

**UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN**

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática

**EXPRESIÓN GENERALIZADA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN  
DISTRIBUCIONES TEMPERADAS**

**TESIS**

Presentada por:

**Bach. JORGE EDWIN CUBA PARI**

Para optar el Título Profesional de:

**LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

**TACNA - PERÚ**

**2023**

## ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N° 393

En la ciudad de Tacna, en el auditorio de la Facultad de Ciencias, de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann; siendo las 11:00 horas del día viernes 7 de julio del 2023, estando presente el jurado calificador nominado por Resolución de Facultad N°10567-2023-FACI-UN/JBG conformado por los siguientes docentes:

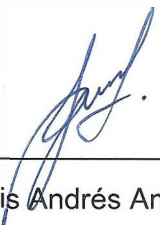
Dr. Luis Andrés Amaya Cedrón	Presidente
Dr. Heber Melbin Cabrera Cruz	Secretario
Msc. Luis Manuel Solórzano Espinola	Miembro


Acto seguido, se dio lectura a la resolución correspondiente, y del mismo modo se dio lectura al artículo 22 del Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias.

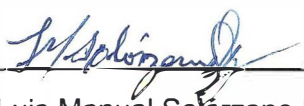
A continuación, el presidente del jurado instó al bachiller: Jorge Edwin Cuba Pari, a exponer la tesis titulada: EXPRESIÓN GENERALIZADA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN DISTRIBUCIONES TEMPERADAS.

Siendo las 11 horas con 50 minutos el tesista concluye su exposición, luego se procedió a la formulación de las preguntas por parte de los miembros del jurado calificador. Terminando este proceso, se invitó a que los miembros del jurado emitan su calificación de acuerdo a Reglamento. El promedio de calificación dio el siguiente resultado. Aprobado por unanimidad con el calificativo de catorce (14) de acuerdo al Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias.

Siendo las 12 horas con 10 minutos, se dio por concluido el acto de sustentación de la tesis, firmando los señores miembros del jurado calificador, en señal de conformidad.

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Luis Andrés Amaya Cedrón  
Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Heber Melbin Cabrera Cruz  
Secretario

  
\_\_\_\_\_  
Msc. Luis Manuel Solórzano Espinola  
Miembro

## CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Jhony Alfonso Chávez Delgado, en mi condición de asesor acreditado por la Resolución de Facultad R.F. N°10176-2022-FACI-UN/JBG de la tesis titulada: **“Expresión Generalizada de la Transformada de Fourier en Distribuciones Temperadas”**, presentado por el Bachiller **Jorge Edwin Cuba Pari** para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, habiendo cumplido con lo establecido en el reglamento de originalidad y de similitud de trabajos de investigación y producción intelectual, considerando que según la revisión, evaluación y análisis realizado a través del software de similitud textual TURNITIN cuenta con el nivel de similitud cuyo porcentaje es 08% por lo que **CERTIFICO LA SIMILARIDAD** de la tesis, la cual está de acuerdo al nivel **PERMITIDO**, para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio Institucional**.

Se emite el presente certificado con fines de continuar con los trámites respectivos para su obtención del título profesional.



Firma del Asesor

DNI:N°18124030

Nombre y Apellidos del asesor: Jhony Alfonso Chávez Delgado

## **DEDICATORIA**

*Dedicado a mis hijos Alejandro y Joel. Dos razones más para esforzarme.*

## **AGRADECIMIENTO**

*Un agradecimiento muy especial al Msc. Jhony Alfonso Chávez Delgado por su orientación y apoyo en la realización de este trabajo.*

## ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA .....	ii
AGRADECIMIENTOS.....	iii
ÍNDICE GENERAL.....	iv
INDICE DE FIGURAS.....	vi
RESUMEN.....	vii
ABSTRACT .....	viii
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN .....	1
1.1. Antecedentes .....	1
1.2. Definición del problema .....	4
1.3. Objetivos.....	5
1.4. Justificación de la investigación .....	5
CAPÍTULO II: FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....	6
2.1. Antecedentes de la investigación.....	6
2.2. Bases Teóricas.....	8
2.2.1. Espacio de funciones .....	8
2.2.2. Sucesión de funciones .....	9
2.3.1. Transformada de Fourier .....	12
2.3.2. Distribuciones Temperadas.....	14
CAPÍTULO III: MÉTODO .....	25
3.1. Enfoque metodológico .....	25
CAPÍTULO IV: RESULTADOS .....	26
4.1. Distribuciones temperadas.....	26

4.2. Distribuciones temperadas y transformadas de Fourier.....	48
CAPÍTULO V: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	56
CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES.....	58
CAPÍTULO VII: RECOMENDACIONES.....	59
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	60
ANEXOS.....	62

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Función discontinua en $f(t)t_0$ .....	9
Figura 2 Soporte de una función.....	18
Figura 3 Distribuciones discretas y continuas .....	19
Figura 4 Sucesión de funciones.....	20
Figura 5 Función escalón.....	32
Figura 6 Función discontinua con saltos.....	34
Figura 7 Sucesión de funciones $f_n(t)$ .....	36
Figura 8 Sucesión de funciones $f_n(t)$ .....	37
Figura 9 Sucesión de funciones $f_n(t)$ .....	38
Figura 10 Sucesión de funciones $f_n(t)$ .....	41
Figura 11 Derivada de sucesión de funciones $f_n'(t)$ .....	41

## RESUMEN

El objetivo de este informe de tesis fue establecer la expresión generalizada de la transformada de Fourier de las distribuciones temperadas. Se utilizó el método inductivo y deductivo para establecer la expresión generalizada de las distribuciones temperadas, de la transformada de Fourier Joseph de las distribuciones temperadas y la derivada de la transformada de Fourier Joseph en el espacio de las distribuciones temperadas. No todas las distribuciones provienen de funciones. Pero, algunas propiedades de las distribuciones asociadas con las funciones ayudaron a construir definiciones y mostrar la validez de las propiedades para todas las distribuciones. Se sigue que, en el espacio de funciones, las derivadas no siempre están definidas; sin embargo, en el espacio de las distribuciones temperadas, siempre lo son. El estudio de estas distribuciones es de gran utilidad para trabajar la transformada de Fourier Joseph de las distribuciones temperadas, en la que se establece que toda función de crecimiento lento está asociada a una distribución temperada en el espacio vectorial de Schwartz Laurent. De manera similar, cada derivada de una distribución y cada transformada de Fourier Joseph está asociada con una distribución temperada en el espacio vectorial de Schwartz Laurent. La transformada de Fourier de distribuciones temperadas es fundamental en la prueba del teorema de Malgrange Bernard-Ehrenpreis Eliezer, que tratan de la existencia única de solución fundamental de todo operador lineal con coeficientes constantes.

**Palabras clave:** Espacio vectorial de Schwartz Laurent, distribuciones temperadas, Transformada de Fourier de una distribución temperada.

## ABSTRACT

The objective of this thesis report is to establish the generalized expression of the Fourier transform of tempered distributions. The inductive and deductive method is used to establish the generalized expression of the tempered distributions, the Fourier Joseph transform of the tempered distributions and the derivative of the Fourier Joseph transform in the space of the tempered distributions. Also, not all distributions come from features. But, some properties of the distributions associated with the functions helped us to construct definitions and show the validity of the properties for all distributions. It follows that, in the space of functions, the derivatives are not always defined; however, in the space of tempered distributions, they always are. The study of these distributions is very useful to work on the Joseph Fourier transform of tempered distributions, in which it is established that every slowly growing function is associated with a tempered distribution in the Schwartz Laurent vector space. Similarly, each derivative of a distribution and each Fourier Joseph transform is associated with a tempered distribution in the Schwartz Laurent vector space. The Fourier transform of tempered distributions is fundamental in the proof of the Malgrange Bernard-Ehrenpreis Eliezer theorems, which deal with the unique existence of a fundamental solution of every linear operator with coefficients.

**Keywords:** Schwartz Laurent vector space, Tempered distributions, Fourier transform of a distribution

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. Antecedentes

La transformada de Fourier (TF) es especialmente fundamental en matemáticas, ya sea desde el punto de vista de los principios o de sus aplicaciones a distintos campos de la física.

Aunque las series de Joseph Fourier son efectivas en funciones periódicas definidas en  $\mathbb{R}$ , se desea ampliar esta noción a cualquier función que no sea necesariamente periódica en  $\mathbb{R}$ . La TF es una interpretación continua de los coeficientes de la serie de Joseph Fourier. Aquí, los coeficientes de Joseph Fourier están dados por

$$\hat{g}(n) = \int_0^1 g(x)e^{-2\pi inx} dx$$

donde  $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n)e^{-2\pi inx}$ .

Si sustituimos la fórmula discreta con representaciones continuas, la TF se definirá en  $\mathbb{R}$ , de la siguiente manera

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2\pi ix\xi} dx \dots (1)$$

La función de reinicio viene dada por

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

Tenga en cuenta que TF y el coeficiente de Joseph Fourier son similares, pero no tiene la misma explicación y comprensión. Para que (1) tenga significado debe verificar ciertas restricciones, pues no es necesario que dicha integral esté bien descrita en el conjunto  $\mathbb{R}$ . Aquí surge la extensión de las TF sobre los espacios  $L_1(\mathbb{R}^2)$  y  $L_2(\mathbb{R}^2)$ .

Sean  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  dos puntos de  $\mathbb{R}^2$  con producto escalar  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ , luego para las funciones  $g \in L_1(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |g(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^2} |g(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 < +\infty$$

La TF  $\hat{g} = \mathfrak{F}[g]$ , es definida por

$$\hat{g}(\xi) = \mathfrak{F}[g(x)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \exp(i2\pi \langle x, \xi \rangle) dx$$

De modo similar, su cotransformada

$$\bar{\mathfrak{F}}[g](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \exp(i2\pi \langle x, \xi \rangle) dx$$

Sin embargo, muchas funciones  $g \in L_1(\mathbb{R}^2)$  no tienen cotransformada, por ejemplo  $g(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$  su  $\hat{g} = \mathfrak{F}g$ , pero su cotransformada no existe, ya que  $1 \notin L_1(-\infty, \infty)$ . De manera similar,  $x^n, \exp(x), \sin x$  no tienen TF ni cotransformada desde  $g \notin L_1(-\infty, \infty)$ .

En el caso de  $g \in L_2(\mathbb{R}^2)$ , sus transformadas  $\mathfrak{F}T_g \in L_2(\mathbb{R}^2)$ . Dado que son integrables al cuadrado  $\int_{\mathbb{R}^2} |g|^2 d\mu < \infty$ . En este espacio existe funciones que no son integrables y que no tienen TF. Pero cuando se trabaja en espacios de Hilbert, debido a la densidad de funciones del espacio Laurent Schwartz en  $L_2(\mathbb{R}^2)$ , existe una sucesión  $g_n$  de funciones en el espacio Laurent Schwartz que convergen hacia  $g$  con norma de  $L_2(\mathbb{R}^2)$ . Esto permite su extensión hacia los espacios de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  ya que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R}^2)$  y  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \subset L_p(\mathbb{R}^2)$  para todo  $p \in [1, \infty]$ . Aquí las TF operan muy bien (existe convergencia, inversa, etc.). Este espacio vectorial  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ , consta de funciones infinitamente diferenciables  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  tal que  $g$  y todas sus derivadas disminuyen muy rápido a infinito. Pero como en este espacio  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  hay limitadas funciones, se hizo necesaria extenderlas a un espacio, donde están contenidas las funciones  $g \in L_p(\mathbb{R}^2)$  y las funciones  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  en el espacio de las distribuciones temperadas  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ , donde cada distribución temperada se transforma en otra distribución temperada.

