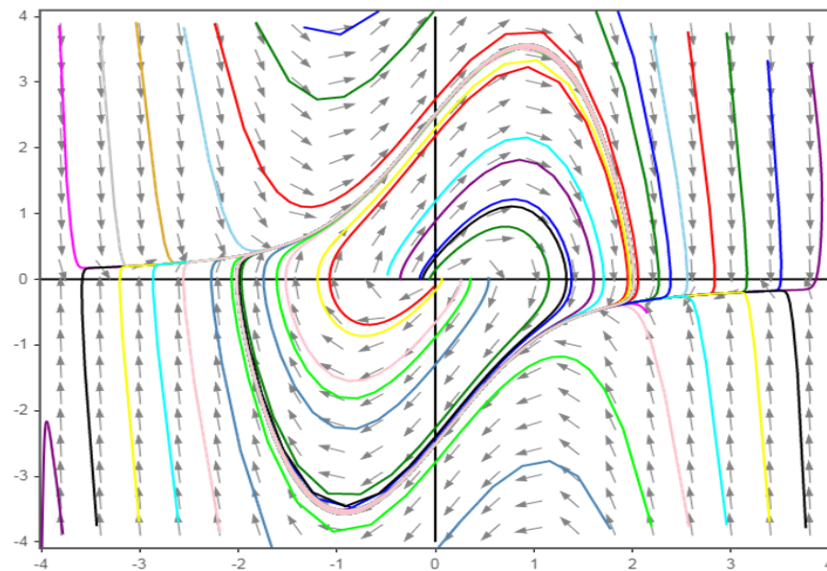


Figura 4.9. Diagrama de fase del sistema (4.4), con $\gamma = 2$

Pequeñas perturbaciones en los valores del parámetro $\gamma > 0$ no alteran la estructura topológica del diagrama de fase del sistema (4.4). Por lo tanto, el sistema autónomo no lineal (4.4), dado por las ecuaciones, es estructuralmente estable.

4.3.2. Punto de equilibrio hiperbólico

Proposición 4.3.2.1. Si $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es estable en

$$B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| \leq 1\}$$

tal que $X(0) = 0$, entonces el origen 0 es un punto de equilibrio hiperbólico.

Demostración

Recuerde la definición de estabilidad: Un punto 0 es estable si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $\|x(0)\| < \delta$, entonces $\|x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. De forma similar, un punto de equilibrio hiperbólico es hiperbólico si todos los valores propios de la matriz Jacobiana $DX(p)$ tienen una parte real distinta de cero.

La estabilidad de X en B^2 implica que ninguna trayectoria que se origine en B^2 puede salir de este conjunto para $t \geq 0$. En particular, en la vecindad de 0, no puede haber trayectorias con comportamientos ilimitados ni ciclos límite inestables.

Dado que X es continua y $X(0) = 0$, podemos aproximarse en la vecindad de 0 mediante su desarrollo en serie de Taylor:

$$X(x) = DX(0)x + \text{términos de orden superior}$$

La dinámica local está determinada por la matriz Jacobiana $M = DX(0)$. Si todos los valores propios de M tienen una parte real distinta de cero, el origen es un punto de equilibrio hiperbólico.

Si cualquier valor propio tiene una parte real igual a cero, el equilibrio sería no hiperbólico (por ejemplo, un centro o un punto en bifurcación), y su estabilidad no estaría garantizada únicamente por el análisis real.

La estabilidad de X en B^2 , combina con $X(0) = 0$, implica que $DX(0)$ no puede tener valores propios con partes reales iguales a cero; de lo contrario, podrían aparecer trayectorias neutras (valores propios con partes reales iguales a cero) o inestables cerca del origen. Por lo tanto, todos los valores propios de $DX(0)$ tienen parte real distinta de cero y, por lo tanto, 0 es un punto de equilibrio hiperbólico.

4.3.3. Campo estructuralmente estable en un entorno

Proposición 4.3.3.1. Sea $U(A)$ el conjunto de todos los campos vectoriales de clase C^1 definidos en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$. Si $X \in U(A)$ es estructuralmente estable en

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n,$$

entonces existe una vecindad N de X tal que todo $G \in N$ es también estructuralmente estable.

