

UNIVERSIDAD NACIONAL JORGE BASADRE GROHMANN

Facultad de Ciencias

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

**SOLUCIÓN ANALÍTICA Y NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN
DE DIFUSIÓN DEL CALOR EN UNA PLACA
RECTANGULAR EN RÉGIMEN
TRANSITORIO**

TESIS

Presentada por:

Bach. Deyby Edwin Arhuata Turpo

Bach. Ruth Apaza Romero

Para optar el Título Profesional de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TACNA - PERÚ

2025



ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS Nro. 457

En la ciudad de Tacna, en el auditorium de la Facultad de Ciencias, de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann; siendo las 9:00 horas del día miércoles, 19 de noviembre del 2025, estando presente el jurado calificador nominado con Resolución de Facultad Nro. 11500 - 2025 FACI/UNJBG, conformado por los siguientes docentes:

Dr. Roberto Encarnación Supe Hallan (Presidente)
Dr. Julio Valderrama Gamboa (Secretario)
Dr. Humberto Benito Vargas Pichón (Vocal)

Acto seguido, se dio lectura a la Resolución correspondiente, y del mismo modo se informa a los Bachilleres que el acto de sustentación constará de dos partes: (I) exposición y sustentación de la tesis, (II) absolución de preguntas del jurado. Todo ello en un tiempo no mayor a 60 minutos ni menor a 30 minutos. A continuación, el presidente del Jurado instó a los Bachilleres:

Deyby Edwin Arkuata Turpo
Ruth Apaza Romero

a exponer la Tesis titulada:

SOLUCIÓN ANALÍTICA Y NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE
DIFFUSIÓN DEL CALOR EN UNA PLACA RECTANGULAR EN
RÉGIMEN TRANSITORIO

para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

Siendo las 11:35 horas, los tesisistas concluyen su exposición, luego se procedió a la formulación de las preguntas por parte de los miembros del jurado calificador, terminado este proceso, se invitó al público presente a abandonar la sala de sustentación para que los miembros del jurado emitan su calificación de acuerdo a reglamento. El promedio de la calificación dio el siguiente resultado:

Aprobada por unanimidad, Deyby Edwin Arkuata Turpo
con la nota de 16 y Ruth Apaza Romero, con la nota de
15

de acuerdo al Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann. Siendo las 11:00 horas, se dio por concluido el acto de sustentación de la tesis, firmando los miembros del jurado calificador, en señal de conformidad.


Dr. Roberto Encarnación Supe Hallan Presidente
Dr. Julio Valderrama Gamboa Secretario
Dr. Humberto Benito Vargas Pichón Vocal

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, **Humberto Benito Vargas Pichón**, en mi condición de asesor acreditado por la RESOLUCIÓN DE FACULTAD N° 11025-2024-FACI-UN/JBG de la tesis titulada: **SOLUCIÓN ANALÍTICA Y NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DEL CALOR EN UNA PLACA RECTANGULAR EN RÉGIMEN TRANSITORIO**, presentada por los Bachilleres **Deyby Edwin Arhuata Turpo** y **Ruth Apaza Romero** para optar el Título Profesional **Licenciado (a) en Matemática**, habiendo cumplido con lo establecido en el Reglamento de Originalidad y de similitud de trabajo de investigación y producción intelectual, considerando que según la revisión, evaluación y análisis realizado a través del software de similitud textual TURNITIN cuenta con el nivel de similitud cuyo porcentaje es de **10 %**, por lo que **CERTIFICO LA SIMILARIDAD** de la tesis, la cual está de acuerdo al nivel **PERMITIDO**, para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado con fines de continuar con los trámites respectivos para la obtención del título profesional.


.....
Dr. Humberto Benito Vargas Pichón
DNI N° 17973644


.....
Bach. Deyby Edwin Arhuata Turpo
Tesista


.....
Bach. Ruth Apaza Romero
Tesista

DEDICATORIA

A Dios, por darme la fuerza, sabiduría y paz en cada paso de este camino. A mi madre, Amelia Dina Turpo Pacha, por su sacrificio, dedicación y por creer en mí en todo momento. A mi padre, Francisco Arhuata Mamani, a mi hermano, Alex Arhuata Turpo, y a toda mi familia, por su compañía y ánimo. Esta tesis es el reflejo de todo lo que me han enseñado y de los valores que me han inculcado. Sin ustedes, este logro no habría sido posible.

Deyby Edwin Arhuata Turpo

A Dios, a mis padres Virginia y Eliseo, a mis hermanos Marieta, Mary Luz y Ronald, por su amor y apoyo incondicional; asimismo, a todos quienes me han acompañado en este camino.

Ruth Apaza Romero

AGRADECIMIENTO

Expresamos nuestro sincero agradecimiento a Dios por habernos permitido culminar satisfactoriamente esta etapa académica. Nuestro reconocimiento especial al Dr. Humberto Benito Vargas Pichón, asesor de esta tesis, por su orientación, paciencia y compromiso en el desarrollo de esta investigación. Finalmente, extendemos nuestro agradecimiento a nuestros docentes y compañeros de la Escuela Profesional de Matemática, quienes nos motivaron y compartieron con nosotros sus conocimientos y experiencias.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL.....	iii
ÍNDICE DE TABLAS.....	vii
ÍNDICE DE FIGURAS.....	x
RESUMEN.....	xii
ABSTRACT.....	xiii
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO.....	3
1.1. DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA.....	3
1.2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA.....	4
1.2.1. PROBLEMA PRINCIPAL.....	4
1.2.2. PROBLEMAS ESPECÍFICOS.....	4
1.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.....	4
1.3.1. OBJETIVO GENERAL.....	4
1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	4
1.4. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN.....	4
1.5. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN.....	5
1.6. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN.....	5
1.6.1. HIPÓTESIS GENERAL.....	5
1.6.2. HIPÓTESIS ESPECÍFICAS.....	5
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO.....	6
2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN.....	6
2.1.1. ANTECEDENTES INTERNACIONALES.....	6
2.1.2. ANTECEDENTES NACIONALES.....	6
2.2. BASES TEÓRICAS DE LA SOLUCIÓN ANALÍTICA.....	7
2.2.1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO).....	7
2.2.1.1. ORDEN.....	7
2.2.1.2. LINEALIDAD.....	8
2.2.1.3. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN.....	8
2.2.1.4. PROBLEMA DE VALORES EN LA FRONTERA.....	9
2.2.2. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP).....	9
2.2.2.1. ORDEN.....	10
2.2.2.2. LINEALIDAD.....	10
2.2.2.3. EDP DE SEGUNDO ORDEN.....	11
2.2.2.4. CLASIFICACIÓN DE LA EDP.....	11
2.2.2.5. PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN.....	12

2.2.3. CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES	12
2.2.3.1. FUNCIÓN CONTINUA POR PARTES	12
2.2.3.2. FUNCIÓN SUAVE POR PARTES	13
2.2.3.3. DISCONTINUIDAD DE SALTO.....	13
2.2.3.4. FUNCIÓN PERIÓDICA	14
2.2.3.5. FUNCIÓN PAR	14
2.2.3.6. FUNCIÓN IMPAR.....	15
2.2.4. CONVERGENCIA DE SERIES.....	16
2.2.4.1. CONVERGENCIA PUNTUAL	16
2.2.4.2. CONVERGENCIA UNIFORME.....	16
2.2.4.3. CONVERGENCIA EN LA MEDIA CUADRÁTICA.....	16
2.2.5. SERIES DE FOURIER Y SUS PROPIEDADES	16
2.2.5.1. SERIE DE SENOS DE FOURIER	17
2.2.5.2. SERIE DE COSENOS DE FOURIER.....	19
2.2.5.3. CONTINUIDAD Y DIFERENCIACIÓN TÉRMINO A TÉRMINO	21
2.3. MARCO CONCEPTUAL DE LA SOLUCIÓN ANALÍTICA	25
2.3.1. FUNCIONES ORTOGONALES	25
2.3.1.1. PRODUCTO INTERNO DE FUNCIONES	25
2.3.1.2. FUNCIONES ORTOGONALES	25
2.3.1.3. CONJUNTO ORTOGONAL Y NORMA.....	26
2.3.2. PROBLEMA REGULAR DE STURM – LIOUVILLE	27
2.3.2.1. PROBLEMA REGULAR DE STURM LIOUVILLE.....	28
2.3.2.2. PROPIEDADES DEL PROBLEMA REGULAR DE STURM – LIOUVILLE. 29	
2.3.2.3. EJEMPLO E ILUSTRACIÓN DE LAS PROPIEDADES	30
2.3.3. EXPANSIÓN DE FUNCIONES PROPIAS.....	33
2.3.3.1. COEFICIENTE DE FOURIER GENERALIZADO	33
2.3.3.2. CONVERGENCIA EN LA MEDIA	34
2.3.3.3. COMPLETITUD E IGUALDAD DE PARSEVAL	36
2.3.4. SERIES MÚLTIPLES DE FOURIER	37
2.3.5. SEPARACIÓN DE VARIABLES: SOLUCIÓN PRODUCTO	38
2.3.5.1. APLICACIÓN A LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DEL CALOR EN UNA PLACA RECTANGULAR EN RÉGIMEN TRANSITORIO	38
2.4. BASES TEÓRICAS DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA	41
2.4.1. SERIES DE TAYLOR.....	41
2.4.2. MATRICES	42
2.4.2.1. MATRIZ	42
2.4.2.2. VECTORES.....	43
2.4.2.3. MATRIZ CUADRADA.....	43

2.4.2.4. MATRIZ DIAGONAL	43
2.4.2.5. MATRIZ TRIDIAGONAL	44
2.4.2.6. MATRIZ BANDA.....	44
2.4.2.7. MATRIZ TRANSPUESTA.....	44
2.4.2.8. MATRIZ SIMÉTRICA.....	44
2.4.2.9. MATRIZ DISPERSA	44
2.4.2.10. MATRIZ DEFINIDA POSITIVA.....	45
2.4.3. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.....	45
2.4.3.1. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES ALGEBRAICAS	45
2.4.3.2. FORMA MATRICIAL	46
2.4.4. TEORÍA DE ERRORES	46
2.4.4.1. ERROR DE TRUNCAMIENTO	46
2.4.4.2. ERROR DE REDONDEO.....	47
2.4.5. PROPIEDADES DE ESQUEMAS DE DIFERENCIAS FINITAS.....	47
2.4.5.1. CONSISTENCIA.....	47
2.4.5.2. ESTABILIDAD.....	47
2.4.5.3. CONVERGENCIA	48
2.4.5.4. TEOREMA DE EQUIVALENCIA DE LAX.....	48
2.5. MARCO CONCEPTUAL DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA.....	48
2.5.1. DISCRETIZACIÓN.....	48
2.5.2. APROXIMACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS DE DERIVADAS ORDINARIAS... 50	
2.5.2.1. DIFERENCIAS FINITAS HACIA ADELANTE	50
2.5.2.2. DIFERENCIAS FINITAS HACIA ATRÁS.....	50
2.5.2.3. DIFERENCIAS FINITAS CENTRALES	50
2.5.3. APROXIMACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS DE DERIVADAS PARCIALES..... 51	
2.5.4. APLICACIONES DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS	53
2.5.4.1. MÉTODO EXPLÍCITO.....	54
2.5.4.2. MÉTODO IMPLÍCITO	58
2.5.5. MATRIZ POR BLOQUES	59
2.5.5.1. SUBMATRIZ.....	59
2.5.5.2. PARTICIÓN.....	60
2.5.6. MÉTODO DEL GRADIENTE CONJUGADO.....	61
2.5.6.1. DERIVACIÓN DEL MÉTODO DEL GRADIENTE CONJUGADO	61
2.5.6.2. ALGORITMO DEL MÉTODO DE GRADIENTE CONJUGADO	66
2.5.7. WOLFRAM MATHEMATICA.....	71
2.5.7.1. OBJETOS DE MATHEMATICA	71
2.5.7.2. OPERACIONES BÁSICAS	71

2.6. ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DEL CALOR EN UNA PLACA RECTANGULAR EN RÉGIMEN TRANSITORIO.....	73
2.6.1. TRANSFERENCIA DE CALOR	73
2.6.1.1. MODOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR.....	73
2.6.1.2. ESTADOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR.....	73
2.6.2. CONDUCCIÓN DE CALOR EN UN DOMINIO RECTANGULAR FINITO	73
2.6.2.1. CONDICIÓN INICIAL	74
2.6.2.2. CONDICIONES DE FRONTERA	74
CAPÍTULO III: DISEÑO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN	76
3.1. TIPO, DISEÑO Y NIVEL DE INVESTIGACIÓN	76
3.2. POBLACIÓN Y MUESTRA DE ESTUDIO.....	76
3.3. VARIABLES DE ESTUDIO. OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES	76
3.4. PROCESOS DE DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN	76
3.5. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS.....	76
CAPÍTULO IV: RESULTADOS.....	77
4.1. POR EL MÉTODO DE EXPANSIÓN DE FUNCIONES PROPIAS.....	77
4.2. POR EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS	91
CAPÍTULO V: DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	159
CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES.....	162
6.1. CONCLUSIÓN GENERAL.....	162
6.2. CONCLUSIONES ESPECÍFICAS.....	162
CAPÍTULO VII: RECOMENDACIONES	163
7.1. RECOMENDACIÓN GENERAL	163
7.2. RECOMENDACIONES ESPECÍFICAS.....	163
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	164
ANEXOS	167

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4.1: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 0$	101
Tabla 4.2: Distribución del término fuente en la placa, nivel $n = 0$	101
Tabla 4.3: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 1$, método explícito	103
Tabla 4.4: Distribución del término fuente en la placa, nivel $n = 1$	104
Tabla 4.5: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 2$, método explícito	105
Tabla 4.6: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 3$, método explícito	105
Tabla 4.7: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 4$, método explícito	105
Tabla 4.8: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 5$, método explícito	106
Tabla 4.9: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 10$, método explícito	106
Tabla 4.10: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 25$, método explícito	106
Tabla 4.11: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 50$, método explícito	106
Tabla 4.12: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 75$, método explícito	106
Tabla 4.13: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 100$, método explícito	107
Tabla 4.14: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 1$, método explícito	108
Tabla 4.15: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 2$, método explícito	108
Tabla 4.16: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 3$, método explícito	108
Tabla 4.17: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 4$, método explícito	108
Tabla 4.18: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 5$, método explícito	108
Tabla 4.19: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 10$, método explícito	109
Tabla 4.20: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 15$, método explícito	109
Tabla 4.21: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 20$, método explícito	109
Tabla 4.22: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 0$	110
Tabla 4.23: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 125$, método explícito	110
Tabla 4.24: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 250$, método explícito	111
Tabla 4.25: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 0$	111
Tabla 4.26: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 25$, método explícito	111
Tabla 4.27: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 50$, método explícito	112
Tabla 4.28: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 25$, método explícito	113
Tabla 4.29: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 50$, método explícito	113
Tabla 4.30: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 10$, método explícito	114
Tabla 4.31: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 125$, método explícito	114
Tabla 4.32: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 250$, método explícito	115

Tabla 4.33: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 1250$, método explícito	115
Tabla 4.34: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 2500$, método explícito	116
Tabla 4.35: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 1$, según condiciones de frontera ...	128
Tabla 4.36: Vectores iniciales y cálculos previos a la iteración $k = 0$, nivel $n = 1$	132
Tabla 4.37: Vectores y cálculos auxiliares en la iteración $k = 0$, nivel $n = 1$	133
Tabla 4.38: Vectores y cálculos auxiliares en la iteración $k = 1$, nivel $n = 1$	135
Tabla 4.39: Evolución del vector de estimación a través de iteraciones, nivel $n = 1$	135
Tabla 4.40: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 1$, método implícito	136
Tabla 4.41: Distribución del término fuente en la placa, nivel $n = 2$	136
Tabla 4.42: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 2$, según condiciones de frontera ...	136
Tabla 4.43: Vectores iniciales y cálculos previos a la iteración $k = 0$, nivel $n = 2$	137
Tabla 4.44: Vectores y cálculos auxiliares en la iteración $k = 0$, nivel $n = 2$	138
Tabla 4.45: Vectores y cálculos auxiliares en la iteración $k = 1$, nivel $n = 2$	138
Tabla 4.46: Evolución del vector de estimación a través de iteraciones, nivel $n = 2$	139
Tabla 4.47: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 2$, método implícito	139
Tabla 4.48: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 3$, método implícito	139
Tabla 4.49: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 4$, método implícito	139
Tabla 4.50: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 5$, método implícito	140
Tabla 4.51: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 10$, método implícito.....	140
Tabla 4.52: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 25$, método implícito.....	140
Tabla 4.53: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 50$, método implícito.....	140
Tabla 4.54: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 75$, método implícito.....	140
Tabla 4.55: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 100$, método implícito	141
Tabla 4.56: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 1$, método implícito	142
Tabla 4.57: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 2$, método implícito	142
Tabla 4.58: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 3$, método implícito	142
Tabla 4.59: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 4$, método implícito	142
Tabla 4.60: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 5$, método implícito	142
Tabla 4.61: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 10$, método implícito.....	143
Tabla 4.62: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 15$, método implícito.....	143
Tabla 4.63: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 20$, método implícito.....	143
Tabla 4.64: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 125$, método implícito	144
Tabla 4.65: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 250$, método implícito	144
Tabla 4.66: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 25$, método implícito.....	145
Tabla 4.67: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 50$, método implícito.....	145

Tabla 4.68: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 25$, método implícito.....	145
Tabla 4.69: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 50$, método implícito.....	146
Tabla 4.70: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 5$, método implícito	146
Tabla 4.71: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 10$, método implícito.....	147
Tabla 4.72: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 125$, método implícito.....	147
Tabla 4.73: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 250$, método implícito.....	148
Tabla 4.74: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 25$, método implícito.....	148
Tabla 4.75: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 50$, método implícito.....	149
Tabla 4.76: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 1250$, método implícito.....	149
Tabla 4.77: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 2500$, método implícito.....	150
Tabla 4.78: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 0$	155
Tabla 4.79: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 20$	155
Tabla 4.80: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 50$	156
Tabla 4.81: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 100$	156
Tabla 4.82: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 125$	156
Tabla 4.83: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 250$	157
Tabla 4.84: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 1250$	157
Tabla 4.85: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 2500$	157

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Gráfica de una función continua por partes.....	12
Figura 2.2: Ejemplo de una función que no es suave por partes	13
Figura 2.3: Discontinuidad de salto en $x = x_0$	13
Figura 2.4: Función periódica	14
Figura 2.5: Gráfica de funciones pares	14
Figura 2.6: Gráfica de funciones impares	15
Figura 2.7: Extensión impar de $f(x)$	18
Figura 2.8: a) $f(x) = x$ y b) su serie de senos de Fourier	19
Figura 2.9: Extensión par de $f(x)$	20
Figura 2.10: a) $f(x) = x$, b) su extensión par	21
Figura 2.11: Serie de cosenos de Fourier de la extensión par de $f(x)$	21
Figura 2.12: Serie de senos de Fourier de $f(x) = x$	22
Figura 2.13: Serie de cosenos de Fourier de $f(x) = x$	23
Figura 2.14: Serie de senos de Fourier de df/dx	23
Figura 2.15: Placa rectangular de dimensiones L_x y L_y	39
Figura 2.16: Ejemplo de discretización de un dominio espacial unidimensional.....	49
Figura 2.17: Representación de diferencias finitas.....	49
Figura 2.18: Función de dos variables independientes	52
Figura 2.19: Las moléculas de diferencias finitas para el esquema explícito	55
Figura 2.20: Efecto del parámetro r sobre la estabilidad de la solución en el método explícito.	56
Figura 2.21: Inverosimilitud física resultante de $r = 1$	57
Figura 2.22: Las moléculas de diferencias finitas para el esquema implícito	59
Figura 2.23: Solución por el método del a) Gradiente conjugado y b) Descensos más pronunciados .	69
Figura 4.1: Discretización de la placa rectangular de dimensiones L_x y L_y	91
Figura 4.2: Malla de espacio – tiempo relacionado al dominio del PVIF.....	92
Figura 4.3: Molécula de diferencias finitas por el método explícito	95
Figura 4.4: Discretización de la placa rectangular de dimensiones $L_x = 2$ y $L_y = 1$	99
Figura 4.5: Esquema molecular del método explícito en la malla de espacio – tiempo.	99
Figura 4.6: Solución gráfica de la distribución de temperatura en la placa, según método explícito.	107
Figura 4.7: Solución gráfica inestable de la distribución de temperatura en la placa rectangular, según método explícito	110
Figura 4.8: Comparación de la solución gráfica de la evolución de distribución de temperatura de la placa rectangular, según el método explícito.....	117
Figura 4.9: Molécula de diferencias finitas por el método implícito.....	119
Figura 4.10: Esquema molecular del método implícito en la malla de espacio – tiempo.	128

Figura 4.11: Solución gráfica de la distribución de temperatura en la placa rectangular, según el método implícito.....	141
Figura 4.12: Solución gráfica estable de la distribución de temperatura en la placa rectangular, según el método implícito	144
Figura 4.13: Comparación gráfica de la evolución de distribución de temperatura en la placa rectangular, según método Implícito.	151
Figura 4.14: Comparación gráfica de la distribución de temperatura aproximada por el método implícito de la placa rectangular con la solución analítica.....	152
Figura 4.15: Comparación gráfica de la distribución de temperatura de la placa rectangular, según el método explícito.	158

RESUMEN

El objetivo de la presente investigación fue resolver un problema de valor inicial y de frontera, que consiste en hallar la solución de una ecuación de difusión del calor no homogénea en una placa rectangular, sujeto a una condición inicial y a condiciones de frontera de tipo Dirichlet dependientes de la posición y del tiempo. Una de las maneras de resolver el problema propuesto consistió en emplear el enfoque analítico. Para encontrar la solución exacta, se utilizó el método de expansión de funciones propias, donde se representa la solución en una serie de funciones propias del problema homogéneo relacionado resuelto con el método de separación de variables, previa transformación del problema original en uno con condiciones de frontera homogéneas. El método estuvo basado en la propiedad de completitud de las funciones propias provenientes del problema regular de Sturm – Liouville, que establece la posibilidad de representar a cualquier función suave por partes como una serie de funciones propias, en particular como una serie de Fourier, que converge en el sentido de la media cuadrática. Otra alternativa para resolver el problema propuesto consistió en emplear el enfoque numérico. Para encontrar soluciones aproximadas, se utilizó el método de diferencias finitas, donde se discretiza el dominio y se representa a las derivadas de la solución con respecto al espacio y al tiempo de manera aproximada, a partir de la definición de la serie de Taylor. Con el método descrito fue posible construir esquemas computacionales tanto explícitos como implícitos, cuya diferencia radica en la aproximación de la derivada temporal. Mientras que en el método explícito se obtienen las soluciones aproximadas de forma directa, en el método implícito se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales para cada nivel de tiempo considerando su estructura matricial por bloques para la implementación del método del gradiente conjugado. La presente investigación fue de tipo aplicada, con diseño no experimental y nivel explicativo. Para obtener soluciones aproximadas mediante simulación, se implementaron los algoritmos de los esquemas explícito e implícito utilizando el sistema computacional científico Mathematica, y se realizaron comparaciones con la solución obtenida por el método de expansión de funciones propias. Evaluando el comportamiento del error, se muestra que la convergencia de ambos esquemas numéricos depende de su consistencia y estabilidad.

Palabras clave: Ecuación de difusión del calor en 2D, método de expansión de funciones propias, método explícito de diferencias finitas, método implícito de diferencias finitas, método del gradiente conjugado.

ABSTRACT

The objective of this investigation is to solve an initial and boundary value problem, which consists of finding the solution to a non-homogeneous heat diffusion equation in a rectangular plate, subject to an initial condition and Dirichlet-type boundary conditions dependent on position and time. One way to solve the proposed problem is to employ an analytical approach. To find the exact solution, the eigenfunction expansion method is used, where the solution is represented in a series of eigenfunctions of the related homogeneous problem solved using the separation of variables method, after transforming the original problem into one with homogeneous boundary conditions. The method is based on the completeness property of eigenfunctions derived from the regular Sturm-Liouville problem, which establishes the possibility of representing any piecewise smooth function as a series of eigenfunctions, in particular as a Fourier series that converges in the root mean square sense. Another alternative to solve the proposed problem is to employ a numerical approach. To find approximate solutions, the finite difference method is used, where the domain is discretized and the derivatives of the solution are represented approximately with respect to space and time, based on the definition of the Taylor series. With the described method, it is possible to construct both explicit and implicit computational schemes, the difference between which lies in the approximation of the time derivative. While the explicit method obtains approximate solutions directly, the implicit method requires solving a system of linear equations for each time level, considering its block-based matrix structure for the implementation of the conjugate gradient method. This research is of an applied nature, with a non-experimental design and an explanatory level. To obtain approximate solutions through simulation, the algorithms of the explicit and implicit schemes are implemented using the Mathematica scientific computing system, and comparisons are made with the solution obtained by the eigenfunction expansion method. Evaluating the error behavior shows that the convergence of both numerical schemes depends on their consistency and stability.

Keywords: 2D Heat Diffusion Equation, Eigenfunction Expansion Method, Explicit Finite Difference Method, Implicit Finite Difference Method, Conjugate Gradient Method.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación se centró en la resolución de un problema de valor inicial y de frontera, que consistió en encontrar la solución de una ecuación diferencial parcial del calor no homogénea aplicado sobre una placa rectangular, con condición inicial y condiciones de frontera de tipo Dirichlet no homogéneas. Se estableció la solución analítica del problema propuesto, utilizando el método de expansión de funciones propias, y la solución numérica, empleando los métodos explícito e implícito de diferencias finitas, además de su implementación en el sistema computacional Mathematica.

En este sentido, se estructuró se la siguiente manera:

En el capítulo I, correspondiente al planteamiento del estudio, se describe la realidad problemática que da origen a la investigación, estableciendo el problema central, los objetivos y la justificación e importancia de realizar el estudio. Además, se precisan las limitaciones de la investigación y las hipótesis que guían el desarrollo del estudio.

En el capítulo II, correspondiente al marco teórico, se reúnen los antecedentes relacionados con la presente investigación. Además, las bases teóricas y el marco conceptual se organizan para cada método. Para el método de expansión de funciones propias, se desarrolla el problema regular de Sturm – Liouville, cuyas soluciones forman un conjunto de funciones propias que se caracteriza por ser ortogonal y completo, estableciendo una relación con las series de Fourier. Para el método de diferencias finitas, se desarrollan las aproximaciones de las derivadas ordinarias y parciales de una función a partir de la serie de Taylor, además de su aplicación a la ecuación del calor unidimensional empleando los métodos explícito e implícito. Asimismo, se incorporan más definiciones acerca de las matrices por bloque y el método del gradiente conjugado, herramientas principalmente útiles para la implementación del método implícito.

En el capítulo III, correspondiente al diseño metodológico de la investigación, se señala que la investigación es de tipo aplicado, caracterizado por un diseño no experimental y un nivel explicativo. El diseño propuesto permitió desarrollar un análisis comparativo entre las soluciones obtenidas de forma analítica y numérica.

En el capítulo IV, correspondiente a los resultados, se presenta un desarrollo riguroso de ambos métodos aplicados al problema de valor y de frontera propuesto en el capítulo I. El problema se resolvió utilizando el método de expansión de funciones propias para encontrar la solución exacta, y utilizando los métodos explícito e implícito de diferencias finitas para encontrar las soluciones aproximadas con la ayuda del sistema computacional Mathematica, mostrando la comparación de ambas soluciones para algunos ejemplos en particular.

En el capítulo V, correspondiente a la discusión de resultados, se analizan los resultados a partir de los ejemplos desarrollados en el capítulo anterior, evaluando las ventajas y desventajas tanto del método de expansión de funciones propias como del método de diferencias finitas.

En los capítulos VI y VII, correspondiente a las conclusiones y recomendaciones, respectivamente, se consolida el aporte de la presente investigación al campo de las ecuaciones diferenciales parciales y análisis numérico.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas, que reflejan todas las fuentes consultadas y citadas que sustentan la investigación. Además, se incluyen los anexos que contienen información complementaria de interés, como la construcción de una función auxiliar que transforma el problema original en uno con condiciones de frontera homogéneas, para facilitar la aplicación del método de expansión de funciones propias, y una demostración relacionada con el sistema de ecuaciones lineales del esquema implícito de diferencias finitas, donde se verifica que la matriz de coeficientes es simétrica y definida positiva, siendo ambas condiciones fundamentales para utilizar el método del gradiente conjugado.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO

1.1. DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) desempeñan un papel importante en numerosas ramas de la ciencia e ingeniería describiendo diversos tipos de fenómenos físicos. Se han convertido en una herramienta útil para describir la naturaleza de los modelos científicos e ingenieriles. Actualmente, la mayoría de los fenómenos que surgen en los campos de la física matemática y la ingeniería como dinámica de fluidos, mecánica cuántica, electricidad, entre otros, pueden describirse mediante una EDP. Muchas aplicaciones de ingeniería se simulan matemáticamente como una EDP con condiciones iniciales y de frontera. Solo en unos pocos casos se pueden obtener soluciones exactas con métodos analíticos, y estos métodos son bastante complejos de aplicar. Sin embargo, existen métodos numéricos eficientes para obtener soluciones con una buena aproximación. Por lo tanto, es cada vez más importante familiarizarse con los métodos numéricos para resolver una EDP e implementarlos. Entre los métodos numéricos, el método de diferencias finitas (MDF) tiene la atractiva característica de ser aplicable tanto a EDP lineales como no lineales (Ray, 2016).

Considerar el problema de valor inicial y de frontera (PVIF) en régimen transitorio, compuesto por una EDP de difusión del calor con término fuente que modela la distribución de la temperatura $u(x, y, t)$ en un dominio bidimensional representado por una placa plana rectangular de dimensiones L_x y L_y

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + f(x, y, t)$$

con condición inicial y condiciones de frontera no homogéneas

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi(x, y),$$

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = g_1(y, t), & \quad 0 < y < L_y, & u(L_x, y, t) = g_2(y, t), & \quad 0 < y < L_y, \\ u(x, 0, t) = g_3(x, t), & \quad 0 < x < L_x, & u(x, L_y, t) = g_4(x, t), & \quad 0 < x < L_x, \end{aligned}$$

donde la EDP es no homogénea, y sus condiciones de fronteras no homogéneas dependientes del tiempo son de tipo Dirichlet, es decir, la temperatura en la frontera de la placa rectangular es conocida para cualquier tiempo arbitrario $t \geq 0$. El método de separación de variables es un método tradicional para encontrar la solución analítica, pero su aplicación se ve limitada para un caso muy particular: cuando se cumple que $f(x, y, t) = 0$ en la EDP, y $g_1(y, t) = g_2(y, t) = g_3(x, t) = g_4(x, t) = 0$ en las condiciones de frontera, es decir, cuando el PVIF dado anteriormente se reduce a una EDP de difusión del calor homogénea, con condiciones de frontera homogéneas. El método a utilizar en la presente investigación para resolver el PVIF original, denominado expansión de funciones propias, reconsidera las bases del método de separación de variables para el tratamiento de la solución y los términos no homogéneos.

Para encontrar la solución de forma numérica, el método de diferencias finitas es uno de los métodos numéricos más utilizados por ser adaptable a cualquier PVIF, incluso si éste presenta condiciones de frontera no homogéneas. Sin embargo, se requiere de la implementación de un programa en un sistema de computación científica como Mathematica para conocer los valores aproximados de temperatura y visualizar gráficamente la solución en distintos niveles de tiempo, ya que el procedimiento a seguir resulta ser repetitivo a pesar de su relativa practicidad. Y de ser posible, con la finalidad de ilustrar la convergencia del método, se compara las soluciones aproximadas con la solución exacta obtenida por el método de expansión de funciones propias.

1.2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

De lo manifestado en el apartado anterior, se tiene la siguiente formulación:

1.2.1. PROBLEMA PRINCIPAL

¿Es posible hallar la solución analítica y numérica de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio?

1.2.2. PROBLEMAS ESPECÍFICOS

1.2.2.1. ¿Es posible establecer la solución analítica de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio?

1.2.2.2. ¿Es posible encontrar la solución numérica de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio utilizando el sistema de computación científica Mathematica?

1.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1. OBJETIVO GENERAL

Hallar la solución analítica y numérica de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio.

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1.3.2.1. Establecer la solución analítica de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio.

1.3.2.2. Encontrar la solución numérica de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio utilizando el sistema de computación científica Mathematica.

1.4. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación se justifica por la necesidad de contar con métodos eficaces y/o eficientes para la modelación de fenómenos físicos y de ingeniería que se encuentran afectos a las condiciones de frontera no homogéneas y a la presencia de un término fuente. Encontrar la solución analítica de la ecuación del calor en una placa rectangular con el método de expansión de funciones propias es

necesario, porque esa solución es una expresión exacta que permite describir la distribución de temperatura en función del tiempo y espacio, contemplando las condiciones de frontera no homogéneas, y sirve como referencia en la validación de las soluciones aproximadas provenientes de la aplicación de un método numérico al mismo problema. Además, encontrar la solución numérica de la ecuación del calor con el método de diferencias finitas es necesario, porque permite describir la distribución de temperatura de forma aproximada, resultando ser un método numérico eficiente para problemas de valor inicial y de frontera con condiciones más complejas si se implementa computacionalmente, inclusive para los casos en donde sea difícil encontrar una solución exacta.

La importancia de la presente investigación radica en promover las posibilidades de estudio de otros PVIF que presenten una EDP y/o condiciones de frontera no homogéneas con las bases del método de expansión de funciones propias y diferencias finitas, siendo una investigación de utilidad para los estudiantes universitarios de pregrado e investigadores con interés en el estudio de las ecuaciones diferenciales y análisis numérico.

1.5. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación se centra en mostrar los fundamentos teóricos relacionados con la solución de la ecuación del calor en dos dimensiones de forma analítica (método de expansión de funciones propias) y numérica (método de diferencias finitas), siendo el principal interés hallar la solución de la ecuación de difusión del calor y mostrar su aplicación a ejemplos prácticos, dejando de lado aspectos colaterales que puedan distraer los objetivos de esta investigación.

1.6. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

1.6.1. HIPÓTESIS GENERAL

Si usamos los métodos de expansión de funciones propias y el de diferencias finitas, entonces es posible encontrar la solución analítica y numérica de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio.

1.6.2. HIPÓTESIS ESPECÍFICAS

1.6.2.1. Si usamos el método de expansión de funciones propias, entonces es posible hallar la solución analítica de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio.

1.6.2.2. Si usamos el método de diferencias finitas, entonces se puede hallar la solución numérica de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio.

CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

2.1.1. ANTECEDENTES INTERNACIONALES

Sequeira y Ramírez (2019), en su artículo denominado *Aspectos Computacionales del método de diferencias finitas para la ecuación de calor dependiente del tiempo*, describen un algoritmo para implementar de manera computacional el método de diferencias finitas en la ecuación de calor dependiente del tiempo, con condiciones de frontera de Dirichlet no homogéneas en dos dimensiones. Los autores utilizaron el paquete computacional MATLAB para validar el método presentado, y también exponen los procesos independientes al lenguaje de programación.

Bai et. al. (2021), en su artículo denominado *Numerical Analysis of 2D Rectangular Plate*, propusieron una investigación numérica de la distribución de temperatura en una placa cuadrada. Se resuelve la ecuación diferencial bidimensional del calor mediante el método de diferencias finitas, considerando dentro del estudio a los metales como oro, cinc, estaño, mármol y bronce, y concluyendo que éstos alcanzan un estado estacionario en diferentes segundos de tiempo. Los valores internos del cinc, el estaño y el mármol convergen a puntos similares debido a sus propiedades materiales. La transmisión de calor dentro de la placa se resuelve numéricamente y se necesita una investigación adicional para investigar experimentalmente el rendimiento térmico de la placa.

Gonçalves y Gomes (2022), en su artículo denominado *Finite Difference Method Applied in Two – Dimensional Heat Conduction Problema in the Permanent Regime in Rectangular Coordinates*, concluyeron que, por los resultados que obtuvo, el método de diferencias finitas es una opción práctica y eficiente para el análisis térmico ya que tiene buena precisión y exactitud, especialmente en el caso donde no hay generación de calor. También señala que sus antecedentes y formulación son comprensibles, lo que facilita el uso del recurso computacional, pues las distribuciones de temperaturas y gradientes térmicos en forma gráfica fueron evidentes al ser generadas por el algoritmo desarrollado, facilitando el análisis y comprensión del problema.

2.1.2. ANTECEDENTES NACIONALES

La Torre (2013), en su tesis de maestría titulado *Simulación numérica de la distribución de temperatura en una placa metálica rectangular utilizando un esquema de diferencias finitas*, desarrolló el problema de conducción bidimensional del calor usando el método analítico de separación de variables y el método numérico de diferencias finitas, utilizando los esquemas de diferencias progresivas y Crank – Nicolson. Debido a que las condiciones de frontera se tornan con cierto grado de dificultad para su solución analítica, entonces el autor optó por emplear los métodos de aproximación numérica de diferencias finitas, estudiando su estabilidad numérica por medio del criterio de estabilidad de Von

Neumann y mostrando que el esquema de diferencias finitas resulta eficiente porque el error de aproximación es muy pequeño.

Salgado (2021), en su tesis de maestría titulado *Ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico mediante el método de diferencias finitas*, aplicó el método de diferencias finitas para encontrar la solución de una ecuación diferencial parcial del tipo parabólico mediante el método de diferencias finitas y su aplicación del método para la solución de ecuaciones diferenciales de segundo, tercer y cuarto grado que determina la solución de una viga doblemente empotrada y las deflexiones que ésta tuvo debido a la carga uniforme.