La incertidumbre de la TF fue su crecimiento hasta el infinito, en el caso de una función  $g \in L_1(\mathbb{R}^2)$  o  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  para precisar la integral de Joseph Fourier  $\int_{\mathbb{R}^2} g(x) \exp(-i\xi x) dx$  de una función continua  $g(x)$ , para todo  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , se debe tener restricciones que señalen el crecimiento de  $g(x)$  al infinito. La misma dificultad aparece cuando se quiere definir una idea de TF para distribuciones. Esta desventaja del crecimiento infinito puede controlarse en el espacio de las distribuciones temperadas. Por lo que vamos a investigar una expresión más general.

## **1.2. Definición del problema**

### **1.2.1. Problema General**

a) ¿Es posible establecer la expresión generalizada de la transformada de Fourier en distribuciones temperadas?

### **1.2.2. Problemas Específicos**

a) ¿Es posible establecer que toda función de crecimiento lento tiene asociada una distribución temperada sobre el espacio vectorial de Schwartz?

b) ¿Es posible establecer que toda derivada de una distribución tiene asociada una distribución temperada sobre el espacio vectorial de Schwartz?

c) ¿Es posible establecer que toda transformada de Fourier de una distribución tiene asociada una distribución temperada sobre el espacio vectorial de Schwartz?

### **1.3. Objetivos**

#### **1.3.1. Objetivo general**

a) Establecer la expresión generalizada de la transformada de Fourier en distribuciones temperadas.

#### **1.3.2. Objetivos específicos**

a) Establecer que toda función de crecimiento lento tiene asociada una distribución temperada sobre el espacio vectorial de Schwartz.

b) Establecer que toda derivada de una distribución tiene asociada una distribución temperada sobre el espacio vectorial de Schwartz.

c) Establecer que toda transformada de Fourier de una distribución tiene asociada una distribución temperada sobre el espacio vectorial de Schwartz.

### **1.4. Justificación de la investigación**

A través de este trabajo se destaca la importancia del espacio de las distribuciones temperadas para el desarrollo de las transformadas de

Joseph Fourier. Este espacio permite superar las dificultades que surgen cuando se aplican transformadas de Fourier a los espacios  $L_1(\mathbb{R}^2)$ ,  $L_2(\mathbb{R}^2)$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ . En particular en los campos de la física matemática, la física teórica y el análisis de las ecuaciones diferenciales parciales.

Comprender este espacio vectorial, es decir, sobre las distribuciones temperadas, facilita la comprensión de los espacios de Sobolev. Dado que los espacios de Sobolev no solo requieren la gestión de distribuciones, sino también de los espacios  $L_p(\Omega)$ .

## CAPÍTULO II

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

#### 2.1. Antecedentes de la investigación

Schwartz (1966), en su "Teoría de distribuciones", define una distribución temperada como una forma lineal y continua  $T(\phi)$ , que existe en un espacio topológico dual al espacio  $\mathcal{S}$ . De manera similar, con respecto a la TF de distribuciones temperadas, a partir de los resultados conocidos de la TF en casos elementales, el espacio  $\mathcal{S}'$  de las distribuciones temperadas será el dominio por excelencia del análisis armónico en 2, 3 o más variables.

Bhattacharyya (2012), en su teoría de "Distribuciones", en virtud a la inmersión que existe  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_1(\mathbb{R}^n)$  todas las propiedades de la TF de  $g$  y sus cotransformadas de  $g$  para  $L_1(\mathbb{R}^n)$  son válidas para el espacio de Laurent Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Rahman (2011), en su "Aplicaciones de las TF a las funciones generalizadas", considera una función generalizada como una función suave, que puede ser infinitamente diferenciable y tiende a cero cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , es decir,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^m g^{(n)}(x) = 0$ . Esta función suficientemente suave, que es diferenciable en todas partes, un número de veces, de modo que la

función y todas sus derivadas tienden a cero cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . Por tanto, si  $g(x)$  es una función suave, su TF también será suave.

Golse (2013), en "Distribuciones, análisis de Fourier, ecuaciones en derivadas parciales", no está satisfecho con la TF en el espacio de Laurent Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , porque hay muy pocas funciones en este espacio; se extiende la definición al espacio de las distribuciones temperadas  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , donde para cualquier distribución temperada, su TF también lo será.

Boumaza (2018), en "Distribuciones temperadas y espacios de Sobolev", demuestra que los espacios  $L_1(\mathbb{R}^n)$  y  $L_2(\mathbb{R}^n)$  están contenidos en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , de modo que es más conveniente hacer el análisis armónico aquí en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ya que la TF de funciones también pertenecen a  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Grabchak (2020), en "Un método exacto para simular distribuciones estables temperadas rápidamente decrecientes", al construir un modelo de aplicación financiera, señala que es difícil trabajar con distribuciones porque no tienen una forma cerrada para los cálculos de probabilidad y las funciones características.

Shaviv (2020), en "Distribuciones temperadas y funciones de Laurent Schwartz sobre variedades definibles", señala que para orientar estas variedades definidas en las distribuciones temperadas y los espacios

de funciones de Schwartz, deben estar acotadas polinómicamente para llegar a un resultado y presentar varios casos.

## **2.2. Bases Teóricas**

Se introducen las definiciones de espacio de funciones seccionalmente continuas, sucesión de funciones, así como funciones ortonormales. Algunos textos consultados se citan de las referencias bibliográficas.

### **2.2.1. Espacio de funciones**

#### **Definición 2.2.1.1. Funciones complejas seccionalmente continuas $\mathcal{C}([a, b])$**

Se dice que una función compleja  $f(t)$  es seccionalmente continua en el intervalo  $[a, b]$  si  $f$  es acotado en  $[a, b]$  y si hay un número finito de discontinuidades, estas deben ser de salto, de una variable  $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ .

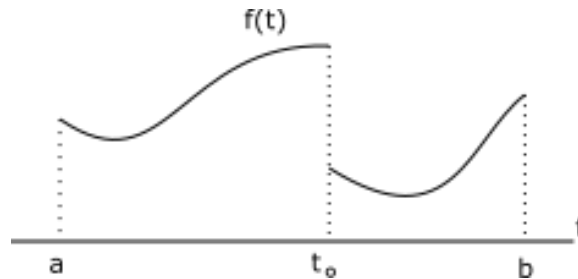


Figura 1 Función discontinua en  $f(t)t_0$

### Definición 2.2.1.2. Producto escalar sobre $\mathcal{C}([a, b])$

Se denomina producto escalar o interno sobre  $\mathcal{C}([a, b])$  a una aplicación

$(\cdot, \cdot) : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las siguientes condiciones:

1.  $(g, g_1) = \overline{(g_1, g)} \quad \forall g, g_1 \in \mathcal{C}([a, b])$
2.  $(\beta g, g_1) = \bar{\beta}(g, g_1) \quad \forall g, g_1 \in \mathcal{C}([a, b]), \forall \beta \in \mathbb{C}$
3.  $(g, \beta g_1) = \beta(g, g_1) \quad \forall g, g_1 \in \mathcal{C}([a, b]), \forall \beta \in \mathbb{C}$
4.  $(g, g_1 + g_2) = (g, g_1) + (g, g_2) \quad \forall g, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([a, b])$
5.  $(g + g_1, g_2) = (g, g_2) + (g_1, g_2) \quad \forall g, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([a, b])$
6.  $(g, g) > 0$  si  $g \neq 0 \quad \forall g \in \mathcal{C}([a, b])$

### 2.2.2. Sucesión de funciones

#### Definición 2.2.2.1. Convergencia puntual de funciones

En una sucesión de funciones  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  en  $\mathcal{C}([a, b])$ , se dice que  $g_n(t_0)$  converge puntualmente a  $g(t_0)$  sí y solo si  $\forall t_0 \in [a, b]$  y  $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}$  tal que para  $|g_n(t_0) - g(t_0)| < \varepsilon$  para  $n > m$ .

**Notación 2.2.2.1.** Convergencia puntual:  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t_0) = g(t_0)$

**Definición 2.2.2.2. Convergencia uniforme de funciones en  $\mathcal{C}([a, b])$**

Una sucesión de funciones  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  en  $\mathcal{C}([a, b])$ , converge uniformemente a  $g(t)$  sí y solo si  $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}$  tal que para  $|g_n(t) - g(t)| < \varepsilon$  siempre que  $n > m \forall t \in [a, b]$ .

**Notación 2.2.2.2.** Convergencia uniforme:  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = g(t)$

**Definición 2.2.2.3. Convergencia de funciones en  $\mathcal{C}([a, b])$**

Una sucesión de funciones  $(g_n(t))_{n \in \mathbb{N}_0}$  en  $\mathcal{C}([a, b])$ , converge en la norma a  $g(t)$  sí y solo si  $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}$  tal que para  $\|g_n(t) - g(t)\| < \varepsilon$  para  $n > m$ .

**Notación 2.2.2.3.** Convergencia en la norma :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\| = 0$

**Definición 2.2.2.4. Sucesión de Cauchy en  $\mathcal{C}([a, b])$**

Una sucesión  $\{g_n\}$  en  $\mathcal{C}([a, b])$  se dice que es una sucesión de Cauchy sí y solo si  $\forall \varepsilon > 0$  existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\|g_n - g_m\| < \varepsilon$  para  $\forall n, m \geq N$ .

**Definición 2.2.2.5. Espacio normado completo  $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|)$**

Se dice que un espacio normado  $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|)$  es completo si una sucesión de Cauchy converge en este espacio  $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|)$ .

**Definición 2.2.2.6. Espacio de Banach** ( $\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|$ )

Un espacio normado completo ( $\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|$ ) se denomina espacio de Banach.

**Definición 2.2.2.7. Funciones ortonormales de un conjunto de funciones**

Un conjunto de funciones  $\{\psi_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  se dice que es ortonormal si se satisface su producto interno

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}, \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

**Definición 2.2.2.8. Linealmente independiente de funciones**

Se dice que un conjunto de funciones  $\{\psi_n(t)\}_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \gamma}$  es linealmente independiente si existe  $a_1, a_2, \dots, a_\gamma$  todas iguales a cero tal que  $\sum_{n=1}^{\gamma} a_n \psi_n(t) = 0$ , para todo  $a < t < b$ .

**Definición 2.2.2.9. Espacio de funciones  $L_1(\mathbb{R})$**

Es un espacio lineal normado completo, tal que si  $g \in L_1(\mathbb{R})$  su norma

$$\|g\| = \int_{-\infty}^{\infty} |g| < \infty.$$

Por lo tanto,  $g \in L_1 \Leftrightarrow |g| \in L_1$

### **Definición 2.2.2.10. Espacio de funciones $L_2(\mathbb{R}^2)$**

Es el espacio de las funciones de cuadrado integrable.

$$\|g\|_2 = \int |g|^2 d\mu$$

## **2.3. Marco Conceptual**

En el análisis de variables de nuestro estudio, se introduce algunas definiciones de la TF, de sucesión de distribuciones, de producto de distribuciones. También se definen las distribuciones y TF. Algunos textos consultados se citan en la bibliografía, como Rogan y Muñoz, 2009, Bhattacharyya, 2012, Duistermaat y Kolk, 2010, Schwartz, 1998 y Wilde, 2012.

### **2.3.1. Transformada de Fourier**

#### **2.3.1.1. Introducción**

Sea  $g$  una función seccionalmente continua  $g \in \mathcal{C}\{(-L, L)\}$ .

Entonces,

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}}, \quad \text{con } x \in [-L, L], \quad (2.1.)$$

donde,

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \quad (2.2.)$$

Si se determina el límite  $\xi = \frac{\pi n}{L}$ , cuando  $L \rightarrow \infty$ , este límite  $\xi$  se vuelve

continuo. Por otro lado,  $\Delta\xi = \frac{\Delta n \pi}{L} = \frac{\pi}{L}$ , porque  $\Delta n = 1$

Se define  $C_L(\xi) = \frac{L}{\pi} C_n$  (2.3)

Usando las definiciones en las ecuaciones (2.1), (2.2.) y (2.3)

se obtiene:

$$g(x) = \sum_{\frac{L\xi}{\pi} = -\infty}^{\infty} C_L(\xi) \frac{\pi}{L} e^{i\xi x} \left( \frac{\Delta\xi L}{\pi} \right) = \sum_{\frac{L\xi}{\pi} = -\infty}^{\infty} C_L(\xi) e^{i\xi x} \Delta\xi$$

$$C_L(\xi) = \frac{L}{\pi} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x) e^{i\xi x} dx$$

Al hacerse  $L \rightarrow \infty$  aparece  $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{i\xi x} dx$

$$C(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx$$

Se define  $C(\xi)$  como la TF de la función  $g(x)$ .