Demostración

Debemos demostrar que, si un campo vectorial $X \in U(A)$ es estructuralmente estable en $B^n \subset \mathbb{R}^n$, entonces existe una vecindad N de X (para la topología inducida por la norma C^1) tal que todo $Y \in N$ es estructuralmente estable en B^n .

Un campo vectorial X es estructuralmente estable en C^n si las soluciones del sistema $x' = X(x)$ dependen continuamente de las perturbaciones Y en la vecindad de X en el sentido la norma C^1 , y si el retrato de fase (puntos de equilibrio, su estabilidad, la forma y topología de las trayectorias) permanece inalterado bajo perturbaciones pequeñas de X . Esto implica que, para cualquier Y suficientemente cercano a X , el sistema $x' = Y(x)$ es topológicamente equivalente al sistema $x' = X(x)$ en B^n .

Si X es estructuralmente estable en B^n : todos los puntos de equilibrio en B^n están aislados y su naturaleza (sumidero, fuente, punto silla) está determinada por valores propios con parte real distinta de cero.

La naturaleza de los puntos de equilibrio es que, no cambia bajo pequeñas perturbaciones y las trayectorias del sistema no sufren cambios cualitativos bajo perturbaciones pequeñas.

Dado que X es estructuralmente estable en B^n , entonces por definición existe un $\varepsilon > 0$ tal que si

$$\|X - Y\|_{C^1} < \varepsilon,$$

entonces Y tiene:

Posee puntos de equilibrio aislados y de la misma naturaleza que los de X (atractores, repulsores o focos). Sus trayectorias topológicamente equivalentes a las de X en B^n . No presenta bifurcaciones ni cambios cualitativos.

Definimos

$$N = \{Y \in U(A): \|X - Y\|_{C^1} < \varepsilon\}.$$

Por construcción, todo $Y \in N$ es estructuralmente estable en B^n

Si $X \in U(A)$ es estructuralmente estable en B^n , existe una vecindad N de X tal que cualquier $Y \in N$ es también estructuralmente estable en B^n . Esto implica que las trayectorias del sistema $x' = Y(x)$ y los puntos de equilibrio de Y no sufren cambios cualitativos bajo pequeñas perturbaciones de X , y por lo tanto, Y es estructuralmente estable en B^n .

4.3.4. Condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad estructuralmente en un intervalo

Proposición 4.3.4.1. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto y sea $X \in C^1(I)$. Consideremos el flujo del sistema autónomo $x' = X(x)$. $X: I \rightarrow \mathbb{R}$ sea estructuralmente estable en I (para la topología C^1) si y solamente si :

- a) Los ceros de X en I son finitos (equilibrios aislados)
- b) Cada cero x_0 es hiperbólico, es decir, $X'(x_0) \neq 0$.

Demostración

($\Leftarrow$) Supongamos que X es estructuralmente estable. Si los ceros no están aislados (por ejemplo existe una sucesión de ceros $x_n \rightarrow x_1$ o un intervalo donde $X \equiv 0$), una perturbación arbitrariamente pequeña puede eliminar o crear ceros en la vecindad de x_1 , o cambiar el número de ceros en I . Por lo tanto, los ceros deben estar aislados y, dado que I es compacto, su número es finito.

Si existe un cero no hiperbólico x_0 , es decir, $X(x_0) = 0$ y $X'(x_0) = 0$, una pequeña perturbación $X + \varepsilon Y$ puede alterar el equilibrio, lo que contradice la estabilidad estructural. Por lo tanto, $X'(x_0) \neq 0$ debe cumplirse para cada cero.

($\Rightarrow$) Supongamos que X tiene un número finito $\{x_0, x_1, \dots, x_m\} \subset I$ y que cada x_i es hiperbólico, es decir, $X'(x_i) \neq 0$.

Por la continuidad de los ceros simples, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $Y \in C^1(I)$ con $\|Y - X\|_{C^1} < \varepsilon$, cada x_i persiste como un único cero vecino $x_i(Y)$, y además, $x_i(Y)$ permanece hiperbólico. En consecuencia, el número y la naturaleza de los ceros (atractor o repulsor) son invariante para valores cercano a Y .