2.2. BASES TEÓRICAS DE LA SOLUCIÓN ANALÍTICA

2.2.1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

Se dice que una **ecuación diferencial (ED)** es cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes. Las ecuaciones diferenciales se clasifican por tipo (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales), orden y linealidad. (Zill y Cullen, 2008)

Si una ecuación diferencial contiene únicamente derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**. Por ejemplo

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y \quad (2.1)$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias. (Zill y Cullen, 2008)

2.2.1.1. ORDEN

El **orden** de una ecuación diferencial (EDO o EDP) representa el orden de la derivada más alta presente en la ecuación. Por ejemplo,

$$\begin{array}{ccc} \text{Segundo orden} & & \text{Primer orden} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x \end{array}$$

representa una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

De manera simbólica, es posible expresar una ecuación diferencial ordinaria de n -ésimo orden como una variable dependiente empleando la forma general

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.2)$$

donde F es una función con valores reales de $n + 2$ variables: $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ (Zill y Cullen, 2008).

2.2.1.2. LINEALIDAD

Se dice que una EDO de n –ésimo orden (2.2) es **lineal** si F es lineal en $x, y, y', \dots, y^{(n)}$. Esto significa que una EDO de n –ésimo orden es lineal cuando (2.2) es

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$$

o

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (2.3)$$

Dos casos especiales de (2.3) son las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden ($n = 1$) y de segundo orden ($n = 2$):

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{y} \quad a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (2.4)$$

En la combinación aditiva del extremo izquierdo de (2.3), se observa que las dos propiedades características de una EDO lineal son:

- La variable dependiente y así como todas sus derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada uno de los términos que involucran a y es 1.
- Los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n de $y, y', \dots, y^{(n)}$ solo dependen de la variable x (Zill y Cullen, 2008).

2.2.1.3. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (2.5)$$

es una **ecuación lineal** en la variable dependiente y .

Cuando $g(x) = 0$, se dice que la ecuación lineal (2.5) es **homogénea**; caso contrario, es no homogénea.

Si se divide ambos miembros de la ecuación dada en (2.5) entre el coeficiente $a_1(x)$, se obtiene la **forma estándar** de una ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \quad (2.6)$$

Se pretende buscar una solución de la ecuación (2.6) sobre un intervalo I para el cual ambas funciones, P y Q , sean continuas (Zill y Cullen, 2008).

Es fácil verificar que la ecuación tiene como factor integrante a $e^{\int P dx}$, puesto que, al multiplicar ambos lados de (2.6) por este factor, se obtiene

$$e^{\int P dx} \frac{dy}{dx} + P y e^{\int P dx} = Q e^{\int P dx}, \quad (2.7)$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{d}{dx}(y e^{\int P dx}) = Q e^{\int P dx}. \quad (2.8)$$

Esto es cierto por la regla del cálculo para la diferenciación de un producto. De (2.8) se obtiene por integración la solución

$$y e^{\int P dx} = \int Q e^{\int P dx} dx + C. \quad (2.9)$$

No es necesario memorizar (2.9). La clave para resolver una ecuación diferencial de primer orden está en usar el factor integrante $\mu = e^{\int P dx}$ para multiplicar ambos miembros de la ecuación (2.6) por μ y expresar el lado izquierdo de la ecuación (2.7) como la derivada del producto de μ con y como en (2.8) (Spiegel, 1983).

2.2.1.4. PROBLEMA DE VALORES EN LA FRONTERA

Un problema como

$$\text{Resolver: } a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x)$$

$$\text{Sujeto a: } y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$

se denomina **problema de valores en la frontera (PVF)**. Los valores prescritos en $y(a) = y_0$ y en $y(b) = y_1$ se conocen como **condiciones de frontera**.

Para una ecuación diferencial de segundo orden, otros pares de condiciones de frontera podrían ser

$$\begin{aligned} y'(a) &= y_0, & y(b) &= y_1 \\ y(a) &= y_0, & y'(b) &= y_1 \\ y'(a) &= y_0, & y'(b) &= y_1, \end{aligned}$$

donde y_0 y y_1 denotan constantes arbitrarias. Estos tres pares de condiciones son solo casos especiales de las condiciones de frontera generales

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= \gamma_1 \\ \alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) &= \gamma_2 \end{aligned}$$

(Zill y Cullen, 2008).

2.2.2. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

Una ecuación diferencial se denomina **ecuación diferencial parcial** si contiene además de la variable dependiente y las variables independientes, una o más derivadas parciales de la variable dependiente.

En general, puede escribirse en la forma

$$f(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0, \quad (2.10)$$

donde se involucran varias variables independientes x, y, \dots , una función desconocida u de dichas variables, y las derivadas parciales $u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots$, de la función. Los subíndices de las variables dependientes denotan diferenciaciones, por ejemplo,

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Para resolver la ecuación (2.10), se considera que la solución se encuentra en un dominio D definido adecuadamente en el espacio \mathbb{R}^n de dimensión n . Se buscan funciones $u = u(x, y, \dots)$ que satisfagan la ecuación (2.10) en D ; pero, entre muchas soluciones posibles, se selecciona una en particular al introducir condiciones adicionales adecuadas.

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} uu_{xy} + u_x &= y, \\ u_{xx} + 2yu_{xy} + 3xu_{yy} &= 4 \sin x, \\ (u_x)^2 + (u_y)^2 &= 1, \\ u_{xx} - u_{yy} &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

son ecuaciones diferenciales parciales. Las funciones

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (x + 3)^3, \\ u(x, y) &= \sin(x - y), \end{aligned}$$

son soluciones de la última ecuación de (2.11), como se puede comprobar fácilmente (Myint y Debnath, 2007).

2.2.2.1. ORDEN

El **orden** de una ecuación diferencial parcial es el orden de la derivada parcial de mayor orden que aparece en la ecuación. Por ejemplo, $u_{xx} + 2xu_{xy} + u_{yy} = e^y$ es una ecuación diferencial de segundo orden, y $u_{xxy} + xu_{yy} + 8u = 7y$ es una ecuación diferencial parcial de tercer orden (Myint y Debnath, 2007).

2.2.2.2. LINEALIDAD

Una ecuación diferencial parcial se dice que es **lineal** si es lineal en la función desconocida y todas sus derivadas, con coeficientes que dependen únicamente de las variables independientes. Por ejemplo, la ecuación $yu_{xx} + 2xyu_{yy} + u = 1$ es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden. La ecuación que no es lineal se llama ecuación **no lineal** (Myint y Debnath, 2007).

2.2.2.3. EDP DE SEGUNDO ORDEN

Si se establece que u es la variable dependiente, cuyas variables independientes son x e y , entonces la forma general de una **ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden** está dada por

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \quad (2.12)$$

donde los coeficientes A, B, C, \dots, G son constantes o funciones de x y de y . Cuando $G(x, y) = 0$, se dice que la ecuación (2.12) es **homogénea**, de otra forma, es **no homogénea**. Por ejemplo, las ecuaciones lineales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

son homogénea y no homogénea, respectivamente (Zill y Cullen, 2008).

2.2.2.4. CLASIFICACIÓN DE LA EDP

Una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden en dos variables independientes con coeficientes constantes puede clasificarse como uno de tres tipos. Esta clasificación depende solamente de los coeficientes de las derivadas de segundo orden, suponiendo que al menos uno de los coeficientes A, B y C es diferente de cero.

La ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes reales, se dice que es

Hiperbólica si $B^2 - 4AC > 0$,

Parabólica si $B^2 - 4AC = 0$,

Elíptica si $B^2 - 4AC < 0$

(Zill y Cullen, 2008).

Por ejemplo, se clasifican las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{b) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \text{c) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

a) Al volver a escribir la ecuación dada como

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

se identifica que $A = 3, B = 0$ y $C = 0$. Puesto que $B^2 - 4AC$, la ecuación es parabólica.

b) Al volver a escribir la ecuación como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

se observa que $A = 1, B = 0$ y $C = -1$ y $B^2 - 4AC = -4(1)(-1) > 0$. La ecuación es hiperbólica.

c) Si $A = 1, B = 0$ y $C = 1$, y $B^2 - 4AC = -4(1)(1) < 0$, la ecuación es elíptica (Zill y Cullen, 2008).

2.2.2.5. PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Si u_1, u_2, \dots, u_k son las soluciones de una ecuación diferencial parcial lineal homogénea, entonces la combinación lineal

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_ku_k,$$

donde las $c_i, i = 1, 2, \dots, k$ son constantes, es también una solución.

Para un conjunto infinito u_1, u_2, u_3, \dots de soluciones de una ecuación lineal homogénea, es posible construir otra solución u formando la serie infinita

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k,$$

donde las $c_k, k = 1, 2, \dots$, son constantes. (Zill y Cullen, 2008)

2.2.3. CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

2.2.3.1. FUNCIÓN CONTINUA POR PARTES

Se dice que una función f de una variable es **continua por partes** en un intervalo $[a, b]$ si existen un número finito de puntos $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, de modo que f es continua en $x_j < x < x_{j+1}$ y los límites unilaterales $f(x_j^+)$ y $f(x_{j+1}^-)$ existen para todo $j = 1, 2, 3, \dots, n - 1$. En la Figura 2.1 se muestra una función continua por partes. (Myint y Debnath, 2007)

Las funciones como $\frac{1}{x}$ y $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no pueden ser continuas por partes en el intervalo cerrado $[0, 1]$ porque el límite unilateral $f(0^+)$ no existe en ninguno de los casos (Myint y Debnath, 2007).

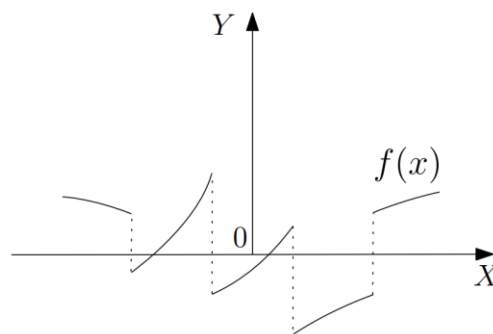


Figura 2.1: Gráfica de una función continua por partes

Fuente: Myint y Debnath, 2007, pág. 168

Si f es continua por partes en un intervalo $[a, b]$, entonces es necesariamente acotada e integrable en ese intervalo. Además, se deduce inmediatamente que el producto de dos funciones continuas por tramos es continuo por tramos en un intervalo común (Myint y Debnath, 2007).

2.2.3.2. FUNCIÓN SUAVE POR PARTES

Si f es continua por partes en un intervalo $[a, b]$ y si, además, la primera derivada f' es continua en cada uno de los intervalos $x_j < x < x_{j+1}$, y los límites $f'(x_j^+)$ y $f'(x_j^-)$ existen, entonces se dice que f es **suave por partes** (Myint y Debnath, 2007).

Considere $f(x) = x^{1/3}$, como se muestra en la figura 2.2, no es suave por partes en ningún intervalo que incluya $x = 0$, porque $f'(x) = 1/3 x^{-2/3}$ es ∞ en $x = 0$. En otras palabras, cualquier región que incluya $x = 0$ no puede dividirse en partes de manera que $\frac{df}{dx}$ es continuo (Haberman, 2013).

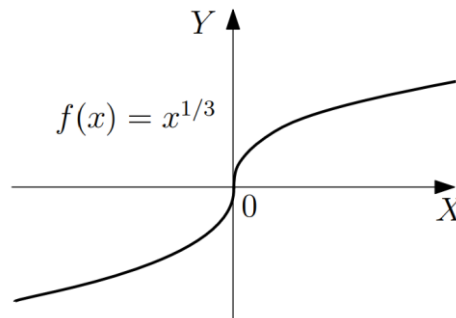


Figura 2.2: Ejemplo de una función que no es suave por partes

Fuente: Haberman, 2013, pág. 87

2.2.3.3. DISCONTINUIDAD DE SALTO

Una función $f(x)$ tiene una **discontinuidad de salto** en un punto $x = x_0$ si el límite por la izquierda $[f(x_0^-)]$ y el límite por la derecha $[f(x_0^+)]$ existen (y son desiguales), como se ilustra en la figura 2.3. (Haberman, 2013)

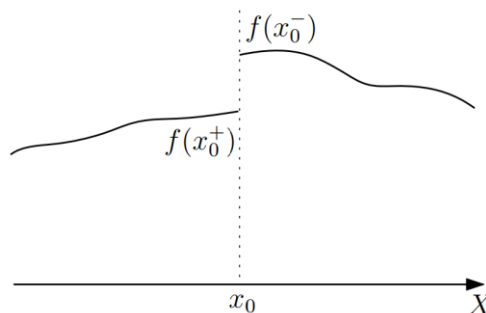


Figura 2.3: Discontinuidad de salto en $x = x_0$

Fuente: Haberman, 2013, pág. 87

2.2.3.4. FUNCIÓN PERIÓDICA

Una función continua por partes $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ se dice que es **periódica** si existe un número real positivo p tal que

$$f(x + p) = f(x), \quad (2.13)$$

para todo x, p se denomina período de f , y el valor más pequeño de p se denomina período fundamental. En la Figura 2.4 se muestra un ejemplo de gráfico de una función periódica (Myint y Debnath, 2007).

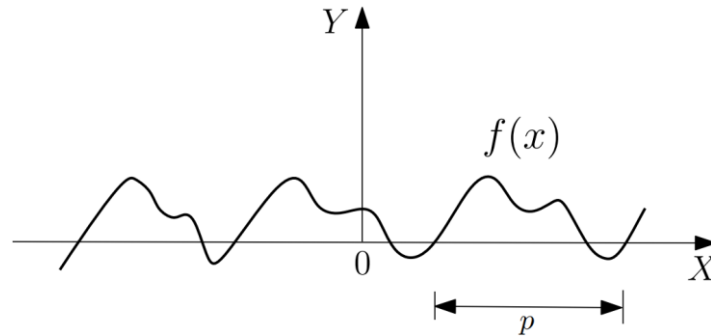


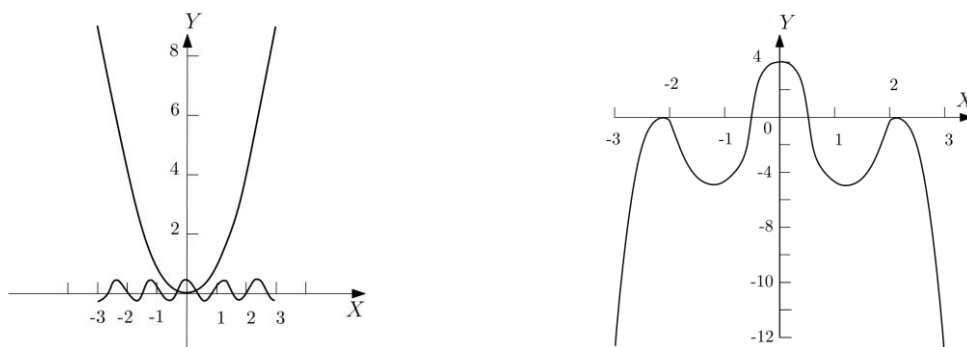
Figura 2.4: Función periódica

Fuente: Myint y Debnath, 2007, pág. 169

2.2.3.5. FUNCIÓN PAR

f es una **función par** en $[-L, L]$ si $f(-x) = f(x)$ para $-L \leq x \leq L$. (O'Neil, 2015).

Por ejemplo, $x^2, x^4, \cos(n\pi x/L)$, y $e^{-|x|}$ son funciones pares en cualquier intervalo $[-L, L]$. En la figura 2.5 a) se muestran las gráficas de $y = x^2$ y $y = \cos(5\pi x/3)$. La gráfica de tales funciones para $-L \leq x \leq 0$ es la reflexión a lo largo del eje y de la gráfica para $0 \leq x \leq L$, tal como se muestra en la Figura 2.5 b) con una función par típica (O'Neil, 2015).



a) Gráfica de las funciones pares $y = x^2$ e $y = \cos(5\pi x/3)$.

b) Gráfica de una función par típica, simétrica respecto al eje y .

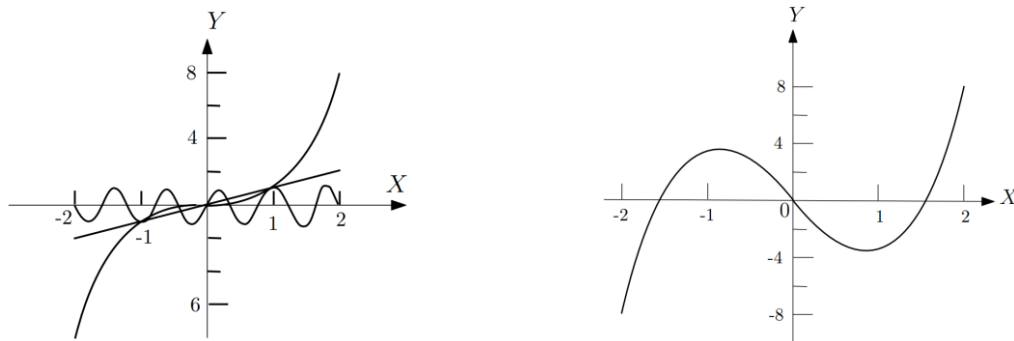
Figura 2.5: Gráfica de funciones pares

Fuente: O'Neil, 2015, pág. 56

2.2.3.6. FUNCIÓN IMPAR

f es una **función impar** en $[-L, L]$ si $f(-x) = -f(x)$ para $-L \leq x \leq L$. (O'Neil, 2015)

Las funciones x , x^3 , x^5 y $\text{sen}(n\pi x/L)$ son funciones impares en cualquier intervalo $[-L, L]$. En la figura 2.6 a) se muestran las gráficas de $y = x$, $y = x^3$ y $y = \text{sen}(5\pi x/2)$. La gráfica de una función impar para $-L \leq x \leq 0$ es la reflexión a lo largo del eje vertical y después a lo largo del eje horizontal de la gráfica para $0 \leq x \leq L$, tal como se muestra en la figura 2.6 b). Si la función f es impar, entonces $f(0) = 0$, ya que $f(-0) = f(0) = -f(0)$. (O'Neil, 2015)



- a) Gráfica de las funciones impares $y = x$, $y = x^3$ e $y = \text{sen}(5\pi x/2)$. b) Gráfica de una función impar típica, simétrica respecto al origen.

Figura 2.6: Gráfica de funciones impares

Fuente: O'Neil, 2015, pág. 56

Por supuesto, la mayoría de las funciones no son par ni impar. Por ejemplo $f(x) = e^x$ no es par ni impar en ningún intervalo $[-L, L]$. (O'Neil, 2015)

Algunas propiedades relacionadas a las funciones pares e impares:

- El producto de dos funciones pares es par.
- El producto de dos funciones impares es par.
- El producto de una función par y una impar es impar.
- La suma (resta) de dos funciones pares es par.
- La suma (resta) de dos funciones impares es impar.
- Si f es par, entonces $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
- Si f es impar, entonces $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ (Zill y Cullen, 2008).

2.2.4. CONVERGENCIA DE SERIES

2.2.4.1. CONVERGENCIA PUNTUAL

Una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ se denomina **puntualmente convergente** en $a < x < b$ a $f(x)$ si converge a $f(x)$ para cada x en $a < x < b$. En otras palabras, para cada x en $a < x < b$, se tiene

$$|f(x) - s_n(x)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty,$$

donde $s_n(x)$ es la n -ésima suma parcial definida por $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. (Myint y Debnath, 2007)

2.2.4.2. CONVERGENCIA UNIFORME

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ se dice que **converge uniformemente** a $f(x)$ en $a \leq x \leq b$ si

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - s_n(x)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty$$

Evidentemente, la convergencia uniforme implica convergencia puntual, pero lo contrario no necesariamente es cierto (Myint y Debnath, 2007).

2.2.4.3. CONVERGENCIA EN LA MEDIA CUADRÁTICA

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **converge en el sentido de la media cuadrática** (o L^2) a $f(x)$ en $a \leq x \leq b$ si

$$\int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty$$

Se observa que la convergencia uniforme es más fuerte que la convergencia puntual y la convergencia cuadrática media (Myint y Debnath, 2007).

2.2.5. SERIES DE FOURIER Y SUS PROPIEDADES

Una función $f(x)$ y su serie de Fourier en el intervalo $-L \leq x \leq L$ se deben distinguir cuidadosamente:

$$\text{Series de Fourier} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \quad (2.14)$$

Es posible que la serie infinita ni siquiera converja, y si converge, es posible que no converja a $f(x)$ (Haberman, 2013).

La serie de Fourier de $f(x)$ en el intervalo $-L \leq x \leq L$ se define como la serie infinita (2.14), donde los coeficientes de Fourier vienen dados por (2.15):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned} \quad (2.15)$$

(Haberman, 2013)

Se usa la notación

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

donde el símbolo \sim se lee como “tiene la serie de Fourier (en un intervalo dado)”. La función $f(x)$ está en el lado izquierdo, y su serie de Fourier (en el intervalo $-L \leq x \leq L$) está en el lado derecho (incluso si la serie diverge), y pueden ser completamente diferentes (Haberman, 2013).

Teorema de convergencia para las series de Fourier:

Si $f(x)$ es suave por partes en el intervalo $-L \leq x \leq L$, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ converge

1. A la extensión periódica de $f(x)$, donde la extensión periódica es continua,

2. Al promedio de dos límites, generalmente

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)],$$

donde la extensión periódica tiene una discontinuidad de salto (Haberman, 2013).

Si $f(x)$ es suave por partes, entonces para $-L < x < L$ (excluyendo los puntos extremos)

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.16)$$

donde los coeficientes de Fourier vienen dados por (2.15). En los puntos donde $f(x)$ es continua, $f(x^+) = f(x^-)$, y por tanto (2.17) implica que para $-L < x < L$,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (2.17)$$

(Haberman, 2013).

2.2.5.1. SERIE DE SENOS DE FOURIER

Si $f(x)$ es una función impar, entonces, reemplazando en (2.15)

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

Ambos son cero porque los integrandos $f(x)$ y $f(x) \cos n\pi x/L$ son impares. Como resultado, la serie de Fourier de una función impar es una serie infinita de funciones impares (senos):

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.18)$$

si $f(x)$ es impar. En este caso, la fórmula para los coeficientes de Fourier b_n se puede simplificar sabiendo que $f(x) \operatorname{sen} n\pi x/L$ es par:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (2.19)$$

Para funciones impares, la información sobre $f(x)$ solo se necesita para $0 \leq x \leq L$ (Haberman, 2013).

Si una función $f(x)$ se define solo para $0 \leq x \leq L$, entonces se puede extender como una función impar (ver Figura 2.7), denominado **extensión impar de $f(x)$** .

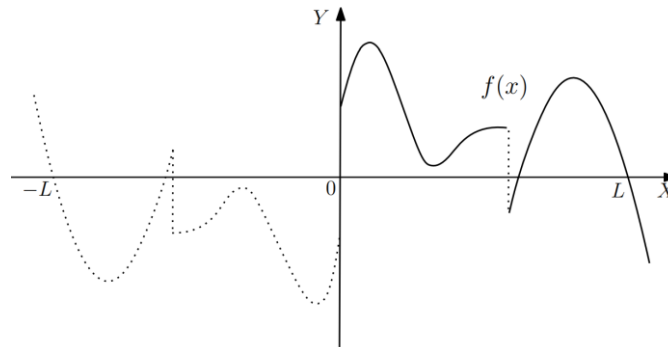


Figura 2.7: Extensión impar de $f(x)$

Fuente: Haberman, 2013, pág. 94

La extensión impar de $f(x)$ se define para $-L \leq x \leq L$. El teorema de Fourier se aplica [si la extensión impar de $f(x)$ es suave por partes, lo cual solo requiere que $f(x)$ sea suave por partes en $0 \leq x \leq L$]. Además, dado que la extensión impar de $f(x)$ es ciertamente impar, su serie de Fourier solo incluye senos:

$$\text{La extensión impar de } f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad -L \leq x \leq L,$$

donde B_n se da por (2.19). Sin embargo, solo es de interés lo que ocurre entre $x = 0$ y $x = L$. En esa región, $f(x)$ es idéntica a su extensión impar:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2.20)$$

donde

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (2.21)$$

A esto se le conoce como la **Serie de Senos de Fourier** (en el intervalo $0 \leq x \leq L$) (Haberman, 2013).

Por ejemplo, se define la función $f(x) = x$ en el intervalo $0 \leq x \leq L$. En la figura 2.8 a) se dibuja a $f(x)$; y en la figura 2.8 b) se muestra su extensión periódica, que posee discontinuidades de salto en $x = (2n - 1)L$. Al considerar la serie de senos de Fourier de $f(x) = x$, se muestra por ejemplo que

ésta converge a cero en $x = L$, a pesar de que $f(L) \neq 0$. También se observa que la serie de senos de Fourier de $f(x) = x$ en realidad es igual para $-L < x < L$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad -L < x < L. \quad (2.22)$$

Los coeficientes de Fourier son determinados de (2.21):

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}, \quad (2.23)$$

donde la integral puede ser evaluada por integración por partes (Haberman, 2013).

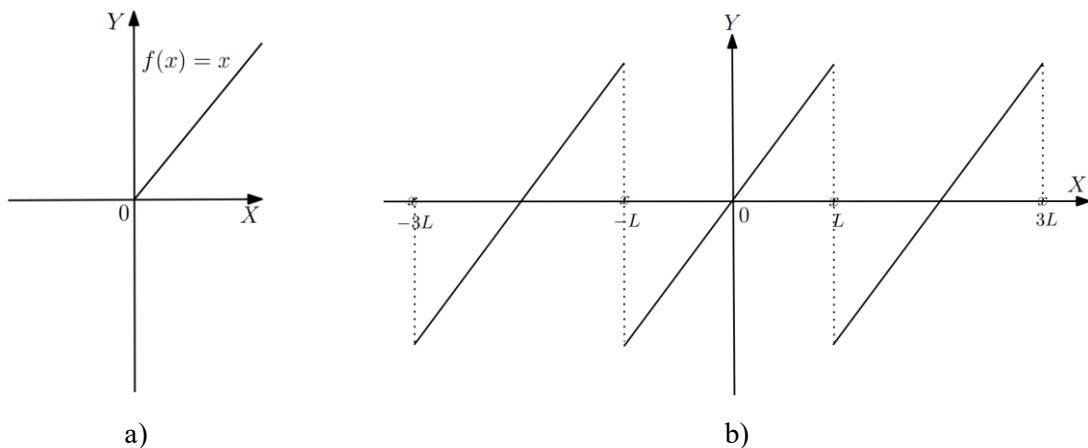


Figura 2.8: a) $f(x) = x$ y b) su serie de senos de Fourier

Fuente: Haberman, 2013, pág. 100

2.2.5.2. SERIE DE COSENOS DE FOURIER

Si $f(x)$ es una función par, entonces, reemplazando en (2.15):

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

La serie de Fourier de una función par es una representación de $f(x)$ que involucra una suma infinita de funciones pares (cosenos):

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (2.24)$$

Los coeficientes de los cosenos pueden evaluarse utilizando información sobre $f(x)$ solo entre $x = 0$ y $x = L$, ya que

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad (2.25)$$

$$(n \geq 1) \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (2.26)$$

utilizando el hecho de que los integrandos $f(x)$ y $f(x) \cos n\pi x/L$ son pares (Haberman, 2013).

A menudo, una función $f(x)$ no se da como una función par. Si una función $f(x)$ se define solo para $0 \leq x \leq L$, entonces se puede extender como una función par (ver figura 2.9).

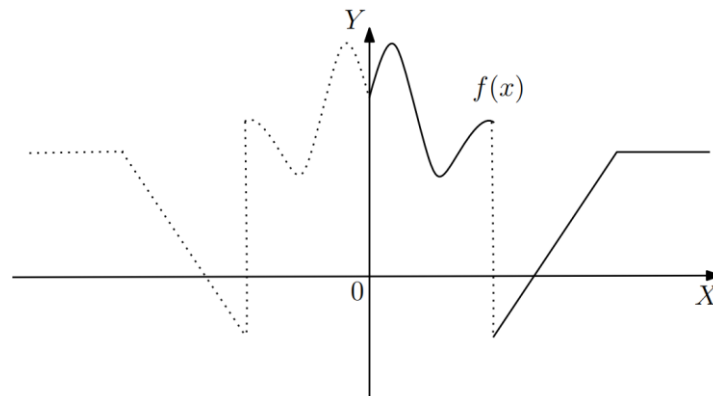


Figura 2.9: Extensión par de $f(x)$

Fuente: Haberman, 2013, pág. 103

La **extensión par de $f(x)$** se define para $-L \leq x \leq L$. Si $f(x)$ es suave por partes para $0 \leq x \leq L$, entonces su extensión par también lo es, por lo tanto, el teorema de Fourier puede aplicarse a la extensión par de $f(x)$. Dado que la extensión par de $f(x)$ solo tiene cosenos:

$$\text{La extensión par de } f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad -L \leq x \leq L,$$

donde a_n es dado por (2.25) y (2.26). En la región de interés, $0 \leq x \leq L$, $f(x)$ es idéntica a la extensión par. La serie resultante en esa región se denomina **Serie de Cosenos de Fourier** de $f(x)$ (en el intervalo $0 \leq x \leq L$):

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2.27)$$

donde

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad (2.28)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (2.29)$$

La serie de cosenos de Fourier de $f(x)$ es exactamente la serie de Fourier de la extensión par de $f(x)$ (Haberman, 2013).

Por ejemplo, se define la función $f(x) = x$ en el intervalo $0 \leq x \leq L$. En la figura 2.10 a), se dibuja a $f(x)$, y, en la figura 2.10 b), se muestra su ampliación como una función par. A continuación, se dibuja la serie de Fourier de la extensión par en la figura 2.11. Tener en cuenta que entre $x = 0$ y $x = L$, la serie del coseno de Fourier no tiene discontinuidades de salto. La serie del coseno de Fourier de la función $f(x) = x$, en realidad es igual a x , de modo que

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2.30)$$

Los coeficientes vienen dados por las siguientes integrales:

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L x \, dx = \frac{1}{L} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^L = \frac{L}{2} \quad (2.31)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = \frac{2}{L} \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_0^L = \frac{2L}{(n\pi)^2} (\cos n\pi - 1). \quad (2.32)$$

(Haberman, 2013).

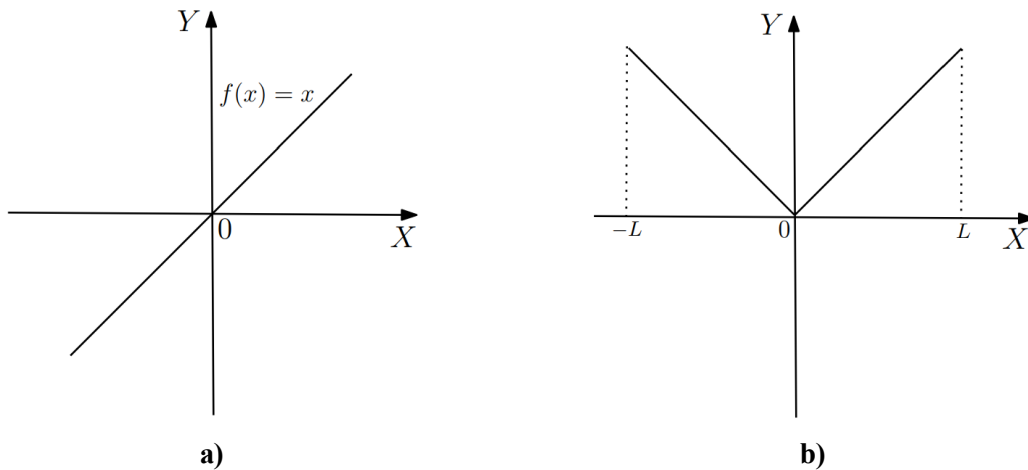


Figura 2.10: a) $f(x) = x$, b) su extensión par

Fuente: Haberman, 2013, pág. 104

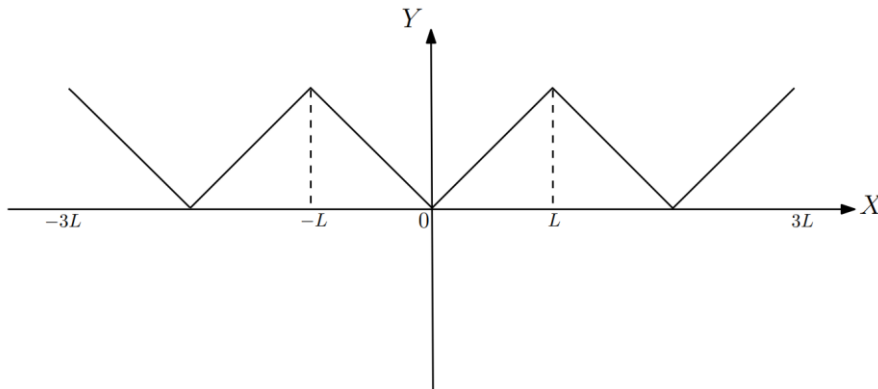


Figura 2.11: Serie de cosenos de Fourier de la extensión par de $f(x)$

Fuente: Haberman, 2013, pág. 105

2.2.5.3. CONTINUIDAD Y DIFERENCIACIÓN TÉRMINO A TÉRMINO

Para las series de Fourier, la diferenciación término a término no siempre es válida. Considere la serie de senos de Fourier de x en el intervalo $0 \leq x \leq L$ obtenido en (2.22) y (2.23) y esbozada en la figura 2.12:

$$x = 2 \sum_{n=1}^N \frac{L}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{en } 0 \leq x < L.$$

Al derivar la función del lado izquierdo, entonces se tiene la función $f'(x) = 1$. Sin embargo, al diferenciar formalmente término a término la función del lado derecho, entonces se obtiene

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta es una serie de cosenos, pero no es la serie de cosenos para $f(x) = 1$ (la serie de cosenos de 1 es solo 1). Por lo tanto, la figura 2.12 es un ejemplo en el que no es posible diferenciar término a término (Haberman, 2013).

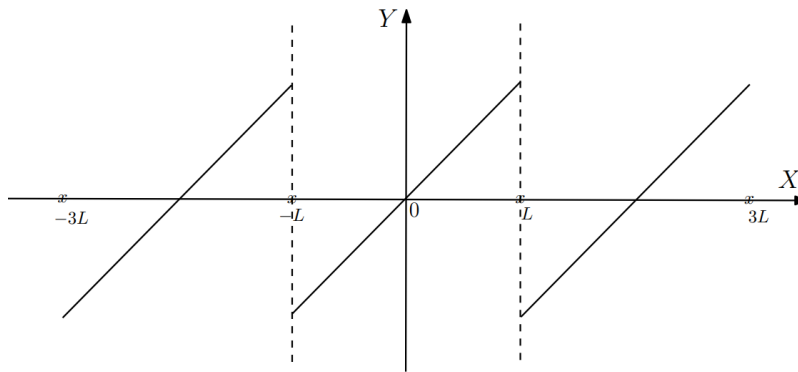


Figura 2.12: Serie de senos de Fourier de $f(x) = x$

Fuente: Haberman, 2013, pág. 113

Para Series de Cosenos de Fourier:

Para $f(x)$ suave por partes, la serie de cosenos de Fourier de $f(x)$ es continua y converge a $f(x)$ sí y solo si $f(x)$ es continua (Haberman, 2013).

Si $f'(x)$ es suave por partes, entonces la serie de cosenos de Fourier de una función continua $f(x)$ se puede diferenciar término a término (Haberman, 2013).

Por ejemplo, considere la serie de cosenos de Fourier de $f(x) = x$ definido en $0 \leq x \leq L$, dado en (2.30), (2.31) y (2.32), como se muestra en la figura 2.13.

$$x = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2.33)$$

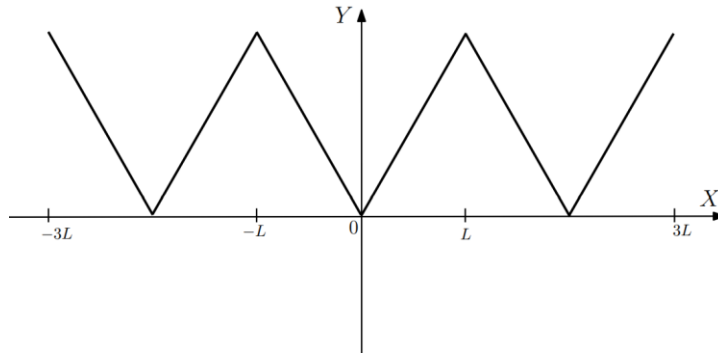


Figura 2.13: Serie de cosenos de Fourier de $f(x) = x$.

Fuente: Haberman, 2013, pág. 115

Nótese la naturaleza continua de esta serie para $0 \leq x \leq L$, lo que resulta en el signo = en (2.33). La derivada de esta serie de cosenos de Fourier se muestra en la figura 2.14: es la serie de senos de Fourier de $f(x) = 1$.

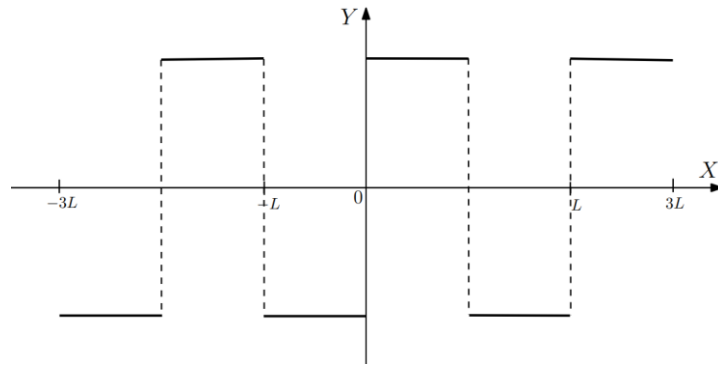


Figura 2.14: Serie de senos de Fourier de df/dx .

Fuente: Haberman, 2013, pág. 115

Esta serie se puede obtener mediante la diferenciación término a término de la serie de cosenos de Fourier de $f(x) = x$. Suponiendo que la diferenciación término a término de (2.33) es válida como se afirma, se deduce que

$$1 \sim \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n \\ \text{impar}}} \frac{1}{n} \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.34)$$

lo cual es, de hecho, correcto (Haberman, 2013).