### Definición 2.3.1.1.1. (Transformada y cotransformada de Fourier)

Sea  $g \in \mathcal{C}\{(-L, L)\}$  tal que  $\int_{-L}^L |g(x)|^2 dx < \infty$ , se define la TF de la función  $g(x)$  en  $\xi \in \mathbb{R}$ , a la función  $\mathcal{F}$  dada por

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx = \mathfrak{F}\{g, \xi\}$$

La cotransformada de Fourier viene dada por el teorema de reciprocidad

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

### 2.3.1.2. Propiedades de $\mathfrak{F}\{g, \xi\}$

Algunas propiedades de la TF.

Sean  $g, h \in L_1$  y  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$

1.  $\mathfrak{F}\{\beta_1 g + \beta_2 h, \xi\} = \beta_1 \mathfrak{F}\{g, \xi\} + \beta_2 \mathfrak{F}\{h, \xi\}$  es lineal.

2.  $\mathfrak{F}\{g(x - b), \xi\} = e^{i\xi b} \mathfrak{F}\{g, \xi\} = e^{i\xi b} \mathfrak{F}(\xi)$

3.  $\mathfrak{F}\{g, -\xi\} = \overline{\mathfrak{F}\{g, \xi\}}$  ,  $g \in \mathbb{R}$

4.  $\mathfrak{F}\{e^{bx} g(x), \xi\} = \mathfrak{F}\{g, \xi - bi\} = \mathcal{F}(\xi - bi)$

5.  $\mathfrak{F}\{e^{ibx} g(x), \xi\} = \mathfrak{F}\{g, \xi + b\} = \mathcal{F}(\xi + b)$

6.  $\mathfrak{F}\{g(\beta_1 x), \xi\} = \frac{1}{|\beta_1|} \mathfrak{F}\left\{g(x), \frac{\xi}{\beta_1}\right\} = \frac{1}{|\beta_1|} \mathcal{F}\left(\frac{\xi}{\beta_1}\right)$

#### **Proposición 2.3.1.2.1.**

Si  $g(x)$  es más diferenciable, más rápido decrece; entonces  $\mathfrak{F}(\xi) \rightarrow 0$ , cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$  decrece.

#### **Proposición 2.3.1.2.2.**

Si  $g(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$  es más rápido, entonces  $\mathfrak{F}(\xi)$  es más diferenciable.

### **2.3.2. Distribuciones Temperadas**

#### **Definición 2.3.2.1. Espacio de las funciones de Laurent Schwartz $\mathcal{S}$**

Una función  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  se relaciona con el espacio de Schwartz Laurent, denotado por  $\mathcal{S}$ , si es infinitamente diferenciable y además

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^m g^{(n)}(t) = 0, \quad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N}$$

#### **Definición 2.3.2.2. Funcionales lineales en espacios vectoriales**

Sea  $X$  un espacio vectorial sobre el campo de complejos de dimensión finita, existen funciones  $g: X \rightarrow \mathbb{C}$  que cumplan la linealidad

$$g(\beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2) = \beta_1 g(\bar{x}_1) + \beta_2 g(\bar{x}_2), \quad \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in X; \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$$

**Definición 2.3.2.3. Espacio dual en espacio vectoriales**

Sea  $X$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ . El espacio dual  $X$  denotado por  $X^*$  se define como el conjunto  $X^* = \{g: X \rightarrow \mathbb{C}; g \text{ son funciones lineales}\}$

**Definición 2.3.2.4. Covector**

Un covector es un elemento del espacio dual.

**Observación 2.3.2.3.**

Considere el espacio vectorial de Schwartz Laurent  $\mathcal{S}$  de funciones infinitamente diferenciables y rápidamente decrecientes de dimensión finita, sus vectores son funciones  $x(t), y(t), z(t) \dots \in \mathcal{S}$

**Definición 2.3.2.5. Funcional lineal  $\mathcal{S}$**

Un funcional  $\psi: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$  es lineal en  $\mathcal{S}$  si satisface

$$\langle \psi, \beta_1 y + \beta_2 z \rangle = \beta_1 \langle \psi, y \rangle + \beta_2 \langle \psi, z \rangle \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C} \quad y \quad \forall y, z \in \mathcal{S}$$

**Definición 2.3.2.6. Convergencia fuerte de sucesión de funciones**

Se dice que una sucesión de funciones en el espacio Schwartz  $\mathcal{S}$ ,  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  converge fuertemente a cero, sí y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t^m x_n^\gamma(t) = 0, \quad \text{para todo } \gamma, m \in \mathbb{N}_0$$

**Definición 2.3.2.7. Funcional continua  $\psi$**

$\psi: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$  es continua si

Para todo  $z_n \in \mathcal{S}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t) = z(t)$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi, z_n \rangle = \langle \psi, z \rangle$  en  $\mathbb{C}$

### **Definición 2.3.2.8. Conjunto de Distribución temperadas $\mathcal{S}'$**

Se dice que  $\psi: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$  es una distribución temperada si  $\psi$  es lineal y continua.

### **Definición 2.3.2.9. Suma de distribuciones temperadas $\mathcal{S}'$**

La suma de dos distribuciones temperadas  $\phi$  y  $\psi$  se define como el funcional lineal  $\phi + \psi$  tal que,

$$\langle \phi + \psi, z \rangle = \langle \phi, z \rangle + \langle \psi, z \rangle, \text{ para todo } z \in \mathcal{S}$$

### **Definición 2.3.2.10. Producto de un escalar por una distribución $\mathcal{S}'$**

El producto de un escalar  $\beta$  y una distribución temperada  $\psi$  se define como el funcional lineal  $\beta\psi$  tal que,

$$\langle \beta\psi, z \rangle = \beta \langle \psi, z \rangle, \text{ para todo } z \in \mathcal{S} \text{ y para todo } \beta \in \mathbb{C}.$$

### **Definición 2.3.2.11. Función que crece lentamente**

Se dice que una función  $g(t)$  crece lentamente si,

$$|g(t)| < B(1 + t^2)^m,$$

para algún  $B, m \in \mathbb{N}$ .

### **Definición 2.3.2.12. Funcional $\bar{g} \in \mathcal{S}'$**

Sea la función  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  que crece lentamente, seccionalmente continua y con discontinuidades. El funcional  $\bar{g}$  asociado a la función  $g(t)$  se define como:

$$\langle \bar{g}, z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)z(t)dt,$$

donde  $z(t) \in \mathcal{S}$ .

### 2.3.3. Derivada de una distribución temperada

#### Definición 2.3.3.1. Derivada de una distribución temperada $\psi'$

Si  $\psi \in \mathcal{S}'$ . La derivada de la distribución  $\psi'$  se define como

$$\langle \psi', z \rangle = -\langle \psi, z' \rangle, \quad \text{para todo } z \in \mathcal{S}$$

#### Definición 2.3.3.2. Distribución de una distribución $\mathcal{S}'$ de valor cero

La distribución temperada  $\psi \in \mathcal{S}'$  que tiene un valor cero en  $(a, b)$  se define como:

$$\langle \psi, z \rangle = 0, \quad \text{para todo } z \in \mathcal{S}$$

En este caso se escribe

$$\psi(t) = 0 \quad \text{para } t \in (a, b)$$

#### Observaciones 2.3.3.1.

Si el funcional  $\bar{g}$  asociado con  $g$  tiene un valor cero en  $(a, b)$ .

Entonces,

$$g(t) = 0 \quad \text{en } t \in (a, b)$$

### Ejemplo 2.3.3.1.

Sean  $(a, b)$  un intervalo abierto sin valor cero y  $\delta$  la distribución temperada definida por  $\langle \delta, z \rangle = z(0)$ , para todo  $z \in \mathcal{S}$ .

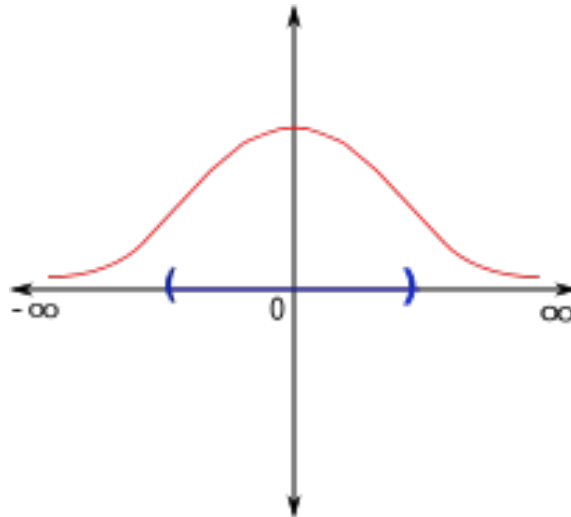
Además, sea  $x(t) \in \mathcal{S}$  tal que  $x(t) \neq 0$ ,  $t \in (a, b)$ . Entonces, se tiene

$$\langle \delta, x \rangle = x(0) = 0, \text{ porque } 0 \notin (a, b)$$

Según la notación, se escribe  $\delta(t) = 0$ , si  $t \neq 0$ .

### Definición 2.3.3.3. Soporte de una distribución temperada $S'$

El soporte de una distribución  $\psi$  es el conjunto cerrado más pequeño fuera del cual  $\psi = 0$ .



*Figura 2 Soporte de una función*

### Ejemplo 2.3.3.2

Según la definición 2.3.3.3.,  $\delta$  tiene soporte  $\{0\}$  y  $\delta_b$  tiene soporte  $\{b\}$ .

### Definición 2.3.1.4. Valor de la distribución temperada

La distribución temperada  $\psi \in \mathcal{S}'$  define valores  $g(t), a < t < b$  si  $\psi - \bar{g}$  tiene valor cero en  $a < t < b$ .

### 2.3.4. Sucesión de distribuciones

En figura 3 se considera la tendencia de las distribuciones discretas a la distribución continua.