En una dimensión, no existen ciclos periódicos no triviales; la dinámica consiste en soluciones que se desplazan hacia la derecha o hacia la izquierda según el signo de X . Entre ceros consecutivos $x_i < x_{i+1}$, el signo de X es constante y no hay ceros intermedios. Para valores suficientemente cercanos de Y , el signo de Y en intervalos compactos entre $x_i(Y)$ coincide con el de X , preservando así la dirección del flujo.

Dados X e Y suficientemente cercanos en C^1 , se construye un homeomorfismo monótonamente creciente $h_0: I \rightarrow I$ que transforma una partición de I , definida por puntos de referencia (por ejemplo, equilibrios y puntos intermedios fijos), en la partición análoga de Y ; este homeomorfismo se extiende entonces por flujo a todos los I . La continuidad se sigue de la continuidad de las soluciones con respecto al campo vectorial.

El homeomorfismo construido h_0 satisface la equivalencia topológica de flujos, transformando las órbitas de X en orbitas de Y , conservando la orientación temporal. Por lo tanto, Y es topológicamente equivalente a X . Esto se cumple para cualquier Y perteneciente a una vecindad N de X , en sentido de la norma C^1 . En consecuencia, Y es estructuralmente estable.

Ejemplo 4.3.4.1. Sea $X(x_1) = x_1(1 - x_1^2)$, $x_1 \in [-2, 2]$. Esta función tiene ceros en $x = -1, 0, 1$. Un punto de equilibrio no es hiperbólico si $X'(x_0) = 0$. En este caso:

$$X'(x_1) = 1 - 3x_1^2 \quad \wedge \quad X'(0) = 1 \neq 0,$$

por lo tanto, $x_1 = 0$ es un punto hiperbólico.

Si uno de los ceros tuviera multiplicidad mayor que uno, lo que implicaría que $X'(x_0) = 0$, la estabilidad estructural podría verse comprometida.

CAPÍTULO V: DISCUSIÓN

5.1. Uno de los objetivos de esta tesis fue establecer la estabilidad de los diagramas de fases persistentes bajo perturbaciones del campo vectorial. En la prueba de una clase de sistemas estructuralmente estables, se demostró que un campo vectorial Y suficientemente cercano a X posee un único punto de equilibrio $b \in B^n$, cercano a 0 . Además, todas las trayectorias de Y en B^n convergen a b . En este contexto, un homomorfismo $h_0: B^n \rightarrow B^n$ se define como la identidad en ∂B^n . Para cada $x \in \partial B^n$, h_0 transforma la trayectoria de x bajo X en la trayectoria de x bajo Y , preservando al mismo tiempo la parametrización temporal. Finalmente, obtenemos que $h_0(0) = b$. Este resultado es consistente con los obtenidos por otros matemáticos en esta área de investigación, como Kreider, Krasnov, La Salle, Liapunov, Hirsh, Mello, Peixoto, Perko y Sotomayor.

5.2. Se establecieron ciertas propiedades que permiten la conservación de un flujo ante pequeñas perturbaciones del campo vectorial. En particular, si un flujo presenta un sumidero o un atractor, cualquier flujo suficientemente cercano presentará un sumidero correspondiente en una posición próxima. De manera análoga, este comportamiento se observa en el caso de los atractores periódicos. Además, se demostró la persistencia de un punto de equilibrio hiperbólico bajo perturbaciones pequeñas.

5.3. Al establecer la estabilidad estructural de un campo vectorial en el disco unitario de un espacio euclidiano n -dimensión, podemos afirmar que cualquier flujo vecino es topológicamente equivalente al flujo inicial. En otras palabras, para cualquier perturbación suficientemente pequeña del flujo, existe un homeomorfismo que transforma cada trayectoria del flujo inicial en una trayectoria del flujo perturbado. Este homeomorfismo es una aplicación continua que admite una inversa continua, estableciendo una correspondencia biyectiva entre los puntos de equilibrio, las órbitas cerradas y otras características de los dos flujos. En este sentido, decimos que el flujo inicial (o su campo vectorial) es estructuralmente estable.