Para Series de Senos de Fourier:

Para funciones suaves por partes $f(x)$, la serie de senos de Fourier de $f(x)$ es continua y converge a $f(x)$ para $0 \leq x \leq L$ sí y solo si $f(x)$ es continua y tanto $f(0) = 0$ como $f(L) = 0$ (Haberman, 2013)

Si $f'(x)$ es suave por partes, entonces la serie de senos de Fourier de una función continua $f(x)$ puede **diferenciarse término a término** solo si $f(0) = 0$ y $f(L) = 0$ (Haberman, 2013).

Demostración

Considere la serie de senos de Fourier de una función continua $f(x)$ tal que:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.35)$$

donde

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Se cumple la igualdad en (2.35) solo si $f(0) = f(L) = 0$.

Si $f'(x)$ es suave por partes, entonces $f'(x)$ tiene una serie de cosenos de Fourier

$$f'(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.36)$$

donde A_0 y A_n están expresados en (2.37) y (2.38). Esta serie no convergerá a $f'(x)$ en los puntos de discontinuidad de $f'(x)$. Una serie de senos de Fourier puede diferenciarse término a término si se verifica que

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right) B_n \cos \frac{n\pi x}{L},$$

es decir, si $A_0 = 0$ y $A_n = (n\pi/L)B_n$, $n \neq 0$. Estos coeficientes se derivan de (2.36). Al integrar por partes, se obtiene

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f'(x) dx = \frac{1}{L} [f(L) - f(0)], \quad (2.37)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \left[f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L + \frac{n\pi}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right], \quad n \neq 0 \quad (2.38)$$

pero, de (2.35), B_n es el coeficiente de la serie de senos de Fourier de $f(x)$. Por lo tanto, para $n \neq 0$,

$$A_n = \frac{n\pi}{L} B_n + \frac{2}{L} [(-1)^n f(L) - f(0)]. \quad (2.39)$$

Al comparar los coeficientes de la serie de cosenos de Fourier, se observa que, para que la serie de senos de Fourier pueda diferenciarse término a término, se requiere de las siguientes condiciones:

$$f(L) - f(0) = 0$$

(de modo que $A_0 = 0$), y

$$(-1)^n f(L) - f(0) = 0$$

(de modo que $A_n = (n\pi/L)B_n$). Ambas se cumplen solo si $f(0) = f(L) = 0$, siendo exactamente estas condiciones para que una serie de senos de Fourier de una función continua sea continua. De esa manera, se completa la prueba, además, se proporciona información adicional para diferenciar la serie de senos de Fourier de cualquier función continua, incluso cuando esa serie no es continua (Haberman, 2013).

Si $f'(x)$ es suave por partes, entonces la serie de senos de Fourier de una función continua $f(x)$,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

no se puede, en general, diferenciarse término a término. Sin embargo,

$$f'(x) \sim \frac{1}{L}[f(L) - f(0)] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n\pi}{L} B_n + \frac{2}{L}((-1)^n f(L) - f(0)) \right] \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (2.40)$$

(Haberman, 2013).

Por ejemplo, al considerar nuevamente la serie de senos de Fourier de $f(x) = x$,

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.41)$$

y sabiendo que $f'(x) = 1$ no tiene una serie de cosenos de Fourier que resulte de la diferenciación término a término de (2.41), ya que $f(L) \neq 0$, se puede aplicar (2.40) ya que $f(x)$ es continua y $f'(x)$ es suave por partes. Se observa que $f(0) = 0$, $f(L) = L$, y $(n\pi/L)B_n = 2(-1)^{n+1}$, se deduce que la serie del coseno de Fourier de df/dx es

$$\frac{df}{dx} \sim 1.$$

La función constante 1 es exactamente la serie del coseno de Fourier de df/dx ya que $f(x) = x$ implica que $f'(x) = 1$. Por lo tanto, el lado derecho de (2.40) da la expresión correcta para las series de cosenos de $f'(x)$ cuando se conoce la serie de senos de Fourier de $f(x)$, incluso si $f(0) \neq 0$ y/o $f(L) \neq 0$ (Haberman, 2013).

2.3. MARCO CONCEPTUAL DE LA SOLUCIÓN ANALÍTICA

2.3.1. FUNCIONES ORTOGONALES

2.3.1.1. PRODUCTO INTERNO DE FUNCIONES

El **producto interno** de dos funciones f_1 y f_2 en un intervalo $[a, b]$ es el número

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$$

(Zill y Cullen, 2008).

2.3.1.2. FUNCIONES ORTOGONALES

Se dice que dos funciones f_1 y f_2 son **ortogonales** en un intervalo $[a, b]$ si

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0. \quad (2.42)$$

Por ejemplo, las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x^3$ son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ puesto que

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^3 dx = \frac{1}{6} x^6 \Big|_{-1}^1 = 0.$$

La ortogonalidad es sinónimo de perpendicularidad en el análisis vectorial; sin embargo, la ortogonalidad entre funciones definido en (2.42) carece de sentido geométrico (Zill y Cullen, 2008).

2.3.1.3. CONJUNTO ORTOGONAL Y NORMA

Se dice que un conjunto de funciones con valores reales $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$ es **ortogonal** en un intervalo $[a, b]$ si

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (2.43)$$

(Zill y Cullen, 2008).

Con el producto interno se puede expresar la **norma** o **longitud** de una función ϕ_n , similar al caso de un vector \mathbf{u} . La norma cuadrada para un vector \mathbf{u} es la expresión $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$, en consecuencia, la norma es $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$. Para una función ϕ_n , la norma cuadrada es $\|\phi_n(x)\|^2 = \langle \phi_n, \phi_n \rangle$, y entonces la norma, o su longitud generalizada, es $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}$. En otras palabras, en un conjunto ortogonal $\{\phi_n(x)\}$ la norma cuadrada y la norma de una función ϕ_n son, respectivamente,

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2(x) dx \quad \text{y} \quad \|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x) dx} \quad (2.44)$$

Si $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[a, b]$ con la propiedad de que $\|\phi_n(x)\| = 1$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, entonces se dice que $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto **ortonormal** en el intervalo (Zill y Cullen, 2008).

Por ejemplo, el conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Si se identifica a las funciones $\phi_0(x) = 1$ y $\phi_n(x) = \cos nx$, entonces se debe demostrar que $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x) \phi_n(x) dx = 0$, si $n \neq 0$; y $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$, si $m \neq n$. En el primer caso, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \phi_0, \phi_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x) \phi_n(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{n} [\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen}(-n\pi)] = 0, \quad n \neq 0, \end{aligned}$$

y en el segundo,

$$\begin{aligned} \langle \phi_m, \phi_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx \leftarrow \text{identidad trigonométrica} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad m \neq n \end{aligned}$$

(Zill y Cullen, 2008).

A partir del ejemplo anterior, se encuentra las normas de cada función en el conjunto ortogonal. De (2.44), para $\phi_0(x) = 1$ se tiene

$$\|\phi_0(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

por lo que $\|\phi_0(x)\| = \sqrt{2\pi}$. Para $\phi_n(x) = \cos nx$, $n > 0$, se deduce que

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2nx] dx = \pi.$$

Por lo tanto, para $n > 0$, $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\pi}$.

Cualquier conjunto ortogonal de funciones diferentes de cero $\{\phi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, puede normalizarse, esto es, convertirse en un conjunto ortonormal, dividiendo cada función entre su norma.

A partir del ejemplo desarrollado, se deduce que el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

es ortonormal en el intervalo $[-\pi, \pi]$ (Zill y Cullen, 2008).

De forma general, se dice que un conjunto de funciones con valor real $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$ es **ortogonal respecto a una función peso** $r(x)$ en un intervalo $[a, b]$ si

$$\int_a^b r(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

La suposición usual es que $r(x) > 0$ en el intervalo de ortogonalidad $[a, b]$. El conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ del ejemplo desarrollado es ortogonal respecto a la función peso $r(x) = 1$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ (Zill y Cullen, 2008).

2.3.2. PROBLEMA REGULAR DE STURM – LIOUVILLE

Las situaciones físicas que surgen en ingeniería y física se modelan matemáticamente a través de problemas de valores en la frontera de dos puntos para una función $y(x)$ que se define en un intervalo $a < x < b$ y satisface una ecuación diferencial de la forma

$$y''(x) + P(x)y'(x) + (Q(x) + \lambda R(x))y(x) = 0 \tag{2.45}$$

en el que λ es un parámetro.

La solución trivial $y(x) \equiv 0$ satisface la ecuación (2.45); sin embargo, encontrar soluciones no triviales resulta de interés, aún más cuando se espera que esas soluciones satisfagan las condiciones de frontera fijadas en $x = a$ y $x = b$, por lo que el propósito es encontrar valores constantes de λ para los cuales existan soluciones no triviales que satisfagan las condiciones de frontera dadas. Más adelante, se observa que estas soluciones no triviales se utilizan para representar funciones arbitrarias definidas en el intervalo $a < x < b$ en forma de series que, junto a otras propiedades, son necesarias para resolver ecuaciones diferenciales parciales utilizando métodos como el de separación de variables.

Se representa la ecuación (2.45) en su forma más conveniente, empezando por definir la función $p(x)$ como

$$p(x) = \exp \left[\int P(x) dx \right],$$

y multiplicando (2.45) por $p(x)$, se obtiene

$$p(x)[y''(x) + P(x)y'(x)] + p(x)(Q(x) + \lambda R(x))y(x) = 0.$$

Sin embargo,

$$p(x)[y''(x) + P(x)y'(x)] = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right],$$

entonces la ecuación se convierte en

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right] + p(x)(Q(x) + \lambda R(x))y(x) = 0.$$

Finalmente, establecer $q(x) = p(x)Q(x)$ y $r(x) = p(x)R(x)$ permite a la ecuación (2.45) ser escrito en la forma

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)]y(x) = 0. \quad (2.46)$$

Se supone que $p(x), q(x), r(x)$ y $p'(x)$ son funciones continuas definidas en $a \leq x \leq b$ en el que $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$. Las ecuaciones diferenciales con estas propiedades y escritas de esta forma se denominan ecuaciones de Sturm – Liouville (Jeffrey, 2002).

2.3.2.1. PROBLEMA REGULAR DE STURM LIOUVILLE

Para el desarrollo del Problema Regular de Sturm Liouville, se toma como referencia la definición y el ejemplo presentados en el texto de Zill y Cullen (2008), utilizando la notación ϕ para la función general y ϕ_n para las funciones propias, según lo desarrollado por Haberman (2013), y manteniendo los coeficientes de la ecuación diferencial de segundo orden presentado en la sección anterior por Jeffrey (2002).

Sean $p(x), q(x), r(x)$ y $p'(x)$ funciones continuas con valores reales en un intervalo $[a, b]$, y sean $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ para todo x presente en el intervalo. Entonces,

$$\text{Resolver:} \quad \frac{d}{dx} [p(x)\phi'] + (q(x) + \lambda r(x))\phi = 0 \quad (2.47)$$

$$\text{Sujeto a:} \quad A_1\phi(a) + B_1\phi'(a) = 0 \quad (2.48)$$

$$A_2\phi(b) + B_2\phi'(b) = 0 \quad (2.49)$$

se dice que es **un problema regular de Sturm – Liouville**. Se supone que los coeficientes de las condiciones de frontera (2.48) y (2.49) son reales e independientes de λ . Además, A_1 y B_1 no pueden valer cero al mismo tiempo, y A_2 y B_2 , tampoco (Zill y Cullen, 2008).

Cuando se trata de problemas de Sturm – Liouville, cada valor de λ para el cual se puede encontrar una solución no trivial se denomina **valor propio** del problema, y la solución correspondiente $\phi(x)$ se denomina **función propia** del problema. Como la ecuación de Sturm-Liouville (2.47) es homogénea, se deduce que una función propia puede multiplicarse por cualquier factor constante y seguir siendo una función propia. Esta propiedad simple pero fundamental se usa para representar funciones arbitrarias definidas en un intervalo $[a, b]$ en términos de series de funciones propias. Estas representaciones de funciones se denominan expansión de funciones propias (Jeffrey, 2002).

2.3.2.2. PROPIEDADES DEL PROBLEMA REGULAR DE STURM – LIOUVILLE

- a) Cada problema regular de Sturm-Liouville tiene un **número infinito real** de valores propios distintos. Si estos están etiquetados como $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ de manera que $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. (O’Neil, 2015)
- b) Todos los valores propios de un problema de Sturm-Liouville son **números reales**. (O’Neil, 2015)
- c) El conjunto de funciones propias correspondientes al conjunto de valores propios es **ortogonal** respecto a la función peso $r(x)$ en el intervalo $[a, b]$ (Zill y Cullen, 2008).

Demostración

Sean ϕ_m y ϕ_n funciones propias correspondientes a los valores propios de λ_m y λ_n , respectivamente. Entonces:

$$\frac{d}{dx} [p(x)\phi'_m] + (q(x) + \lambda_m r(x))\phi_m = 0 \quad (2.50)$$

$$\frac{d}{dx} [p(x)\phi'_n] + (q(x) + \lambda_n r(x))\phi_n = 0 \quad (2.51)$$

Se multiplica (2.50) por ϕ_n y (2.51) por ϕ_m y al restar las dos ecuaciones obtenemos

$$(\lambda_m - \lambda_n)r(x)\phi_m\phi_n = \phi_m \frac{d}{dx} [p(x)\phi'_n] - \phi_n \frac{d}{dx} [p(x)\phi'_m].$$

Integrando por partes este último resultado desde $x = a$ hasta $x = b$ y resulta

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x)\phi_m\phi_n dx = p(b)[\phi_m(b)\phi'_n(b) - \phi_n(b)\phi'_m(b)] - p(a)[\phi_m(a)\phi'_n(a) - \phi_n(a)\phi'_m(a)] \quad (2.52)$$

Las funciones propias ϕ_m y ϕ_n deben satisfacer las condiciones de frontera (2.48) y (2.49). En particular, a partir de (2.48), se obtiene

$$\begin{aligned} A_1\phi_m(a) + B_1\phi'_m(a) &= 0 \\ A_1\phi_n(a) + B_1\phi'_n(a) &= 0. \end{aligned}$$

Para que A_1 y B_1 satisfagan este sistema, sin que ambos sean iguales a cero, el determinante de los coeficientes debe ser cero:

$$\phi_m(a)\phi'_n(a) - \phi_n(a)\phi'_m(a) = 0.$$

Al aplicar un argumento similar a (2.49), se obtiene

$$\phi_m(b)\phi_n'(b) - \phi_n(b)\phi_m'(b) = 0.$$

Se utilizan estos dos resultados en (2.52) para demostrar que ambos miembros del lado derecho son iguales a cero. Por lo tanto, se establece la relación ortogonal

$$\int_a^b r(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0, \quad \lambda_m \neq \lambda_n. \quad (2.53)$$

Asimismo, se puede demostrar que el conjunto de funciones propias ortogonales $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \dots\}$ de un problema regular de Sturm-Liouville es completo en $[a, b]$ (Zill y Cullen, 2008).

d) Las funciones propias $\phi_n(x)$ forman un conjunto “completo”, lo que significa que cualquier función suave por partes $f(x)$ puede representarse mediante una serie de Fourier generalizada de funciones propias:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

Además, esta serie infinita converge a $[f(x^+) + f(x^-)]/2$ para $a < x < b$ (si los coeficientes a_n se elige correctamente) (Haberman, 2013).

Para mayor información acerca de las propiedades y demostraciones del problema de Sturm – Liouville, consultar los textos de Haberman (2013), Myint y Debnath (2007) y O’Neil (2015).

2.3.2.3. EJEMPLO E ILUSTRACIÓN DE LAS PROPIEDADES

Resolver el problema regular de Sturm – Liouville:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi &= 0 \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Solución: Se considera tres casos: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$.

Caso I. Para $\lambda = 0$, asumir que la solución de la EDO es $\phi = c_1x + c_2$. Al aplicar las condiciones de frontera $\phi(0) = 0$ y $\phi(L) = 0$, a esta solución, se producen, a su vez, $c_2 = 0$ y $c_1 = 0$. Por lo tanto, para $\lambda = 0$, la única solución del problema de valores en la frontera es la solución trivial $\phi = 0$.

Caso II. Para $\lambda < 0$, es conveniente escribir $\lambda = -\alpha^2$, donde $\alpha > 0$. Con esta nueva notación, la ecuación auxiliar es $m^2 - \alpha^2 = 0$ y tiene raíces $m_1 = \alpha$ y $m_2 = -\alpha$. Debido a que el intervalo es finito, se escribe la solución general de $\phi'' - \alpha^2\phi = 0$ en la forma hiperbólica

$$\phi = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \sinh \alpha x.$$

De $\phi(0) = 0$ se observa que

$$\phi(0) = c_1 \cosh 0 + c_2 \sinh 0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1$$

implica que $c_1 = 0$. Por lo tanto, $\phi = c_2 \sinh \alpha x$. La segunda condición de frontera $\phi(L) = 0$ requiere entonces que $c_2 \sinh \alpha L = 0$. Cuando $\alpha \neq 0$, $\sinh \alpha L \neq 0$, y por ende la única posibilidad es elegir $c_2 = 0$. La única solución del problema de valores en la frontera es la solución trivial $\phi = 0$.

Caso III. Para $\lambda > 0$ se escribe $\lambda = \alpha^2$, donde $\alpha > 0$. La ecuación auxiliar $m^2 + \alpha^2 = 0$ ahora tiene raíces complejas $m_1 = i\alpha$ y $m_2 = -i\alpha$, y por lo tanto la solución general de la EDO es

$$\phi = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x.$$

Como antes, $\phi(0) = 0$ produce $c_1 = 0$ y $\phi = c_2 \sin \alpha x$. Entonces $\phi(L) = 0$ implica

$$c_2 \sin \alpha L = 0.$$

Si $c_2 = 0$, entonces necesariamente $\phi = 0$. Pero esta vez se puede requerir que $c_2 \neq 0$ pues $\sin \alpha L = 0$ se satisface siempre que αL sea un múltiplo entero de π :

$$\alpha L = n\pi \quad \text{o} \quad \alpha = \frac{n\pi}{L} \quad \text{o} \quad \lambda_n = \alpha_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Por lo tanto, cualquier número real diferente de cero, c_2 , $\phi(x) = c_2 \sin(n\pi x/L)$ es una solución del problema para cada n . Como la ecuación diferencial es homogénea, cualquier múltiplo constante de una solución es también una solución. Entonces, se puede tomar simplemente $c_2 = 1$. En otras palabras, para cada número de la secuencia

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \lambda_2 = \frac{4\pi^2}{L^2}, \quad \lambda_3 = \frac{9\pi^2}{L^2}, \dots,$$

la función correspondiente a la secuencia

$$\phi_1 = \sin \frac{\pi}{L}, \quad \phi_2 = \sin \frac{2\pi}{L}, \quad \phi_3 = \sin \frac{3\pi}{L}, \dots,$$

es una solución no trivial del problema original (Zill y Cullen, 2008).

En resumen, se observa que el problema de valores en la frontera (2.54) contiene soluciones no triviales cuando $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ (**valores propios**), siendo sus soluciones no triviales $\phi_n = c_2 \sin(n\pi x/L)$ o simplemente $\phi_n = \sin(n\pi x/L)$ (**funciones propias**), para cada $n = 1, 2, 3, \dots$

Por ejemplo, si $\lambda = \lambda_2 = \frac{4\pi^2}{L^2}$, entonces se tiene el problema de valores en la frontera:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{L^2}\phi &= 0, \\ \phi(0) &= 0, \\ \phi(L) &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es no trivial: $\phi = \phi_2 = \sin(2\pi x/L)$. Sin embargo, si $\lambda = 5$, entonces el PVF

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2} + 5\phi &= 0, \\ \phi(0) &= 0, \\ \phi(L) &= 0,\end{aligned}$$

tiene solución trivial: $\phi = 0$ (Zill y Cullen, 2008).

A continuación, se ilustra cada propiedad del problema regular de Sturm – Liouville resuelto:

a) Orden de valores propios: Existe un número infinito de valores propios para (2.54), conformado por $\lambda = (n\pi/L)^2$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, o simplemente $\lambda_n = (n\pi/L)^2$. Se conoce el valor propio más pequeño, que es $\lambda_1 = (\pi/L)^2$; sin embargo, no es posible determinar el valor propio más grande, debido a que $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ (Haberman, 2013).

b) Valores propios reales: Todos los valores propios de (2.54), es decir, $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, son reales (Haberman, 2013).

c) Ortogonalidad de Funciones Propias: La propiedad establece que se introduce la función peso $r(x)$ en la relación de ortogonalidad:

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)r(x) dx = 0 \quad \text{si } \lambda_n \neq \lambda_m. \quad (2.55)$$

Dado que a cada valor propio corresponde solo una función propia, la afirmación “si $\lambda_n \neq \lambda_m$ ” en (2.55) puede reemplazarse por “si $n \neq m$ ”. Al comparar la ecuación diferencial $d^2\phi/dx^2 + \lambda\phi = 0$ con la forma del problema general de Sturm – Liouville, se observa que la función peso se define como $r(x) = 1$. Por lo tanto, la condición de ortogonalidad

$$\int_0^L \text{sen } n\pi x/L \cdot \text{sen } m\pi x/L dx = 0$$

se cumple si $n \neq m$ (Haberman, 2013).

d) Series de funciones propias: Las funciones propias se pueden utilizar para representar cualquier función suave por partes $f(x)$,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x). \quad (2.56)$$

Así, para el ejemplo (2.54),

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L}.$$

Esto se reconoce como una serie de senos de Fourier, y sus propiedades de convergencia son válidas para todas las series de funciones propias de cualquier problema regular de Sturm – Liouville, es decir, para cualquier función $f(x)$ definido en $0 < x < L$: Si es suave por partes, puede representarse como

una serie de senos de Fourier convergente a $[f(x^+) + f(x^-)]/2$; y si es continua, entonces su serie infinita converge a $f(x)$ en el mismo intervalo.

La ecuación (2.56) se conoce como una expansión de $f(x)$ en términos de las funciones propias $\phi_n(x)$, o simplemente, como una expansión de funciones propias. También se le llama serie de Fourier generalizada de $f(x)$; y los coeficientes a_n , se denominan coeficientes de Fourier generalizados. El hecho de que funciones bastante arbitrarias puedan representarse en términos de una serie infinita de funciones propias permite resolver ecuaciones diferenciales parciales mediante el método de separación de variables (Haberman, 2013).

2.3.3. EXPANSIÓN DE FUNCIONES PROPIAS

2.3.3.1. COEFICIENTE DE FOURIER GENERALIZADO

Considere una expansión de $f(x)$ en términos de las funciones propias $\phi_n(x)$,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x). \quad (2.57)$$

Para determinar los **coeficientes de Fourier generalizados**, se requiere de la condición de ortogonalidad entre las funciones propias que conforman las soluciones no triviales del problema regular de Sturm – Liouville. Multiplicando ambos miembros de (2.57) por $\phi_m(x)$ y $r(x)$:

$$f(x)\phi_m(x)r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)\phi_m(x)r(x),$$

donde se asume que estas operaciones en series infinitas son válidas y, por lo tanto, se introduce el signo de igualdad. Integrando desde $x = a$ hasta $x = b$ se obtiene

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)r(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)r(x) dx.$$

Dado que las funciones propias son ortogonales con peso $r(x)$, todas las integrales en el lado derecho se igualan a cero excepto cuando $n = m$:

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)r(x) dx = a_m \int_a^b \phi_m^2(x)r(x) dx.$$

La integral de la derecha es distinta de cero, ya que el peso $r(x)$ debe ser positivo (por definición de un problema regular de Sturm – Liouville), por lo tanto, se obtiene el coeficiente de Fourier generalizado a_m :

$$a_m = \frac{\int_a^b f(x)\phi_m(x)r(x) dx}{\int_a^b \phi_m^2(x)r(x) dx}. \quad (2.58)$$

En el problema regular de Sturm – Liouville (2.54), la expansión de $f(x)$ es una serie de senos de Fourier, con $a = 0$, $b = L$, $\phi_n = \text{sen } n\pi x/L$ y $r(x) = 1$:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Así, la integral del denominador en (2.58) resulta en

$$\int_0^L \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)^2 dx = \frac{L}{2},$$

por lo que (2.58) se reduce a

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

que es la fórmula conocida para los **coeficientes de la serie de senos de Fourier**. (Haberman, 2013)

2.3.3.2. CONVERGENCIA EN LA MEDIA

Se dice que una función de valor real $\phi(x)$ es **cuadrado – integrable** con respecto a una función de peso $r(x) > 0$, si, en un intervalo $I = [a, b]$,

$$\int_I \phi^2(x)r(x)dx < +\infty. \quad (2.59)$$

(Myint y Debnath, 2007).

Sea $\{\phi_n\}$ el conjunto de funciones cuadrado – integrable y ortogonales con respecto a una función de peso $r(x)$ en $[a, b]$. Sea

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x) \quad (2.60)$$

la n – ésima suma parcial de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x)$.

Sea f una función cuadrado – integrable. Se dice que la sucesión $\{s_n\}$ **converge en la media a $f(x)$** en el intervalo I con respecto a la función de peso $r(x)$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I [f(x) - s_n(x)]^2 r(x) dx = 0. \quad (2.61)$$

Con el objetivo de representar a $s_n(x)$ como la mejor aproximación a $f(x)$ en el sentido de mínimos cuadrados, se calcula los coeficientes c_k que minimizan la integral $E(c_k)$ definida en (2.62)

$$\begin{aligned} E(c_k) &= \int_I [f(x) - s_n(x)]^2 r(x) dx \\ &= \int_I f^2 r dx - 2 \sum_{k=1}^n c_k \int_I f \phi_k r dx + \sum_{k=1}^n c_k^2 \int_I \phi_k^2 r dx. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Este es un problema de extremos. Una condición necesaria para que c_k sea mínimo es que las primeras derivadas parciales de E con respecto a estos coeficientes sea igual a cero. De este modo, derivando (2.62) con respecto a c_k , se obtiene

$$\frac{\partial E}{\partial c_k} = -2 \int_I f \phi_k r \, dx + 2c_k \int_I \phi_k^2 r \, dx = 0 \quad (2.63)$$

y por lo tanto,

$$c_k = \frac{\int_I f \phi_k r \, dx}{\int_I \phi_k^2 r \, dx}. \quad (2.64)$$

Ahora al completar cuadrados, el lado derecho de (2.62) queda

$$E = \int_I f^2 r \, dx + \sum_{k=1}^n \int_I \phi_k^2 r \, dx \left[c_k - \frac{\int_I f \phi_k r \, dx}{\int_I \phi_k^2 r \, dx} \right]^2 - \sum_{k=1}^n \frac{\left(\int_I f \phi_k r \, dx \right)^2}{\int_I \phi_k^2 r \, dx}. \quad (2.65)$$

El lado derecho muestra que E es mínimo si y solo si c_k está dado por (2.64). Por lo tanto, esta elección de c_k produce la mejor aproximación a $f(x)$ en el sentido de mínimos cuadrados.

Para series convergentes en la media a $f(x)$, convencionalmente se escribe

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x),$$

donde los coeficientes c_k son los coeficientes de Fourier generalizados y la serie es la serie de Fourier generalizada. Esta serie puede o no ser puntual o uniformemente convergente (Myint y Debnath, 2007).

Sustituyendo los coeficientes de Fourier (2.64) en (2.65) se obtiene

$$E = \int_I f^2 r \, dx - \sum_{k=1}^n c_k^2 \int_I \phi_k^2 r \, dx. \quad (2.66)$$

La ecuación dada en (2.66) se conoce como el **error mínimo**. Esta ecuación muestra que, a medida que el valor de n aumenta, el error disminuye, es decir, cuantos más términos se empleen en la serie truncada, mejor será la aproximación, por lo que una serie de Fourier generalizada se puede considerar como un esquema de aproximación (Haberman, 2013).

Por ejemplo, para una serie de senos de Fourier, donde $r(x) = 1$, $\phi_k(x) = \sin k\pi x/L$ y $\int_0^L (\sin k\pi x/L)^2 \, dx = L/2$, se sigue que (en el sentido de la media cuadrática utilizando las primeras n funciones propias):

$$E = \int_0^L f^2 \, dx - \frac{L}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2 \quad (2.67)$$

(Haberman, 2013).

2.3.3.3. COMPLETITUD E IGUALDAD DE PARSEVAL

Como el lado izquierdo de (2.66) es no negativo, se tiene

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \int_I \phi_k^2 r \, dx \leq \int_I f^2 r \, dx. \quad (2.68)$$

La serie del lado izquierdo está acotada superiormente para cualquier valor de n , debido a que la integral en el lado derecho es finita. Así, cuando $n \rightarrow \infty$, la desigualdad (2.68) puede escribirse como

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \int_I \phi_k^2 r \, dx \leq \int_I f^2 r \, dx. \quad (2.69)$$

Esto se llama **desigualdad de Bessel**.

Si la serie converge en la media a $f(x)$, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I \left(f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x) \right)^2 r(x) \, dx = 0,$$

entonces, de la derivación anterior se sigue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \int_I \phi_k^2 r \, dx = \int_I f^2 r \, dx,$$

que se llama **igualdad de Parseval**, y a veces es conocida como relación de completitud. De ese modo, cuando se expande una función $f(x)$ que sea cuadrado – integrable y continua en una serie infinita

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x),$$

la sucesión de funciones ortogonales con respecto a la función de peso r , $\{\phi_k\}$, cuyos elementos son funciones cuadrado – integrables y continuas, se dice que es completa (Myint y Debnath, 2007).

A continuación, se enuncia el siguiente teorema: Las funciones propias de cualquier sistema regular de Sturm – Liouville son **completas** en el espacio de funciones que son continuas por partes en el intervalo $[a, b]$ con respecto a la función de peso $r(x)$. Además, cualquier función suave por partes en $[a, b]$ que satisfaga las condiciones de frontera del sistema regular de Sturm – Liouville se puede expandir en una serie absoluta y uniformemente convergente

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x),$$

donde los valores de c_k están dados por

$$c_k = \frac{\int_a^b f \phi_k r(x) \, dx}{\int_a^b \phi_k^2 r(x) \, dx}$$

(Myint y Debnath, 2007).

2.3.4. SERIES MÚLTIPLES DE FOURIER

Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ una región en forma rectangular contenida en el plano XY descrito por las desigualdades $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, y sea

$$\phi_n(x, y), \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.70)$$

un sistema de funciones continuas (o cuadrado – integrables) definidas sobre R , diferentes de cero. Se dice que el sistema (2.70) es **ortogonal** si

$$\iint_R \phi_n(x, y)\phi_m(x, y)dx dy = 0,$$

siempre que $n \neq m$. El número

$$\|\phi_n\| = \sqrt{\iint_R \phi_n^2(x, y)dx dy} \quad (2.71)$$

se llama **norma** de la función $\phi_n(x, y)$. El sistema (2.70) se dice que está **normalizada** si

$$\|\phi_n\| = 1, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

o equivalentemente

$$\iint_R \phi_n^2(x, y)dx dy = 1, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(Tolstov, 1962).

Al igual que en el caso de una variable, se puede asociar una serie de Fourier con cada función absolutamente integrable $f(x, y)$ definido en R , es decir,

$$f(x, y) \sim c_0\phi_0(x, y) + c_1\phi_1(x, y) + c_2\phi_2(x, y) + \dots + c_n\phi_n(x, y) + \dots, \quad (2.72)$$

donde

$$c_n = \frac{\iint_R f(x, y)\phi_n(x, y)dx dy}{\iint_R \phi_n^2(x, y)dx dy} = \frac{\iint_R f(x, y)\phi_n(x, y)dx dy}{\|\phi_n\|^2}. \quad (2.73)$$

En el caso en que se cumple la igualdad en (2.72) y la serie de la derecha converge uniformemente, se obtiene la expresión (2.73) multiplicando (2.72) por cada una de las funciones (continuas) ϕ_n e integrando término a término. Las cantidades c_n dadas por (2.73) se denominan **coeficientes de Fourier de $f(x, y)$** .

De la misma forma descrita para funciones de una variable, al aproximar cualquier función cuadrado – integrable $f(x, y)$ mediante una combinación lineal de funciones del sistema (2.70), se observa que los

coeficientes de Fourier pueden minimizar el error cuadrático medio. Además, se tiene la **desigualdad de Bessel**

$$\iint_R f^2(x, y) dx dy \geq \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\phi_n\|^2, \quad (2.74)$$

donde, si el signo de igualdad se cumple para cualquier función integrable al cuadrado, se dice que el sistema (2.70) es completo (Tolstov, 1962).

2.3.5. SEPARACIÓN DE VARIABLES: SOLUCIÓN PRODUCTO

Dada una EDP en función de la solución desconocida $u = u(x, y)$, se dice que u es una **solución producto** si

$$u(x, y) = f(x)g(y),$$

para funciones f y g que dependen de x e y , respectivamente. De manera más general, $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una solución producto con n variables x_1, x_2, \dots, x_n para una EDP si

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$$

para funciones f_1, f_2, \dots, f_n que dependen de x_1, x_2, \dots, x_n , respectivamente.

En la práctica, es común representar las soluciones desconocidas en forma de producto tales como $u(x, y) = X(x)Y(y)$, $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, etc. (Coleman, 2013).

2.3.5.1. APLICACIÓN A LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DEL CALOR EN UNA PLACA RECTANGULAR EN RÉGIMEN TRANSITORIO

El PVIF resuelto en el texto de Zill y Cullen (2008) adopta la estructura planteada en el texto de Bleecker y Csordas (2018); además, las longitudes de la placa rectangular se denotan como L_x y L_y con la finalidad de facilitar la representación y el análisis posterior en la sección de resultados.

Suponer que la región de la figura 2.15 es una placa rectangular delimitado por el conjunto $[0, L_x] \times [0, L_y]$, donde la función de temperatura $u(x, y, t)$ depende del tiempo t y de la posición (x, y) . Entonces, en las condiciones adecuadas, se puede demostrar que $u(x, y, t)$ satisface la ecuación bidimensional del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (2.75)$$

Encuentre la temperatura $u(x, y, t)$ de la placa mostrada en la figura 2.15 si la temperatura inicial es $\varphi(x, y)$ en todo momento y las fronteras se mantienen a una temperatura de cero en el tiempo $t > 0$.

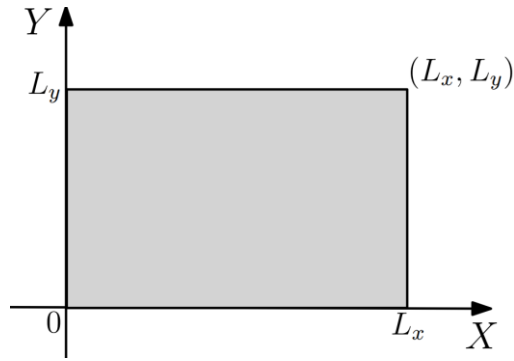


Figura 2.15: Placa rectangular de dimensiones L_x y L_y

Fuente: Zill y Cullen, 2008, pág. 561

Solución: Se resuelve

$$\begin{aligned}
 \text{EDP:} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] & ; & \quad 0 < x < L_x & ; & \quad t > 0, \\
 & & & & & \quad 0 < y < L_y \\
 \text{CI:} \quad & u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi(x, y) & ; & \quad 0 < x < L_x \\
 & & & & & \quad 0 < y < L_y \\
 \text{CF1:} \quad & u(x, y, t)|_{x=0} = 0, & ; & \quad 0 < y < L_y & ; & \quad t > 0, \\
 \text{CF2:} \quad & u(x, y, t)|_{x=L_x} = 0, & ; & \quad 0 < y < L_y & ; & \quad t > 0, \\
 \text{CF3:} \quad & u(x, y, t)|_{y=0} = 0, & ; & \quad 0 < x < L_x & ; & \quad t > 0, \\
 \text{CF4:} \quad & u(x, y, t)|_{y=L_y} = 0, & ; & \quad 0 < x < L_x & ; & \quad t > 0.
 \end{aligned}$$

Con la finalidad de separar variables en la ecuación diferencial parcial en tres variables independientes x , y y t , se trata de encontrar la solución producto $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$. Sustituyendo en la EDP, se obtiene

$$a^2(X''YT + XY''T) = XYT' \quad \circ \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} \quad (2.76)$$

Puesto que en (2.76), el primer miembro depende solamente de x y el segundo miembro depende de y y t , se debe igualar ambos miembros a una constante $-\lambda_x$:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = -\lambda_x,$$

y así

$$X'' + \lambda_x X = 0 \quad (2.77)$$

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} + \lambda_x. \quad (2.78)$$

Usando el mismo razonamiento, al introducir otra constante de separación $-\lambda_y$ en (2.78), entonces

$$\begin{aligned} \frac{Y''}{Y} = -\lambda_y \quad \text{y} \quad \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T} + \lambda_x = -\lambda_y \\ Y'' + \lambda_y Y = 0 \quad \text{y} \quad T' + \alpha^2(\lambda_x + \lambda_y)T = 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

En las condiciones de frontera homogéneas:

$$\left. \begin{aligned} u(0, y, t) = 0, \quad u(L_x, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, L_y, t) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ implica } \begin{cases} X(0) = 0, & X(L_x) = 0 \\ Y(0) = 0, & Y(L_y) = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, surgen dos problemas de Sturm – Liouville con respecto a las variables espaciales; uno en la variable x ,

$$X'' + \lambda_x X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L_x) = 0 \quad (2.80)$$

y el otro en la variable y ,

$$Y'' + \lambda_y Y = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(L_y) = 0. \quad (2.81)$$

El análisis habitual de casos para los valores propios de $X(x)$ ($\lambda_x = 0$, $\lambda_x = -\alpha^2 < 0$, $\lambda_x = \alpha^2 > 0$) y los valores propios de $Y(y)$ ($\lambda_y = 0$, $\lambda_y = -\beta^2 < 0$, $\lambda_y = \beta^2 > 0$) conduce a dos conjuntos independientes de valores propios definidos por $\text{sen}(\lambda_x \alpha) = 0$ y $\text{sen}(\lambda_y \beta) = 0$. Estas ecuaciones, a la vez, implican

$$\lambda_{x,n} = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 \quad \text{y} \quad \lambda_{y,m} = \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2. \quad (2.82)$$

Las funciones propias correspondientes son

$$X_n(x) = c_1 \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right), n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{y} \quad Y_m(y) = c_2 \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right), m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.83)$$

Después de sustituir los valores de (2.82) en la ecuación diferencial de primer orden de (2.79), su solución general es

$$T(t) = c_3 e^{-\alpha^2 \lambda_{n,m} t},$$

donde $\lambda_{n,m} = \lambda_{x,n} + \lambda_{y,m}$. Una solución producto de la ecuación del calor bidimensional que satisface las cuatro condiciones de frontera homogéneas es, por lo tanto,

$$u_{n,m}(x, y, t) = B_{n,m} e^{-\alpha^2 \lambda_{n,m} t} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right)$$

donde $B_{n,m}$ es una constante arbitraria. Por el principio de superposición, se expresa la solución general en forma de doble sumatoria por la existencia de dos conjuntos de valores propios

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} e^{-a^2 \lambda_{n,m} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right). \quad (2.84)$$

Se espera que la función $\varphi(x, y)$, que describe la temperatura en $t = 0$, sea representada en la forma

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right). \quad (2.85)$$

Para el cálculo de los coeficientes $B_{n,m}$, se multiplica ambos miembros de la ecuación (2.85) por el producto $\operatorname{sen}(n\pi x/L_x) \operatorname{sen}(m\pi y/L_y)$ y se integra sobre el rectángulo definido en el problema por los valores $0 \leq x \leq L_x$ y $0 \leq y \leq L_y$. Entonces, se puede deducir que

$$B_{n,m} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \varphi(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right) dy dx. \quad (2.86)$$

Por lo tanto, la solución del problema de valores en la frontera consta de la función expresada en forma de series definido en (2.84), con el coeficiente $B_{n,m}$ definido en (2.86). La serie (2.84) con coeficientes (2.86) se llama **serie de senos en dos variables**, o **serie doble seno** (Zill y Cullen, 2008).