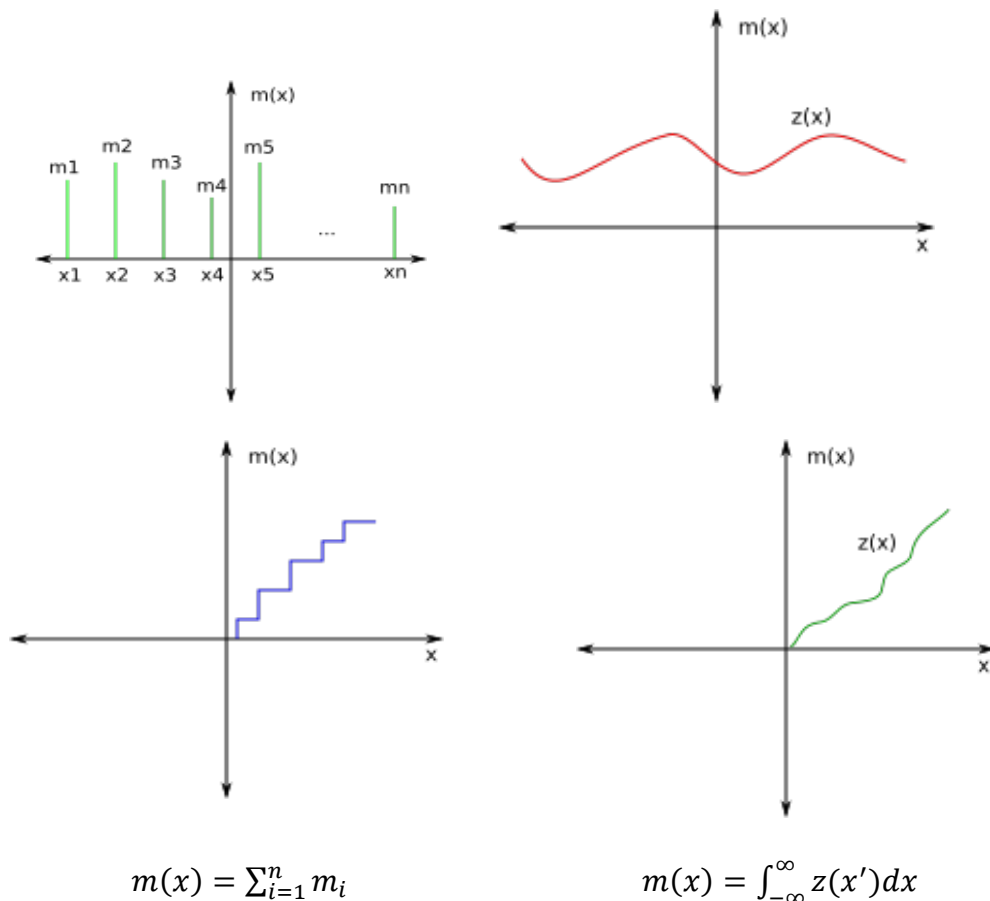


Figura 3 Distribuciones discretas y continuas

**Definición 2.3.4.1. Convergencia de una sucesión de distribuciones temperadas**

Una sucesión de distribuciones temperadas  $\{\psi_n\}$  que converge a una distribución temperada  $\psi$  y se define como

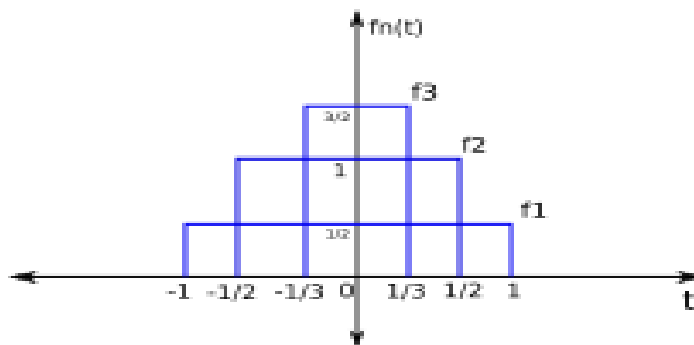
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi_n - \psi, x \rangle = 0 \text{ para todo } z \in \mathcal{S}.$$

Es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \psi \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi_n, z \rangle = \langle \psi, z \rangle$ , para todo  $z \in \mathcal{S}$ .

**Ejemplo 2.3.4.1**

Sean las sucesiones de funciones

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } |t| < \frac{1}{n} \\ 0, & \text{si } |t| > 1/n \end{cases}$$



*Figura 4 Sucesión de funciones*

Y sus respectivos funcionales asociados. Uno de los funcionales actúa sobre cualquier función “z”, y usando el teorema de valor medio se tiene

$$\langle \bar{f}_n, z \rangle = \int_{-1/n}^{1/n} \frac{n}{2} z(t) dt = z(t) \quad , -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n}$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \bar{f}_n, z \rangle = z(0) = \langle \delta, z \rangle$$

Por tanto, en términos de distribuciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = \delta$$

### **Definición 2.3.4.2. Distribución temperada par e impar**

Una distribución temperada  $\psi$  es par si

$$\langle \psi, z(t) \rangle = \langle \psi, z(-t) \rangle$$

una distribución temperada  $\psi$  es impar si

$$\langle \psi, z(t) \rangle = -\langle \psi, z(-t) \rangle$$

### **Ejemplo 2.3.4.2**

Sea  $z(t) \in \mathcal{S}$ , arbitraria. Se define  $y(t) = z(-t)$

1. Afirmación:  $\delta$  es una distribución temperada par. En efecto,

$$\langle \delta, z(-t) \rangle = \langle \delta, y(t) \rangle = y(0) = z(0) = \langle \delta, z(t) \rangle$$

2. Afirmación:  $\delta'$  es una distribución temperada impar. En efecto,

$$\langle \delta', z(-t) \rangle = \langle \delta', y(t) \rangle = -\langle \delta, y'(t) \rangle = -y'(0) = z'(0) = -\langle \delta, z(t) \rangle$$

como  $y(t) = z(-t) \Rightarrow y'(t) = -z'(-t)$ .

**Notación 2.3.4.1.**

Se generaliza la notación de la definición de funcional asociada a una función para distribuciones que no provienen de funciones

$$\langle \psi, z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)z(t)dt$$

**Observación 2.3.4.1.**

Si  $\psi$  es par, se tiene

$$\langle \psi, z(-t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)z(-t)dt$$

Por cambio de variable

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(-t)z(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)z(t)dt$$

Así mismo, si  $\psi$  es impar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(-t)z(-t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)z(t)dt$$

**Notación 2.3.4.2.**

Distribución temperada par:  $\psi(t) = \psi(-t)$

Distribución temperada impar:  $\psi(t) = -\psi(-t)$

### Observación 2.3.4.1.

Estas notaciones de distribución temperadas similares a funciones también se utilizan para delta. Así, algunas de las propiedades de distribución temperada toman la forma:

1.  $\langle \delta_0, z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)z(t)dt = z(0)$

2.  $\langle \delta_b, z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_b(t)z(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - b)z(t)dt = z(b)$

3.  $\langle \delta, 1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

4.  $\delta(t) = \delta(-t)$ ,  $\delta$  es par

5.  $\delta'(t) = -\delta'(-t)$ ,  $\delta'$  es impar

6.  $\delta'(t - b) = -\delta'(b - t)$

### 2.3.5. Producto de distribuciones temperadas

#### Definición 2.3.5.1. Producto de dos distribuciones temperadas

Sean  $g, h$  continuas y diferenciables, en tramos con discontinuidades y de lento crecimiento. Sean también  $\bar{g}, \bar{h}$  sus distribuciones temperadas asociadas. Entonces el producto de  $\bar{g}, \bar{h}$  se define como

$$\langle \bar{g}\bar{h}, z \rangle = \langle \bar{h}, g z \rangle \text{ para todo } z \in \mathcal{S}$$

#### Definición 2.3.5.2. Multiplicación de una distribución temperada por un polinomio

Sea  $q(t)$  un polinomio y sea  $\bar{q}(t) \in \mathcal{S}'$  su funcional asociado. Sea también,  $\psi \in \mathcal{S}'$ . Entonces  $\bar{q}\psi$  es definido como  $\langle \bar{q}\psi, z \rangle \equiv \langle \psi, qz \rangle$  para todo  $z \in \mathcal{S}$ .

### 2.3.6. Distribuciones temperadas y transformadas de Fourier Joseph

#### Definición 2.3.6.1. Transformada de Fourier de un funcional a una función del espacio Schwartz Laurent

Sea  $\bar{h} \in \mathcal{S}'$  el funcional asociado a  $h \in \mathcal{S}$ . Entonces la transformada de Fourier

$\mathfrak{F}\{\bar{h}\} \in \mathcal{S}'$  se define como  $\mathfrak{F}\{\bar{h}, \xi\} = \overline{\mathfrak{F}\{h, \xi\}}$ .

#### Definición 2.3.6.2. Transformada de Fourier de una distribución temperada

Sea  $\psi \in \mathcal{S}'$ . Entonces la TF de una distribución temperada  $\mathfrak{F}\{\psi\}$  se define como

$$\langle \mathfrak{F}\{\psi\}, z \rangle = \langle \psi, \mathfrak{F}\{z\} \rangle \text{ para todo } z \in \mathcal{S}.$$

#### Definición 2.3.6.3. Transformada inversa de Fourier en distribuciones temperadas

La transformada inversa de Fourier de una distribución temperada  $\psi \in \mathcal{S}'$  se define como

$$\langle \mathfrak{F}^{-1}\{\psi\}, z \rangle = \langle \psi, \mathfrak{F}^{-1}\{z\} \rangle \text{ para todo } z \in \mathcal{S}.$$

## CAPÍTULO III

### MÉTODO

<b>3.1. Enfoque metodológico</b>	En la elaboración del informe de tesis se empleó el método de lógica inductiva y deductiva para la expresión generalizada de la TF en distribuciones temperadas. Con el método deductivo se demostró las condiciones necesarias y suficientes de la teoría de las distribuciones temperadas y con el método inductivo se ha verificado utilizando ejemplos conocidos de la TF. Asimismo, como modelo para contrastar y verificar los resultados se utilizó el trabajo de Carleman, Beurling y Bochner, los cuales son muy cercanos a las distribuciones de Schwartz Laurent.
<b>3.2. Procedimiento del método deductivo</b>	<p><b>a) Revisión bibliográfica</b> Constaba de libros, tesis y artículos sobre los resultados del análisis funcional y de las ecuaciones diferenciales parciales. Se ha elegido un conjunto de propuestas sobre las TF en distribuciones temperadas para luego ser planteadas en busca de una solución.</p> <p><b>b) Analogía</b> Las proposiciones y definiciones de la teoría de la TF se han examinado con las distribuciones temperadas.</p> <p><b>c) Deducción</b> Se han fijado reglas deductivas y la definición de distribución. Para inferir las distribuciones temperadas.</p> <p><b>d) Generalización</b> Las proposiciones y teoremas de la TF se han generalizado basándose en las reglas lógicas para deducción de distribuciones temperadas.</p>

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS

#### 4.1. Distribuciones temperadas

**Proposición 4.1.1.** Si  $\langle \delta, z \rangle = z(0)$ , para todo  $z \in \mathcal{S}$  entonces  $\delta$  pertenece al conjunto de distribuciones temperadas.

**Prueba**

Sea  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$  y  $z, w \in \mathcal{S}$ .

**Afirmación:**  $\delta$  es una funcional lineal en  $\mathcal{S}$ . En efecto,

En efecto,

$$\begin{aligned}\langle \delta, \beta_1 z + \beta_2 w \rangle &= \beta_1 z(0) + \beta_2 w(0) \\ &= \beta_1 \langle \delta, z \rangle + \beta_2 \langle \delta, w \rangle\end{aligned}$$

Sea  $\{z_n(t)\}$  una sucesión de funciones fuertemente convergentes a  $z(t)$ , es decir,

$$z_n(t) \rightarrow z(t), \quad n \rightarrow \infty$$

Se considera el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \delta, z_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(0) = z(0) = \langle \delta, z \rangle$$

De acuerdo a lo anterior, se debe  $\delta \in \mathcal{S}'$

**Proposición 4.1.2.** Si  $\langle \delta_b, z \rangle = z(b)$ , para todo  $z \in \mathcal{S}$  entonces  $\delta_b$  pertenece al conjunto de distribuciones temperadas.

**Prueba**

Sea  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$  y  $z, w \in \mathcal{S}$ .

**Afirmación:**  $\delta_b$  es una funcional en  $\mathcal{S}$ . En efecto,

$$\begin{aligned}\langle \delta_b, \beta_1 z + \beta_2 w \rangle &= \beta_1 z(b) + \beta_2 w(b) \\ &= \beta_1 \langle \delta_b, z \rangle + \beta_2 \langle \delta_b, w \rangle\end{aligned}$$

Sean  $\{z_n(t)\}$  una sucesión de funciones fuertemente convergentes a  $z(t)$ , es decir,

$$z_n(t) \rightarrow z(t), \quad n \rightarrow \infty$$

Considere el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \delta_b, z_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(b) = z(b) = \langle \delta_b, z \rangle$$

De acuerdo a lo anterior, se debe  $\delta_b \in \mathcal{S}'$

**Proposición 4.1.3.** Si  $\langle \delta', z \rangle = -z'(0)$ , para todo  $z \in \mathcal{S}$  entonces  $\delta' \in \mathcal{S}'$  pertenece al conjunto de distribuciones temperadas.