5.4. El oscilador armónico ilustra la necesidad de imponer una condición para la estabilidad estructural. Sea $X: A \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $C^2 \subset A$, un campo vectorial definido en la vecindad del origen, por la ecuación

$$x' = Mx, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ante una perturbación arbitrariamente pequeña, la matriz M puede modificarse de forma que el origen resulte en un sumidero, en un punto de silla, o en una fuente. Dado que el comportamiento dinámico es diferente en cada caso, los flujos no son topológicamente equivalentes a los del campos original. En consecuencia, X no es estructuralmente estable. En contraste, el oscilador de Van der Pol es un ejemplo de sistema estructuralmente estable.

CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES

6.1. Si $\bar{x}$ es un punto de equilibrio hiperbólico, entonces los valores propios de la matriz Jacobiana $DX(\bar{x})$ tienen partes reales distintas de cero. En este caso, el índice $\text{ind}(\bar{x})$ se define como el número de valores propios en $DX(\bar{x})$ cuya parte real negativa. Si la dimensión del espacio es n , entonces $\text{ind}(\bar{x}) = n$ significa que $\bar{x}$ es un sumidero, mientras que $\text{ind}(\bar{x}) = 0$ significa que $\bar{x}$ es una fuente (Proposición 4.1.4).

6.2. Se establecen las condiciones para la conservación de un flujo ante pequeñas perturbaciones del campo vectorial en un sistema dinámico (Proposición 4.2.1).

6.3. Se establece una clase de estabilidad estructural para un campo vectorial en el disco unitario del espacio euclidiano n -dimensional (Proposición 4.3.2).

CAPITULO VII: RECOMENDACIONES

7.1. Sería conveniente desarrollar investigaciones encaminadas a analizar y determinar la estabilidad estructural de sistemas dinámicos autónomos no lineales con múltiples ciclos límite.

7.2. Sería relevante realizar estudios que evalúen la estabilidad estructural de sistemas dinámicos, autónomos y no autónomos, en sus versiones lineales y no lineales.

7.3. Sería relevante estudiar la estabilidad estructural de variedades diferenciables.

7.4. Es necesario estudiar el cálculo y métodos numéricos para determinar la estabilidad estructural de sistemas de grandes dimensiones, cuyos estudios analíticos son cada vez más complejos.

7.5. Se sugieren estudios comparativos entre diferentes estándares y métricas en espacios regulados con el fin de observar su influencia en la definición y verificación de la estabilidad estructural.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Elsgolts, L.(1979). *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*. Mir, Moscú.
- Hirsh, M. (2013). *Ecuaciones Diferenciales ,Sistemas Dinámicos y una introducción al caos*. Academic Press - Elsevier, Madrid.
- Kreider, D. (1978).*Ecuaciones Diferenciales*. Fondo educativo interamericano, México.
- Krasnov, L.(1978).*Teoría de la Estabilidad*, Reverte, Barcelona.
- La Salle.(1973). *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*. Academic Press, New York.
- Liapunov, A. (1949). *Probleme General de la Stabilitie du Mouvement*, Ann. of Math. Stud., Vol. 17, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ,
- Markus, L. (1961). Structurally Stable Differential Systems. *Annals of mathematics*, 73(1), 1.
- Mello, A. (1979). *Ecuaciones Diferenciales*. Imeusp, Brasil.
- Mendiola ,L. (2013) . *Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos*. [Tesis en ciencias aplicadas Instituto Potosino de investigación científica y tecnológica,A.C].
- Mendoza ,J.(2013). *Sistemas periódicos: perturbación y aplicaciones*. [Tesis de maestría en Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú].
- Moreno Armendariz, M. A.; Poznyak, A. S. y Yuliu, W. (2001). *Control adaptable indirecto usando Redes Neuronales Dinámicas*. Revista del centro de investigación. Universidad La Salle, vol 4, núm.16, enero-junio, 2001, pp.13-32.
- Peixoto, M. (1978). *Dynamical Systems*. Academic Press, Nueva York.
- Perko, L.(1991). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Verlag, New York.
- Pontryagin, L. (1980).*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Addison Werley, Reading, Masachussetts.
- Poincaré, Russell, Zermelo et Peano.(1986).*Textes de la discussion sur les fondements des mathématiques: Des antinomies à la prédicativité*. Edited by Gerhard Heinzmann. Paris: Blanchard,
- Sotomayor, J.(1979). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Euclides, Brasil.(MÑ)
- Ziegler, H. (2013). *Principles of structural stability*. Birkhäuser Basel.(VPO)