2.4. BASES TEÓRICAS DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA

2.4.1. SERIES DE TAYLOR

Una **expansión en serie de Taylor** de una función $f(x)$ que tiene una $(n + 1)$ – ésima derivada continua en todo el intervalo cerrado $[x_0, x]$ es

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R(x), \quad (2.87)$$

donde $f' = df/dx$, $f'' = d^2f/dx^2$, y $f^{(n)} = d^n f/dx^n$, y $R(x)$ es el resto

$$R(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2.88)$$

donde $x_0 < \xi < x$; o, si $x < x_0$, $x < \xi < x_0$ [o $\xi \in (x, x_0)$].

Para $x = x_0 + h$, para cualquier número real $h > 0$, la ecuación (2.87) se convierte en

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R(x). \quad (2.89)$$

Para $x = x_0 - h$, la ecuación (2.89) se convierte en

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + (-1)^n \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R(x). \quad (2.90)$$

(Reddy et al., 2023)

2.4.2. MATRICES

2.4.2.1. MATRIZ

Una **matriz** A de $m \times n$ ($A \in \mathbf{M}(m, n)$) es un conjunto de escalares de la forma

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \forall i = 1, 2, \dots, m \\ \forall j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Los escalares a_{ij} se llaman **elementos** de A . El conjunto de matrices $m \times n$ con elementos reales se representa con $\mathbb{R}^{m \times n}$; y con elementos reales o complejos, con $\mathbb{C}^{m \times n}$.

Los índices i y j de los elementos a_{ij} de una matriz se denominan índice de fila e índice de columna, respectivamente. Por lo general, los índices de filas y columnas comienzan en uno y aumentan en incrementos de uno. Sin embargo, en algunas aplicaciones las matrices comienzan con índices cero o incluso negativos (Stewart, 1998).

Sea λ un escalar, y sean A y B matrices de $m \times n$. El **producto escalar – matriz** de λ y A es la matriz

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

La **suma de matrices** A y B es la matriz

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Esta operación se define solo para matrices que tienen las mismas dimensiones. Se dice que tales matrices son conformes con respecto a la sumatoria. La suma matricial es asociativa [es decir, $(A + B) + C = A + (B + C)$] y conmutativa [es decir, $A + B = B + A$]. La identidad para la suma es la matriz cero conforme. Estas definiciones hacen de $\mathbb{R}^{m \times n}$ un espacio vectorial real de dimensión $m \times n$. Asimismo, el espacio $\mathbb{C}^{m \times n}$ es un espacio vectorial complejo de múltiples dimensiones. Por tanto, cualquier resultado general sobre espacios vectoriales reales y complejos es válido para $\mathbb{R}^{m \times n}$ y $\mathbb{C}^{m \times n}$ (Stewart, 1998).

Sea A una matriz de $\ell \times m$ y B una matriz de $m \times n$. El **producto de matrices** A y B es la matriz C de $\ell \times n$ cuyos elementos son

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, \ell; j = 1, \dots, n.$$

Para que se defina el producto \mathbf{AB} , el número de columnas de \mathbf{A} debe ser igual al número de filas de \mathbf{B} . En este caso se dice que \mathbf{A} y \mathbf{B} son conformes respecto a la multiplicación. El producto tiene el mismo número de filas que \mathbf{A} y el mismo número de columnas que \mathbf{B} , es decir, el producto resulta ser una matriz de $\ell \times n$. El producto matricial es asociativo [es decir, $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$] y se distribuye sobre la suma de la matriz [es decir, $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$]; pero, no es conmutativo (Stewart, 1998).

2.4.2.2. VECTORES

Los **vectores** son un tipo especial de matriz que tiene una sola columna o una fila. Usualmente se representan por una letra minúscula en negrita, por ejemplo, \mathbf{x} o \mathbf{y} ; por el elemento general entre corchetes, por ejemplo, $[x_i]$ o $[y_i]$; o la columna o fila completa de elementos.

Un **vector columna** es una matriz de $n \times 1$. De este modo,

$$\mathbf{x} = [x_i] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.91)$$

Un **vector fila** es una matriz de $1 \times n$. Por ejemplo,

$$\mathbf{y} = [y_j] = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n], \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.92)$$

(Hoffman, 2001)

2.4.2.3. MATRIZ CUADRADA

Una **matriz cuadrada** \mathbf{S} es una matriz que tiene el mismo número de filas y columnas, esto es, $m = n$.

Por ejemplo,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

es una matriz cuadrada de $n \times n$. La diagonal descendente de izquierda a derecha de los elementos desde a_{11} hasta a_{nn} se llama diagonal mayor de la matriz (Hoffman, 2001).

2.4.2.4. MATRIZ DIAGONAL

Una **matriz diagonal** \mathbf{D} es una matriz cuadrada con todos los elementos igual a cero excepto los elementos en la diagonal mayor. Por ejemplo,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

es una matriz diagonal de 4×4 (Hoffman, 2001).

2.4.2.5. MATRIZ TRIDIAGONAL

Una **matriz tridiagonal** T es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que no están en la diagonal mayor y las dos diagonales que la rodean son cero. Los elementos en estas tres diagonales pueden ser cero o no. La matriz

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

es una matriz tridiagonal de 5×5 (Hoffman, 2001).

2.4.2.6. MATRIZ BANDA

Una **matriz banda** B tiene todos los elementos cero, excepto a lo largo de diagonales específicas. Por ejemplo,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

es una matriz banda de 5×5 (Hoffman, 2001).

2.4.2.7. MATRIZ TRANSPUESTA

Sea A una matriz de $m \times n$. La **matriz transpuesta de A** es la matriz de $n \times m$

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sean A y B matrices. Si $A + B$ es definido, entonces $(A + B)^T = A^T + B^T$. Si AB es definido, entonces $(AB)^T = B^T A^T$ (Stewart, 1998).

2.4.2.8. MATRIZ SIMÉTRICA

Una matriz A de orden n es **simétrica** si $A = A^T$ (Stewart, 1998).

2.4.2.9. MATRIZ DISPERSA

Una **matriz dispersa** es aquella en la que la mayoría de los elementos son cero. La mayoría de las matrices grandes que surgen al resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales son dispersas (Hoffman, 2001).

2.4.2.10. MATRIZ DEFINIDA POSITIVA

Una matriz A es **definida positiva** si es **simétrica** y si se cumple que $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para cada vector n – dimensional $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (Burden et al., 2017).

Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

es definida positiva. Para la demostración, suponga que \mathbf{x} es cualquier vector columna tridimensional. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 2x_1 & - & x_2 & & \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2. \end{aligned}$$

Al reorganizar los términos, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0$$

a menos que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. (Burden et al., 2017)

2.4.3. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

2.4.3.1. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES ALGEBRAICAS

Los **sistemas de ecuaciones** surgen en todas las ramas de la ingeniería y la ciencia. Estas ecuaciones pueden ser algebraicas, trascendentales (es decir, que involucran funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, etc.), ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones diferenciales parciales. Las ecuaciones pueden ser lineales o no lineales. Un sistema de ecuaciones tiene la siguiente forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \tag{2.97a}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \tag{2.97b}$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \tag{2.97n}$$

donde x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) denota las variables desconocidas, a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) denota los coeficientes constantes de las variables desconocidas, y b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) denota los términos no homogéneos. Para los coeficientes a_{ij} , el primer subíndice i denota la ecuación i , y el segundo subíndice, j , denota la variable x_j . El número de ecuaciones puede oscilar entre dos, cientos, miles e incluso millones (Hoffman, 2001).

2.4.3.2. FORMA MATRICIAL

Los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, como el sistema de ecuaciones (2.97), se puede expresar de manera muy compacta en notación matricial. Así, el sistema (2.97) se puede escribir como la **ecuación matricial**

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbf{M}(n, n) \quad (2.98)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (2.99)$$

La ecuación (2.97) puede ser escrita como

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.100)$$

o equivalentemente como

$$a_{ij}x_j = b_i, \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (2.101)$$

donde se cumple la convención de suma, es decir, el índice repetido j en la ecuación (2.101) se suma en su rango, 1 a n (Hoffman, 2001).

2.4.4. TEORÍA DE ERRORES

Un **error** es la diferencia entre el valor real y su aproximación. Los tipos de errores más comunes son los errores de truncamiento y los errores de redondeo (Reddy et al., 2023).

2.4.4.1. ERROR DE TRUNCAMIENTO

Un **error de truncamiento** es el error que se introduce cuando se sustituye una expresión matemática exacta por una aproximada (normalmente truncando una serie).

Por ejemplo, si se aproxima la función seno por los dos primeros términos distintos de cero de su serie de Taylor, como en $\sin(x) \approx x - \frac{1}{3!}x^3$ para un valor pequeño de x , el error resultante es un error de truncamiento. Está presente incluso en la aritmética de precisión infinita, porque es causada por el truncamiento de la serie infinita de Taylor para formar el algoritmo (Reddy et al., 2023).

Los **errores de truncamiento local** se refieren a las diferencias entre la ecuación diferencial original y sus aproximaciones de diferencias finitas en los puntos de una cuadrícula. Miden la precisión con la que una discretización de diferencias finitas se aproxima a la ecuación diferencial (Li et al., 2018).

2.4.4.2. ERROR DE REDONDEO

Un **error de redondeo** es una consecuencia del uso de números de punto flotante de precisión finita en las computadoras. Los errores de redondeo se producen por la inexactitud en la representación de los números reales y las operaciones aritméticas que se realizan con ellos. Por tanto, es la diferencia entre el resultado producido por un algoritmo dado usando aritmética exacta y el resultado producido por aritmética redondeada (aritmética de precisión finita) (Reddy et al., 2023).

2.4.5. PROPIEDADES DE ESQUEMAS DE DIFERENCIAS FINITAS

2.4.5.1. CONSISTENCIA

La **consistencia** es una condición del esquema numérico, es decir, que el esquema numérico debe tender a la ecuación diferencial, cuando los pasos de tiempo y espacio tienden a cero. (Hirsch, 2007)

La **consistencia** se refiere al grado en que la Ecuación en Diferencias Finitas (EDF) se aproxima a la Ecuación Diferencial Parcial (EDP) (Tannehill et al., 2021).

El **error de truncamiento** en el contexto de diferencias finitas, es la diferencia entre la EDP y su aproximación en diferencias finitas EDF. Se dice que tal representación por diferencias finitas de la EDP es **consistente** si se puede demostrar que la diferencia entre la EDP y la EDF desaparece cuando la malla es refinada, es decir,

$$\lim_{\text{malla} \rightarrow 0} (\text{EDP} - \text{EDF}) = \lim_{\text{malla} \rightarrow 0} (\text{T. E.}) = 0$$

(Tannehill et al., 2021).

La malla hace referencia a las longitudes de paso del tiempo (Δt) y espacio (Δx).

2.4.5.2. ESTABILIDAD

La **estabilidad** es una condición de la solución numérica, es decir, que todos los errores, como los errores de redondeo (debido a la aritmética finita de la computadora) deben permanecer acotados cuando avanza el proceso de iteración. Es decir, para valores finitos de Δt y Δx , el error (definido como la diferencia entre la solución numérica y la solución exacta del esquema numérico) tiene que permanecer acotado, cuando el número de pasos de tiempo n tiende a infinito (Hirsch, 2007).

Es posible analizar indistintamente la estabilidad estudiando el comportamiento de los errores o la propia solución numérica (Hirsch, 2007).

Existen diversos métodos para el análisis de la estabilidad de esquemas numéricos, sin embargo, la mayoría se restringe al estudio de problemas lineales. Incluso con esa restricción, la investigación de la estabilidad para problemas de valor inicial y de fronteras puede ser extremadamente compleja,

especialmente al tratar con la representación numérica de las condiciones de frontera. Para separar la influencia de las condiciones de frontera del análisis de estabilidad principal, se puede considerar un problema ligeramente diferente con condiciones de frontera periódicas (Hirsch, 2007).

El **análisis de estabilidad de Von Neumann** se basa en la expansión del error, o la solución numérica, en una serie finita de Fourier en el dominio de la frecuencia espacial (Hirsch, 2007).

El método no toma en cuenta los efectos de las condiciones de frontera, pero es simple, directo, y puede extenderse fácilmente a problemas multidimensionales (Özisik et al., 2017).

Una explicación detallada del método, así como de sus aplicaciones a diversos tipos de ecuaciones diferenciales parciales se puede encontrar en los textos de Özisik et al. (2017), Hirsch (2007), Roychowdhury (2021), Li et al. (2017), Tannehill et al. (2021) y Zauderer (2013).

2.4.5.3. CONVERGENCIA

La **convergencia** es una condición de la solución numérica: se tiene que estar seguro que el resultado de la simulación sea una representación correcta del modelo que se resuelve, es decir, la solución numérica debe tender a la solución exacta del modelo matemático, cuando los tamaños de paso del tiempo y espacio tienden a cero (Hirsch, 2007).

2.4.5.4. TEOREMA DE EQUIVALENCIA DE LAX

El **teorema de equivalencia de Lax** establece que, para problemas lineales con valores iniciales, la consistencia y la estabilidad son condiciones necesarias para la convergencia.

Se aplican dos restricciones a este teorema.

- En primer lugar, el problema del valor inicial debe estar bien planteado (es decir, la solución de la EDP debe depender continuamente de los datos iniciales).
- En segundo lugar, el teorema se aplica a problemas lineales.

Las características importantes de las ecuaciones lineales son que la suma de las soluciones separadas también es la solución de la ecuación. Esto lleva al hecho de que los propios términos de error satisfacen la forma homogénea de la EDF (ecuación en diferencias finitas), que se aproxima a la ecuación en diferencias dadas (Roychowdhury, 2021).

2.5. MARCO CONCEPTUAL DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA

2.5.1. DISCRETIZACIÓN

Se considera cualquier ecuación diferencial a resolver cuyo dominio espacial es unidimensional, es decir, que solo se involucra una variable independiente x en coordenadas cartesianas, donde $x \in [0, L]$. En el método de diferencias finitas, el dominio $0 \leq x \leq L$ se discretiza en M segmentos (o subintervalos) de longitud Δx , donde $\Delta x = L/M$, generando así una cuadrícula (o malla) de $M + 1$ nodos en el dominio espacial, tal como se ilustra en la figura 2.16.

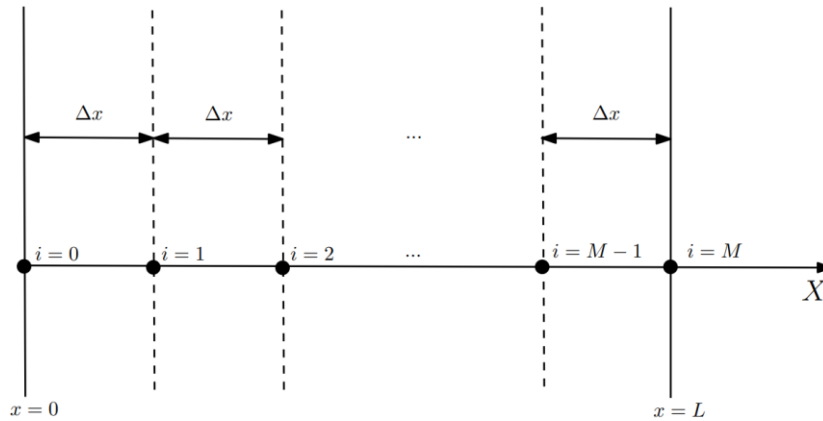


Figura 2.16: Ejemplo de discretización de un dominio espacial unidimensional

Fuente: Özisik et al., 2017, pág. 24

De esa forma, al discretizar las ecuaciones diferenciales gobernantes y las condiciones de frontera del problema, se desarrollan hasta $(M + 1)$ ecuaciones algebraicas. El problema de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales en el dominio del problema se transforma luego en la tarea de desarrollar un conjunto de ecuaciones algebraicas y su solución mediante un algoritmo adecuado (Özisik et al., 2017).

La **discretización** es el proceso de aproximar una función que varía continuamente en términos de valores definidos en un número finito de puntos (Roychowdhury, 2021).

El primer paso para resolver una EDP utilizando diferencias finitas considerando un dominio espacial bidimensional, es reemplazar el dominio del problema continuo con una malla o cuadrícula de diferencias finitas como se muestra en la figura 2.17:

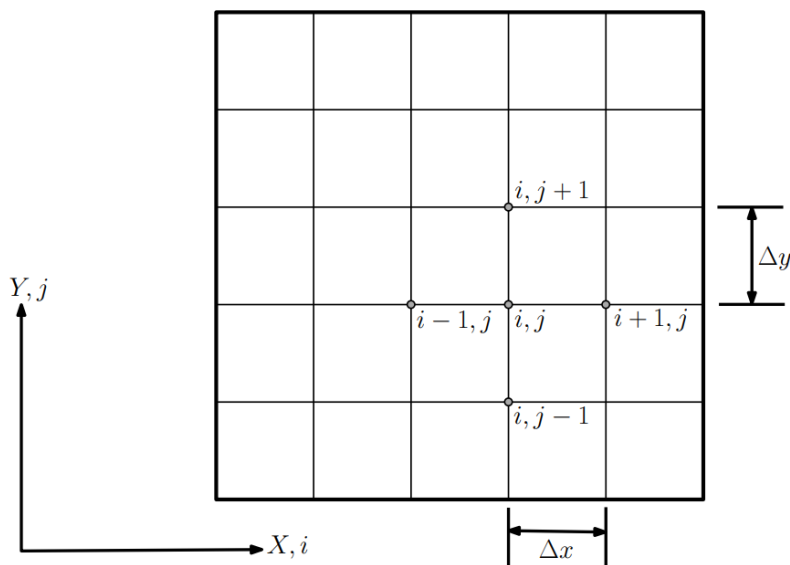


Figura 2.17: Representación de diferencias finitas

Fuente: Roychowdhury, 2021, pág. 33

Aquí los puntos (o nodos) de la cuadrícula se identifican con (i, j) ; y tanto Δx como Δy representan el tamaño del espaciado de la cuadrícula en las direcciones X e Y , respectivamente (Roychowdhury, 2020).

2.5.2. APROXIMACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS DE DERIVADAS ORDINARIAS

Se considera la expansión en serie de Taylor de una función $f(x)$ alrededor de un punto x_0 en las direcciones hacia adelante (es decir, x positiva):

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x=x_0} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (2.102)$$

y hacia atrás (x negativa) dada por:

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x=x_0} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (2.103)$$

Ambas expresiones forman la base para desarrollar aproximaciones en diferencias finitas para la primera derivada df/dx , en x_0 (Özsisik et al., 2017).

2.5.2.1. DIFERENCIAS FINITAS HACIA ADELANTE

Al reordenar la ecuación (2.102), la aproximación en **diferencias finitas hacia adelante para la primera derivada** se convierte en

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + 0(\Delta x) \quad (\text{hacia adelante}), \quad (2.104)$$

donde el “orden de” notación “ $0(\Delta x)$ ” caracteriza el error de truncamiento asociado con la aproximación en diferencias finitas. Esto representa la diferencia entre la derivada y su representación en diferencias finitas. Para la ecuación (2.104), viene dada por

$$0(\Delta x) \equiv \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{\Delta x}{2} + \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x=x_0} \frac{(\Delta x)^2}{6} + \dots \quad (2.105)$$

(Özsisik et al., 2017).

2.5.2.2. DIFERENCIAS FINITAS HACIA ATRÁS

Al reordenar la ecuación (2.103), la aproximación en **diferencias finitas hacia atrás para la primera derivada** se convierte en

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + 0(\Delta x) \quad (\text{hacia atrás}) \quad (2.106)$$

(Özsisik et al., 2017)

2.5.2.3. DIFERENCIAS FINITAS CENTRALES

Se determina la aproximación en **diferencias finitas centrales para la primera derivada** restando la ecuación (2.102) con (2.103):

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} - 0[(\Delta x)^2] \quad (\text{central}) \quad (2.107)$$

donde

$$0[(\Delta x)^2] \equiv \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x=x_0} \frac{(\Delta x)^2}{6} + \left. \frac{d^5 f}{dx^5} \right|_{x=x_0} \frac{(\Delta x)^4}{120} + \dots \quad (2.108)$$

Un análisis del error de truncamiento asociado con varias representaciones en diferencias finitas dadas en (2.108) revela que la aproximación en diferencias centrales es de segundo orden en Δx ; por lo tanto, es una aproximación más precisa que las diferencias hacia adelante y hacia atrás (Özisik et al., 2017).

Sea i el punto de la cuadrícula en x_0 y f_i la función f evaluada en x_0 . Entonces, las notaciones $i + 1$ e $i - 1$ se refieren, respectivamente, a los puntos de la cuadrícula en $x_0 + \Delta x$ y $x_0 - \Delta x$. Usando estas notaciones, es posible representar una formulación alternativa para la primera derivada en dos puntos:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + 0(\Delta x) \quad (\text{hacia adelante}), \quad (2.109)$$

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + 0(\Delta x) \quad (\text{hacia atrás}), \quad (2.110)$$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + 0[(\Delta x)^2] \quad (\text{central}). \quad (2.111)$$

(Özisik et al., 2017).

Las expansiones de la serie de Taylor dadas por las ecuaciones (2.102) y (2.103) se pueden utilizar para desarrollar aproximaciones en diferencias finitas para la segunda derivada. Para obtener la aproximación en diferencias finitas centrales para la segunda derivada, se suman las ecuaciones (2.102) y (2.103), la expresión resultante se resuelve para $\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x_0}$, y se da el resultado, escrito con la notación abreviada por

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{(\Delta x)^2} + 0[(\Delta x)^2] \quad (\text{central}) \quad (2.112)$$

donde

$$0[(\Delta x)^2] \equiv \frac{(\Delta x)^2}{12} f_i^{(iv)} + \dots$$

(Özisik et al., 2017).

2.5.3. APROXIMACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS DE DERIVADAS PARCIALES

Para una función de varias variables independientes, la derivada parcial de la función con respecto a una de las variables representa la tasa de cambio de la función en relación con esa variable, manteniéndose constante las demás. Para una función $f(x, y)$ de dos variables independiente, las derivadas parciales con respecto a x e y en el punto $(a; b)$ son definidas como:

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=a \\ y=b}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}, \quad (2.113)$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=a \\ y=b}} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}. \quad (2.114)$$

Las fórmulas de diferencias finitas utilizadas para aproximar las derivadas de funciones de una variable independiente se pueden adoptar en el cálculo de derivadas parciales. Por ejemplo, considere una función de dos variables independientes $f(x, y)$ especificadas como un conjunto de $n \cdot m$ puntos discretos $(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_n, y_m)$. El espaciado entre los puntos en cada dirección es constante, es decir, $h_x = x_{i+1} - x_i$ y $h_y = y_{i+1} - y_i$. La figura 2.18 muestra un caso en el que $n = 5$ y $m = 4$ (Gilat y Subramaniam, 2008).

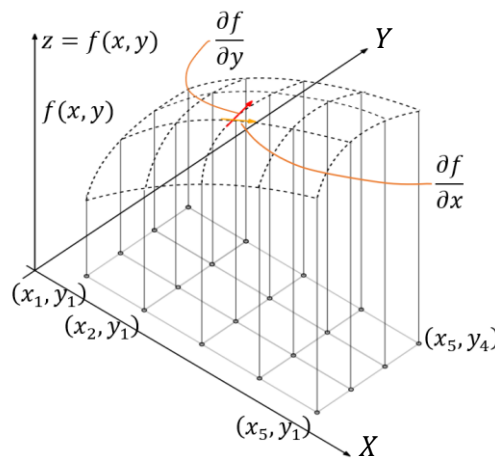


Figura 2.18: Función de dos variables independientes

Fuente: Gilat y Subramaniam, 2008, pág. 277

Una **aproximación para la derivada parcial** en el punto (x_i, y_i) utilizando la fórmula de **diferencias finitas hacia adelante** con dos puntos es:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \frac{f(x_{i+1}, y_i) - f(x_i, y_i)}{h_x}, \quad (2.115)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \frac{f(x_i, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)}{h_y}. \quad (2.116)$$

Así mismo, las fórmulas de **diferencias finitas hacia atrás** con dos puntos son:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \frac{f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_i)}{h_x}, \quad (2.117)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \frac{f(x_i, y_i) - f(x_i, y_{i-1})}{h_y}, \quad (2.118)$$

y las fórmulas de **diferencias finitas centrales** con dos puntos son:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \frac{f(x_{i+1}, y_i) - f(x_{i-1}, y_i)}{2h_x}, \quad (2.119)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \frac{f(x_i, y_{i+1}) - f(x_i, y_{i-1})}{2h_y} \quad (2.120)$$

(Gilat y Subramaniam, 2008).

Una **aproximación para la segunda derivada parcial** utilizando la fórmula de **diferencia central** de tres puntos viene dada por:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \frac{f(x_{i-1}, y_i) - 2f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i)}{h_x^2}, \quad (2.121)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \frac{f(x_i, y_{i-1}) - 2f(x_i, y_i) + f(x_i, y_{i+1})}{h_y^2} \quad (2.122)$$

(Gilat y Subramaniam, 2008).

2.5.4. APLICACIONES DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

La ecuación de difusión del calor en una región finita unidimensional es una de las ecuaciones clásicas donde se emplea los métodos explícito e implícito de diferencias finitas, cuando se requiere conocer las soluciones aproximadas. Para el desarrollo de ambos métodos aplicados a la ecuación del calor no homogénea, considerar como referencia la formulación algebraica presentada por Li et al. (2018), adaptado al dominio $x \in [0, L]$, y representando a U_i^n como la solución aproximada para diferenciar de la solución exacta. Además, considerar los esquemas moleculares presentados por Özisik (2017) para el caso homogéneo, cuya finalidad es visualizar de manera gráfica los nodos que intervienen en cada modelo formulado por diferencias finitas, ya que también permanecen válidos para el caso no homogéneo. Las propiedades de consistencia y estabilidad para el caso homogéneo siguen siendo válidos para el caso no homogéneo. Consultar para mayor información los textos de Holmes (2007) y Epperson (2013).

Considerar el siguiente problema que involucra la ecuación de difusión del calor con un término fuente, en una región finita unidimensional $0 \leq x \leq L$:

$$\begin{aligned} \text{EDP:} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < L, & \quad t > 0, \\ \text{CI:} \quad & u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), & 0 < x < L, & \\ \text{CF1:} \quad & u(x, t)|_{x=0} = g_1(t), & t \geq 0, & \\ \text{CF2:} \quad & u(x, t)|_{x=L} = g_2(t), & t \geq 0. & \end{aligned} \quad (2.123)$$

El objetivo es encontrar una solución numérica para $u(x, t)$ en un tiempo determinado $T > 0$ o en ciertos instantes de tiempo comprendidos en el intervalo $0 < t < T$.

El primer paso consiste en generar una malla o cuadrícula

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x, & i &= 0, 1, \dots, M_x, & \Delta x &= \frac{L}{M_x}, \\ t_n &= n\Delta t, & n &= 0, 1, \dots, M_t, & \Delta t &= \frac{T}{M_t}. \end{aligned}$$

Resulta que no es posible usar un valor de Δt arbitrario (aunque sea pequeño) para el método explícito debido a problemas de inestabilidad numérica.

El segundo paso es aproximar las derivadas mediante aproximaciones de diferencias finitas. Para la segunda derivada parcial de la variable espacial, se utiliza la aproximación en diferencias finitas centrales y, para el caso de la derivada temporal, existen dos opciones para la aproximación que marcarían la diferencia entre el método explícito e implícito (Li et al., 2018).

2.5.4.1. MÉTODO EXPLÍCITO

También conocido como método de Euler hacia adelante. Consiste en tomar un punto de la cuadrícula o malla (x_i, t_n) , $n > 0$, y utilizar la aproximación en diferencias finitas hacia adelante para la derivada temporal con precisión de primer orden, así como la aproximación en diferencias finitas centrales para la segunda derivada espacial con precisión de segundo orden. Entonces, se tiene

$$\frac{u(x_i, t_n + \Delta t) - u(x_i, t_n)}{\Delta t} = a^2 \frac{u(x_{i-1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i+1}, t_n))}{(\Delta x)^2} + f(x_i, t_n) + TE(x_i, t_n). \quad (2.124)$$

El error de truncamiento local es

$$TE(x_i, t_n) = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n) - a^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_n) + \dots, \quad (2.125)$$

donde los puntos suspensivos denotan a los términos de orden superior, por lo que la discretización es $O[\Delta t + (\Delta x)^2]$. La discretización es de primer orden en el tiempo, y de segundo orden en el espacio, cuando la ecuación en diferencias finitas es

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = a^2 \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} + f_i^n, \quad (2.126)$$

donde $f_i^n = f(x_i, t_n)$, y U_i^n indica los valores aproximados de la solución verdadera $u(x_i, t_n)$. Cuando $n = 0$, U_i^0 es la condición inicial en el punto de la cuadrícula $(x_i, t_0) = (x_i, 0)$; y a partir de los valores U_i^n en el nivel de tiempo n , la solución de la ecuación en diferencias finitas en el nivel de tiempo siguiente $n + 1$ es

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta t \left(a^2 \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} + f_i^n \right), \quad i = 1, 2, \dots, M_x - 1. \quad (2.127)$$

La solución de las ecuaciones en diferencias finitas se obtiene así directamente a partir de la solución aproximada en intervalos de tiempo anteriores, sin necesidad de resolver un sistema de ecuaciones algebraica; por lo tanto, el método se denomina explícito (Li et al., 2018).

La ecuación (2.126) o (2.127) puede reordenarse como:

$$U_i^{n+1} = rU_{i-1}^n + (1 - 2r)U_i^n + rU_{i+1}^n + \Delta t f_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, M_x - 1, \quad (2.128)$$

donde

$$r = \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

2.5.4.1.1. ESQUEMA MOLECULAR DEL MÉTODO EXPLÍCITO

La figura 2.19 ilustra esquemáticamente las moléculas en diferencias finitas asociadas con el esquema explícito simple aplicado a la ecuación de difusión del calor.

El sistema de ecuaciones (2.128) proporciona $M_x - 1$ relaciones algebraicas que sirven para estimar los valores de temperatura U_i^{n+1} correspondientes a los nodos interiores de la región finita unidimensional (para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$) en el tiempo siguiente; sin embargo, este sistema involucra a $M_x + 1$ nodos por sí solo, con valores de temperatura desconocidos U_i^{n+1} (para $i = 0, 1, 2, \dots, M_x$). Es necesario considerar dos relaciones adicionales a partir de las condiciones de frontera en $i = 0$ e $i = M_x$ para igualar el número de ecuaciones con el de incógnitas, tal como se describe en el problema (2.123). Si los valores de temperatura en las fronteras están prescritos, entonces para cualquier tiempo $t_n, n \geq 0$, las condiciones de frontera se convierten en ecuaciones donde las temperaturas U_0^n y $U_{M_x}^n$ asociadas a cada frontera asumen directamente un valor específico (que puede variar en función del tiempo), y de esa manera se completa el sistema (2.127). Sin embargo, para los casos de convección o flujo de calor prescrito, se requiere de una discretización adicional en cada relación definida en las condiciones de frontera, ya que los valores de temperatura en las fronteras se desconocen (Özisik et al., 2017).

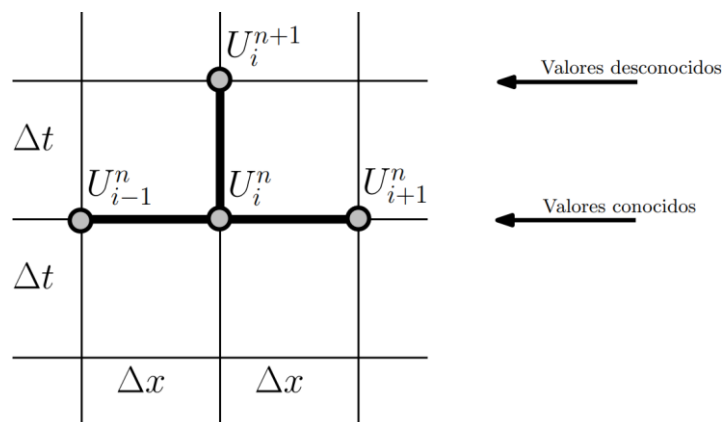


Figura 2.19: Las moléculas de diferencias finitas para el esquema explícito

Fuente: Özisik et al., 2017, pág. 131

2.5.4.1.2. TEMPERATURA PRESCRITA EN LAS FRONTERAS

En problemas dependientes del tiempo, existe una condición inicial que suele especificarse en $t = 0$, además de las condiciones de frontera pertinentes, tal como se describe en el sistema (2.123) para el caso de la ecuación de difusión del calor unidimensional. Cabe destacar que las condiciones de frontera en $t = 0$ pueden o no ser consistentes con la condición inicial. Por ejemplo, en (2.123), las condiciones de Dirichlet son prescritas en $x = 0$ y $x = L$ tal que $u(0, t) = g_1(t)$ y $u(L, t) = g_2(t)$; y para mantener la consistencia, se requiere que $u_0(0) = g_1(0)$ y $u_0(L) = g_2(0)$ (Li et al., 2018).

2.5.4.1.3. PROPIEDADES DEL MÉTODO EXPLÍCITO

El método explícito es consistente, con error de discretización $O[\Delta t + (\Delta x)^2]$ (Li et al., 2018).

Si la solución de las ecuaciones en diferencias finitas (2.128) debe permanecer estable (es decir, no divergente o no oscilatoria), el valor del parámetro r , para estas ecuaciones, debe restringirse a

$$0 < r \leq \frac{1}{2}, \quad (2.129)$$

donde

$$r = \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2}. \quad (2.130)$$

Este criterio de estabilidad implica que, para valores dados de a^2 y Δx , el tamaño del paso de tiempo Δt no puede superar el límite impuesto por la ecuación (2.129). La figura 2.20 ilustra los efectos del valor de r en la estabilidad de la solución de diferencias finitas con el método explícito. Claramente, dado que no se cumple el criterio de estabilidad para $r = (5/9) > (1/2)$, la solución comienza a oscilar y divergir, mientras que los resultados que se obtengan con $r = (5/11) < (1/2)$ son estables y concuerdan con la solución exacta del problema (Özisik et al., 2017).

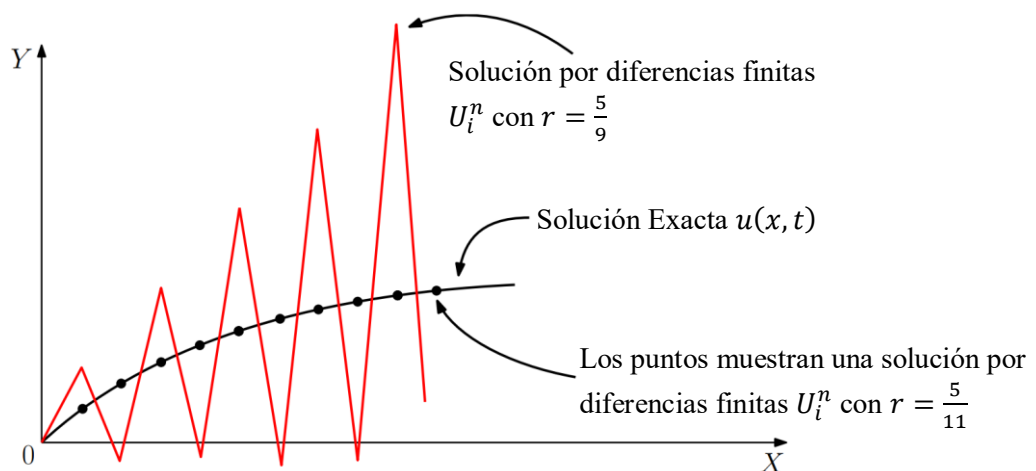


Figura 2.20: Efecto del parámetro r sobre la estabilidad de la solución en el método explícito.