**Prueba**

Por Linealidad,

$$\begin{aligned} \langle \delta', \beta_1 z + \beta_2 w \rangle &= \beta_1 z'(0) - \beta_2 w'(0) \\ &= \beta_1 \langle \delta', z \rangle + \beta_2 \langle \delta', w \rangle \end{aligned}$$

Sean  $\{z(t)\}$  una sucesión de funciones fuertemente convergentes a  $z(t)$ ,

$$\text{es decir, } z_n(t) \rightarrow z(t), \quad n \rightarrow \infty$$

Se considera el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \delta', z_n \rangle = - \lim_{n \rightarrow \infty} z_n'(0) = -z'(0) = \langle \delta', z \rangle$$

Por lo tanto, se tiene que  $\delta' \in \mathcal{S}'$

**Proposición 4.1.4.**  $\langle \psi, z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) dt$ , donde  $z \in \mathcal{S}$

**Prueba**

Por linealidad se tiene

$$\begin{aligned} \langle \psi, \beta_1 z + \beta_2 w \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} [\beta_1 z(t) + \beta_2 w(t)] dt \\ &= \beta_1 \int_{-\infty}^{\infty} z(t) dt + \beta_2 \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt \\ &= \beta_1 \langle \psi, z \rangle + \beta_2 \langle \psi, w \rangle \end{aligned}$$

Sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z(t)$ , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi, z_n \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_n(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) dt = \langle \psi, z \rangle \end{aligned}$$

Luego,  $\psi \in \mathcal{S}'$

**Proposición 4.1.5.** El funcional asociado  $\bar{g}$  pertenece al conjunto de distribuciones temperadas sobre  $\mathcal{S}$ .

**Prueba**

**Afirmación:**  $\bar{g}$  es una funcional lineal. En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \bar{g}, \beta_1 z + \beta_2 w \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) (\beta_1 z(t) + \beta_2 w(t)) dt \\ &= \beta_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(t) z(t) dt + \beta_2 \int_{-\infty}^{\infty} g(t) w(t) dt \\ &= \beta_1 \langle \bar{g}, z \rangle + \beta_2 \langle \bar{g}, w \rangle \end{aligned}$$

Entonces,  $\bar{g}$  es un funcional lineal.

Por otro lado, sea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t) = z(t).$$

Entonces,

$$|\langle \bar{g}, z_n - z \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(t) [z_n(t) - z(t)] dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| |z_n(t) - z(t)| dt$$

Como  $g(t)$  es de crecimiento lento se tiene

$$|\langle \bar{g}, z_n - z \rangle| \leq \int_{-\infty}^{\infty} B(1+t^2)^m |z_n(t) - z(t)| dt, \text{ para algunos } B, m \in \mathbb{N}$$

Por la definición 2.3.2.6., se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t^q [z_n^{(\gamma)}(t) - z^{(\gamma)}(t)] = 0, \text{ para todo } \gamma, q \in \mathbb{N}$$

En particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+t^2)^{m+1} [z_n(t) - z(t)] = 0 \text{ para todo } t > 0,$$

Lo cual significa que para un  $\varepsilon > 0$  se tiene,

$$(1+t^2)^{m+1} [z_n(t) - z(t)] < \varepsilon$$

Entonces, existe un  $N$  tal que

$$|\langle \bar{g}, z_n - z \rangle| \leq \int_{-\infty}^{\infty} B(1+t^2)^m \frac{\varepsilon}{(1+t^2)^{m+1}} dt, \forall n > N$$

O, equivalentemente, se tiene

$$|\langle \bar{g}, z_n - z \rangle| \leq B\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} dt = B\varepsilon\pi$$

Aplicando limites,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \bar{g}, z_n - z \rangle| = \langle \bar{g}, z \rangle$$

Por lo tanto,

$$\bar{g} \in \mathcal{S}'$$

**Proposición 4.1.6.** Sean  $g, h \in \mathcal{S}$  seccionalmente continuas y de lento crecimiento. Sean también  $\bar{g}, \bar{h}$  distribuciones temperadas. Si  $\bar{g} = \bar{h} \Rightarrow g = h$ .

## Prueba

Sea  $z \in \mathcal{S}$  arbitrario,

$$\bar{g} = \bar{h} \Rightarrow \langle \bar{g}, z \rangle = \langle \bar{h}, z \rangle$$

Por el absurdo, supongamos  $g \neq h$  en un punto, por ejemplo  $g(t_1) > h(t_1)$ .

Por continuidad de  $g(t)$  y  $h(t)$  se tiene que  $g(t) > h(t)$  en una vecindad  $(a, b)$  alrededor de  $t_1$ . Si  $t_1$  fuera un punto de discontinuidad de  $g$  o  $h$ , no hay problema, siempre se puede recorrer  $t_1$  en un intervalo cercano.

Considere una función de prueba  $z(t)$  tal que  $z(t) > 0$ . Si  $a < t < b$  y  $z(t) = 0$  si  $t \notin (a, b)$ , entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} [g(t) - h(t)]z(t)dt = \int_a^b [g(t) - h(t)]z(t)dt \neq 0$$

Es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)z(t)dt \neq \int_{-\infty}^{\infty} h(t)z(t)dt$$

Entonces  $\langle \bar{g}, z \rangle \neq \langle \bar{h}, z \rangle \Rightarrow \bar{g} \neq \bar{h}$ , contradice la hipótesis. Por lo tanto,

$$g = h.$$

### 4.1.1. Derivada de una distribución Temperada

**Proposición 4.1.1.1.** La derivada de la distribución  $\psi'$  pertenece al conjunto de distribuciones temperadas  $\mathcal{S}'$ .

## Prueba

Se examina la derivada funcional sobre una combinación lineal de funciones

$$\begin{aligned}\langle \psi', \beta_1 z + \beta_2 w \rangle &= -\langle \psi, \beta_1 z' + \beta_2 w' \rangle \\ &= -\beta_1 \langle \psi, z' \rangle - \beta_2 \langle \psi, w' \rangle \\ &= \beta_1 \langle \psi', z \rangle + \beta_2 \langle \psi', w \rangle\end{aligned}$$

se cumple la linealidad.

Por otro lado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t) = z(t),$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi', z_n \rangle &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi, z'_n \rangle \\ &= -\langle \psi, z' \rangle = \langle \psi', z \rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\psi' \in \mathcal{S}'$$

### Ejemplo 4.1.1.1. (Función escalón de Heaviside)

Se considera la función

$$\begin{aligned}h: \mathbb{R} &\rightarrow \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} \\ t \rightarrow h(t) &= \frac{1 + \operatorname{sgn}(t)}{2} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

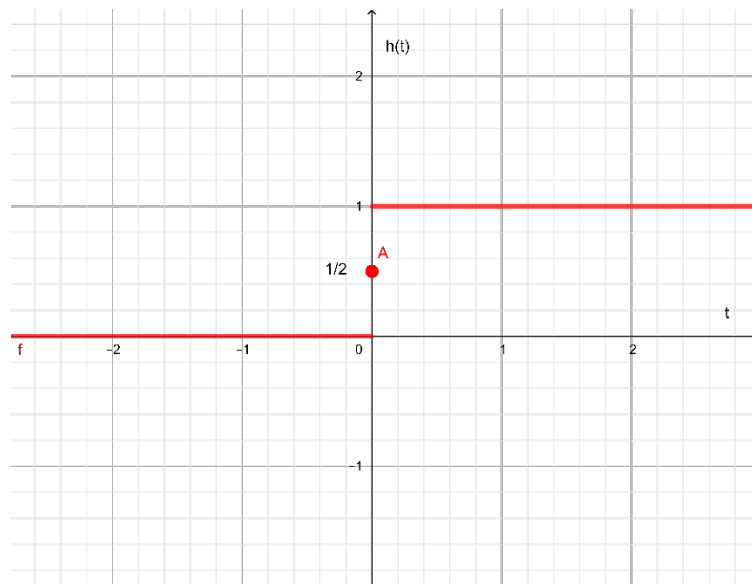


Figura 5 Función escalón

Se considera el funcional asociado con  $h$ , definido por

$$\begin{aligned} \langle \bar{h}, z \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)z(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)dt, \quad \text{para todo } z \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

Se evalúa la derivada

$$\begin{aligned} \langle \bar{h}', z \rangle &= -\langle \bar{h}, z' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} z'(t)dt, \quad \text{para todo } z \in \mathcal{S} \\ &= -z(t)]_0^{\infty} \\ &= -(z(\infty) - z(0)) \\ &= z(0) \\ &= \langle \delta, z \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bar{h}' = \delta$$

**Proposición 4.1.1.2.** En las distribuciones la diferenciación es lineal, es decir,

$$\langle \beta_1 \phi + \beta_2 \psi \rangle' = \beta_1 \phi' + \beta_2 \psi'$$

**Prueba**

$$\begin{aligned} \langle (\beta_1 \phi + \beta_2 \psi)', z \rangle &= -\langle \beta_1 \phi' + \beta_2 \psi', z \rangle \text{ para todo } z \in \mathcal{D} \\ &= -\beta_1 \langle \phi', z \rangle - \beta_2 \langle \psi', z \rangle \\ &= \beta_1 \langle \phi, z' \rangle + \beta_2 \langle \psi, z' \rangle \end{aligned}$$

**Proposición 4.1.1.3.** Si  $f$  tiene discontinuidades de saltos finito de tamaño  $p$  en  $t = a$  y  $f'$  es continua fuera de  $a$ , entonces

$$\bar{f}' = \overline{df} + p\delta_a$$

**Prueba**

Sea  $f(t)$  una función diferenciable, con una única discontinuidad en  $t = a$ .

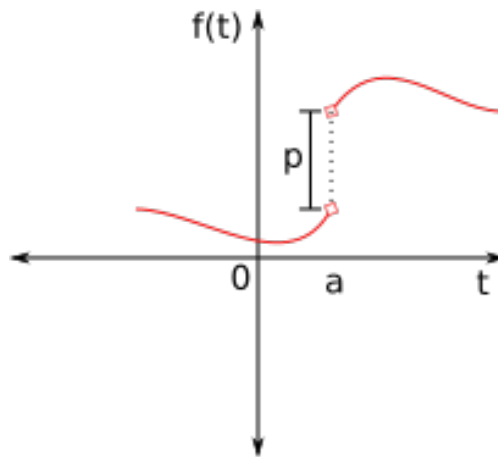


Figura 6 Función discontinua con saltos

Sea  $p = f(a^+) - f(a^-)$ . Por hipótesis se tiene la existencia de la derivada  $f'$  para  $t \neq a$ . Se denota la diferencial  $df$  en lugar de  $f'$ . Para  $t = a$ ,  $df$  no existe. Tomando en cuenta el funcional  $\bar{f}$  asociado con  $f$  y tome su derivada  $\bar{f}'$ . Para todo  $z \in \mathcal{S}$  se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{f}', z \rangle &= -\langle \bar{f}, z' \rangle = -\int_{-\infty}^{a^-} f(t)z'(t)dt - \int_{a^+}^{\infty} f(t)z'(t)dt \\
 &= -f(t)z(t)]_{-\infty}^{a^-} + \int_{-\infty}^{a^-} df(t)z(t)dt - f(t)z(t)]_{a^+}^{\infty} + \int_{a^+}^{\infty} df(t)z(t)dt \\
 &= [f(a^+) - f(a^-)]z(a) + \langle \bar{df}, z \rangle \\
 &= \langle \bar{df}, z \rangle + pz(a) = \langle \bar{df}, z \rangle + p\langle \delta_a, z \rangle \\
 &= \langle \bar{df} + p\delta_a, z \rangle
 \end{aligned}$$

Entonces, en el espacio de distribuciones temperadas, se cumple

$$\bar{f}' = \bar{df} + p\delta_a$$

#### 4.1.2. Sucesión de distribuciones temperadas

##### Proposición 4.1.2.1.

Sean  $h(t)$  una función no necesariamente simétrica y continua por tramos tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = 1 \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty,$$

Sea la sucesión

$$g_n(t) = nh(nt)$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{g_n}(t) = \delta$$

##### Prueba

Se toma la distribución temperada asociada con  $g_n$  y  $z$  una función arbitraria

$$\langle \overline{g_n}, z \rangle = n \int_{-\infty}^{\infty} h(nt)z(t)dt$$

Realizando un cambio de variable:  $v = nt \rightarrow dv = ndt$

$$\langle \overline{g_n}, z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)z\left(\frac{v}{n}\right)dv$$

Sea  $\max[|z(t)|] < k$ , para  $t \in (-\infty, \infty)$ , entonces

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} h(v)z\left(\frac{v}{n}\right)dv \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(v)| \left| z\left(\frac{v}{n}\right) \right| dv < k \int_{-\infty}^{\infty} |h(v)|dv < \infty.$$

Existe convergencia uniforme y podemos relacionar el límite de la integral

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \overline{g_n}, z \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(v) z\left(\frac{v}{n}\right) dv = \int_{-\infty}^{\infty} h(v) \lim_{n \rightarrow \infty} z\left(\frac{v}{n}\right) dv \\ &= z(0) \int_{-\infty}^{\infty} h(v) dv = z(0) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{g_n} = \delta$$

#### Ejemplo 4.1.2.1

Sea  $h(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ , de modo que  $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = 1$

Ocurre la sucesión  $g_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2}$

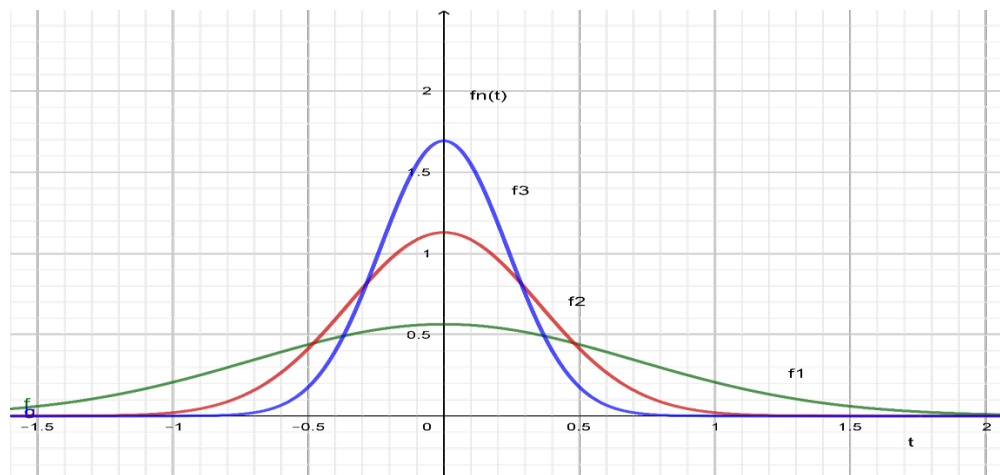


Figura 7 Sucesión de funciones  $f_n(t)$

Por la proposición 4.1.2.1. se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \overline{e^{-n^2 t^2}} = \delta(t)$$

### Ejemplo 4.1.2.2

Sea  $h(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen } t}{t}$  de modo que  $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = 1$

Ocurre la sucesión;  $f_n(t) = \frac{n}{\pi} \frac{\text{sen } nt}{nt}$

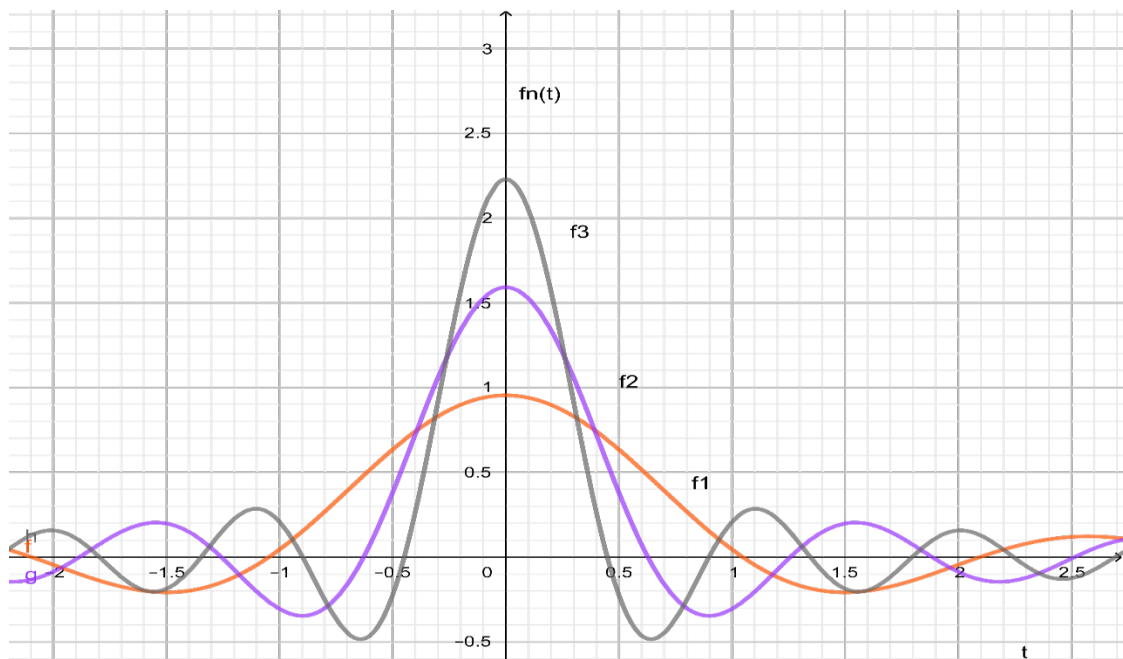


Figura 8 Sucesión de funciones  $f_n(t)$

Por la proposición 4.1.2.1., se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{\text{sen } nt}}{\pi t} = \delta(t)$$

### Ejemplo 4.1.2.3

$$\text{Sea } h(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } |t| > 1 \\ t + 1, & \text{si } -1 < t \\ -t + 1, & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$$

Ocurre la sucesión:

$$f_n(t) = nh(nt) = \begin{cases} 0, & \text{si } |t| > 1/n \\ n^2t + n, & \text{si } -\frac{1}{n} < t < 0 \\ -nt + n, & \text{si } 0 < t < 1/n \end{cases}$$

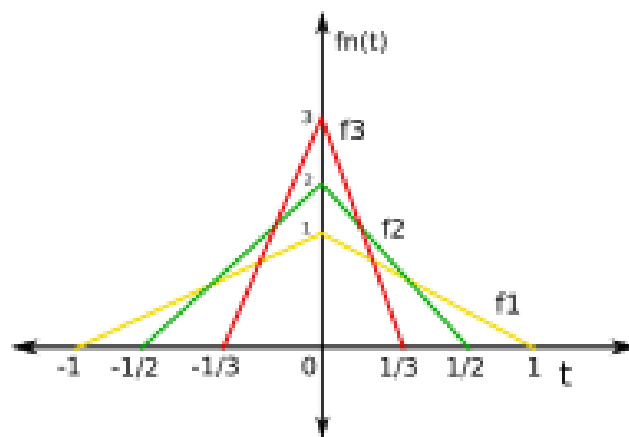


Figura 9 Sucesión de funciones  $f_n(t)$

Por la proposición 4.1.2.1. se tiene ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = \delta$$

### Ejemplo 4.1.2.4

$$\text{Sea } h(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$$

Ocurre la sucesión:

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + (nt)^2} = \frac{1}{n\pi} \frac{1}{\left(\frac{1}{n^2} + t^2\right)}$$

Entonces, con  $\rho = \frac{1}{n}$  y la proposición 4.1.2.1., se tiene,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\overline{\rho}}{\pi(\rho^2 + t)^2} = \delta$$

**Proposición 4.1.2.2.** Si en las sucesiones de distribuciones temperadas se cumple que  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \{\psi_n\} = \psi$  entonces en la sucesiones de derivadas de distribuciones temperadas se cumple que  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \{\psi'_n\} = \psi'$ .

**Prueba**

Tenemos que

$$\langle \psi'_n, z \rangle = -\langle \psi, z' \rangle$$

Por hipótesis  $\psi_n \rightarrow \psi$ . Entonces, por definición de derivada de una distribución temperada se tiene

$$-\langle \psi, z' \rangle = \langle \psi', z \rangle \text{ para todo } z.$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi'_n, z \rangle = \langle \psi', z \rangle$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi'_n = \psi'$$

**Proposición 4.1.2.3.**

Cualquier serie convergente de sucesiones de distribuciones temperadas se puede derivar término a término, en la suma.

## Prueba

De hecho, suponiendo que la serie  $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_{\tau}$  es convergente. Sea

$$x_n = \sum_{\tau=0}^n \psi_{\tau}$$

Derivando se tiene

$$\left( \sum_{\tau=0}^n \psi_{\tau} \right)' = \sum_{\tau=0}^n \psi'_{\tau}$$

Como  $x_n$  es convergente, se define

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_{\tau} = x$$

Por la **proposición 4.1.2.2** se tiene

$$x' = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n$$

Es decir,

$$x' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\tau=0}^n x'_{\tau} = \sum_{\tau=0}^{\infty} x'_{\tau}$$

## Ejemplo 4.1.2.5.

El resultado de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = \delta \Rightarrow \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f'_n} = \delta'$ , se puede ver

en la siguiente sucesión

$$f_n(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } |t| > 1/n \\ n^2 t + n, & \text{si } -\frac{1}{n} < t < 0 \\ -n^2 t + n, & \text{si } 0 < t < 1/n \end{array} \right\}$$

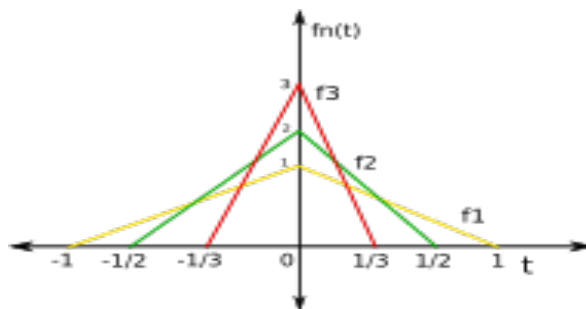


Figura 10 Sucesión de funciones  $f_n(t)$

El límite:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n(t)} = \delta$

Ahora su derivada:

$$f_n'(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } |t| > 1/n \\ n^2, & \text{si } -\frac{1}{n} < t < 0 \\ -n^2, & \text{si } 0 < t < 1/n \end{cases}$$

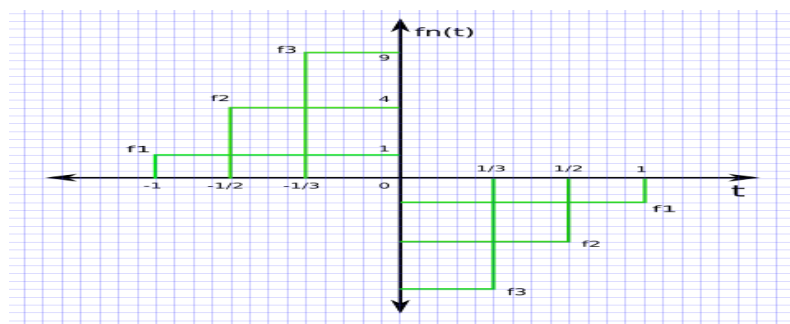


Figura 11 Derivada de sucesión de funciones  $f_n'(t)$

Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n'} = \delta'$

### Ejemplo 4.1.2.6.

En el espacio de distribuciones temperadas, una serie trigonométrica puede converger incluso cuando sus coeficientes  $c_\xi$  crecen polinómicamente, cuando  $k \rightarrow \infty$ , por ejemplo, los coeficientes de Joseph Fourier.