Fuente: Özisik et al., 2017, pág. 135

En el texto de Tannehill et al. (2021), se ilustra la estabilidad a partir de la ecuación (2.128) para el caso homogéneo ($f_i^n = 0$), con $L = 1$. Suponer que en el instante t , $U_{i+1}^n = U_{i-1}^n = 100^\circ\text{C}$ y $U_i^n = 0^\circ\text{C}$. Este arreglo se muestra en la figura 2.21. Si $r > 1/2$, se observa que la temperatura en el punto i en el nivel de tiempo $n + 1$ supera la temperatura en los dos puntos circundantes en el nivel de tiempo n . Esto no parece razonable, ya que se espera que el calor fluya de la región más cálida a una más fría, pero no viceversa. La temperatura máxima que se espera encontrar en el punto i en el nivel de tiempo $n + 1$ es de 100°C . Si $r = 1$, por ejemplo, U_i^{n+1} sería igual a 200°C por la ecuación (2.128) (Tannehill et al., 2021).

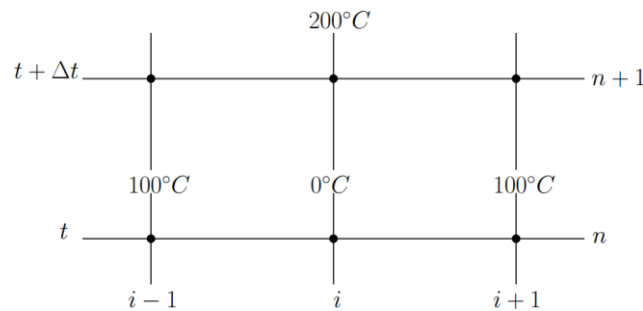


Figura 2.21: Inverosimilitud física resultante de $r = 1$.

Fuente: Tannehill et al., 2021, pág. 61

Esta restricción al valor máximo de r impone la siguiente limitación al tamaño máximo del paso de tiempo

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2a^2} \quad (2.131)$$

Las implicaciones de esta restricción para el tiempo de cálculo son las siguientes. Suponer que los cálculos realizados con un tamaño de malla Δx hasta un tiempo t^* requieren N pasos de tiempo, cada uno de tamaño Δt (es decir, $t^* = N\Delta t$). Si los cálculos se repiten, por ejemplo, con un tamaño de malla reducido a la mitad $\Delta x_1 = \frac{1}{2}\Delta x$, para mejorar la precisión, se requieren cuatro veces más pasos de tiempo para alcanzar el mismo nivel de tiempo t^* . Además, cada cálculo de nivel de tiempo requiere el doble de tiempo porque hay el doble de puntos nodales. Por lo tanto, para el problema unidimensional, reducir el tamaño de la malla a la mitad multiplica por ocho el tiempo de cálculo. Por lo tanto, la restricción impuesta al paso de tiempo máximo por el criterio de estabilidad es una desventaja importante del método explícito (Özisik et al., 2017).

2.5.4.1.4. ALGORITMO DEL MÉTODO EXPLÍCITO

El algoritmo para el cálculo de los valores de temperaturas es el siguiente:

1. Comenzar los cálculos con $n = 0$. Calcule U_i^1 , $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$ al final del primer paso de tiempo de la ecuación (2.128), porque los valores de temperaturas del lado derecho de esta ecuación se conocen a partir de la condición inicial (en t_0) y las condiciones de frontera.

2.5.4.2.1. ESQUEMA MOLECULAR DEL MÉTODO IMPLÍCITO

La figura 2.22 ilustra la molécula de diferencias finitas en forma implícita, formada a partir del punto de expansión que es el nodo $(i, n + 1)$ (Özisik et al., 2017).

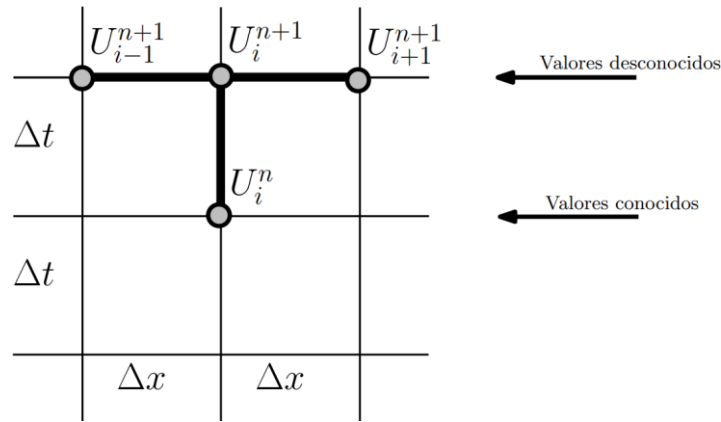


Figura 2.22: Las moléculas de diferencias finitas para el esquema implícito

Fuente: Özisik et al., 2017, pág. 147

2.5.4.2.2. CONSISTENCIA Y ESTABILIDAD DEL MÉTODO IMPLÍCITO

El método implícito también es consistente, y el error de discretización es nuevamente $O[\Delta t + (\Delta x)^2]$. La ventaja del método implícito es su estabilidad para cualquier elección de Δt . Para problemas unidimensionales, el coste computacional es ligeramente superior al del método explícito siempre y cuando sea posible usar un solucionador eficiente de sistemas de ecuaciones con matriz tridiagonal (Li et al., 2018).

Con el método de Von Neumann, se demuestra que el método implícito para la ecuación del calor unidimensional es incondicionalmente estable, contrario al caso del método explícito cuya estabilidad se restringe a la desigualdad dada en (2.129). La demostración y explicación a detalle se puede encontrar en los textos de la especialidad, como Özisik et al. (2017), Li et al. (2018), Zauderer (2006), entre otros.

2.5.5. MATRIZ POR BLOQUES

2.5.5.1. SUBMATRIZ

Una **submatriz** de una matriz \mathbf{A} es una matriz formada a partir de la intersección de conjuntos de filas y columnas de \mathbf{A} . Por ejemplo, si \mathbf{A} es una matriz de 4×4 , las matrices

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

son submatrices de \mathbf{A} . La segunda matriz se llama submatriz contigua porque está en la intersección de filas y columnas contiguas; es decir, sus elementos forman un grupo conectado en la matriz original. Una matriz se puede dividir de muchas maneras en submatrices contiguas. El poder de tales particiones es que las operaciones matriciales se pueden utilizar en el interior de la propia matriz.

Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Sean $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m$ y $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n$. Entonces, la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_1 j_q} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_p j_1} & a_{i_p j_2} & \dots & a_{i_p j_q} \end{pmatrix}$$

que consta de los elementos en la intersección de las filas $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m$ y las columnas $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n$ es una **submatriz** de A . Si se tiene $i_{k+1} = i_k + 1$ ($k = 1, \dots, p-1$) y $j_{k+1} = j_k + 1$ ($k = 1, \dots, q-1$), entonces B es una **submatriz contigua** (Stewart, 1998).

2.5.5.2. PARTICIÓN

Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Una **partición** de A es una representación de A en la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{pmatrix},$$

donde $A_{ij} \in \mathbb{C}^{m_i \times n_j}$ son submatrices contiguas, $m_1 + \dots + m_p = m$, y $n_1 + \dots + n_q = n$. Los elementos A_{ij} de la partición se llaman **bloques** (Stewart, 1998).

2.5.5.2.1. PARTICIONADO Y OPERACIONES MATRICIALES

Sea

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \dots & B_{rs} \end{pmatrix},$$

donde $A_{ij} \in \mathbb{C}^{k_i \times \ell_j}$ y $B_{ij} \in \mathbb{C}^{m_i \times n_j}$. Entonces

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{p1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \dots & A_{p2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1q}^T & A_{2q}^T & \dots & A_{pq}^T \end{pmatrix},$$

y la misma ecuación se cumple con la transpuesta reemplazada por la transpuesta conjugada.

Si $p = r$, $q = s$, $k_i = m_i$, y $\ell_j = n_j$, entonces,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1q} + \mathbf{B}_{1q} \\ \mathbf{A}_{21} + \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2q} + \mathbf{B}_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{p1} + \mathbf{B}_{p1} & \mathbf{A}_{p2} + \mathbf{B}_{p2} & \cdots & \mathbf{A}_{pq} + \mathbf{B}_{pq} \end{pmatrix}.$$

Si $q = r$ y $\ell_i = m_i$, entonces,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_{1i} \mathbf{B}_{i1} & \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_{1i} \mathbf{B}_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_{1i} \mathbf{B}_{is} \\ \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_{2i} \mathbf{B}_{i1} & \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_{2i} \mathbf{B}_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_{2i} \mathbf{B}_{is} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_{pi} \mathbf{B}_{i1} & \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_{pi} \mathbf{B}_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_{pi} \mathbf{B}_{is} \end{pmatrix}.$$

Las restricciones sobre las dimensiones de las matrices en el teorema anterior garantizan la conformidad. El principio general es tratar las submatrices como escalares y realizar las operaciones. Sin embargo, en la transposición, las submatrices individuales también deben transponerse. Y al multiplicar matrices particionadas, tenga en cuenta que el producto matricial no es conmutativo (Stewart, 1998).

2.5.6. MÉTODO DEL GRADIENTE CONJUGADO

En la literatura relacionada al análisis numérico y programación no lineal, algunas representaciones de vectores pueden variar levemente en la numeración de sus elementos. Por ejemplo, en el método del gradiente conjugado, para establecer al vector residual inicial $\mathbf{r}^{(0)}$ como el primer vector de dirección de búsqueda conjugada, algunos textos como el de Burden et al. (2017), que denotan al vector de dirección como $\mathbf{v}^{(k)}$, establecen la relación $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)}$, es decir, empiezan la numeración desde $k = 1$. Otros textos, como los de Miller (2014), Altaç (2025) y Strikwerda (2004), que denotan al vector dirección como $\mathbf{p}^{(k)}$, establecen la relación $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$ empezando desde $k = 0$. Estas diferencias solo se limitan a aspectos de orden y numeración, sin afectar al desarrollo lógico del método. En la presente tesis, tanto el desarrollo del método como el algoritmo se encuentran adaptados con las notaciones empleadas en los textos de Altaç (2025) y Strikwerda (2004).

2.5.6.1. DERIVACIÓN DEL MÉTODO DEL GRADIENTE CONJUGADO

El **método de gradiente conjugado**, desarrollado por Hestenes y Stiefel, fue diseñado originalmente como un método directo para resolver sistemas de ecuaciones lineales de $n \times n$ con una matriz de coeficientes definida positiva, que al igual que el método de eliminación gaussiana con pivoteo solo requiere de n pasos para determinar una solución. La diferencia está en que cada paso del método de gradiente conjugado presenta un alto costo computacional, siendo inferior como método directo en comparación con la eliminación gaussiana. Sin embargo, como método de aproximación iterativa, el

método de gradiente conjugado es útil para hallar la solución en problemas de valores en la frontera, donde se requieren resolver grandes sistemas de ecuaciones con una matriz de coeficientes dispersa, cuyas entradas son diferentes a cero y forman patrones predecibles (Burden et al., 2017).

Suponer que la matriz \mathbf{A} es definida positiva, y se considera la notación del producto interno

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}, \quad (2.136)$$

donde \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores n – dimensionales.

Para cualquier vector \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z} , y cualquier número real α , se tiene

- | | |
|---|---|
| a) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle;$ | b) $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle;$ |
| c) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle;$ | d) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0;$ |
| e) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}.$ | |

Cuando \mathbf{A} es definida positiva, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} > 0$ a menos que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Además, puesto que \mathbf{A} es simétrica, se tiene $\mathbf{x}^T \mathbf{Ay} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} = (\mathbf{Ax})^T \mathbf{y}$, por lo tanto, se tiene que, para cada \mathbf{x} e \mathbf{y} :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{Ay} \rangle = (\mathbf{Ax})^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{Ay} = \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{y} \rangle \quad (2.137)$$

(Burden et al., 2017).

Para la definición y descripción de los vectores en su forma iterativa, se sigue el procedimiento propuesto por Altaç (2025). El método se basa en minimizar la función escalar cuadrática, definida como

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}, \quad (2.138)$$

donde \mathbf{A} es una matriz cuadrada simétrica definida positiva, y el gradiente de la función escalar $E(\mathbf{x})$ es $\nabla E = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$. Minimizar el gradiente de $E(\mathbf{x})$ requiere establecer $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, lo que equivale a obtener la solución de un sistema de ecuaciones lineales dado por $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

La minimización del gradiente es un procedimiento iterativo que requiere una **estimación inicial**, $\mathbf{x}^{(0)}$. La estimación de pasos actual se mejora de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} \quad (2.139)$$

donde $\mathbf{x}^{(k)}$ es la **estimación** en el k -ésimo nivel de iteración, $\alpha^{(k)}$ es un escalar denominado **parámetro de búsqueda de línea** que se elige en el k – ésimo nivel de iteración para que el valor de $E(\mathbf{x}^{(k)})$ se minimice en el **vector de dirección de búsqueda conjugada**, $\mathbf{v}^{(k)}$. Este paso se llama **búsqueda de línea** (Altaç, 2025).

Se define $\mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(k)}$ como el **vector residual** en el k -ésimo paso de iteración (denotado por $\mathbf{r}^{(k)}$). Multiplicando por la izquierda la ecuación (2.139) con \mathbf{A} y restando a \mathbf{b} de ambos miembros, se obtiene

$$\mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{Av}^{(k)}.$$

Después de realizar simplificaciones, esta expresión proporciona una relación recursiva que involucra los **vectores residuales** de dos iteraciones sucesivas

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{Av}^{(k)}. \quad (2.140)$$

La siguiente **dirección de búsqueda** se encuentra desde

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta^{(k)} \mathbf{v}^{(k)}, \quad (2.141)$$

donde el **parámetro de conjugación** $\beta^{(k)}$ es también una cantidad escalar determinada de tal manera que $\langle \mathbf{v}^{(k+1)}, \mathbf{Av}^{(k)} \rangle = 0$, es decir, las dos direcciones de búsqueda sucesivas son conjugadas (Altaç, 2025).

Para la determinación de los parámetros, se sigue el procedimiento empleado por Strikwerda (2004). A continuación, se determina los parámetros $\alpha^{(k)}$ y $\beta^{(k)}$, así como también se elige un vector de dirección inicial $\mathbf{v}^{(0)}$ ideal, para que el sistema (2.139), (2.140) y (2.141) converja lo más rápido posible a la solución. Para la determinación de $\alpha^{(k)}$, al igual que con el método del descenso más pronunciado, el objetivo es seleccionar $\mathbf{x}^{(k+1)}$ para que $E(\mathbf{x}^{(k+1)})$ sea mínimo. Para esto, se asume que el vector de dirección $\mathbf{v}^{(k)}$ es conocido, y se elige un valor para $\alpha^{(k)}$ que minimice a $E(\mathbf{x}^{(k+1)})$. Entonces, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}^{(k+1)}) &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{Ax}^{(k)} \rangle + \alpha^{(k)} \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{Ax}^{(k)} \rangle + \frac{1}{2} [\alpha^{(k)}]^2 \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{Av}^{(k)} \rangle - \langle \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{b} \rangle - \alpha^{(k)} \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} \rangle \\ &= E(\mathbf{x}^{(k)}) - \alpha^{(k)} \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle + \frac{1}{2} [\alpha^{(k)}]^2 \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{Av}^{(k)} \rangle. \end{aligned}$$

Considerando la derivada de $E(\mathbf{x}^{(k+1)})$ con respecto a $\alpha^{(k)}$, se obtiene

$$\alpha^{(k)} = \frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{Av}^{(k)} \rangle}, \quad \text{para } k \geq 0 \quad (2.142)$$

que es el valor óptimo de $\alpha^{(k)}$, y al reemplazar este valor en $E(\mathbf{x}^{(k+1)})$, se obtiene

$$E(\mathbf{x}^{(k+1)}) = E(\mathbf{x}^{(k)}) - \frac{1}{2} \frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle^2}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{Av}^{(k)} \rangle}.$$

Al considerar el valor de $\alpha^{(k)}$ definido en (2.142), se determinan algunas relaciones interesantes entre los vectores de dirección $\mathbf{v}^{(k)}$ y $\mathbf{v}^{(k+1)}$ con el vector residual $\mathbf{r}^{(k+1)}$.

Entre el vector dirección $\mathbf{v}^{(k)}$ y el residual $\mathbf{r}^{(k+1)}$, se obtiene una relación de ortogonalidad al reemplazar el valor óptimo de $\alpha^{(k)}$ dado en (2.142) en la ecuación (2.140):

$$\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k+1)} \rangle = \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle - \alpha^{(k)} \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle = 0.$$

Esto es clave para determinar otra relación entre los vectores $\mathbf{v}^{(k+1)}$ y $\mathbf{r}^{(k+1)}$ con la norma de $\mathbf{r}^{(k+1)}$, utilizando la ecuación (2.141).

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k+1)} \rangle &= \langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k+1)} \rangle + \beta^{(k)} \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k+1)} \rangle \\ &= \|\mathbf{r}^{(k+1)}\|^2, \quad \text{para } k \geq 0. \end{aligned}$$

Este patrón de uso alternativo de (2.140) y (2.141) se utilizará repetidamente en el análisis del método del gradiente conjugado.

Si se considera el caso $k = 0$ donde se elige un vector $\mathbf{v}^{(0)}$ con total libertad, una buena opción sería $\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$, ya que, si esto se asume, entonces $E(\mathbf{x}^{(1)}) < E(\mathbf{x}^{(0)})$, además que presenta otras ventajas. Por ejemplo, de la igualdad anterior:

$$\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle = \|\mathbf{r}^{(k)}\|^2, \quad \text{para } k \geq 0.$$

Con esta última relación, se obtiene una fórmula conveniente para calcular $\alpha^{(k)}$,

$$\alpha^{(k)} = \frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|^2}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle}, \quad (2.143)$$

y también en $E(\mathbf{x}^{(k+1)})$ se tiene que

$$E(\mathbf{x}^{(k+1)}) = E(\mathbf{x}^{(k)}) - \frac{1}{2} \frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|^4}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle}$$

Para la determinación de $\beta^{(k)}$, la fórmula anterior muestra que $\mathbf{v}^{(k)}$ debe elegirse de modo que $\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle$ sea mínimo, ya que esto ayudará a minimizar $E(\mathbf{x}^{(k+1)})$ dado $\mathbf{x}^{(k)}$.

Por (2.141) expresado en función de $\mathbf{v}^{(k-1)}$, se observa que $\beta^{(k-1)}$ debe elegirse para minimizar $\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle$ dado $\mathbf{v}^{(k-1)}$.

$$\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle = \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{r}^{(k)} \rangle + 2\beta^{(k-1)} \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k-1)} \rangle + [\beta^{(k-1)}]^2 \langle \mathbf{v}^{(k-1)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k-1)} \rangle$$

y por tanto la elección óptima de $\beta^{(k-1)}$ es

$$\beta^{(k-1)} = -\frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k-1)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k-1)} \rangle}, \quad \text{para } k \geq 1$$

o, equivalentemente,

$$\beta^{(k)} = -\frac{\langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle}, \quad \text{para } k \geq 0. \quad (2.144)$$

Considerando este valor de $\beta^{(k)}$ se determina una relación entre el vector de dirección $\mathbf{v}^{(k+1)}$ y $\mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)}$, utilizando la ecuación (2.141) para $\mathbf{v}^{(k+1)}$:

$$\langle \mathbf{v}^{(k+1)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle = \langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle + \beta^{(k)} \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle = 0,$$

y así se establece que las direcciones de búsqueda consecutivas son **conjugadas**, siendo un resultado importante del método de gradiente conjugado:

$$\langle \mathbf{v}^{(k+1)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle = 0, \quad \text{para } k \geq 0, \quad (2.145)$$

Con la propiedad de conjugación descrito en (2.145), se determina que dos vectores residuales consecutivos $\mathbf{r}^{(k)}$ y $\mathbf{r}^{(k+1)}$ son ortogonales. Se reemplaza el vector $\mathbf{v}^{(k)}$ en $\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle$ utilizando la ecuación (2.141) y expresado en función de $\mathbf{v}^{(k-1)}$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle &= \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle + \beta^{(k-1)} \langle \mathbf{v}^{(k-1)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle, \quad \text{para } k \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces, la igualdad anterior se reemplaza en el producto interno de $\mathbf{r}^{(k)}$ y $\mathbf{r}^{(k+1)}$, y además considerando la ecuación (2.140) para $\mathbf{r}^{(k+1)}$ y el nuevo valor óptimo de $\alpha^{(k)}$ descrito en (2.143):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle &= \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle - \alpha^{(k)} \langle \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle - \alpha^{(k)} \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Para obtener una fórmula más conveniente para $\beta^{(k)}$ que la forma descrita en (2.144), se construye una relación a partir de la norma del vector residual $\mathbf{r}^{(k+1)}$, utilizando además (2.140) y (2.146)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}^{(k+1)}\|^2 &= \langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k+1)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle - \alpha^{(k)} \langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle \\ &= -\alpha^{(k)} \langle \mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle, \end{aligned}$$

entonces, por (2.144), la nueva fórmula para $\beta^{(k)}$ es

$$\beta^{(k)} = \frac{1}{\alpha^{(k)}} \frac{\|\mathbf{r}^{(k+1)}\|^2}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle} = \frac{\|\mathbf{r}^{(k+1)}\|^2}{\|\mathbf{r}^{(k)}\|^2}, \quad \forall \|\mathbf{r}^{(k)}\| \neq 0.$$

En resumen, se presentan todas las fórmulas para el método del gradiente conjugado:

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}, \quad (2.147a)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{v}^{(k)}, \quad (2.147b)$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)}, \quad (2.147c)$$

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta^{(k)} \mathbf{v}^{(k)}, \quad (2.147d)$$

$$\alpha^{(k)} = \frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|^2}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle}, \quad (2.147e)$$

$$\beta^{(k)} = \frac{\|\mathbf{r}^{(k+1)}\|^2}{\|\mathbf{r}^{(k)}\|^2}, \quad \forall \|\mathbf{r}^{(k)}\| \neq 0 \quad (2.147f)$$

(Strikwerda, 2004).

El siguiente teorema es un resultado muy interesante y significativo sobre los residuos y las direcciones de búsqueda para el método del gradiente conjugado.

Teorema: Para el método del gradiente conjugado (2.147), los residuos y las direcciones de búsqueda satisfacen las relaciones

$$\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(j)} \rangle = \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0, \quad \text{para } k \neq j. \quad (2.148)$$

Demostración: Véase Strikwerda (2004), Teorema 14.2.1, página 381.

De este teorema se deriva inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario: Si la matriz \mathbf{A} es una matriz simétrica y definida positiva de tamaño $n \times n$, entonces el algoritmo de gradiente conjugado converge como máximo en n pasos.

Demostración: Véase Strikwerda (2004), Corolario 14.2.2, página 382.

2.5.6.2. ALGORITMO DEL MÉTODO DE GRADIENTE CONJUGADO

El presente algoritmo del método de gradiente conjugado es una adaptación del algoritmo 7.5: Método de Gradiente Conjugado Precondicionado, descrito por Burden et al. (2017), donde se considera su estructura lógica y se omite los pasos que involucran a la implementación de la matriz de precondicionamiento. Además, tanto la notación como la numeración se han ajustado de acuerdo al desarrollo del método en la presente tesis, empezando con el proceso de iteración desde $k = 0$, y detallando el nivel de iteración correspondiente a cada valor o vector que interviene en el proceso.

Para resolver $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dada la aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)}$:

ENTRADA:

n : Número de ecuaciones y valores desconocidos,

a_{ij} : Entradas de la matriz \mathbf{A} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$,

b_j : Entradas del vector \mathbf{b} , $1 \leq j \leq n$,

x_i : Entradas del vector de aproximación inicial $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$,

N : Número máximo de iteraciones, y

TOL : Tolerancia.

SALIDA:

(x_1, \dots, x_n) : Solución aproximada, y

(r_1, \dots, r_n) : Residuo.

En caso de no llegar a aproximarse la solución y el residuo, imprimir un mensaje de que se excedió el número de iteraciones.

PROCESO:

PASO 1: Hacer

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)};$$

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)};$$

$$\eta^{(0)} = \sum_{j=1}^n \left(r_j^{(0)} \right)^2;$$

PASO 2: Hacer $k = 0$.

PASO 3: Mientras $k \leq N$, hacer los Pasos 4 al 6

PASO 4: Establecer

$$\mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)};$$

$$\alpha^{(k)} = \frac{\eta^{(k)}}{\sum_{j=1}^n v_j^{(k)} w_j^{(k)}};$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{v}^{(k)};$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{w}^{(k)};$$

$$\omega^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n \left(r_j^{(k+1)} \right)^2;$$

PASO 5: Si $\|\mathbf{r}^{(k+1)}\| < TOL$, entonces

SALIDA ('Vector Solución'; x_1, \dots, x_n);

SALIDA ('Con residual'; r_1, \dots, r_n);

(El procedimiento fue exitoso.)

PARE.

Caso contrario, continuar con el Paso 6.

PASO 6: Hacer

$$\beta^{(k)} = \frac{\omega^{(k+1)}}{\eta^{(k)}};$$

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta^{(k)} \mathbf{v}^{(k)};$$

$$\eta^{(k+1)} = \omega^{(k+1)};$$

$$k = k + 1.$$

PASO 8: Si $(k > N)$ entonces

SALIDA ('Se excedió el máximo número de iteraciones');

(El procedimiento no fue exitoso.)

PARE.

(Burden et al., 2017).

Ejemplo 2.5.1.

Resolver el sistema de ecuaciones utilizando el método de gradiente conjugado.

$$\begin{aligned} 75x_1 + 43x_2 &= -15 \\ 43x_1 + 26x_2 &= 8 \end{aligned} \quad (2.149)$$

Solución:

Este ejemplo fue resuelto por Miller (2014), quien propone un algoritmo similar al presentado anteriormente. Su aporte principal se encuentra en la figura 2.23, donde se visualiza la diferencia entre el método del descenso más pronunciado y el método a utilizar para los fines de la investigación.

Con una estimación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 0]^T$, el residual inicial y la dirección de búsqueda son

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b} = [-15 \ 8]^T;$$

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} = [-15 \ 8]^T;$$

$$\eta^{(0)} = \langle \mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{r}^{(0)} \rangle = 289.$$

Se inicia con la primera iteración $k = 0$. Entonces,

$$\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(0)} = [-781 \ -437]^T;$$

Se estima que la solución óptima en esta dirección de búsqueda es

$$\alpha^{(0)} = \frac{\eta^{(0)}}{\langle \mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{w}^{(0)} \rangle} = 3.5162 \times 10^{-2};$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha^{(0)}\mathbf{v}^{(0)} = [-5.2744 \times 10^{-1} \ 2.8130 \times 10^{-1}]^T;$$

y se calcula que el nuevo residual y la dirección de búsqueda son

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)} - \alpha^{(0)}\mathbf{w}^{(0)} = [12.462 \ 23.366]^T;$$

$$\omega^{(1)} = \langle \mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(1)} \rangle = 701.267;$$

$$\beta^{(0)} = \frac{\omega^{(1)}}{\eta^{(0)}} = 2.4265;$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)} + \beta^{(0)}\mathbf{v}^{(0)} = [-23.936 \ 42.778]^T;$$

Establezca $\eta^{(1)} = \omega^{(1)} = 701.267$.

Esto completa una iteración. La segunda iteración $k = 1$ comienza con

$$\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(1)} = [44.257 \ 82.982]^T;$$

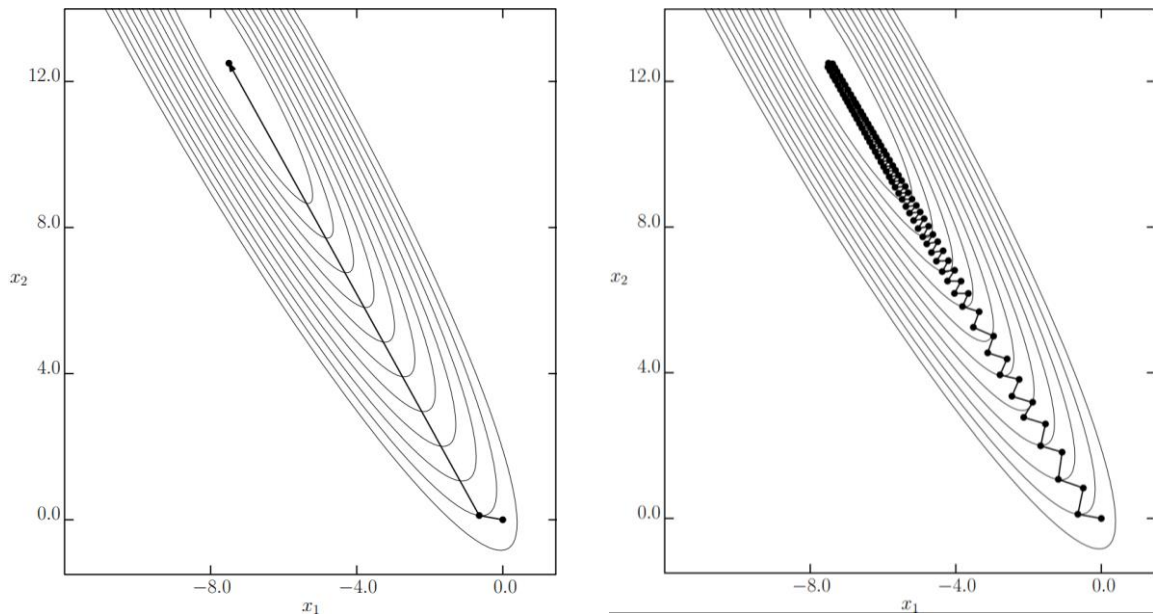
$$\alpha^{(1)} = \frac{\eta^{(1)}}{\langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle} = 0.28158;$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \alpha^{(1)}\mathbf{v}^{(1)} = [-7.2673 \ 12.327]^T;$$

y el residual es

$$\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{r}^{(1)} - \alpha^{(1)}\mathbf{w}^{(1)} = [6.5725 \times 10^{-14} \ 3.5527 \times 10^{-14}]^T;$$

En matemáticas exactas, este residual \mathbf{r}_n sería cero. La solución se muestra en la figura 2.23 a), con algunos contornos de la función de error $E(\mathbf{x})$ (Miller, 2014).



a) Solución por el método del gradiente conjugado de (2.149)

b) Solución por el método de descensos más pronunciados de (2.149)

Figura 2.23: Solución por el método del a) Gradiente conjugado y b) Descensos más pronunciados

Fuente: Miller, 2014, Páginas 98 y 99

El método de descensos más pronunciados es esencialmente el primer paso del método del gradiente conjugado, que se repite iterativamente. Cada dirección de búsqueda se define por el residuo local y no se exige alguna condición de conjugación. Para el mismo problema evaluado en el ejemplo 2.5.1, las primeras 200 iteraciones de la solución del método del descenso más pronunciado se muestran gráficamente en la figura 2.23 b). Dado que no se exige la conjugación, cada iteración revierte parte del progreso de las iteraciones anteriores. La solución avanza hacia el óptimo, pero requiere significativamente más de $n = 2$ iteraciones (Miller, 2014).

El siguiente ejemplo ilustra los cálculos para un problema elemental.

Ejemplo 2.5.2

El sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dado por

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 24, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30, \\ -x_2 + 4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

tiene como solución a $[3 \ 4 \ 5]^T$. Utilice el método de gradiente conjugado con $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 0 \ 0]^T$ para aproximar la solución.

Solución

Para el método de gradiente conjugado, iniciar con

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(0)} = \mathbf{b} = [24 \ 30 \ -24]^T;$$

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} = [24 \ 30 \ -24]^T;$$

$$\eta^{(0)} = \langle \mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{r}^{(0)} \rangle = 2052.$$

Se inicia con la primera iteración con $k = 0$. Entonces,

$$\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(0)} = [186.0 \quad 216.0 \quad -126.0]^T;$$

$$\alpha^{(0)} = \frac{\eta^{(0)}}{\langle \mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{w}^{(0)} \rangle} = 0.1469072165;$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha^{(0)}\mathbf{v}^{(0)} = [3.525773196 \quad 4.407216495 \quad -3.525773196]^T;$$

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)} - \alpha^{(0)}\mathbf{w}^{(0)} = [-3.32474227 \quad -1.73195876 \quad -5.48969072]^T;$$

$$\omega^{(1)} = \langle \mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(1)} \rangle = 44.19029651;$$

$$\beta^{(0)} = \frac{\omega^{(1)}}{\eta^{(0)}} = 0.02153523222;$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)} + \beta^{(0)}\mathbf{v}^{(0)} = [-2.807896697 \quad -1.085901793 \quad -6.006536293]^T;$$

Establezca $\eta^{(1)} = \omega^{(1)} = 44.19029651$.

Para la segunda iteración con $k = 1$, se tiene

$$\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(1)} = [-14.48929217 \quad -6.760760967 \quad -22.94024338]^T;$$

$$\alpha^{(1)} = \frac{\eta^{(1)}}{\langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle} = 0.2378157558;$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \alpha^{(1)}\mathbf{v}^{(1)} = [2.858011121 \quad 4.148971939 \quad -4.954222164]^T;$$

$$\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{r}^{(1)} - \alpha^{(1)}\mathbf{w}^{(1)} = [0.121039698 \quad -0.124143281 \quad -0.034139402]^T;$$

$$\omega^{(2)} = \langle \mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{r}^{(2)} \rangle = 0.03122766148;$$

$$\beta^{(1)} = \frac{\omega^{(2)}}{\eta^{(1)}} = 0.0007066633163;$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{r}^{(2)} + \beta^{(1)}\mathbf{v}^{(1)} = [0.1190554504 \quad -0.1249106480 \quad -0.03838400086]^T$$

Establezca $\eta^{(2)} = \omega^{(2)} = 0.03122766148$.

La tercera iteración $k = 2$ da

$$\mathbf{w}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)} = [0.1014898976 \quad -0.1040922099 \quad -0.0286253554]^T;$$

$$\alpha^{(2)} = \frac{\eta^{(2)}}{\langle \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{w}^{(2)} \rangle} = 1.192628008;$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + \alpha^{(2)}\mathbf{v}^{(2)} = [2.999999998 \quad 4.000000002 \quad -4.999999998]^T;$$

$$\mathbf{r}^{(3)} = \mathbf{r}^{(2)} - \alpha^{(2)}\mathbf{w}^{(2)} = [0.36 \times 10^{-8} \quad 0.39 \times 10^{-8} \quad -0.141 \times 10^{-8}]^T.$$

Puesto que $\mathbf{x}^{(3)}$ es aproximadamente la solución exacta, el error de redondeo no afecta significativamente el resultado (Burden et al., 2017).

La solución al mismo problema se obtuvo utilizando el método SOR (Método de Sobrerrelajación Sucesiva). Con un valor casi óptimo de $\omega = 1.25$, se requiere de 14 iteraciones para una precisión de 10^{-7} , (Burden et al., 2017).

2.5.7. WOLFRAM MATHEMATICA

Mathematica es un sistema de álgebra informática de propósito general, en el que el cálculo simbólico se puede combinar fácilmente con el cálculo numérico exacto, aproximado (punto flotante) y de precisión arbitraria. Mathematica proporciona potentes capacidades de gráficos científicos.

El primer concepto de Mathematica y sus primeras versiones fueron desarrollados por Stephen Wolfram entre 1979 – 1988. En 1987, se fundó la empresa Wolfram Research, que continúa desarrollando Mathematica.

Las características más importantes de Mathematica son el cálculo simbólico, numérico, acústico y paralelo; computación estática y dinámica y visualización interactiva; es posible incorporar nuevas capacidades definidas por el usuario; disponible para casi todos los sistemas operativos; lenguaje de programación potente y lógico; extensa biblioteca de funciones matemáticas y paquetes especializados; sistema de composición tipográfica matemática interactiva; recursos gratuitos (por ejemplo, ver Mathematica Learning Center www.wolfram.com/support/learn, Wolfram Demonstrations Project demonstrations.wolfram.com, Wolfram Information Center library.wolfram.com) (Shingareva y Lizárraga – Celaya, 2011).

2.5.7.1. OBJETOS DE MATHEMATICA

Las listas son los objetos fundamentales en Mathematica. Los otros objetos (por ejemplo, conjuntos, matrices, tablas, vectores, arreglos, tensores, objetos que contienen datos de tipo mixto) se representan como listas. Una lista es un conjunto ordenado de objetos separados por comas y encerrados entre llaves, **{elements}**, o definido con la función **List[elements]**.

Las listas anidadas son listas que contienen otras listas. Hay muchas funciones que manipulan listas.

Los conjuntos son representados por listas.

Los vectores son representados por listas, los vectores son simples listas. Los vectores pueden ser expresados como columnas individuales con **ColumnForm[list, horiz, vert]**.

Las tablas, matrices y tensores son representados por listas anidadas. No hay diferencia entre la forma en que se almacenan: se pueden generar usando funciones **MatrixForm[list]**, **TableForm[list]**, o usando las funciones de lista anidada.

Una matriz es una lista de vectores.

Un tensor es una lista de matrices con la misma dimensionalidad (Shingareva y Lizárraga – Celaya, 2011).

2.5.7.2. OPERACIONES BÁSICAS

2.5.7.2.1. OPERACIÓN CONDICIONAL IF

If[test, then, else] es como la operación (if_then_else) en Pascal. Si **test** se evalúa como **True**, entonces **then** es evaluado, y si **test** se evalúa como **False**, entonces **else** es evaluado. Si **test** no es una expresión

Booleana (es decir, no se evalúa como **True** o **False**), entonces la expresión **If** se devuelve sin evaluar.

Hay dos variaciones, una es:

If[test, then, else, unknown]

que devuelve el valor de **unknown** si **test** no se evalúa como **True** o **False**. El otro es:

If[test, then]

que devuelve **then** si **test** se evalúa como **True** y **Null** si **test** se evalúa como **False**.

Por ejemplo:

Input	Output
If[5 > 2, 1, 2]	1
If[5 < 2, 1, 2]	2
If[a == b, 1, 2]	If[a == b, 1, 2]
If[a == b, 1, 2, 3]	3
If[5 < 2, 1]	Null

(Gray, 1994)

2.5.7.2.2. BUCLE WHILE

While[test, expr] es como el comando “**While test Do expr**” en el lenguaje de los programas While. La expresión **While** en Mathematica comienza evaluando la prueba. Si **test** es **True**, entonces evalúa **expr**. Por lo general, **expr** incluye una cláusula que cambia algún parámetro en **test**. Luego **test** se reevalúa con el nuevo valor del parámetro. Si todavía se evalúa como **True**, entonces **expr** se evalúa nuevamente. Esto continúa hasta que **test** se evalúa como **False**. La operación **While** no devuelve ningún valor, pero si **expr** asigna un valor a algún otro **expr1**, entonces **expr1** tiene el valor que tenía justo antes de **test** evaluado como **False**. El uso de los bucles **While** es el mismo que el de los bucles **Do**, por ejemplo:

$$x = 1; \text{While}[x < 10, x = x + 1; y = x^2]; y \Rightarrow 100$$

La última vez que se evalúa la condición $x < 10$ con el resultado **True** es cuando **x** es **9**. En ese caso, la expresión establece **x** en **10** y luego le da a **y** el valor $10^2 = 100$. Tener en cuenta que **x** nuevamente tiene un valor que debe borrarse. (Gray, 1994)

2.5.7.2.3. BUCLE FOR

For[start, test, step, expr] es casi exactamente lo mismo que un bucle **For** en el lenguaje C, excepto que en C las cláusulas están separadas por punto y coma en lugar de comas (tenga en cuenta que C usa comas para declaraciones compuestas, por lo que las funciones de la coma y el punto y coma en C son exactamente opuestas a sus funciones en Mathematica). Un bucle **For** primero evalúa **start** y luego evalúa repetidamente **expr**, **step**, y luego **test**, hasta que **test** falla. Por lo general, **start** inicializa alguna

variable y **step** la modifica de alguna manera que **test** utiliza para eventualmente detener el bucle **For**. Al igual que con los bucles **Do** y **While**, la salida de un bucle **For** es Null.

```

For[i = 1, i < 4, i + +, Print[i]]
    1
    2
    3

```

Aquí **i + +** es una abreviatura de **i = i + 1**. También se puede escribir **i += 1** con el mismo efecto. De manera similar, **i - -** es una abreviatura de **i = i - 1** o **i = i - 1**. (Gray, 1994)

2.6. ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DEL CALOR EN UNA PLACA RECTANGULAR EN RÉGIMEN TRANSITORIO

2.6.1. TRANSFERENCIA DE CALOR

La **transferencia de calor** es una rama de la termodinámica que estudia el cálculo de la cantidad y la velocidad de transferencia de calor que interactúa con el entorno (Uddin, 2024).

2.6.1.1. MODOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR

La **conducción** es un proceso de transferencia de calor en el que se produce la difusión térmica a través de cuerpos sólidos, líquidos estáticos y gases atrapados entre espacios estrechos. La **convección** es un proceso de transferencia de calor en el que se produce la difusión térmica entre la superficie sólida y las capas de fluido debido a la diferencia de temperatura (Uddin, 2024).

2.6.1.2. ESTADOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR

La conducción de calor en un medio se considera **estacionaria** cuando la temperatura no cambia con el tiempo. Si el medio experimenta cambios repentinos o drásticos de temperatura en el tiempo, dicho proceso de difusión térmica no puede modelarse como un fenómeno de estado estacionario; por lo que la conducción de calor en ese medio se considera **transitorio** (Uddin, 2024).

2.6.2. CONDUCCIÓN DE CALOR EN UN DOMINIO RECTANGULAR FINITO

Se coloca una **placa rectangular** uniforme, conductora de calor, en el plano horizontal XY , cuyos límites están dados por las aristas a lo largo de $x = 0$, $x = L_x$, $y = 0$ e $y = L_y$. Suponer que la placa es lo suficientemente delgada como para que la temperatura sea la misma en todos los puntos con las mismas coordenadas en XY . Sea $u(x, y, t)$ la temperatura de la placa en el punto (x, y) en el tiempo t . La conducción de calor dentro de una placa rectangular uniforme y delgada se describe mediante la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \xi_x \frac{\partial u}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial u}{\partial y} - \gamma u + f(x, y, t), \quad (2.150)$$

$$0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad t > 0.$$

Aquí, a^2 , ξ_x , ξ_y y γ son constantes reales. En términos de intercambio de calor, $a^2 = \kappa/c\rho$ es la difusividad térmica del material, donde κ es la conductividad termal, c es la capacidad calorífica y ρ es la densidad de masa del medio; $\gamma = h/c\rho$, donde h es el coeficiente de intercambio de calor (para intercambio de calor lateral con un medio externo); y $f(x, y, t) = Q(x, y, t)/c\rho$, donde Q es la densidad de la fuente de calor ($Q < 0$ para lugares donde se absorbe el calor). Los términos con coeficientes ξ_x y ξ_y describen la transferencia de calor mediante el flujo con vector de velocidad (ξ_x, ξ_y) debido al movimiento volumétrico circundante. Estos coeficientes serán iguales a cero para los sólidos, pero no para líquidos o gases en los que se produce movimiento volumétrico (advección) del medio (Henner et al., 2020).

2.6.2.1. CONDICIÓN INICIAL

La condición inicial define la distribución de temperatura dentro de la membrana en tiempo cero:

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi(x, y) \quad (2.151)$$

(Henner et al., 2020).

2.6.2.2. CONDICIONES DE FRONTERA

Las condiciones de frontera describen las condiciones térmicas en la frontera en cualquier momento t . Las condiciones de frontera se pueden escribir en forma general como

$$\begin{aligned} P_1[u] \equiv \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u \Big|_{x=0} &= g_1(y, t), & P_2[u] \equiv \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u \Big|_{x=L_x} &= g_2(y, t), \\ P_3[u] \equiv \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_3 u \Big|_{y=0} &= g_3(x, t), & P_4[u] \equiv \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_4 u \Big|_{y=L_y} &= g_4(x, t), \end{aligned} \quad (2.152)$$

donde $g_1(y, t)$, $g_2(y, t)$, $g_3(x, t)$ y $g_4(x, t)$ son funciones conocidas del tiempo, y sus respectivas variables $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_4, \beta_4$ son constantes reales. Los argumentos físicos conducen a las restricciones de signo $\alpha_1/\beta_1 < 0$ y $\alpha_3/\beta_3 < 0$ (Henner et al., 2020).

Existen tres tipos principales de condiciones de frontera (se denota $a = 0$ o L_x y $b = 0$ o L_y):

Caso 1. Condición de frontera de primer tipo (condición de Dirichlet), donde se conoce la temperatura a lo largo del borde de y o x :

$$u(a, y, t) = g(y, t) \quad \text{o} \quad u(x, b, t) = g(x, t).$$

También se puede tener temperatura cero en los bordes, en cuyo caso $g(y, t) \equiv 0$ o $g(x, t) \equiv 0$.

Caso 2. Condición de frontera de segundo tipo (Condición de Neumann), donde se conoce el flujo de calor a lo largo del borde de y o x :

$$u_x(a, y, t) = g(y, t) \quad \text{o} \quad u_y(x, b, t) = g(x, t).$$

También se puede tener un borde aislado térmicamente en cuyo caso $g(y, t) \equiv 0$ o $g(x, t) \equiv 0$.

Caso 3. Condición de frontera de tercer tipo (condición mixta), donde hay intercambio de calor con un medio a lo largo del borde de y o x dado por

$$u_x(a, y, t) \pm hu(a, y, t) = g(y, t) \quad \text{o} \quad u_y(x, b, t) \pm hu(x, b, t) = g(x, t).$$

Se supone que h es una constante positiva en cuyo caso se debe elegir el signo positivo en las dos fórmulas anteriores cuando $a = L_x$, $b = L_y$ y negativo cuando $a = 0$, $b = 0$ (Henner et al., 2009).

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. TIPO, DISEÑO Y NIVEL DE INVESTIGACIÓN

Tipo: Aplicada.

Diseño: No experimental.

Nivel: Explicativo.

3.2. POBLACIÓN Y MUESTRA DE ESTUDIO

No es necesario por ser una investigación no experimental.

3.3. VARIABLES DE ESTUDIO. OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

Variables independientes:

Variable independiente 1: Método de expansión de funciones propias

Variable independiente 2: Método de diferencias finitas

Variable dependiente: Ecuación de difusión de calor en una placa rectangular en régimen transitorio.

3.4. PROCESOS DE DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

Recopilación bibliográfica: Se realiza una búsqueda bibliográfica especializada en el tema de ecuaciones diferenciales parciales y análisis numérico, específicamente, en los que se centran en mostrar la solución analítica y numérica de la ecuación de difusión de calor en dos dimensiones; a través de textos especializados y artículos científicos.

3.5. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
Observación	Programa de simulación numérica con Mathematica
Análisis Documental	Libros, Revistas, Artículos científicos en forma física y virtual

$$\begin{aligned}\bar{X}(x) &= 1 - \frac{1}{L_x}x \quad \wedge \quad \bar{\bar{X}}(x) = \frac{1}{L_x}x, \\ \bar{Y}(y) &= 1 - \frac{1}{L_y}y \quad \wedge \quad \bar{\bar{Y}}(y) = \frac{1}{L_y}y,\end{aligned}\tag{4.5}$$

y sus coeficientes $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$ son:

$$\begin{aligned}(x, y, t) = (0, 0, t) & : A(t) = -g_1(0, t) = -g_3(0, t) = -u(0, 0, t), \\ (x, y, t) = (0, L_y, t) & : B(t) = -g_1(L_y, t) = -g_4(0, t) = -u(0, L_y, t), \\ (x, y, t) = (L_x, 0, t) & : C(t) = -g_2(0, t) = -g_3(L_x, t) = -u(L_x, 0, t), \\ (x, y, t) = (L_x, L_y, t) & : D(t) = -g_2(L_y, t) = -g_4(L_x, t) = -u(L_x, L_y, t).\end{aligned}\tag{4.6}$$

Se verifica en el anexo A que la función auxiliar $w(x, y, t)$ descrita en (4.4) satisface las condiciones de frontera del problema (4.1), es decir:

$$\begin{aligned}w(x, y, t)|_{x=0} &= g_1(y, t) \quad \wedge \quad w(x, y, t)|_{x=L_x} = g_2(y, t), \\ w(x, y, t)|_{y=0} &= g_3(x, t) \quad \wedge \quad w(x, y, t)|_{y=L_y} = g_4(x, t).\end{aligned}\tag{4.7}$$

Por consiguiente, se formula un problema de valor inicial y de frontera en función de $v(x, y, t)$ considerando tanto la solución general de la forma (4.3) como la función auxiliar $w(x, y, t)$ definida en (4.4), alterando la EDP y la condición inicial del problema (4.1).

En EDP:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + f(x, y, t) \\ \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} &= a^2 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + f(x, y, t) \\ \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \tilde{f}(x, y, t)\end{aligned}\tag{4.8}$$

donde:

$$\tilde{f}(x, y, t) = f(x, y, t) + a^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial w}{\partial t}\tag{4.9}$$

En CI:

$$\begin{aligned}u(x, y, 0) &= \varphi(x, y) \\ \Rightarrow v(x, y, 0) + w(x, y, 0) &= \varphi(x, y) \\ \Rightarrow v(x, y, 0) &= \varphi^*(x, y)\end{aligned}\tag{4.10}$$

donde:

$$\varphi^*(x, y) = \varphi(x, y) - w(x, y, 0).\tag{4.11}$$

Dado que tanto $u(x, y, t)$ como $w(x, y, t)$ satisfacen las mismas condiciones de frontera del problema (4.1), entonces las condiciones de frontera para $v(x, y, t)$ son homogéneas.

En CF1:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= g_1(y, t) \\ \Rightarrow v(0, y, t) + w(0, y, t) &= g_1(y, t) \\ \Rightarrow v(0, y, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

En CF2:

$$\begin{aligned} u(L_x, y, t) &= g_2(y, t) \\ \Rightarrow v(L_x, y, t) + w(L_x, y, t) &= g_2(y, t) \\ \Rightarrow v(L_x, y, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

En CF3:

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) &= g_3(x, t) \\ \Rightarrow v(x, 0, t) + w(x, 0, t) &= g_3(x, t) \\ \Rightarrow v(x, 0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

En CF4:

$$\begin{aligned} u(x, L_y, t) &= g_4(x, t) \\ \Rightarrow v(x, L_y, t) + w(x, L_y, t) &= g_4(x, t) \\ \Rightarrow v(x, L_y, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

El nuevo PVIF para $v(x, y, t)$ tiene la misma forma que para $u(x, y, t)$ del problema (4.1), pero con una condición inicial y término fuente diferente. Solo las condiciones de frontera para $v(x, y, t)$ se han convertido en homogéneas.

$$\begin{aligned} \text{EDP:} \quad \frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \tilde{f}(x, y, t) & ; \quad 0 < x < L_x & ; \quad t > 0 \\ \text{CI:} \quad v(x, y, t)|_{t=0} &= \varphi^*(x, y) & ; \quad 0 < x < L_x & ; \quad 0 < y < L_y \\ \text{CF1:} \quad v(x, y, t)|_{x=0} &= 0 & ; \quad 0 < y < L_y & ; \quad t \geq 0 \\ \text{CF2:} \quad v(x, y, t)|_{x=L_x} &= 0 & ; \quad 0 < y < L_y & ; \quad t \geq 0 \\ \text{CF3:} \quad v(x, y, t)|_{y=0} &= 0 & ; \quad 0 < x < L_x & ; \quad t \geq 0 \\ \text{CF4:} \quad v(x, y, t)|_{y=L_y} &= 0 & ; \quad 0 < x < L_x & ; \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Este nuevo problema se resuelve considerando a la función $v(x, y, t)$ como la suma de dos funciones:

$$v(x, y, t) = v_1(x, y, t) + v_2(x, y, t), \quad (4.17)$$

donde v_1 es la solución de la ecuación homogénea con la condición inicial dada en el problema (4.16):

$$\begin{aligned}
\text{EDP:} \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} &= a^2 \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right] && ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \end{array} ; \quad t > 0 \\
\text{CI:} \quad v_1(x, y, t)|_{t=0} &= \varphi^*(x, y) && ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \end{array} \\
\text{CF1:} \quad v_1(x, y, t)|_{x=0} &= 0 && ; \quad 0 < y < L_y ; \quad t \geq 0 \\
\text{CF2:} \quad v_1(x, y, t)|_{x=L_x} &= 0 && ; \quad 0 < y < L_y ; \quad t \geq 0 \\
\text{CF3:} \quad v_1(x, y, t)|_{y=0} &= 0 && ; \quad 0 < x < L_x ; \quad t \geq 0 \\
\text{CF4:} \quad v_1(x, y, t)|_{y=L_y} &= 0 && ; \quad 0 < x < L_x ; \quad t \geq 0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

y v_2 es la solución de la ecuación no homogénea con término fuente $\tilde{f}(x, y, t)$ y condición inicial cero:

$$\begin{aligned}
\text{EDP:} \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} &= a^2 \left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right] + \tilde{f}(x, y, t) && ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \end{array} ; \quad t > 0 \\
\text{CI:} \quad v_2(x, y, t)|_{t=0} &= 0 && ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \end{array} \\
\text{CF1:} \quad v_2(x, y, t)|_{x=0} &= 0 && ; \quad 0 < y < L_y ; \quad t \geq 0 \\
\text{CF2:} \quad v_2(x, y, t)|_{x=L_x} &= 0 && ; \quad 0 < y < L_y ; \quad t \geq 0 \\
\text{CF3:} \quad v_2(x, y, t)|_{y=0} &= 0 && ; \quad 0 < x < L_x ; \quad t \geq 0 \\
\text{CF4:} \quad v_2(x, y, t)|_{y=L_y} &= 0 && ; \quad 0 < x < L_x ; \quad t \geq 0
\end{aligned} \tag{4.19}$$

La solución $v_1(x, y, t)$ representa el caso de **intercambio de calor libre**, es decir, el calor que no se genera ni se pierde en la placa, sino que solo se transfiere por conducción. La solución $v_2(x, y, t)$ representa el **intercambio de calor no libre**, esto es, la difusión del calor existe debido a la generación (o absorción) de calor por fuentes internas cuando la distribución inicial de temperatura es cero (Henner et al., 2020).

La solución $v_1(x, y, t)$ del problema (4.18), por el método de separación de variables, se expresa en forma de series de funciones propias que satisfacen los problemas regulares de Sturm – Liouville:

$$\begin{aligned}
X'' + \lambda_x X &= 0, & X(0) &= 0, & X(L_x) &= 0, \\
Y'' + \lambda_y Y &= 0, & Y(0) &= 0, & Y(L_y) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Los valores propios y funciones propias de cada problema regular de Sturm – Liouville, así como también su norma cuadrática, son, respectivamente:

$$\lambda_{x,n} = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2, \quad X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right), \quad \|X_n(x)\|^2 = \frac{L_x}{2}, \quad \text{para } n = 1,2,3, \dots;$$

$$\lambda_{y,m} = \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2, \quad Y_m(y) = \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right), \quad \|Y_m(y)\|^2 = \frac{L_y}{2}, \quad \text{para } m = 1,2,3, \dots$$

La solución para el problema (4.18) es:

$$v_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} e^{-a^2 \lambda_{n,m} t} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right), \quad (4.21)$$

donde

$$B_{n,m} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \varphi^*(x, y) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right) dy dx, \quad (4.22)$$

y $\lambda_{n,m} = \lambda_{x,n} + \lambda_{y,m}$.

Los conjuntos $\{X_n(x)\}$ y $\{Y_m(y)\}$, por las propiedades del problema regular de Sturm – Liouville, se constituyen como conjuntos ortogonales y completos en $[0, L_x]$ y $[0, L_y]$, respectivamente, lo que implica que cualquier función suave por partes (del espacio de funciones L^2) se puede expandir en series de esas funciones propias, en particular, en forma de series de senos de Fourier.

El producto interno de funciones de dos variables en $[0, L_x] \times [0, L_y]$ se define como:

$$\langle V(x, y), W(x, y) \rangle = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} V(x, y) \cdot W(x, y) dy dx,$$

el sistema $\{V_{n,m}(x, y)\}$, conformado por el producto de funciones propias:

$$V_{n,m}(x, y) = X_n(x)Y_m(y) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right),$$

es un conjunto ortogonal, lo que significa que para cualquier $n \neq n'$ y $m \neq m'$ se cumple:

$$\langle V_{n,m}(x, y), V_{n',m'}(x, y) \rangle = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} V_{n,m}(x, y) \cdot V_{n',m'}(x, y) dy dx = 0.$$

Su norma cuadrática se define como:

$$\|V_{n,m}(x, y)\|^2 = \|X_n(x)\|^2 \|Y_m(y)\|^2 = \frac{L_x L_y}{4},$$

para $n = 1,2,3, \dots$ y $m = 1,2,3, \dots$

La noción de completitud para funciones propias de una variable se extiende para el caso de funciones propias de dos variables. $\{V_{n,m}(x, y)\}$ es un sistema de funciones propias de dos variables que forma un conjunto completo sobre $[0, L_x] \times [0, L_y]$; es decir, cualquier función suave por partes de dos variables

se puede expandir mediante series convergentes de funciones $V_{n,m}(x, y)$, o en Serie Doble de Senos de Fourier.

Para resolver el problema (4.19), se emplea el método de expansión de funciones propias, que consiste en expandir la solución desconocida $v_2(x, y, t)$ en una serie de funciones propias a partir del problema homogéneo relacionado:

$$\begin{aligned} v_2(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{n,m}(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

La solución desconocida $v_2(x, y, t)$ se expresa con la variable temporal y las variables espaciales de forma separada, siendo $V_{n,m}(x, y) = X_n(x)Y_m(y)$ las funciones propias del problema homogéneo relacionado (4.18). La solución (4.23) dado en forma de serie doble de senos satisface las condiciones de frontera homogéneas del problema (4.19) para cualquier valor de $T_{n,m}(t)$. En particular, se satisface CF1 y CF2 del problema (4.19) por $X_n(x)$; y se satisface CF3 y CF4, por $Y_m(y)$. El objetivo es determinar el valor de $T_{n,m}(t)$ que tal manera que la serie (4.23) satisfaga la EDP y la condición inicial cero del problema (4.19).

Es posible hallar $T_{n,m}(t)$ por sustitución directa de (4.23) en EDP del problema (4.19), asumiendo que la solución $v_2(x, y, t)$ en su forma de series dado en (4.23) se puede diferenciar término a término una vez con respecto a la variable temporal t , y dos veces con respecto a las variables espaciales x e y .

Si se asume que $v_2(x, y, t)$ y $\frac{\partial v_2}{\partial t}$ son continuas, entonces:

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dt} [T_{n,m}(t)] V_{n,m}(x, y), \quad (4.24)$$

Con respecto a x , la serie doble de senos de la función continua $v_2(x, y, t)$ puede diferenciarse término a término con respecto a x , ya que $v_2(0, y, t) = v_2(L_x, y, t) = 0$ por CF1 y CF2. Si se asume que $\frac{\partial v_2}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}$ también son continuas, entonces:

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}(x, y, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{x,n} T_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y). \quad (4.25)$$

Con respecto a y , la serie doble de senos de la función continua $v_2(x, y, t)$ puede diferenciarse término a término, ya que $v_2(x, 0, t) = v_2(x, L_y, t) = 0$ por CF3 y CF4. Si se asume que $\frac{\partial v_2}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}$ también son continuas, entonces:

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}(x, y, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{y,m} T_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y). \quad (4.26)$$

Al sustituir (4.24), (4.25) y (4.26) en la EDP del problema (4.19), se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} [T_{n,m}(t)] + a^2 \lambda_{n,m} T_{n,m}(t) \right] V_{n,m}(x, y) = \tilde{f}(x, y, t), \quad (4.27)$$

donde

$$\lambda_{n,m} = \lambda_{x,n} + \lambda_{y,m} = \left[\left(\frac{n\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y} \right)^2 \right]. \quad (4.28)$$

El lado izquierdo de la ecuación (4.27) representa a la serie doble de senos de Fourier de $\tilde{f}(x, y, t)$. Por la completitud del conjunto ortogonal $\{V_{n,m}(x, y)\}$, se puede expandir la función $\tilde{f}(x, y, t)$ en la región rectangular $(0, L_x) \times (0, L_y)$ tal que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_{n,m}(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{L_y} \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n,m}(t) &= \frac{1}{\|V_{n,m}(x, y)\|^2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \tilde{f}(x, y, t) V_{n,m}(x, y) dy dx \\ &= \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \tilde{f}(x, y, t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{L_y} \right) dy dx. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Comparando las dos expansiones en las ecuaciones (4.27) y (4.29) para la misma función $\tilde{f}(x, y, t)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} [T_{n,m}(t)] + a^2 \lambda_{n,m} T_{n,m}(t) \right] V_{n,m}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y), \quad (4.31)$$

se obtienen ecuaciones diferenciales de primer orden no homogéneas para la función $T_{n,m}(t)$:

$$\frac{d}{dt} [T_{n,m}(t)] + a^2 \lambda_{n,m} T_{n,m}(t) = \tilde{f}_{n,m}(t). \quad (4.32)$$

Para que la solución representada por la serie $v_2(x, y, t)$ dada en la ecuación (4.32) satisfaga la condición inicial de temperatura del problema (4.19), es necesario que los coeficientes dependientes del tiempo $T_{n,m}(t)$ en $t = 0$ satisfagan la condición:

$$T_{n,m}(0) = 0. \quad (4.33)$$

La EDO (4.32) se resuelve utilizando el factor de integración:

$$\mu(t) = e^{a^2 \lambda_{n,m} t}. \quad (4.34)$$

Multiplcamos ambos miembros de (4.32) por el factor de integración definido en (4.34):

$$\begin{aligned} e^{a^2 \lambda_{n,m} t} \cdot \frac{d}{dt} [T_{n,m}(t)] + a^2 \lambda_{n,m} \cdot e^{a^2 \lambda_{n,m} t} \cdot T_{n,m}(t) &= e^{a^2 \lambda_{n,m} t} \cdot \tilde{f}_{n,m}(t) \\ \frac{d}{dt} [e^{a^2 \lambda_{n,m} t} \cdot T_{n,m}(t)] &= e^{a^2 \lambda_{n,m} t} \cdot \tilde{f}_{n,m}(t) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Integrando ambos miembros de la igualdad (4.35) desde 0 a t , se obtiene:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} [e^{a^2 \lambda_{n,m} \tau} \cdot T_{n,m}(\tau)] d\tau = \int_0^t e^{a^2 \lambda_{n,m} \tau} \cdot \tilde{f}_{n,m}(\tau) d\tau,$$

entonces:

$$e^{a^2 \lambda_{n,m} t} \cdot T_{n,m}(t) - T_{n,m}(0) = \int_0^t e^{a^2 \lambda_{n,m} \tau} \cdot \tilde{f}_{n,m}(\tau) d\tau.$$

Resolviendo la ecuación para $T_{n,m}(t)$, y considerando (4.33), se obtiene:

$$T_{n,m}(t) = e^{-a^2 \lambda_{n,m} t} \cdot \int_0^t e^{a^2 \lambda_{n,m} \tau} \cdot \tilde{f}_{n,m}(\tau) d\tau \quad (4.36)$$

$T_{n,m}(t)$ representa el coeficiente dependiente del tiempo para la solución $v_2(x, y, t)$ expresado en una serie doble de senos de Fourier en (4.23). Por tanto, la solución del PVIF (4.16) tiene la forma de (4.17):

$$v(x, y, t) = v_1(x, y, t) + v_2(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [B_{n,m} e^{-a^2 \lambda_{n,m} t} + T_{n,m}(t)] V_{n,m}(x, y), \quad (4.37)$$

donde el coeficiente dependiente del tiempo $T_{n,m}(t)$ se define por (4.36); y el coeficiente $B_{n,m}$, por (4.22). La condición inicial y el término fuente influyen en la solución del PVIF (4.16), que presenta una EDP no homogénea y condiciones de frontera homogéneas. Con esto, finaliza el método de expansión de funciones propias.

En resumen, la solución general del problema (4.1) es:

$$u(x, y, t) = w(x, y, t) + v(x, y, t) \quad (4.38)$$

donde $w(x, y, t)$ se define por (4.4); y $v(x, y, t)$, por (4.37).

APLICACIÓN

Resolver el siguiente problema de valor inicial y de frontera:

$$\text{EDP: } \frac{\partial u}{\partial t} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + 50\pi^2 [\text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) - xy] e^{-\pi^2 t}; \quad \begin{matrix} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1; \end{matrix} t > 0$$

$$\text{CI: } u(x, y, t)|_{t=0} = 50[x + \text{sen}(\pi x)][y + \text{sen}(\pi y)] \quad ; \quad \begin{matrix} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{matrix}$$

$$\text{CF1: } u(x, y, t)|_{x=0} = 0 \quad ; \quad 0 < y < 1; t \geq 0$$

$$\text{CF2: } u(x, y, t)|_{x=2} = 100[y + \text{sen}(\pi y)] e^{-\pi^2 t} \quad ; \quad 0 < y < 1; t \geq 0$$

$$\text{CF3: } u(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad ; \quad 0 < x < 2; t \geq 0$$

$$\text{CF4: } u(x, y, t)|_{y=1} = 50[x + \text{sen}(\pi x)] e^{-\pi^2 t} \quad ; \quad 0 < x < 2; t \geq 0$$

Solución:

Se compara el PVIF a resolver con (4.1) y se identifican a

$$L_x = 2, \quad L_y = 1, \quad a^2 = 1,$$

como los valores de longitud de la placa rectangular en el eje X e Y , y el coeficiente de difusividad térmica, respectivamente; además del término fuente

$$f(x, y, t) = 50\pi^2 [\text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) - xy] e^{-\pi^2 t},$$

la condición inicial,

$$\varphi(x, y) = 50[x + \text{sen}(\pi x)][y + \text{sen}(\pi y)],$$

y las condiciones de frontera:

$$g_1(y, t) = 0, \quad g_2(y, t) = 100[y + \text{sen}(\pi y)] e^{-\pi^2 t},$$

$$g_3(x, t) = 0, \quad g_4(x, t) = 50[x + \text{sen}(\pi x)] e^{-\pi^2 t}.$$

Se verifica que las funciones definidas en las condiciones de frontera del PVIF satisfacen la propiedad de consistencia dado en (4.2), es decir, para todo $t \geq 0$:

$$(x, y, t) = (0, 0, t) \quad : \quad u(0, 0, t) = g_1(0, t) = g_3(0, t) = 0,$$

$$(x, y, t) = (0, 1, t) \quad : \quad u(0, 1, t) = g_1(1, t) = g_4(0, t) = 0,$$

$$(x, y, t) = (2, 0, t) \quad : \quad u(2, 0, t) = g_2(0, t) = g_3(2, t) = 0,$$

$$(x, y, t) = (2, 1, t) \quad : \quad u(2, 1, t) = g_2(1, t) = g_4(2, t) = 100e^{-\pi^2 t}.$$

La solución general puede ser expresado como la suma de dos funciones, por (4.3):

$$u(x, y, t) = w(x, y, t) + v(x, y, t),$$

La función auxiliar $w(x, y, t)$ que satisface las condiciones de frontera del PVIF se construye a partir de (4.4), con:

$$\bar{X}(x) = 1 - \frac{1}{2}x \quad \wedge \quad \bar{\bar{X}}(x) = \frac{1}{2}x,$$

$$\bar{Y}(y) = 1 - y \quad \wedge \quad \bar{\bar{Y}}(y) = y,$$

y

$$\begin{aligned} A(t) &= -g_1(0, t) = -g_3(0, t) = 0, \\ B(t) &= -g_1(1, t) = -g_4(0, t) = 0, \\ C(t) &= -g_2(0, t) = -g_3(2, t) = 0, \\ D(t) &= -g_2(1, t) = -g_4(2, t) = -100e^{-\pi^2 t}, \end{aligned}$$

por (4.5) y (4.6), respectivamente. Reemplazando en (4.4), se obtiene la función auxiliar:

$$w(x, y, t) = 50[xy + x \operatorname{sen}(\pi y) + y \operatorname{sen}(\pi x)]e^{-\pi^2 t},$$

Con la finalidad de formular un nuevo PVIF con respecto a $v(x, y, t)$: Por (4.9) se obtiene el término fuente modificado $\tilde{f}(x, y, t)$. Si

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -50\pi^2[xy + x \operatorname{sen}(\pi y) + y \operatorname{sen}(\pi x)]e^{-\pi^2 t},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -50\pi^2 y \operatorname{sen}(\pi x) e^{-\pi^2 t}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -50\pi^2 x \operatorname{sen}(\pi y) e^{-\pi^2 t};$$

entonces:

$$\tilde{f}(x, y, t) = 50\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y) e^{-\pi^2 t}.$$

Respecto a la condición inicial, por (4.11), si

$$w(x, y, 0) = 50[xy + x \operatorname{sen}(\pi y) + y \operatorname{sen}(\pi x)],$$

entonces:

$$\varphi^*(x, y) = 50 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y);$$

Con la función auxiliar $w(x, y, t)$, se formula un nuevo problema de valor inicial y de frontera como en (4.16), cuya solución desconocida $v(x, y, t)$ satisface una EDP no homogénea y las condiciones de frontera homogéneas.

$$\text{EDP:} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + 50\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y) e^{-\pi^2 t} \quad ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1; \end{array} \quad t > 0$$

$$\text{CI:} \quad v(x, y, t)|_{t=0} = 50 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y) \quad ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{array}$$

$$\text{CF1:} \quad v(x, y, t)|_{x=0} = 0 \quad ; \quad 0 < y < 1; \quad t \geq 0$$

$$\text{CF2:} \quad v(x, y, t)|_{x=2} = 0 \quad ; \quad 0 < y < 1; \quad t \geq 0$$

$$\text{CF3:} \quad v(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad ; \quad 0 < x < 2; \quad t \geq 0$$

$$\text{CF4:} \quad v(x, y, t)|_{y=1} = 0 \quad ; \quad 0 < x < 2; \quad t \geq 0$$

Por (4.17), este problema se resuelve considerando a la solución $v(x, y, t)$ como la suma de dos funciones:

$$v(x, y, t) = v_1(x, y, t) + v_2(x, y, t),$$

La función v_1 es la solución de la ecuación homogénea con la condición inicial diferente de cero. Por (4.18):

$$\text{EDP: } \frac{\partial v_1}{\partial t} = \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right] \quad ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{array}; \quad t > 0$$

$$\text{CI: } v_1(x, y, t)|_{t=0} = 50 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y) \quad ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{array}$$

$$\text{CF1: } v_1(x, y, t)|_{x=0} = 0 \quad ; \quad 0 < y < 1; \quad t \geq 0$$

$$\text{CF2: } v_1(x, y, t)|_{x=2} = 0 \quad ; \quad 0 < y < 1; \quad t \geq 0$$

$$\text{CF3: } v_1(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad ; \quad 0 < x < 2; \quad t \geq 0$$

$$\text{CF4: } v_1(x, y, t)|_{y=1} = 0 \quad ; \quad 0 < x < 2; \quad t \geq 0$$

y la función v_2 es la solución de la ecuación no homogénea con término fuente $\tilde{f}(x, y, t)$ y condición inicial cero, por (4.19):

$$\text{EDP: } \frac{\partial v_2}{\partial t} = \left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right] + 50\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y) e^{-\pi^2 t} \quad ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{array}; \quad t > 0$$

$$\text{CI: } v_2(x, y, t)|_{t=0} = 0 \quad ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{array}$$

$$\text{CF1: } v_2(x, y, t)|_{x=0} = 0 \quad ; \quad 0 < y < 1; \quad t \geq 0$$

$$\text{CF2: } v_2(x, y, t)|_{x=2} = 0 \quad ; \quad 0 < y < 1; \quad t \geq 0$$

$$\text{CF3: } v_2(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad ; \quad 0 < x < 2; \quad t \geq 0$$

$$\text{CF4: } v_2(x, y, t)|_{y=1} = 0 \quad ; \quad 0 < x < 2; \quad t \geq 0$$

La base ortogonal de la solución expresado en series se forma a partir de valores propios y funciones propias de los problemas regulares de Sturm – Liouville:

$$X'' + \lambda_x X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(2) = 0.$$

$$Y'' + \lambda_y Y = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(1) = 0.$$

Los valores propios y funciones propias de cada problema regular de Sturm – Liouville, así como también su norma cuadrática, son respectivamente:

$$\lambda_{x,n} = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2, \quad X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad \|X_n(x)\|^2 = 1,$$

$$\lambda_{y,m} = (m\pi)^2, \quad Y_m(y) = \operatorname{sen}(m\pi y), \quad \|Y_m(y)\|^2 = \frac{1}{2},$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$ y $m = 1, 2, 3, \dots$. En consecuencia, los elementos de la base ortogonal y completa $\{V_{n,m}(x, y)\}$ que genera la solución en forma de serie doble de senos de Fourier definida sobre $[0, 2] \times [0, 1]$ es:

$$V_{n,m}(x, y) = X_n(x)Y_m(y) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\text{sen}(m\pi y),$$

y su norma cuadrática:

$$\|V_{n,m}(x, y)\|^2 = \|X_n(x)\|^2\|Y_m(y)\|^2 = \frac{1}{2},$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$ y $m = 1, 2, 3, \dots$

La solución para $v_1(x, y, t)$ se obtiene por el método de separación de variables. Aplicando las ecuaciones (4.21) y (4.22):

$$v_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} e^{-\lambda_{n,m} t} V_{n,m}(x, y),$$

donde:

$$\begin{aligned} B_{n,m} &= 2 \int_0^2 \int_0^1 [50 \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)] V_{n,m}(x, y) dy dx \\ &= 100 \left(\int_0^2 \text{sen}(\pi x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \right) \left(\int_0^1 \text{sen}(\pi y) \text{sen}(m\pi y) dy \right) \\ &= \begin{cases} 50 & ; n = 2, m = 1 \\ 0 & ; n \neq 2, m \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

y

$$\lambda_{n,m} = \lambda_{x,n} + \lambda_{y,m} = \left[\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 + (m\pi)^2 \right].$$

Reduciendo $v_1(x, y, t)$ expresado en forma de series:

$$v_1(x, y, t) = B_{2,1} e^{-\lambda_{2,1} t} \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) = 50 e^{-2\pi^2 t} \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)$$

Por el problema homogéneo relacionado, la solución $v_2(x, y, t)$ se expande como en (4.23), sobre la región rectangular $[0, 2] \times [0, 1]$.

$$v_2(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y),$$

Para determinar $T_{n,m}(t)$, se aplica la diferenciación término a término de $v_2(x, y, t)$ expresado en forma de series. Por (4.24), (4.25) y (4.26) respectivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_2}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dt} [T_{n,m}(t)] V_{n,m}(x, y), \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 T_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y), \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} -(m\pi)^2 T_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y),\end{aligned}$$

Sustituyendo en la EDP del PVIF correspondiente a $v_2(x, y, t)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} [T_{n,m}(t)] + \lambda_{n,m} T_{n,m}(t) \right] V_{n,m}(x, y) = 50\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y) e^{-\pi^2 t}.$$

Por la completitud del conjunto ortogonal $\{V_{n,m}(x, y)\}$, se expande la función $\tilde{f}(x, y, t)$ en la región rectangular $(0,2) \times (0,1)$. Aplicando las ecuaciones (4.29) y (4.30):

$$\tilde{f}(x, y, t) = 50\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y) e^{-\pi^2 t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y),$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{n,m}(t) &= 2 \int_0^2 \int_0^1 [50\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y) e^{-\pi^2 t}] V_{n,m}(x, y) dy dx \\ &= 100\pi^2 e^{-\pi^2 t} \left(\int_0^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \right) \left(\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi y) \operatorname{sen}(m\pi y) dy \right) \\ &= \begin{cases} 50\pi^2 e^{-\pi^2 t} & ; n = 2, m = 1 \\ 0 & ; n \neq 2, m \neq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Al comparar ambas expansiones:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} [T_{n,m}(t)] + \lambda_{n,m} T_{n,m}(t) \right] V_{n,m}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y),$$

se obtienen ecuaciones diferenciales de primer orden no homogéneas, como en la ecuación (4.32):

$$\frac{d}{dt} [T_{n,m}(t)] + \lambda_{n,m} T_{n,m}(t) = \begin{cases} 50\pi^2 e^{-\pi^2 t} & ; n = 2, m = 1 \\ 0 & ; n \neq 2, m \neq 1 \end{cases}$$

Por la condición inicial cero, los coeficientes $T_{n,m}(t)$ de la serie $v_2(x, y, t)$ en $t = 0$ deben satisfacer la condición:

$$T_{n,m}(0) = 0,$$

por (4.33). El coeficiente dependiente del tiempo para la solución $v_2(x, y, t)$ es, por (4.36):

$$T_{n,m}(t) = e^{-\lambda_{n,m}t} \cdot \int_0^t e^{\lambda_{n,m}\tau} \cdot \tilde{f}_{n,m}(\tau) d\tau$$

para $n = 1,2,3, \dots$ y $m = 1,2,3, \dots$. Sin embargo, $\tilde{f}_{n,m}(\tau) = 0$, excepto para $n = 2$ y $m = 1$. Entonces:

$$T_{n,m}(t) = \begin{cases} T_{2,1}(t) & ; \quad n = 2 \quad , \quad m = 1 \\ 0 & ; \quad n \neq 2 \quad , \quad m \neq 1 \end{cases}$$

Se calcula el coeficiente $T_{2,1}(t)$:

$$T_{2,1}(t) = e^{-2\pi^2 t} \cdot \int_0^t (e^{2\pi^2 \tau}) \cdot (50\pi^2 e^{-\pi^2 \tau}) d\tau = 50e^{-\pi^2 t} - 50e^{-2\pi^2 t},$$

para obtener la solución $v_2(x, y, t)$ del PVIF:

$$v_2(x, y, t) = T_{2,1}(t) \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y) = [50e^{-\pi^2 t} - 50e^{-2\pi^2 t}] \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y),$$

Por lo tanto, la solución para la función $v(x, y, t)$ es:

$$v(x, y, t) = v_1(x, y, t) + v_2(x, y, t) = 50 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y) e^{-\pi^2 t},$$

según (4.37).