Considerando los coeficientes  $c_\xi$  tal que  $c_\xi < M_1 |\xi|^{\beta_1}$ , con  $M_1$  constante y  $\beta_1 > 0$  cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Precisamos la función

$$g(t) = \sum_{\substack{\xi=-\infty \\ \xi \neq 0}}^{\infty} \frac{c_\xi}{(2i\pi\xi)^{\beta_2+2}} e^{2i\pi\xi t}, \beta_2 \geq \beta_1$$

En general, esta sucesión está limitada por una constante  $\frac{M_2}{|\xi|^2}$  cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$  observando que la serie converge uniformemente de modo que  $g$  no solo está bien especificada sino que también es continua.

Ahora considerando la distribución asociada con  $g$  en la que  $\bar{g}$  es infinitamente diferenciable. En particular,

$$\bar{g}^{(\beta_2+2)}(t) = \sum_{\substack{\xi=-\infty \\ \xi \neq 0}}^{\infty} c_\xi e^{2i\pi\xi t}$$

Esta serie existe como distribución y no como función porque no convergería. Agregar un término con  $\xi = 0$  no afecta la convergencia de la serie. Finalmente,

$$\sum_{\xi=-\infty}^{\infty} c_{\xi} e^{2i\pi\xi t}$$

es sumable en  $\mathcal{S}'$ . Además, esta serie trigonométrica es una distribución de período 1, siendo la suma de  $c_0$  y la derivada de la distribución temperada una función periódica y continua.

**Proposición 4.1.2.4.**

$$\delta(\beta t) = \frac{1}{|\beta|} \delta(t)$$

**Prueba**

Sea  $\delta(\beta t)$  con  $\beta \neq 0$  y  $z \in \mathcal{S}$  función cualquier.

Ahora, considere el cambio de variable

$$v = \beta t \rightarrow dv = \beta dt$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\beta t) z(t) dt &= \text{sgn}(\beta) \int_{-\text{sgn}(\beta)\infty}^{\text{sgn}(\beta)\infty} \delta(v) z\left(\frac{v}{\beta}\right) \frac{dv}{\beta} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v) z\left(\frac{v}{\beta}\right) \frac{dv}{|\beta|} = \frac{1}{|\beta|} z(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t)}{|\beta|} z(t) dt \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\delta(\beta t) = \frac{1}{|\beta|} \delta(t)$$

**Proposición 4.1.2.5.**

Si  $g$  es una función continua, analítica y diferenciable, con ceros simples en  $t_i$  con  $i = \overline{1, n}$ , entonces

$$\delta(g(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|g'(t_i)|} \delta(t - t_i)$$

**Prueba**

Considere  $\delta(g(t))$  con  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g \in \mathcal{S}$ , es decir,  $g$  es continua, analítica y diferenciable.

Suponiendo que  $g$  tiene ceros en  $t_i$ , con  $i = \overline{1, n}$ ,  $g(t_i) = 0$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$

$$\langle \delta(g(t)), z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(t)) z(t) dt$$

El soporte de  $\delta(g(t)) = \{t_i\}_{i=\overline{1, n}}^n$ . En la vecindad de estos puntos  $g$  puede desarrollarse en una serie de Taylor

$$g(t) \cong g(t_i) + g'(t_i)(t - t_i) = g'(t_i)(t - t_i)$$

Luego,

$$\delta(g(t)) = \sum_{j=1}^n \delta(g'(t_j)(t - t_j)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(t - t_i)}{|g'(t_i)|}$$

### 4.1.3. Producto de distribuciones temperadas

#### Proposición 4.1.3.1. Producto de dos distribuciones temperadas

$$\bar{g} \cdot \bar{h} = \bar{h} \cdot \bar{g}$$

#### Prueba

Por definición se tiene

$$\begin{aligned}\langle \bar{g} \cdot \bar{h}, z \rangle &= \langle \bar{h}, g z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)h(t)z(t)dt \\ &= \langle \bar{g}, h z \rangle = \langle \bar{h} \cdot \bar{g}, z \rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bar{g} \cdot \bar{h} = \bar{h} \cdot \bar{g}$$

#### Proposición 4.1.3.2. Multiplicación de una distribución temperada por un polinomio

Si  $q$  es un polinomio,

$$\bar{q}\delta = q(0)\delta.$$

#### Prueba

$$\langle \bar{q}\delta, z \rangle = \langle \delta, q \rangle = q(0)z(0) = \langle q(0)\delta, z \rangle$$

En particular,

$$\bar{1}\delta = \bar{0}.$$

#### Proposición 4.1.3.3. Multiplicación de una distribución temperada por un polinomio

Si  $q$  es un polinomio entonces,

$$\bar{q}\delta' = q(0)\delta' - q'(0)\delta$$

**Prueba**

$$\begin{aligned}\langle \bar{q}\delta', z \rangle &= \langle \delta', qz \rangle = -(qz)'(0) = -q(0)z'(0) - q'(0)z(0) \\ &= \langle q(0)\delta' - q'(0)\delta, z \rangle\end{aligned}$$

En particular,

$$\bar{t}\delta' = -\delta.$$

$$\bar{t}^2\delta' = 0$$

#### 4.1.4. Distribuciones temperadas y ecuaciones diferenciales ordinarias

**Ejemplo 4.1.4.1.** Se considera la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$t \frac{dg}{dt} = 0$$

Sus soluciones son

$$g(t) = \begin{cases} M_1 = cte, & t > 0 \\ M_2 = cte, & t < 0 \end{cases}$$

donde  $M_1 = M_2$ , se quiere que  $g$  sea función clásica, es decir, continua.

Pero, si admitimos distribuciones temperadas como soluciones, no es necesario que  $M_1 = M_2$  porque en el espacio de distribuciones temperadas, “funciones” discontinuas son diferenciables. Se intenta dar una solución del tipo

$$g(t) = M_1 + (M_2 - M_1)k(t),$$

donde

$$k(t) = \frac{1+\text{sgn}(t)}{2}$$

Entonces,

$$\overline{\bar{t}g'(t)} = \bar{t}(M_2 - M_1)\bar{k}(t)' = (M_2 - M_1)\bar{t}\delta = 0$$

Es decir,

$\bar{g}$  es solución de la ecuación diferencial ordinaria.

#### **Proposición 4.1.4.1.**

Sea  $q(t)$  un polinomio y  $\bar{q}(t) \in \mathcal{S}'$ , su funcional asociado. Sean también,

$\psi \in \mathcal{S}'$  y  $\psi' \in \mathcal{S}'$ . Entonces,

$$(\bar{q}\psi)' = \bar{q}'\psi + \bar{q}\psi'.$$

#### **Prueba**

Se sabe que

$$\langle (\bar{q}\psi)', z \rangle = -\langle \bar{q}\psi, z' \rangle = -\langle \psi, qz' \rangle$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}'\psi + \bar{q}\psi', z \rangle &= \langle \bar{q}'\psi, z \rangle + \langle \bar{q}\psi', z \rangle \\ &= \langle \psi, q'z \rangle + \langle \psi', qz \rangle \\ &= \langle \psi, q'z \rangle - \langle \psi, (qz)' \rangle \\ &= -\langle \psi, qz' \rangle \end{aligned}$$

Al comparar, se tiene

$$(\bar{q}\psi)' = \bar{q}'\psi + \bar{q}\psi'$$

## 4.2. Distribuciones temperadas y transformadas de Fourier

### Proposición 4.2.1. Transformada de Fourier de un funcional

$$\langle \overline{\mathfrak{F}\{g\}}, z \rangle = \langle \bar{g}, \mathfrak{F}\{z\} \rangle$$

#### Prueba

Sea  $z \in \mathcal{S}$  arbitrario, Entonces,

$$\begin{aligned} \langle \overline{\mathfrak{F}\{g\}}, z \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \mathfrak{F}\{g, \xi\} z(\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(t) e^{i\xi t} z(\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi z(\xi) e^{i\xi t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) \mathfrak{F}\{z, t\} \\ &= \langle \bar{g}, \mathfrak{F}\{z\} \rangle \end{aligned}$$

### Proposición 4.2.2. Transformada de Fourier de una distribución temperada

$\psi \in \mathcal{S}'$  es una distribución temperada  $\Rightarrow \mathfrak{F}\{\psi\} \in \mathcal{S}'$  es una distribución temperada.

## Prueba

Sean  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$  y  $z, w \in \mathcal{S}$ . Entonces

### a) Linealidad

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\{\psi\}, \beta_1 z + \beta_2 w \rangle &= \langle \psi, \mathcal{F}\{\beta_1 z + \beta_2 w\} \rangle \\ &= \beta_1 \langle \psi, \mathcal{F}\{z\} \rangle + \beta_2 \langle \psi, \mathcal{F}\{w\} \rangle \\ &= \beta_1 \langle \mathcal{F}\{\psi\}, z \rangle + \beta_2 \langle \mathcal{F}\{\psi\}, w \rangle\end{aligned}$$

### b) Convergencia

$$\text{SÍ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}\{\psi\}, z_n - z \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi, \mathcal{F}\{z_n - z\} \rangle$$

Puesto que  $\psi \in \mathcal{S}'$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}\{z_n - z\} = 0$ ,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}\{\psi\}, z_n - z \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi, \mathcal{F}\{z_n - z\} \rangle \\ &= \langle \psi, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}\{z_n - z\} \rangle \\ &= \langle \psi, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} [z_n(t) - z(t)] e^{i\xi t} dt \rangle \\ &= \langle \psi, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} [z_n(t) - z(t)] e^{i\xi t} dt \rangle \\ &= \langle \psi, \mathcal{F}\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - z) \right\} \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}\{\psi\}, \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - z) \rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathfrak{F}\{\psi\} \in \mathcal{S}'.$$

#### Ejemplo 4.2.1. Transformada de Fourier de la Delta de Dirac $\delta$

Sea  $z \in \mathcal{S}$  arbitrario. Entonces,

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{F}\{\delta\}, z \rangle &= \langle \delta, \mathfrak{F}\{z\} \rangle \\ &= \langle \delta, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} z(t) dt \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z(t) dt \\ &= \overline{\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, z \right\rangle}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathfrak{F}\{\delta\} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

#### Ejemplo 4.2.2. Transformada de Fourier de la Derivada de delta $\delta'$

Sea  $z \in \mathcal{S}$  arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{F}\{\delta'\}, z \rangle &= \langle \delta', \mathfrak{F}\{z\} \rangle \\ &= \langle \delta', \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} z(t) dt \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} z(t) dt \right] \Big|_{\xi=0} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{i\xi t} dt \Big|_{\xi=0} dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z(t) it dt \\
&= \left\langle \frac{-it}{\sqrt{2\pi}}, z \right\rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathfrak{F}\{\delta'\} = \frac{\overline{(-it)}}{\sqrt{2\pi}}$$

**Proposición 4.2.3. Transformada inversa de Fourier de una distribución temperada**

$\psi \in \mathcal{S}'$  es una distribución temperada  $\Rightarrow \mathfrak{F}\mathfrak{F}^{-1}\{\psi\} = \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}\{\psi\} = \psi$

**Prueba**

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{F}\mathfrak{F}^{-1}\{\psi\}, z \rangle &= \langle \mathfrak{F}^{-1}\{\psi\}, \mathfrak{F}\{z\} \rangle \\
&= \langle \psi, \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}\{z\} \rangle \\
&= \langle \psi, z \rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathfrak{F}\mathfrak{F}^{-1}\{\psi\} = \psi$$

**Proposición 4.2.4. Transformada inversa de Fourier de distribución temperada par**

$\psi \in \mathcal{S}'$  es una distribución temperada par  $\Rightarrow \mathcal{F}\{\psi\} = \mathcal{F}^{-1}\{\psi\}$ .

**Prueba**

Sea  $z \in \mathcal{S}$  arbitrario, entonces,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{-1}\{\psi\}, z \rangle &= \langle \psi, \mathcal{F}^{-1}\{z\} \rangle \\ &= \langle \psi, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} z(t) dt \rangle \end{aligned}$$

Siendo  $\psi$  una distribución temperada par, se puede cambiar  $l$  por  $-l$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{-1}\{\psi\}, z \rangle &= \langle \psi, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ilt} z(t) dt \rangle \\ &= \langle \psi, \mathcal{F}\{z\} \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}\{\psi\}, z \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F}^{-1}\{\psi\} = \mathcal{F}\{\psi\}$$

**Proposición 4.2.5. Derivada de una transformada de Fourier**

$$\psi \in \mathcal{S}' \Rightarrow (\mathcal{F}\{\psi\})^{(n)} = \mathcal{F}\{\overline{(it)^n} \psi\} \in \mathcal{S}'$$

**Prueba**

Sea  $z \in \mathcal{S}$  arbitrario. Entonces

$$\langle (\mathcal{F}\{\psi\})^{(n)}, z \rangle = (-1)^n \langle \mathcal{F}\{\psi\}, z^{(n)} \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^n \langle \psi, \mathfrak{F}\{z^{(n)}\} \rangle \\
&= (-1)^n \langle \psi, (-it)^n \mathfrak{F}\{z\} \rangle \\
&= \langle \overline{(-it)^n} \psi, \mathfrak{F}\{z\} \rangle \\
&= \langle \mathfrak{F}\{\overline{(it)^n} \psi\}, z \rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(\mathfrak{F}\{\psi\})^{(n)} = \mathfrak{F}\{\overline{(it)^n} \psi\} \in \mathcal{S}'$$

### Ejemplo 4.2.3

Si  $g$  es una función que crece lentamente, entonces  $\mathfrak{F}\{\bar{g}\}$ , no es necesariamente una función. Por ejemplo,  $g(t) = 1$  crece lentamente, pero  $\mathfrak{F}\{\bar{1}\} = \sqrt{2\pi}\delta$  no es una función.

### Ejemplo 4.2.4

En general, las funciones  $1, t, t^2, \dots$  no tienen transformada de Fourier (no se puede calcular  $\int_{-\infty}^{\infty} |g|$ ). Sin embargo, si  $\bar{1}, \bar{t}, \bar{t^2}, \dots$ , si lo tienen, es decir

$$\mathfrak{F}\{\overline{(it)^n}\} = (\mathfrak{F}\{\bar{1}\})^{(n)} = \sqrt{2\pi}\delta^{(n)}$$

Se ha ampliado el espacio de funciones con transformada de Fourier.

**Ejemplo 4.2.5.** Sea la distribución  $\delta_b$  tal que  $\langle \delta_b, z(t) \rangle = z(b)$ . Entonces

$$\mathfrak{F}\{\overline{\cos(bt)}\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta_b + \delta_{-b})$$

$$\mathfrak{F}\{\overline{\text{sen}(bt)}\} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta_b - \delta_{-b})$$

**Solución**

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{F}\{\delta_b\}, z \rangle &= \langle \delta_b, \mathfrak{F}\{z, \xi\} \rangle \\ &= \langle \delta_b, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{i\xi t} dt \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{ibt} dt = \langle \frac{\overline{e^{ibt}}}{\sqrt{2\pi}}, z \rangle \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathfrak{F}\{\delta_b\} = \frac{\overline{e^{ibt}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Sustituyendo  $b$  por  $-b$

$$\mathfrak{F}\{\delta_{-b}\} = \frac{\overline{e^{-ibt}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Luego,

$$\mathfrak{F}\{\delta_b + \delta_{-b}\} = \frac{\overline{2 \cos(bt)}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathfrak{F}\{\delta_b - \delta_{-b}\} = \frac{\overline{2i \text{sen}(bt)}}{\sqrt{2\pi}}$$

Por tanto,

$$\mathfrak{F}\{\overline{\cos(bt)}\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta_b + \delta_{-b}) = \mathfrak{F}^{-1}\{\overline{\cos(bt)}\} \quad (4.1)$$

$$\mathfrak{F}\{\overline{\text{sen}(at)}\} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta_a - \delta_{-a}) = \mathfrak{F}^{-1}\{\overline{\text{sen}(at)}\} \quad (4.2)$$

donde,  $\delta_a + \delta_{-a}$  es una distribución temperada par, y  $\delta_a - \delta_{-a}$  es una distribución temperada impar.

## CAPÍTULO V

### ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Uno de los fines de esta tesis fue establecer que cualquier función de crecimiento lento está asociada con una distribución temperada en el espacio vectorial de Schwartz Laurent. Para su demostración se utilizó el concepto de función polinómica de crecimiento lento, así como la definición del funcional asociado a la función de crecimiento lento, seccionalmente continua y discontinua por tramos, luego se comprobó que el funcional actúa sobre una combinación lineal de funciones y que dicha funcional es continua en la dirección de la convergencia fuerte. Este resultado coincide con los obtenidos en este campo de las distribuciones temperadas por otros matemáticos como Rogan y Muñoz, 2009, Bhattacharyya, 2012, Duistermaat y Kolk, 2010, Schwartz, 1998, Golse, 2013 y Wilde, 2012.

Para establecer que cada derivada de una distribución está asociada a una distribución temperada sobre el espacio vectorial de Schwartz, en su demostración se define la derivada de la distribución temperada. Luego se verifica que la derivada de la funcional actúa sobre una combinación lineal de funciones y que las derivadas de una secuencia de funciones convergen fuertemente hacia una función en el espacio de Schwartz.

Para establecer si una distribución temperada implica que la transformada de Fourier de dicha distribución esté asociada a una distribución temperada

en el espacio vectorial de Schwartz, en su demostración se define la transformada de Fourier de un funcional en el espacio de distribuciones temperadas y también se define la transformada de Fourier de una distribución, luego se verificó la linealidad de la transformada de Fourier de una distribución temperada y la convergencia uniforme de la transformada de una sucesión de funciones.

Según los resultados del ejemplo 4.2.5, en los campos de la física se encontró los resultados (4.1) y (4.2) en la forma:

$$\mathfrak{F}\{\cos(w_0 t), w\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)]$$

$$\mathfrak{F}\{\sin(w_0 t), w\} = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(w - w_0) - \delta(w + w_0)]$$

Es decir, al trazar el espectro de frecuencias de  $\cos(w_0 t)$ , se tendrían dos picos en  $\pm w_0$  y en el caso de  $\sin(w_0 t)$  el pico en  $-w_0$  sería negativo.

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSIONES

**Primera.** En la proposición 4.1.5. se establece que cada funcional asociado a una función pertenece al conjunto de las distribuciones temperadas sobre el espacio vectorial de Laurent Schwartz.

**Segunda.** Cada derivada de una distribución temperada pertenece al conjunto de las distribuciones temperadas sobre el espacio vectorial de Laurent Schwartz.

**Tercera.** Si una distribución pertenece al conjunto de las distribuciones temperadas entonces su transformada de Joseph Fourier de la distribución temperada también pertenece al conjunto de las distribuciones temperadas.

## CAPÍTULO VII

### RECOMENDACIONES

**Primera.** Resultaría de gran interés analizar la convolución en el espacio de distribuciones temperadas sobre el espacio vectorial de Laurent Schwartz.

**Segunda.** resultaría de gran interés analizar la transformación de Laplace en el espacio de distribuciones temperadas sobre el espacio vectorial de Laurent Schwartz.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Apostol, T. M.(1960). *Análisis Matemático*, Editorial Reverté
- Bhattacharyya, P. (2012). *Generalized functions with applications in sobolev spaces*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlín / Boston.
- Boumaza, H. (2018). *Distributions tempérées et espaces de Sobolev*. Master Mathématiques 1. Université Paris.
- Campos F. (2011). *Introducao a Teoria das Distribuicoes*. Fundacao Calouste Gulbenkian.
- Duistermaat, J. and Kolk,J. (2010). *Distributions: Theory and applications*, Birkhäuser.
- Escobar ,L.(2009).*Teoría de las distribuciones* . [Tesis de grado de Matemáticas , Pontificia Universidad Javariana Bogota].RepositorioJAVARIANA.<https://repository.javeriana.edu.co/bitstream/handle/10554/10346/EscobarVargasLizAndrea2012.pdf?sequence=2>
- Golse, F. (2013). *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*. Ecole polytechnique. Centre de mathématiques Laurent Schwartz.
- Grabchak, M. (2020). *An Exact Method For Simulating Rapidly Decreasing Tempered Stable Distributions*. University of North Carolina Charlotte. USA.
- Lang, S.(1997). *Undergraduate Analysis*. 2nd ed., Springer
- Lang, S. (1999). *Complex Analysis*. 4th ed., Springer
- Li, D. (2013). *Cours d'analyse fonctionnelle*. Ellipses Edition, Paris.
- Lima, E.(1976). *Curso de Análisis*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- Rogan, C. y Muñoz, V. (2009). *Métodos de la física matemática II*. Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile.
- Shaviv, A. (2020). *Tempered distributions and Schwartz functions on definable manifolds*. Journal of Functional Analysis 278 (11) :108471.
- Schwartz, L. (1966). *Théorie des Distributions*. Hermann Edit. Paris.
- Schwartz, L. (1998). *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann Edit. Paris.
- Vargas, F. (2009). *Teoría de las distribuciones*. [Tesis especialista en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio UNC. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/2964?locale-attribute=en>
- Vladimirov, V. (1979). *Generalized functions in Mathematical Physics*. Mir Publishers. Moscow.
- Wilde, I. (2012). *Distribution Theory*. Disponible en World Wide Web: <http://homepage.ntlworld.com/ivan.wilde/notes/gf/gf/gf.pdf>.
- Rahman, M. (2011). *Applications of Fourier transforms to generalized functions*. Wit Press. Nueva York. VPO

## ANEXOS

### Delta de Dirac

#### Proposición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz = 1$$

#### Prueba

Sea una sucesión de funciones que tiende a  $\delta$ , cuando  $m \rightarrow \infty$

$$\delta(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-mz^2} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2}$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mz^2} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} dz \\ &= \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{-mz^2} dz + \int_0^{\infty} e^{-mz^2} dz \right] \end{aligned}$$

donde,

$$\int_{-\infty}^0 e^{-mz^2} dz = \int_0^{\infty} e^{-mz^2} dz \quad (\text{función par})$$

$$= 2 \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} \left[ \int_0^{\infty} e^{-mz^2} dz \right]$$

Ahora, un cambio de variable

$$mz^2 = \xi^2 \rightarrow m = \frac{\xi^2}{z^2}$$

Y, la diferencial

$$2mz dz = 2\xi d\xi$$

$$2 \frac{\xi^2}{z^2} z dz = 2\xi d\xi$$

$$dz = z \frac{d\xi}{\xi}$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\xi}{z} \int_0^{\infty} e^{-mz^2} z \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-mz^2} d\xi \\ &= \text{erf}(\infty) \\ &= 1 \end{aligned}$$

## Distribución Escalar

### Proposición

$$\langle \delta, \psi \rangle = \psi(0) \text{ para todo } \psi \in D(\mathbb{R}^n)$$

### Prueba

Por definición,

$$\langle \delta, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) \psi(z) dz$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \psi(z) = u &\rightarrow \psi'(z) dz = du \\ \delta(z) dz = dv &\rightarrow \int \delta(z) dz = \int dv \rightarrow 1 = v \\ \langle \delta, \psi \rangle &= \psi(z) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(z) dz \\ &= \psi(\infty) - \psi(-\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(z) dz \\ &= 0 - 0 - \left[ \int_{-\infty}^0 \psi'(z) dz + \int_0^{\infty} \psi'(z) dz \right] \end{aligned}$$

$\delta(z)$  existe cuando  $z = 0$

$$\begin{aligned} &= -\int_0^{\infty} \psi'(z) dz \\ &= -\psi(z)|_{-\infty}^{\infty} \\ &= -(\psi(\infty) - \psi(0)) \end{aligned}$$

Ya que,  $\psi(\pm\infty) = 0$ , se tiene

$$\langle \delta, \psi \rangle = \psi(0)$$