Finalmente, la distribución de temperatura en la placa rectangular para el PVIF propuesto se describe por la función:

$$u(x, y, t) = w(x, y, t) + v(x, y, t) = 50[x + \operatorname{sen}(\pi x)][y + \operatorname{sen}(\pi y)]e^{-\pi^2 t}.$$

4.2. POR EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

MÉTODO EXPLÍCITO

El primer paso consiste en la discretización del dominio. En el problema de valor inicial y de frontera (4.1), el dominio de interés consta de una placa rectangular con longitudes L_x y L_y , cuyo valor de temperatura varía de acuerdo a la posición y el tiempo. Las dos variables espaciales x e y representan la posición de la placa rectangular delimitado por el subconjunto $[0, L_x] \times [0, L_y]$ del plano XY ; y la variable temporal t representa el tiempo en $[0, t_{max}] \subset [0, +\infty)$. Tanto los dominios discretizados presentados en la figura 4.1 como en la figura 4.2 se basan en la construcción propuesta por Sequeira y Ramirez (2019).

Con respecto al dominio espacial, se construye una malla sobre la placa rectangular de longitudes L_x y L_y , dividiendo los subconjuntos $[0, L_x]$ y $[0, L_y]$ en M_x y M_y subintervalos, respectivamente, para obtener los tamaños de paso de las longitudes Δx y Δy . En la figura 4.1, cada nodo representado por un punto (x_i, y_j) del plano cartesiano se asocia a un nodo con índice (i, j) , ambos contenidos en el mismo dominio espacial.

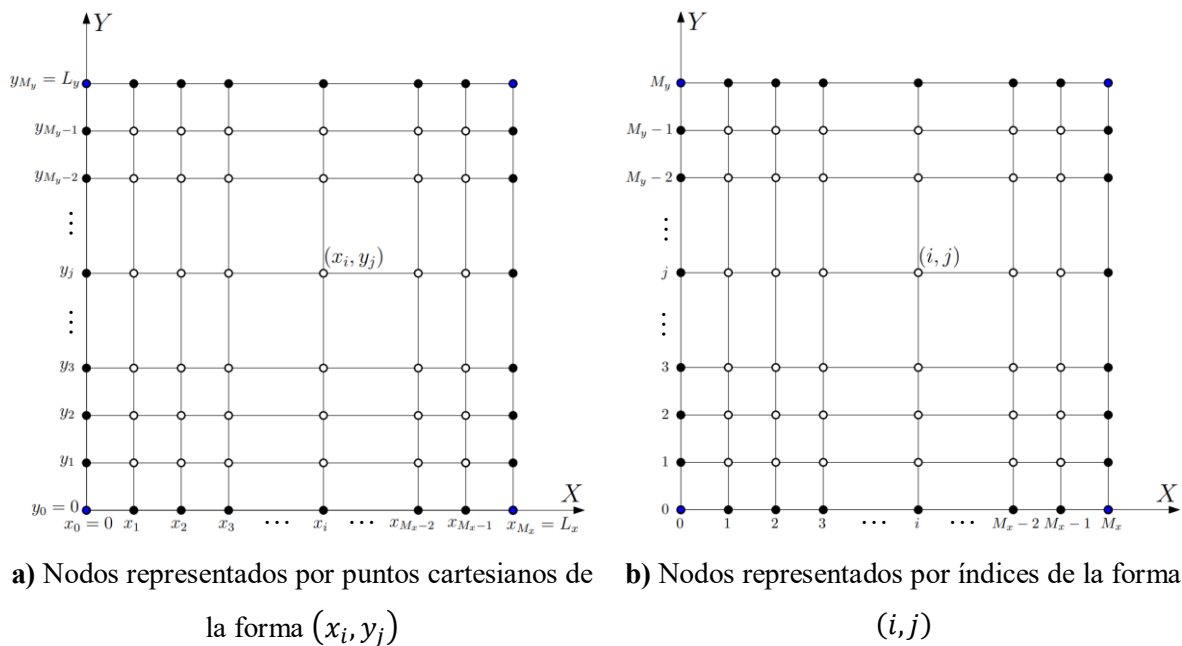


Figura 4.1: Discretización de la placa rectangular de dimensiones L_x y L_y

Fuente: Elaboración propia

Con respecto al dominio temporal, se divide el subconjunto $[0, t_{max}]$ en M_t subintervalos, para obtener el tamaño de paso del tiempo Δt . En resumen, los tamaños de paso espacial y temporal que intervienen en el proceso de discretización dado de manera uniforme se definen de la siguiente manera:

$$\Delta x = \frac{L_x}{M_x}, \quad \Delta y = \frac{L_y}{M_y}, \quad \Delta t = \frac{t_{max}}{M_t}. \quad (4.39)$$

Se definen los nodos con el punto cartesiano (x_i, y_j, t_n) , tal que:

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x, & i &= 0, 1, 2, \dots, M_x; \\ y_j &= j\Delta y, & j &= 0, 1, 2, \dots, M_y; \\ t_n &= n\Delta t, & n &= 0, 1, 2, \dots, M_t. \end{aligned} \quad (4.40)$$

En las figuras 4.1 **a)** y 4.1 **b)**, se muestra una distribución habitual del conjunto de nodos para cada nivel de tiempo $n > 0$, donde los puntos sin relleno representan a los nodos con temperatura desconocida, mientras que los puntos en negrita representan a los nodos con temperatura conocida. Por la intervención de la variable temporal en la discretización del dominio, se construye una malla tridimensional de espacio – tiempo dado en la figura 4.2, donde se visualizan los nodos (x_i, y_j, t_n) representados con los índices (i, j, n) . En cada nodo, se expande la ecuación en diferencias finitas y, mediante un esquema molecular, se vincula a los nodos vecinos que intervienen en la aproximación.

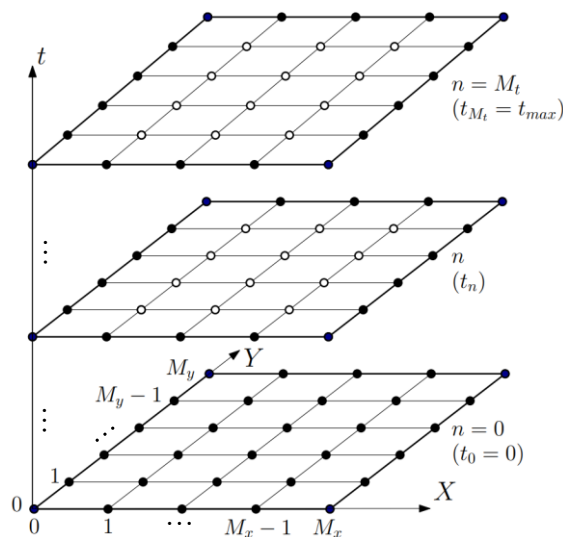


Figura 4.2: Malla de espacio – tiempo relacionado al dominio del PVIF

Fuente: Elaboración propia

Se define $U_{i,j}^n$ como el valor aproximado de la temperatura en el nodo (x_i, y_j, t_n) o (i, j, n) . Ese valor aproximado es desconocido en los puntos interiores de la malla que cubre a la placa rectangular para cualquier nivel de tiempo $n > 0$. Para $n = 0$, los valores de temperatura en el interior de la placa son conocidos por la condición inicial, y para $n \geq 0$, las temperaturas en el contorno de la placa también son conocidas por las condiciones de frontera.

La condición inicial definida en CI del problema (4.1) proporciona los valores de la temperatura en la región interior de la placa rectangular en el tiempo de inicio $t_0 = 0$, es decir, para todos los nodos de la forma $(i, j, n) = (i, j, 0)$:

$$U_{i,j}^0 = u(x_i, y_j, 0) = \varphi(x_i, y_j) = \varphi(i\Delta x, j\Delta y), \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, M_x - 1; \\ j = 1, 2, \dots, M_y - 1. \end{array} \quad (4.41)$$

Las condiciones de frontera definidas en el problema (4.1) para todo $t \geq 0$ proporcionan los valores de temperaturas en el borde de la placa rectangular:

Por CF1, en la frontera $x = 0$, para los nodos $(i, j, n) = (0, j, n)$:

$$U_{0,j}^n = u(0, y_j, t_n) = g_1(y_j, t_n) = g_1(j\Delta y, n\Delta t), \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, M_y - 1; \\ n = 0, 1, 2, \dots, M_t. \end{array} \quad (4.42)$$

Por CF2, en la frontera $x = L_x$, para los nodos $(i, j, n) = (M_x, j, n)$:

$$U_{M_x,j}^n = u(L_x, y_j, t_n) = g_2(y_j, t_n) = g_2(j\Delta y, n\Delta t), \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, M_y - 1; \\ n = 0, 1, 2, \dots, M_t. \end{array} \quad (4.43)$$

Por CF3, en la frontera $y = 0$, para los nodos $(i, j, n) = (i, 0, n)$:

$$U_{i,0}^n = u(x_i, 0, t_n) = g_3(x_i, t_n) = g_3(i\Delta x, n\Delta t), \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, M_x - 1; \\ n = 0, 1, 2, \dots, M_t. \end{array} \quad (4.44)$$

Por CF4, en la frontera $y = L_y$, para los nodos $(i, j, n) = (i, M_y, n)$:

$$U_{i,M_y}^n = u(x_i, L_y, t_n) = g_4(x_i, t_n) = g_4(i\Delta x, n\Delta t), \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, M_x - 1; \\ n = 0, 1, 2, \dots, M_t. \end{array} \quad (4.45)$$

Las condiciones de frontera, por la propiedad de consistencia establecida en (4.2), definen valores únicos de temperatura en las esquinas de la placa rectangular para $t_n \geq 0$:

En el nodo $(i, j, n) = (0, 0, n)$,

$$U_{0,0}^n = u(0, 0, t_n) = g_1(0, t_n) = g_3(0, t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, M_t \quad (4.46)$$

En el nodo $(i, j, n) = (M_x, 0, n)$,

$$U_{M_x,0}^n = u(L_x, 0, t_n) = g_2(0, t_n) = g_3(L_x, t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, M_t \quad (4.47)$$

En el nodo $(i, j, n) = (0, M_y, n)$,

$$U_{0,M_y}^n = u(0, L_y, t_n) = g_1(L_y, t_n) = g_4(0, t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, M_t \quad (4.48)$$

En el nodo $(i, j, n) = (M_x, M_y, n)$,

$$U_{M_x,M_y}^n = u(L_x, L_y, t_n) = g_2(L_y, t_n) = g_4(L_x, t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, M_t \quad (4.49)$$

El término fuente proporciona los valores de temperatura externa en el interior de la placa rectangular para $t_n \geq 0$:

$$f_{i,j}^n = f(x_i, y_j, t_n) = f(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t), \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, M_x - 1; \\ j = 1, 2, \dots, M_y - 1; \\ n = 0, 1, \dots, M_t \end{array} \quad (4.50)$$

El segundo paso consiste en aproximar en cada nodo (i, j, n) cada derivada parcial de la solución en la EDP del problema (4.1), donde $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$; $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$; y $n = 0, 1, 2, \dots, M_t - 1$, es decir, en los nodos ubicados en la región interior de la placa:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{i,j}^n = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j}^n + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j}^n \right] + f_{i,j}^n, \quad \begin{array}{l} 0 < x_i < L_x \\ 0 < y_j < L_y, \quad t_n > 0 \end{array} \quad (4.51)$$

Para el caso de las segundas derivadas parciales de las funciones de temperatura con respecto a x e y , ambas se aproximan en el nodo (i, j, n) o en las coordenadas (x_i, y_j, t_n) usando diferencias finitas centrales.

Para la segunda derivada parcial con respecto a x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x - \Delta x, y, t)}{(\Delta x)^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{12} - O[(\Delta x)^4].$$

Evaluando la expresión en el punto $(x, y, t) = (x_i, y_j, t_n)$, o en el nodo (i, j, n) :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} - \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_{i,j}^n \frac{(\Delta x)^2}{12} - O[(\Delta x)^4] \quad (4.52)$$

De manera análoga, con respecto a y :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(x, y + \Delta y, t) - 2u(x, y, t) + u(x, y - \Delta y, t)}{(\Delta y)^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \cdot \frac{(\Delta y)^2}{12} - O[(\Delta y)^4].$$

Al evaluar la expresión en $(x, y, t) = (x_i, y_j, t_n)$, o en el nodo (i, j, n) :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} - \left. \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right|_{i,j}^n \frac{(\Delta y)^2}{12} - O[(\Delta y)^4]. \quad (4.53)$$

La primera derivada parcial de la función de temperatura con respecto a t se aproxima usando diferencias finitas hacia adelante.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t)}{\Delta t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\Delta t}{2} - O[(\Delta t)^2]$$

Al evaluar en $(x, y, t) = (x_i, y_j, t_n)$, o en el nodo (i, j, n) :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{i,j}^n \frac{\Delta t}{2} - O[(\Delta t)^2] \quad (4.54)$$

Sustituyendo las expresiones (4.52) – (4.54) en (4.51):

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = a^2 \left[\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] + f_{i,j}^n + TE_{i,j}^n, \quad (4.55)$$

donde el error de truncamiento local $TE_{i,j}^n = TE(x_i, y_j, t_n)$ es:

$$TE_{i,j}^n = -a^2 \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_{i,j}^n \frac{(\Delta x)^2}{12} - a^2 \left. \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right|_{i,j}^n \frac{(\Delta y)^2}{12} + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{i,j}^n \frac{\Delta t}{2} + O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^4, (\Delta y)^4]. \quad (4.56)$$

La discretización es de primer orden con respecto al tiempo, y de segundo orden en el espacio, cuando se expresa la ecuación en diferencias finitas (4.55) por el método explícito:

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} = a^2 \left[\frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] + f_{i,j}^n. \quad (4.57)$$

Es posible obtener el valor de temperatura del nivel de tiempo $n + 1$ en cada nodo de la placa rectangular, al igual que en el caso de la EDP del calor unidimensional aproximado por el método explícito de diferencias finitas, ya que, además del término fuente, de los seis valores de temperatura

involucrados en la ecuación (4.57), se conocen cinco de ellas (a excepción de $U_{i,j}^{n+1}$), que representan a las temperaturas del nivel de tiempo anterior n . Entonces:

$$U_{i,j}^{n+1} = r_x U_{i-1,j}^n + r_y U_{i,j-1}^n + \delta U_{i,j}^n + r_y U_{i,j+1}^n + r_x U_{i+1,j}^n + \Delta t (f_{i,j}^n), \quad (4.58)$$

donde:

$$r_x = \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad r_y = \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta y)^2}, \quad \delta = 1 - 2r_x - 2r_y. \quad (4.59)$$

La figura 4.3 ilustra la molécula de diferencias finitas en forma explícita, formada a partir del punto de expansión de la ecuación (4.58) que es el nodo (i, j, n) .

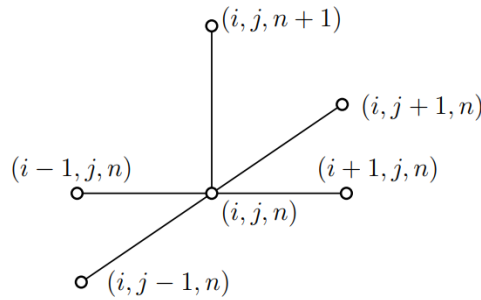


Figura 4.3: Molécula de diferencias finitas por el método explícito

Fuente: Elaboración Propia

El error de truncamiento del esquema de diferencias finitas es de orden $O[\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$, de modo que (4.58) es consistente con la ecuación del calor bidimensional del problema (4.1) (Zauderer, 2006).

Con el criterio de estabilidad de Von Neumann, se determina que el esquema explícito de diferencias finitas es condicionalmente estable, con la condición de estabilidad:

$$r_x + r_y = \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (4.60)$$

(Zauderer, 2006).

De la condición de estabilidad (4.60), se establece una restricción para el tamaño de paso del tiempo:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2a^2} \left[\frac{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right] \quad (4.61)$$

ALGORITMO 4.1: IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL MÉTODO EXPLÍCITO

En el texto de Dominguez y Nieves (2014), se encuentra el algoritmo 8.1, que trata sobre el método explícito aplicado al problema de valor inicial y de frontera relacionado a una ecuación del calor unidimensional homogénea, con condiciones de frontera no homogéneas. El presente algoritmo es una adaptación del algoritmo 8.1 al caso bidimensional.

ENTRADA:

a^2 : Coeficiente de difusividad térmica

L_x : Longitud de la placa rectangular en el eje X

L_y : Longitud de la placa rectangular en el Eje Y

t_{max} : Tiempo máximo en el eje t

$\varphi(x, y)$: Condición inicial, función de temperatura en el interior de la placa para $t = 0$

$g_1(y, t)$: Condición de frontera 1, función de temperatura en la frontera $x = 0$ de la placa

$g_2(y, t)$: Condición de frontera 2, función de temperatura en la frontera $x = L_x$ de la placa

$g_3(x, t)$: Condición de frontera 3, función de temperatura en la frontera $y = 0$ de la placa

$g_4(x, t)$: Condición de frontera 4, función de temperatura en la frontera $y = L_y$ de la placa

$f(x, y, t)$: Término fuente, función de temperatura adicional en el interior de la placa

M_x : Cantidad de subintervalos en la longitud del eje X de la placa rectangular

M_y : Cantidad de subintervalos en la longitud del Eje Y de la placa rectangular

M_t : Cantidad de subintervalos en la longitud del Eje t de la placa rectangular

SALIDA:

$U_{i,j}^n$: Valores de las temperaturas en la placa rectangular para cada tiempo t_n , por el método explícito.

PROCESO:

PASO 0: Si $g_1(0, t) = g_3(0, t)$ y $g_1(L_y, t) = g_4(0, t)$ y $g_2(0, t) = g_3(L_x, t)$ y $g_2(L_y, t) = g_4(L_x, t)$, entonces continuar con el **PASO 1**, caso contrario, imprimir “CONDICIONES DE FRONTERA INCONSISTENTES”.

PASO 1: Hacer $\Delta x = L_x/M_x$

PASO 2: Hacer $\Delta y = L_y/M_y$

PASO 3: Hacer $\Delta t = t_{max}/M_t$

PASO 4: Hacer $r_x = (a^2\Delta t)/(\Delta x)^2$

PASO 5: Hacer $r_y = (a^2\Delta t)/(\Delta y)^2$

- PASO 6:** Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$,
 Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,
 Hacer $U_{i,j} = \varphi(i * \Delta x, j * \Delta y)$.
- PASO 7:** Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,
 Hacer $U_{0,j} = g_1(j * \Delta y, 0)$
 Hacer $U_{M_x,j} = g_2(j * \Delta y, 0)$
- PASO 8:** Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$,
 Hacer $U_{i,0} = g_3(i * \Delta x, 0)$
 Hacer $U_{i,M_y} = g_4(i * \Delta x, 0)$
- PASO 9:** Hacer $U_{0,0} = g_1(0,0)$,
 Hacer $U_{M_x,0} = g_2(0,0)$,
 Hacer $U_{0,M_y} = g_1(L_y, 0)$,
 Hacer $U_{M_x,M_y} = g_2(L_y, 0)$.
- PASO 10:** Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$,
 Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,
 Imprimir $U_{i,j}$
- PASO 11:** Hacer $\delta = 1 - 2r_x - 2r_y$
- PASO 12:** Hacer $n = 1$
- PASO 13:** Mientras $n \leq M_t$, repetir los pasos 14 al 27
- PASO 14:** Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$,
 Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,
 Hacer $f_{i,j} = f(i * \Delta x, j * \Delta y, (n - 1) * \Delta t)$.
- PASO 15:** Hacer $i = 1$
- PASO 16:** Mientras $i \leq M_x - 1$, repetir los pasos 17 al 21.
- PASO 17:** Hacer $j = 1$
- PASO 18:** Mientras $j \leq M_y - 1$, repetir los pasos 19 y 20.
- PASO 19:** Hacer
- $$\bar{U}_{i,j} = r_x U_{i-1,j} + r_y U_{i,j-1} + \delta U_{i,j} + r_y U_{i,j+1} + r_x U_{i+1,j} + \Delta t f_{i,j}$$
- PASO 20:** Hacer $j = j + 1$
- PASO 21:** Hacer $i = i + 1$
- PASO 22:** Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$,
 Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,
 Hacer $U_{i,j} = \bar{U}_{i,j}$

- PASO 23:** Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,
Hacer $U_{0,j} = g_1(j * \Delta y, n * \Delta t)$
Hacer $U_{M_x,j} = g_2(j * \Delta y, n * \Delta t)$
- PASO 24:** Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$,
Hacer $U_{i,0} = g_3(i * \Delta x, n * \Delta t)$
Hacer $U_{i,M_y} = g_4(i * \Delta x, n * \Delta t)$
- PASO 25:** Hacer $U_{0,0} = g_1(0, n * \Delta t)$,
Hacer $U_{M_x,0} = g_2(0, n * \Delta t)$,
Hacer $U_{0,M_y} = g_1(L_y, n * \Delta t)$,
Hacer $U_{M_x,M_y} = g_2(L_y, n * \Delta t)$.
- PASO 26:** Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$,
Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,
Imprimir $U_{i,j}$
- PASO 27:** Hacer $n = n + 1$

APLICACIÓN

Resolver el siguiente problema de valor inicial y de frontera:

$$\text{EDP: } \frac{\partial u}{\partial t} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + 50\pi^2 [\text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) - xy] e^{-\pi^2 t}; \quad \begin{matrix} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{matrix}; \quad t > 0$$

$$\text{CI: } u(x, y, t)|_{t=0} = 50[x + \text{sen}(\pi x)][y + \text{sen}(\pi y)] \quad ; \quad \begin{matrix} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{matrix}$$

$$\text{CF1: } u(x, y, t)|_{x=0} = 0 \quad ; \quad 0 < y < 1; \quad t \geq 0$$

$$\text{CF2: } u(x, y, t)|_{x=2} = 100[y + \text{sen}(\pi y)] e^{-\pi^2 t} \quad ; \quad 0 < y < 1; \quad t \geq 0$$

$$\text{CF3: } u(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad ; \quad 0 < x < 2; \quad t \geq 0$$

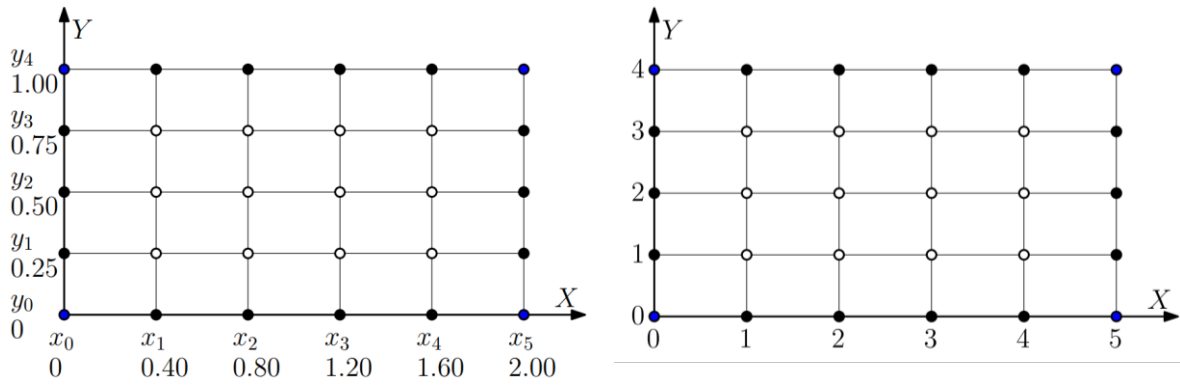
$$\text{CF4: } u(x, y, t)|_{y=1} = 50[x + \text{sen}(\pi x)] e^{-\pi^2 t} \quad ; \quad 0 < x < 2; \quad t \geq 0$$

Solución:

Se construye una malla en el dominio espacial, dividiendo cada longitud de la placa rectangular $L_x = 2$ y $L_y = 1$ en $M_x = 5$ y $M_y = 4$ subintervalos, respectivamente. La discretización resultante del dominio espacial se visualiza en la figura 4.4.

Con respecto a la variable temporal, considerando que $t_{max} = 1$ hora, se divide el dominio $[0,1]$ en $M_t = 100$ subintervalos, definiendo así el tamaño de paso del tiempo. Por (4.39):

$$\Delta x = 0.40, \quad \Delta y = 0.25, \quad \Delta t = 0.01.$$



a) Nodos representados por puntos cartesianos

b) Nodos representados por índices

Figura 4.4: Discretización de la placa rectangular de dimensiones $L_x = 2$ y $L_y = 1$

Fuente: Elaboración propia

Se definen los nodos por las coordenadas (x_i, y_j, t_n) , relacionados con los índices (i, j, n) , donde cada componente se define a partir del tamaño de cada subintervalo. Por (4.40):

$$\begin{aligned}
 x_i &= i\Delta x \quad , \quad \forall i = 0,1,2,3,4,5; \\
 y_j &= j\Delta y \quad , \quad \forall j = 0,1,2,3,4; \\
 t_n &= n\Delta t \quad , \quad \forall n = 0,1,2, \dots, 100.
 \end{aligned}$$

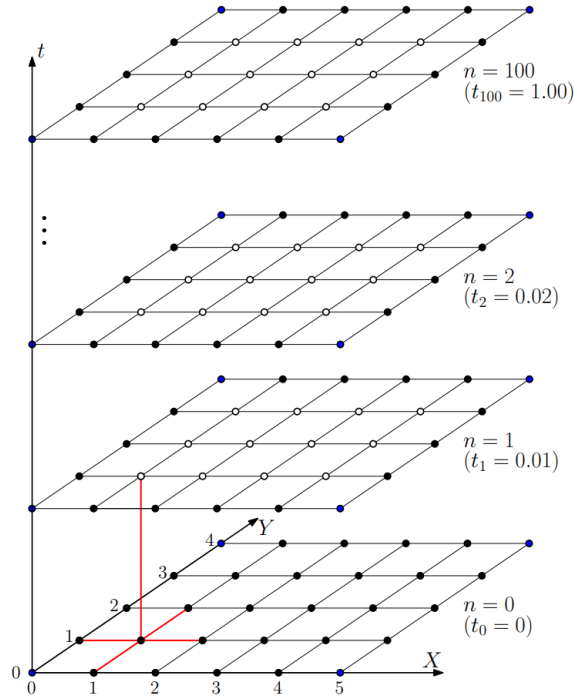


Figura 4.5: Esquema molecular del método explícito en la malla de espacio – tiempo.

Fuente: Elaboración propia

Los nodos (i, j, n) de la malla de espacio – tiempo representan al punto discretizado (x_i, y_j, t_n) , y temperatura aproximada es $U_{i,j}^n$. Por ejemplo, el nodo de coordenadas $(3,2,1)$ representa al punto (x_3, y_2, t_1) , es decir, a la posición $x_3 = 1.20$ metros (m) e $y_2 = 0.50$ m. de la placa rectangular discretizada en el tiempo $t_1 = 0.01$ horas, y su temperatura aproximada es $U_{3,2}^1$, mientras que el nodo $(1,3,2)$ representa al punto (x_1, y_3, t_2) , esto es, a la posición $x_1 = 0.40$ m. e $y_3 = 0.75$ m. en el tiempo $t_2 = 0.02$ horas, y su temperatura aproximada es $U_{1,3}^2$. Existen nodos, cuyo valor de temperatura es conocido a partir de la condición inicial y las condiciones de frontera. Toda la información con respecto a la posición de cada nodo se resume en la malla tridimensional de espacio – tiempo de la figura 4.5.

Por (4.41) – (4.50), se describen los valores conocidos de temperatura según la condición inicial, las condiciones de frontera y el término fuente.

Por la condición inicial definida en CI, en $t = 0$, para todos los nodos de la forma $(i, j, n) = (i, j, 0)$:

$$U_{i,j}^0 = \varphi(x_i, y_j) = 50[x_i + \text{sen}(\pi x_i)][y_j + \text{sen}(\pi y_j)], \quad \begin{array}{l} i = 1,2,3,4; \\ j = 1,2,3. \end{array}$$

En las condiciones de frontera:

Por CF1, en $x = 0$, para los nodos $(i, j, n) = (0, j, n)$:

$$U_{0,j}^n = g_1(x_j, t_n) = 0, \quad \begin{array}{l} j = 1,2,3; \\ n = 0,1,2, \dots, 100. \end{array}$$

Por CF2, en $x = 2$, para los nodos $(i, j, n) = (5, j, n)$:

$$U_{5,j}^n = g_2(y_j, t_n) = 100[y_j + \text{sen}(\pi y_j)]e^{-\pi^2 t_n}, \quad \begin{array}{l} j = 1,2,3; \\ n = 0,1,2, \dots, 100. \end{array}$$

Por CF3, en $y = 0$, para los nodos $(i, j, n) = (i, 0, n)$:

$$U_{i,0}^n = g_3(x_i, t_n) = 0, \quad \begin{array}{l} i = 1,2,3,4; \\ n = 0,1,2, \dots, 100. \end{array}$$

Por CF4, en $y = 1$, para los nodos $(i, j, n) = (i, 4, n)$:

$$U_{i,4}^n = g_4(x_i, t_n) = 50[x_i + \text{sen}(\pi x_i)]e^{-\pi^2 t_n}, \quad \begin{array}{l} i = 1,2,3,4; \\ n = 0,1,2, \dots, 100. \end{array}$$

El PVIF a resolver es consistente con respecto a las condiciones de frontera. En las esquinas de la placa rectangular, se definen los valores de temperatura para $t_n \geq 0$:

En el nodo $(i, j, n) = (0,0, n)$:

$$U_{0,0}^n = g_1(0, t_n) = g_3(0, t_n) = 0, \quad n = 0,1,2, \dots, 100.$$

En el nodo $(i, j, n) = (5,0, n)$:

$$U_{5,0}^n = g_2(0, t_n) = g_3(2, t_n) = 0, \quad n = 0,1,2, \dots, 100.$$

En el nodo $(i, j, n) = (0,4, n)$:

$$U_{0,4}^n = g_1(1, t_n) = g_4(0, t_n) = 0, \quad n = 0,1,2, \dots, 100.$$

En el nodo $(i, j, n) = (5, 4, n)$:

$$U_{5,4}^n = g_2(1, t_n) = g_4(2, t_n) = 100e^{-\pi^2 t_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 100.$$

Con respecto al término fuente:

$$f_{i,j}^n = f(x_i, y_j, t_n) = 50\pi^2 [\text{sen}(\pi x_i) \text{sen}(\pi y_j) - x_i y_j] e^{-\pi^2 t_n}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4; \\ j = 1, 2, 3; \\ n = 0, 1, 2, \dots, 100. \end{array}$$

NIVEL 0:

Por la condición inicial y las condiciones de frontera del PVIF a resolver en el nivel de tiempo $n = 0$, la temperatura de la placa rectangular se distribuye del siguiente modo:

Tabla 4.1: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 0$

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_0 = 0.00$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	67.552826	69.389263	30.610737	32.447174	100.00000
$y_3 = 0.75$	0	98.431681	101.10757	44.603113	47.278998	145.71068
$y_2 = 0.50$	0	101.32924	104.08389	45.916106	48.670761	150.00000
$y_1 = 0.25$	0	64.655268	66.412934	29.297744	31.055410	95.710678
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

El término fuente en el nivel $n = 0$ también influye en el cálculo de las temperaturas para el siguiente nivel $n = 1$:

Tabla 4.2: Distribución del término fuente en la placa, nivel $n = 0$

Distribución del término fuente $f_{i,j}^n$ en el tiempo $t_0 = 0.00$ horas						
$y_4 = 1.00$						
$y_3 = 0.75$		183.82065	-90.98446	-649.2359	-924.0410	
$y_2 = 0.50$		370.63153	92.668308	-586.1485	-864.1118	
$y_1 = 0.25$		282.51669	106.40763	-353.1477	-529.2568	
$y_0 = 0.00$						
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Se aproxima la EDP del PVIF en cada nodo (i, j, n) , empezando por la primera columna interior de nodos de la malla dada en la figura 4.4, es decir, para $i = 1$ y $j = 1, 2, 3$:

En el nodo $(1, 1, 0)$ se aproxima la EDP en diferencias finitas y se obtiene una ecuación como en (4.57):

$$\frac{U_{1,1}^1 - U_{1,1}^0}{\Delta t} = a^2 \left[\frac{U_{2,1}^0 - 2U_{1,1}^0 + U_{0,1}^0}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{1,2}^0 - 2U_{1,1}^0 + U_{1,0}^0}{(\Delta y)^2} \right] + f_{1,1}^0.$$

Los nodos involucrados en esta ecuación se encuentran enlazados en la Figura 4.5, formando un esquema molecular. De todos ellos, solo la temperatura $U_{1,1}^1$ correspondiente al nodo $(1, 1, 1)$ es desconocida. Las temperaturas $U_{0,1}^0$ y $U_{1,0}^0$ son conocidas por las condiciones de frontera, y $f_{1,1}^0$, por el término fuente. Las demás temperaturas, $U_{1,1}^0$, $U_{1,2}^0$ y $U_{2,1}^0$ se encuentran descritas por la condición inicial.

Al despejar $U_{1,1}^1$ se forma una ecuación como en (4.58):

$$U_{1,1}^1 = r_x U_{0,1}^0 + r_y U_{1,0}^0 + \delta U_{1,1}^0 + r_y U_{1,2}^0 + r_x U_{2,1}^0 + \Delta t * f_{1,1}^0,$$

donde:

$$r_x = \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} = 0.0625, \quad r_y = \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta y)^2} = 0.16, \quad \delta = 1 - 2r_x - 2r_y = 0.555,$$

por (4.59). Al sustituir los valores conocidos, según Tabla 4.1 y 4.2:

$$\begin{aligned} U_{1,1}^1 &= (0.0625)(0) + (0.16)(0) + (0.555)(64.655268) + (0.16)(101.32924) \\ &\quad + (0.0625)(66.412934) + (0.01)(282.51669) \\ U_{1,1}^1 &= 59.072327 \end{aligned}$$

Al aproximar la EDP en el nodo $(i, j, n) = (1, 2, 0)$ mediante la ecuación (4.57), se obtiene:

$$\frac{U_{1,2}^1 - U_{1,2}^0}{\Delta t} = a^2 \left[\frac{U_{2,2}^0 - 2U_{1,2}^0 + U_{0,2}^0}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{1,3}^0 - 2U_{1,2}^0 + U_{1,1}^0}{(\Delta y)^2} \right] + f_{1,2}^0$$

En la última ecuación, se desconoce la temperatura $U_{1,2}^1$, y el resto de temperaturas son conocidas por el término fuente ($f_{1,2}^0$), la condición inicial ($U_{1,1}^0, U_{1,2}^0, U_{1,3}^0$ y $U_{2,2}^0$), y por la condición de frontera ($U_{0,2}^0$).

Despejando $U_{1,2}^1$ se forma una ecuación como en (4.58):

$$U_{1,2}^1 = r_x U_{0,2}^0 + r_y U_{1,1}^0 + \delta U_{1,2}^0 + r_y U_{1,3}^0 + r_x U_{2,2}^0 + \Delta t * f_{1,2}^0$$

Al sustituir los valores conocidos, según tabla 4.1 y 4.2:

$$\begin{aligned} U_{1,2}^1 &= (0.0625)(0) + (0.16)(64.655268) + (0.555)(101.32924) + (0.16)(98.431681) \\ &\quad + (0.0625)(104.08389) + (0.01)(370.63153) \\ U_{1,2}^1 &= 92.543198 \end{aligned}$$

Al aproximar la EDP en el nodo $(i, j, n) = (1, 3, 0)$ mediante la ecuación (4.57) se obtiene:

$$\frac{U_{1,3}^1 - U_{1,3}^0}{\Delta t} = a^2 \left[\frac{U_{2,3}^0 - 2U_{1,3}^0 + U_{0,3}^0}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{1,4}^0 - 2U_{1,3}^0 + U_{1,2}^0}{(\Delta y)^2} \right] + f_{1,3}^0$$

La temperatura $U_{1,3}^1$ se desconoce; sin embargo, se conoce el valor del término fuente $f_{1,3}^0$, la temperatura $U_{0,3}^0$ por condiciones de frontera, y $U_{1,2}^0, U_{1,3}^0, U_{1,4}^0$ y $U_{2,3}^0$ por la condición inicial. Por lo tanto, al despejar $U_{1,3}^1$ se obtiene una ecuación como en (4.58):

$$U_{1,3}^1 = r_x U_{0,3}^0 + r_y U_{1,2}^0 + \delta U_{1,3}^0 + r_y U_{1,4}^0 + r_x U_{2,3}^0 + \Delta t * f_{1,3}^0$$

Al sustituir, los valores conocidos, según tabla 4.1 y 4.2:

$$\begin{aligned} U_{1,3}^1 &= (0.0625)(0) + (0.16)(101.32924) + (0.555)(98.431681) + (0.16)(67.552826) \\ &\quad + (0.0625)(101.10757) + (0.01)(183.82065) \\ U_{1,3}^1 &= 89.808142 \end{aligned}$$

De esa manera, se han obtenido las temperaturas aproximadas para el nivel de tiempo $n = 1$ en los tres nodos de la primera columna interior de la malla, en la posición fija $x_1 = 0.40$ m. y a un tiempo de 0.01 horas. El procedimiento se repite para cada nodo de las columnas posteriores. Se obtiene el valor aproximado de temperatura en el siguiente nivel de tiempo utilizando directamente la ecuación (4.58), y sustituyendo los valores conocidos por condición inicial, condiciones de frontera y término fuente, según tabla 4.1 y 4.2.

En la segunda columna interior de nodos de la malla, es decir, para $i = 2$ y $j = 1,2,3$:

Se aproxima la EDP en el nodo $(2,1,0)$ por el método explícito, entonces:

$$U_{2,1}^1 = r_x U_{1,1}^0 + r_y U_{2,0}^0 + \delta U_{2,1}^0 + r_y U_{2,2}^0 + r_x U_{3,1}^0 + \Delta t * f_{2,1}^0$$

$$U_{2,1}^1 = (0.0625)(64.655268) + (0.16)(0) + (0.555)(66.412934) + (0.16)(104.08389) + (0.0625)(29.297744) + (0.01)(106.40763)$$

$$U_{2,1}^1 = 60.448741$$

Se aproxima la EDP en el nodo $(2,2,0)$, entonces:

$$U_{2,2}^1 = r_x U_{1,2}^0 + r_y U_{2,1}^0 + \delta U_{2,2}^0 + r_y U_{2,3}^0 + r_x U_{3,2}^0 + \Delta t * f_{2,2}^0$$

$$U_{2,2}^1 = (0.0625)(101.32924) + (0.16)(66.412934) + (0.555)(104.08389) + (0.16)(101.10757) + (0.0625)(45.916106) + (0.01)(92.668308)$$

$$U_{2,2}^1 = 94.699358$$

En el nodo $(2,3,0)$:

$$U_{2,3}^1 = r_x U_{1,3}^0 + r_y U_{2,2}^0 + \delta U_{2,3}^0 + r_y U_{2,4}^0 + r_x U_{3,3}^0 + \Delta t * f_{2,3}^0$$

$$U_{2,3}^1 = (0.0625)(98.431681) + (0.16)(104.08389) + (0.555)(101.10757) + (0.16)(69.389263) + (0.0625)(44.603113) + (0.01)(-90.98446)$$

$$U_{2,3}^1 = 91.900234$$

De esa manera, se han obtenido las temperaturas para el nivel de tiempo $n = 1$ en los tres nodos de la segunda columna interior de la malla, en la posición fija $x_2 = 0.80$ m. y a un tiempo de $t_1 = 0.01$ horas. Y así, sucesivamente, se obtienen las temperaturas en la tercera y cuarta columna interior de la malla, hasta encontrar las temperaturas en los doce puntos seleccionados de la placa rectangular al transcurrir $t_1 = 0.01$ horas. La tabla 4.3 muestra los valores aproximados de temperatura de cada nodo ubicado en el interior de la placa, en el tiempo $t_1 = 0.01$ horas.

Tabla 4.3: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 1$, método explícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_1 = 0.01$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	61.204080	62.867925	27.733881	29.397726	90.601806
$y_3 = 0.75$	0	89.808142	91.900234	39.780824	41.872915	132.01651
$y_2 = 0.50$	0	92.543198	94.699358	40.993257	43.149417	135.90271
$y_1 = 0.25$	0	59.072327	60.448741	26.167119	27.543533	86.715603
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

NIVEL 1:

Para calcular las temperaturas de cada nodo transcurrido el tiempo $t_2 = 0.02$ horas, se requiere de los valores de temperaturas calculadas en el nivel $n = 1$, es decir, en el tiempo $t_1 = 0.01$ horas, dado por la tabla 4.3. Además, se requiere del término fuente en el nivel $n = 1$, dado por la tabla 4.4.

Tabla 4.4: Distribución del término fuente en la placa, nivel $n = 1$.

Distribución del término fuente $f_{i,j}^n$ en el tiempo $t_1 = 0.01$ horas						
$y_4 = 1.00$						
$y_3 = 0.75$		166.54483	-82.43356	-588.2194	-837.1978	
$y_2 = 0.50$		335.79886	83.959160	-531.0612	-782.9009	
$y_1 = 0.25$		255.96522	96.407233	-319.9582	-479.5162	
$y_0 = 0.00$						
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Se utiliza directamente la ecuación (4.58) en cada nodo, sustituyendo los valores conocidos según tabla 4.3 y 4.4.

En el nodo (1,1,1):

$$U_{1,1}^2 = r_x U_{0,1}^1 + r_y U_{1,0}^1 + \delta U_{1,1}^1 + r_y U_{1,2}^1 + r_x U_{2,1}^1 + \Delta t * f_{1,1}^1$$

$$U_{1,1}^2 = 53.929752$$

En el nodo (1,2,1):

$$U_{1,2}^2 = r_x U_{0,2}^1 + r_y U_{1,1}^1 + \delta U_{1,2}^1 + r_y U_{1,3}^1 + r_x U_{2,2}^1 + \Delta t * f_{1,2}^1$$

$$U_{1,2}^2 = 84.459048$$

En el nodo (1,3,1):

$$U_{1,3}^2 = r_x U_{0,3}^1 + r_y U_{1,2}^1 + \delta U_{1,3}^1 + r_y U_{1,4}^1 + r_x U_{2,3}^1 + \Delta t * f_{1,3}^1$$

$$U_{1,3}^2 = 81.852296$$

De esa manera, se han obtenido las temperaturas aproximadas en los tres nodos de la primera columna interior de la malla, en la posición fija $x_1 = 0.40$ y a un tiempo de $t_2 = 0.02$ horas.

En el nodo (2,1,1):

$$U_{2,1}^2 = r_x U_{1,1}^1 + r_y U_{2,0}^1 + \delta U_{2,1}^1 + r_y U_{2,2}^1 + r_x U_{3,1}^1 + \Delta t * f_{2,1}^1$$

$$U_{2,1}^2 = 54.992486$$

En el nodo (2,2,1):

$$U_{2,2}^2 = r_x U_{1,2}^1 + r_y U_{2,1}^1 + \delta U_{2,2}^1 + r_y U_{2,3}^1 + r_x U_{3,2}^1 + \Delta t * f_{2,2}^1$$

$$U_{2,2}^2 = 86.119600$$

En el nodo (2,3,1):

$$U_{2,3}^2 = r_x U_{1,3}^1 + r_y U_{2,2}^1 + \delta U_{2,3}^1 + r_y U_{2,4}^1 + r_x U_{3,3}^1 + \Delta t * f_{2,3}^1$$

$$U_{2,3}^2 = 83.49037$$

De esa manera, se han obtenido las temperaturas aproximadas en los tres nodos de la segunda columna de la malla, en la posición fija $x_2 = 0.80$ y a un tiempo de $t_2 = 0.02$ horas; y al proceder análogamente en la tercera y cuarta columna interior, se obtienen las temperaturas en los doce puntos seleccionados de la placa rectangular al transcurrir $t_2 = 0.02$ horas. La tabla 4.5 muestra los valores aproximados de temperatura de cada nodo ubicado en el interior de la placa, en el tiempo $t_2 = 0.02$ horas.

Tabla 4.5: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 2$, método explícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_2 = 0.02$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	55.452001	56.959475	25.127397	26.634870	82.086872
$y_3 = 0.75$	0	81.852296	83.490370	35.533270	37.212366	119.60934
$y_2 = 0.50$	0	84.459048	86.119600	36.607865	38.281547	123.13031
$y_1 = 0.25$	0	53.929752	54.992486	23.381607	24.450575	78.565902
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración Propia y Wolfram Mathematica Versión 10.4

Este procedimiento de calcular las temperaturas en cada nodo se repite para el cuarto plano de la malla de espacio – tiempo (figura 4.5) en adelante. Manteniendo esa selección de nodos espaciales de la placa, es posible encontrar un conjunto de valores aproximados de temperatura en niveles de tiempo posteriores, es decir, transcurrido $t_3 = 0.03$ horas, $t_4 = 0.04$ horas, hasta llegar al tiempo fijado máximo de $t_{max} = t_{M_t} = t_{100} = 1.00$ hora. Como el procedimiento a seguir es repetitivo, se requiere del Algoritmo 4.1 propuesto para su implementación en Mathematica o en otro sistema computacional y científico similar. De los cien conjuntos de temperaturas calculadas, solo se muestran algunos para facilitar su presentación y análisis.

Tabla 4.6: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 3$, método explícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_3 = 0.03$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	50.240515	51.606313	22.765875	24.131673	74.372188
$y_3 = 0.75$	0	74.540867	75.820796	31.824285	33.151993	108.36822
$y_2 = 0.50$	0	77.024773	78.281002	32.710517	34.002742	111.55828
$y_1 = 0.25$	0	49.200581	50.005393	20.900362	21.722333	71.182125
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.7: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 4$, método explícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_4 = 0.04$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	45.518813	46.756251	20.626294	21.863732	67.382545
$y_3 = 0.75$	0	67.838541	68.833663	28.520991	29.590599	98.183563
$y_2 = 0.50$	0	70.196411	71.125796	29.248699	30.241626	101.07382
$y_1 = 0.25$	0	44.856762	45.450639	18.689930	19.315290	64.492291
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.8: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 5$, método explícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_5 = 0.05$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	41.240867	42.362008	18.687795	19.808936	61.049803
$y_3 = 0.75$	0	61.705560	62.473205	25.585949	26.452251	88.956081
$y_2 = 0.50$	0	63.933029	64.600047	26.172621	26.931597	91.574704
$y_1 = 0.25$	0	40.871263	41.293902	16.720974	17.191268	58.431180
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.9: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 10$, método explícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{10} = 0.10$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	25.177468	25.861922	11.408862	12.093316	37.270784
$y_3 = 0.75$	0	38.196588	38.353619	15.023764	15.347501	54.307512
$y_2 = 0.50$	0	39.767727	39.750473	15.171995	15.347043	55.906176
$y_1 = 0.25$	0	25.468380	25.436808	9.6620802	9.7466975	35.672120
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.10: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 25$, método explícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{25} = 0.25$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
$y_3 = 0.75$	0	8.8058625	8.7392562	3.2130334	3.2533481	12.356990
$y_2 = 0.50$	0	9.2110163	9.0630980	3.1633840	3.1558455	12.720746
$y_1 = 0.25$	0	5.9099236	5.8014363	1.9954670	1.9810810	8.1167414
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.11: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 50$, método explícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{50} = 0.50$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
$y_3 = 0.75$	0	0.7456820	0.7354248	0.2618965	0.2669086	1.0479342
$y_2 = 0.50$	0	0.7795864	0.7605249	0.2533026	0.2549162	1.0787825
$y_1 = 0.25$	0	0.5000926	0.4862842	0.1586422	0.1590150	0.6883400
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración Propia y Wolfram Mathematica Versión 10.4

Tabla 4.12: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 75$, método explícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{75} = 0.75$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	0.0412010	0.0423210	0.0186697	0.0197898	0.0609907
$y_3 = 0.75$	0	0.0630444	0.0620276	0.0218360	0.0223869	0.0888700
$y_2 = 0.50$	0	0.0658396	0.0640153	0.0209522	0.0212670	0.0914861
$y_1 = 0.25$	0	0.0422172	0.0408992	0.0130795	0.0132370	0.0583747
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.13: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 100$, método explícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{100} = 1.00$ hora						
$y_4 = 1.00$	0	0.0034940	0.0035890	0.0015833	0.0016783	0.0051723
$y_3 = 0.75$	0	0.0053370	0.0052447	0.0018360	0.0018887	0.0075366
$y_2 = 0.50$	0	0.0055701	0.0054069	0.0017546	0.0017896	0.0077585
$y_1 = 0.25$	0	0.0035707	0.0034529	0.0010934	0.0011127	0.0049505
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

La figura 4.6 muestra la solución gráfica del problema para algunos niveles de tiempo.

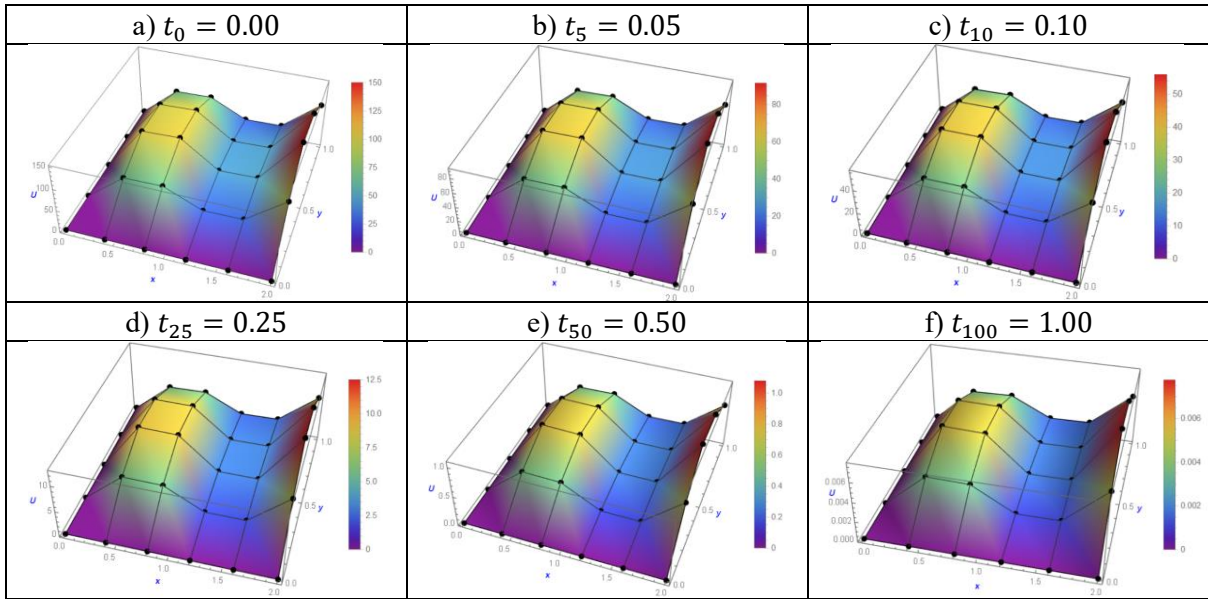


Figura 4.6: Solución gráfica de la distribución de temperatura en la placa, según método explícito

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

En el caso de mantener la partición definida inicialmente sobre el dominio espacial $[0,2] \times [0,1]$ (con $M_x = 5$ y $M_y = 4$), si el dominio temporal $[0,1]$ se subdivide en $M_t = 20$ subintervalos en lugar de 100, entonces:

$$\Delta x = 0.40, \quad \Delta y = 0.25, \quad \Delta t = 0.05.$$

Cada nodo se representa por los puntos (x_i, y_j, t_n) tal que:

$$x_i = i\Delta x \quad , \quad \forall i = 0,1,2,3,4,5;$$

$$y_j = j\Delta y \quad , \quad \forall j = 0,1,2,3,4;$$

$$t_n = n\Delta t \quad , \quad \forall n = 0,1,2, \dots, 20.$$

En el nivel de tiempo cero, las temperaturas se describen por la condición inicial, y alcanzan los mismos valores que en la Tabla 4.1. Para calcular los valores aproximados de temperatura de cada nodo en los siguientes niveles de tiempo, se utiliza directamente la ecuación (4.58).

Tabla 4.14: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 1$, método explícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_1 = 0.05$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	41.240867	42.362008	18.687795	19.808936	61.049803
$y_3 = 0.75$	0	55.313989	55.070908	20.491669	20.248587	88.956081
$y_2 = 0.50$	0	57.399035	57.161215	21.301859	21.064039	91.574704
$y_1 = 0.25$	0	36.740564	36.591969	13.644619	13.496023	58.431180
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.15: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 2$, método explícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_2 = 0.10$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	25.177468	25.861922	11.408862	12.093316	37.270784
$y_3 = 0.75$	0	33.973050	33.068692	10.608911	13.890023	54.307512
$y_2 = 0.50$	0	32.506196	30.730534	7.7675181	10.089240	55.906176
$y_1 = 0.25$	0	20.970821	19.897262	5.1995272	6.6867785	35.672120
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.16: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 3$, método explícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_3 = 0.15$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	15.370794	15.788652	6.9650876	7.3829456	22.753740
$y_3 = 0.75$	0	18.289481	17.001149	4.9210220	3.7972834	33.154629
$y_2 = 0.50$	0	20.645162	19.040305	4.9646124	7.8970899	34.130610
$y_1 = 0.25$	0	11.798405	10.371463	1.5710598	2.7895704	21.777759
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.17: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 4$, método explícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_4 = 0.20$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	9.3838396	9.6389411	4.2521722	4.5072737	13.891113
$y_3 = 0.75$	0	13.812314	13.254923	2.6287460	8.9583031	20.240835
$y_2 = 0.50$	0	8.9467071	7.6310453	0.8614155	-2.018082	20.836670
$y_1 = 0.25$	0	8.5183214	7.9157456	2.1422487	4.1756682	13.295279
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.18: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 5$, método explícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_5 = 0.25$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
$y_3 = 0.75$	0	3.1632530	2.0846022	3.3029848	-8.253803	12.356990
$y_2 = 0.50$	0	11.863736	11.297175	0.4444850	13.758242	12.720746
$y_1 = 0.25$	0	1.1583282	0.4785363	-0.609363	-5.581415	8.1167414
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

En los primeros cinco niveles de tiempo, se originan saltos y oscilaciones en los valores de temperatura. Estos saltos se amplifican en niveles posteriores de tiempo.

Tabla 4.19: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 10$, método explícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{10} = 0.50$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
$y_3 = 0.75$	0	84.432434	333.76628	-647.0355	806.22425	1.0479342
$y_2 = 0.50$	0	-124.4198	-452.5641	886.92826	-1116.856	1.0787825
$y_1 = 0.25$	0	93.234953	307.75083	-607.1176	773.67949	0.6883400
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.20: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 15$, método explícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{15} = 0.75$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	0.0412010	0.0423210	0.0186697	0.0197898	0.0609907
$y_3 = 0.75$	0	18648.587	-71087.79	118859.70	-104235.5	0.0888700
$y_2 = 0.50$	0	-26195.56	100199.62	-167700.8	147139.38	0.0914861
$y_1 = 0.25$	0	18397.671	-70615.76	118305.07	-103850.9	0.0583747
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.21: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 20$, método explícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{20} = 1.00$ hora						
$y_4 = 1.00$	0	0.0034940	0.0035890	0.0015833	0.0016783	0.0051723
$y_3 = 0.75$	0	-6.975333×10^6	1.5639172×10^7	-2.109963×10^7	1.5990543×10^7	0.0075366
$y_2 = 0.50$	0	9.8613966×10^6	-2.211166×10^7	2.9833571×10^7	-2.261029×10^7	0.0077585
$y_1 = 0.25$	0	-6.970788×10^6	1.5631436×10^7	-2.109142×10^7	1.5985232×10^7	0.0049505
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Con este ejemplo, se muestra un caso de inestabilidad del método explícito para el problema a resolver. Cuando los tamaños de pasos espaciales son $\Delta x = 0.40$ y $\Delta y = 0.25$, el tamaño de paso temporal definido como $\Delta t = 0.05$ no satisface la desigualdad (4.61), que impone una restricción a Δt a partir del criterio de estabilidad de Von Neumann (4.60), diferente al caso anterior cuando $\Delta t = 0.01$. La figura 4.7 muestra la evolución de la solución gráfica del PVIF, pero con problemas de estabilidad.

Al discretizar el dominio espacial con $M_x = 10$ subintervalos en $[0,2] \subset X$ y $M_y = 8$ subintervalos en $[0,1] \subset Y$; y el dominio temporal con $M_t = 500$ en el intervalo del tiempo $[0,1]$ entonces el valor de cada tamaño de paso es:

$$\Delta x = 0.20, \quad \Delta y = 0.125, \quad \Delta t = 0.002.$$

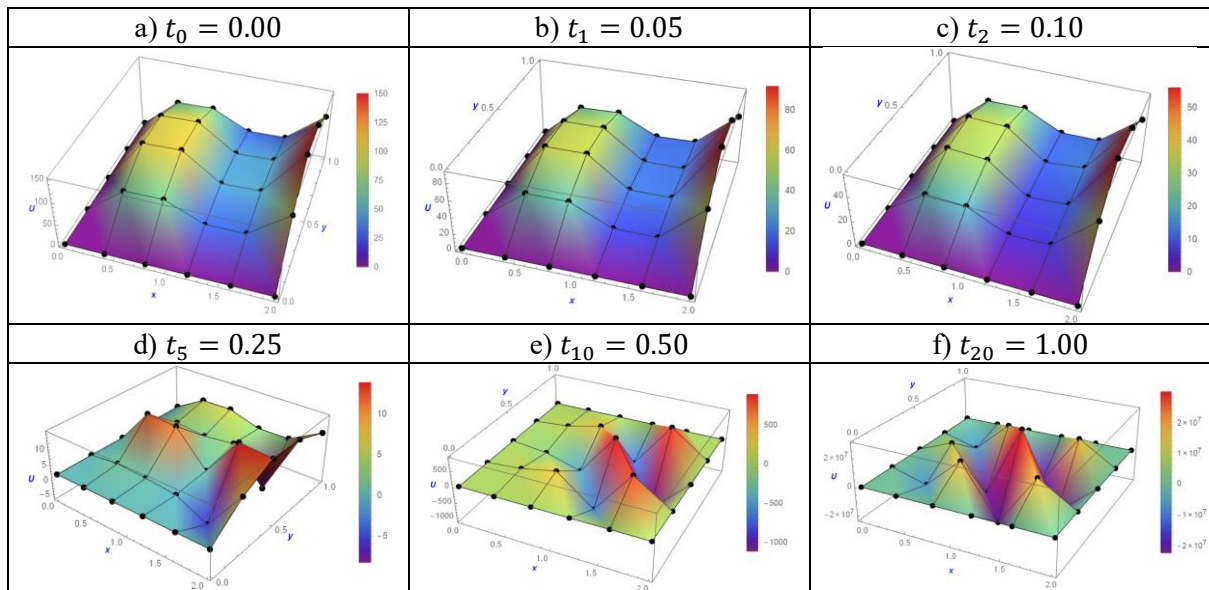


Figura 4.7: Solución gráfica inestable de la distribución de temperatura en la placa rectangular, según método explícito

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Cada nodo se representa por los puntos (x_i, y_j, t_n) tal que:

$$x_i = i\Delta x \quad , \quad \forall i = 0,1,2, \dots,10;$$

$$y_j = j\Delta y \quad , \quad \forall j = 0,1,2, \dots,8;$$

$$t_n = n\Delta t \quad , \quad \forall n = 0,1,2, \dots,500.$$

Se puede direccionar el estudio en una subregión de la placa $[0,1] \times [0.5,1]$, y notar que se alcanza a conocer más valores aproximados de temperatura por el incremento del número de nodos interiores. Se muestran las temperaturas en el tiempo inicial $t_0 = 0.00$, en $t_{125} = 0.25$ y $t_{250} = 0.50$ horas.

Tabla 4.22: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 0$

Distribución inicial de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_0 = 0.00$ horas						
$y_8 = 1.000$	0	39.389263	67.552826	77.552826	69.389263	50.000000
$y_7 = 0.875$	0	49.539223	84.960070	97.536904	87.269726	62.884172
$y_6 = 0.750$	0	57.394362	98.431681	113.00275	101.10757	72.855339
$y_5 = 0.625$	0	61.009223	104.63119	120.11998	107.47561	77.443977
$y_4 = 0.500$	0	59.083894	101.32924	116.32924	104.08389	75.000000
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.20$	$x_2 = 0.40$	$x_3 = 0.60$	$x_4 = 0.80$	$x_5 = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.23: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 125$, método explícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{125} = 0.25$ horas						
$y_8 = 1.000$	0	3.3404053	5.7288155	6.5768653	5.8845545	4.2402486
$y_7 = 0.875$	0	4.2478648	7.2792818	8.3424821	7.4375757	5.3165834
$y_6 = 0.750$	0	4.9496812	8.4786477	9.7089179	8.6406929	6.1524145
$y_5 = 0.625$	0	5.2778502	9.0390374	10.346301	9.1999002	6.5376862
$y_4 = 0.500$	0	5.1203508	8.7684290	10.034415	8.9185849	6.3313849
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.20$	$x_2 = 0.40$	$x_3 = 0.60$	$x_4 = 0.80$	$x_5 = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.24: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 250$, método explícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{250} = 0.50$ horas						
$y_8 = 1.000$	0	0.2832830	0.4858320	0.5577509	0.4990395	0.3595942
$y_7 = 0.875$	0	0.3604076	0.6175412	0.7075821	0.6305514	0.4503122
$y_6 = 0.750$	0	0.4200671	0.7194416	0.8235458	0.7324189	0.5207198
$y_5 = 0.625$	0	0.4479924	0.7670912	0.8776547	0.7797338	0.5530754
$y_4 = 0.500$	0	0.4346690	0.7441864	0.8512248	0.7558387	0.5354686
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.20$	$x_2 = 0.40$	$x_3 = 0.60$	$x_4 = 0.80$	$x_5 = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Si en lugar de discretizar el dominio temporal con $M_t = 500$ subintervalos, se elige subdividir el mismo dominio en $M_t = 100$ subintervalos, entonces con estos tamaños de partición:

$$\Delta x = 0.20, \quad \Delta y = 0.125, \quad \Delta t = 0.01,$$

se representa cada componente del nodo (x_i, y_j, t_n) como:

$$x_i = i\Delta x \quad , \quad \forall i = 0,1,2, \dots, 10;$$

$$y_j = j\Delta y \quad , \quad \forall j = 0,1,2, \dots, 8;$$

$$t_n = n\Delta t \quad , \quad \forall n = 0,1,2, \dots, 100.$$

Se puede direccionar el estudio en otra subregión de la placa $[1,2] \times [0.5,1]$, y notar que, se conocen más valores aproximados de temperatura por el incremento del número de nodos interiores al igual que el caso anterior; sin embargo, se amplifican los saltos y oscilaciones en niveles de tiempo posteriores. Se muestran los valores aproximados de temperatura en el tiempo inicial $t_0 = 0.00$, en $t_{125} = 0.25$ y $t_{250} = 0.50$ horas.

Tabla 4.25: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 0$

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_0 = 0.00$ horas						
$y_8 = 1.000$	50.000000	30.610737	22.447174	32.447174	60.610737	100.00000
$y_7 = 0.875$	62.884172	38.498617	28.231439	40.808273	76.229120	125.76834
$y_6 = 0.750$	72.855339	44.603113	32.707930	47.278998	88.316316	145.71068
$y_5 = 0.625$	77.443977	47.412345	34.767969	50.256764	93.878731	154.88795
$y_4 = 0.500$	75.000000	45.916106	33.670761	48.670761	90.916106	150.00000
(x_i, y_j)	$x_5 = 1.00$	$x_6 = 1.20$	$x_7 = 1.40$	$x_8 = 1.60$	$x_9 = 1.80$	$x_{10} = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.26: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 25$, método explícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{25} = 0.25$ horas						
$y_8 = 1.000$	4.2402486	2.5959427	1.9036320	2.7516817	5.1400919	8.4804972
$y_7 = 0.875$	-67744.06	137038.86	-216373.1	249535.12	-174904.8	10.665781
$y_6 = 0.750$	119313.39	-242353.4	383990.55	-443956.9	311707.17	12.356990
$y_5 = 0.625$	-144519.5	295645.97	-471032.4	546860.57	-384936.9	13.135269
$y_4 = 0.500$	142160.03	-293519.9	471132.54	-549947.9	388454.92	12.720746
(x_i, y_j)	$x_5 = 1.00$	$x_6 = 1.20$	$x_7 = 1.40$	$x_8 = 1.60$	$x_9 = 1.80$	$x_{10} = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.27: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 50$, método explícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{50} = 0.50$ horas						
$y_8 = 1.000$	0.3595942	0.2201489	0.1614375	0.2333563	0.4359054	0.7191883
$y_7 = 0.875$	4.4910394×10^{14}	-5.729800×10^{14}	6.1939285×10^{14}	-5.369370×10^{14}	3.1448094×10^{14}	0.9045113
$y_6 = 0.750$	-8.278528×10^{14}	1.0563356×10^{15}	-1.142011×10^{15}	9.9004986×10^{14}	-5.798902×10^{14}	1.0479342
$y_5 = 0.625$	1.0777642×10^{15}	-1.375486×10^{15}	1.4872636×10^{15}	-1.289495×10^{15}	7.5532672×10^{14}	1.1139361
$y_4 = 0.500$	-1.161613×10^{15}	1.4828354×10^{15}	-1.603617×10^{15}	1.3905458×10^{15}	-8.145770×10^{14}	1.0787825
(x_i, y_j)	$x_5 = 1.00$	$x_6 = 1.20$	$x_7 = 1.40$	$x_8 = 1.60$	$x_9 = 1.80$	$x_{10} = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Se observa otro caso de inestabilidad del método explícito para el problema propuesto, debido a que el tamaño de paso temporal $\Delta t = 0.01$ no cumple con la restricción (4.61) cuando se define $\Delta x = 0.40$ y $\Delta y = 0.25$, mostrando de esa manera que el método explícito es condicionalmente estable.

COMPARACIÓN CON LA SOLUCIÓN ANALÍTICA

El PVIF propuesto se ha resuelto utilizando el método de expansión de funciones propias, cuya solución analítica es:

$$u(x, y, t) = 50[x + \text{sen}(\pi x)][y + \text{sen}(\pi y)]e^{-\pi^2 t}$$

Se define $u_{i,j}^n$ como la solución exacta para cada nodo (x_i, y_j, t_n) generado por la discretización del dominio en $M_x = 5$, $M_y = 4$ y $M_t = 100$ subintervalos:

$$u_{i,j}^n = u(x_i, y_j, t_n) = 50[x_i + \text{sen}(\pi x_i)][y_j + \text{sen}(\pi y_j)]e^{-\pi^2 t_n}, \quad \begin{array}{l} i = 0,1,2,3,4,5; \\ j = 0,1,2,3,4; \\ n = 0,1,2, \dots, 100; \end{array}$$

y el error $e_{i,j}^n$ como:

$$e_{i,j}^n = |U_{i,j}^n - u_{i,j}^n|, \quad \begin{array}{l} i = 0,1,2,3,4,5; \\ j = 0,1,2,3,4; \\ n = 0,1,2, \dots, 100; \end{array}$$

Notar que, por las condiciones de frontera, $e_{0,j}^n = e_{5,j}^n = 0$ y $e_{i,0}^n = e_{i,4}^n = 0$ para $0 \leq i \leq 5$, $0 \leq j \leq 4$ y $0 \leq n \leq 100$, ya que los valores de temperatura en el contorno de la placa rectangular son conocidas.

De la misma manera, $e_{i,j}^0 = 0$ para $0 < i < 5$ y $0 < j < 4$ por la condición inicial.

Se comparan ambas soluciones en cada punto de la placa, en $t = 0.25$ y $t = 0.50$ horas. En cada celda de las tablas 4.28 – 4.34, de arriba hacia abajo, el primer valor indica la temperatura $U_{i,j}^n$ obtenida por el método explícito de diferencias finitas, el segundo valor indica la temperatura exacta $u_{i,j}^n$ obtenida

de forma analítica por el método de expansión de funciones propias, y el tercer valor indica el error entre la solución analítica y numérica, $e_{i,j}^n$.

Tabla 4.28: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 25$, método explícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{25} = 0.25$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	0	0	0	0	0
$y_3 = 0.75$	0	8.8058625	8.7392562	3.2130334	3.2533481	12.356990
	0	8.3474960	8.5744243	3.7825658	4.0094941	12.356990
	0	0.4583665	0.1648320	0.5695323	0.7561460	0
$y_2 = 0.50$	0	9.2110163	9.0630980	3.1633840	3.1558455	12.720746
	0	8.5932233	8.8268318	3.8939141	4.1275226	12.720746
	0	0.6177930	0.2362663	0.7305301	0.9716771	0
$y_1 = 0.25$	0	5.9099236	5.8014363	1.9954670	1.9810810	8.1167414
	0	5.4830882	5.6321470	2.4845944	2.6336532	8.1167414
	0	0.4268354	0.1692893	0.4891274	0.6525722	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.29: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 50$, método explícito

Distribución de las Temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{50} = 0.50$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0	0	0	0	0
$y_3 = 0.75$	0	0.7456820	0.7354248	0.2618965	0.2669086	1.0479342
	0	0.7079092	0.7271538	0.3207804	0.3400250	1.0479342
	0	0.0377729	0.0082710	0.0588839	0.0731164	0
$y_2 = 0.50$	0	0.7795864	0.7605249	0.2533026	0.2549162	1.0787825
	0	0.7287481	0.7485592	0.3302233	0.3500344	1.0787825
	0	0.0508383	0.0119656	0.0769207	0.0951183	0
$y_1 = 0.25$	0	0.5000926	0.4862842	0.1586422	0.1590150	0.6883400
	0	0.4649931	0.4776341	0.2107060	0.2233469	0.6883400
	0	0.0350995	0.0086501	0.0520638	0.0643319	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

No es posible realizar una comparación entre la solución numérica y la solución exacta cuando se presenta un caso de inestabilidad en la aplicación del método explícito. Por ejemplo, cuando se elige subdividir los dominios espaciales $[0,2]$ en $M_x = 5$, $[0,1]$ en $M_y = 4$ y el dominio temporal $[0,1]$ en $M_t = 20$ subintervalos, entonces $\Delta x = 0.40$, $\Delta y = 0.25$ y $\Delta t = 0.05$, respectivamente. Los tamaños de paso definidos no satisfacen el criterio de estabilidad. En la tabla 4.30, se muestra una comparación en $t_{10} = 0.50$ horas.

Tabla 4.30: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 10$, método explícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y el Error $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{10} = 0.50$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0	0	0	0	0
$y_3 = 0.75$	0	84.432434	333.76628	-647.0355	806.22425	1.0479342
	0	0.7079092	0.7271538	0.3207804	0.3400250	1.0479342
	0	83.724525	333.03913	647.35624	805.88423	0
$y_2 = 0.50$	0	-124.4198	-452.5641	886.92826	-1116.856	1.0787825
	0	0.7287481	0.7485592	0.3302233	0.3500344	1.0787825
	0	125.14858	453.31266	886.59804	1117.2064	0
$y_1 = 0.25$	0	93.234953	307.75083	-607.1176	773.67949	0.6883400
	0	0.4649931	0.4776341	0.2107060	0.2233469	0.6883400
	0	92.769960	307.27320	607.32828	773.45615	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Si se elige subdividir cada subconjunto del dominio espacial $[0,2]$ en $M_x = 10$, $[0,1]$ en $M_y = 8$ y el dominio temporal $[0,1]$ en $M_t = 500$ subintervalos, entonces $\Delta x = 0.20$, $\Delta y = 0.125$ y $\Delta t = 0.05$, respectivamente. En las tablas 4.31 y 4.32, se muestra una comparación en los tiempos $t_{125} = 0.25$ y $t_{250} = 0.50$ horas.

Tabla 4.31: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 125$, método explícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y el Error $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{125} = 0.25$ horas						
$y_8 = 1.00$	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	0	0	0	0	0
$y_6 = 0.75$	0	8.4786477	8.6406929	3.6654363	3.8398747	12.356990
	0	8.3474960	8.5744243	3.7825658	4.0094941	12.356990
	0	0.1311517	0.0662686	0.1171295	0.1696194	0
$y_4 = 0.50$	0	8.7684290	8.9185849	3.7459277	3.9119931	12.720746
	0	8.5932233	8.8268318	3.8939141	4.1275226	12.720746
	0	0.1752057	0.0917531	0.1479864	0.2155295	0
$y_2 = 0.25$	0	5.6035446	5.6965916	2.3863881	2.4898135	8.1167414
	0	5.4830882	5.6321470	2.4845944	2.6336532	8.1167414
	0	0.1204564	0.0644446	0.0982063	0.1438397	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_2 = 0.40$	$x_4 = 0.80$	$x_6 = 1.20$	$x_8 = 1.60$	$x_{10} = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.32: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 250$, método explícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y el Error $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{250} = 0.50$ horas						
$y_8 = 1.00$	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0	0	0	0	0
$y_6 = 0.75$	0	0.7194416	0.7324189	0.3092318	0.3240108	1.0479342
	0	0.7079092	0.7271538	0.3207804	0.3400250	1.0479342
	0	0.0115324	0.0052651	0.0115486	0.0160142	0
$y_4 = 0.50$	0	0.7441864	0.7558387	0.3153889	0.3294519	1.0787825
	0	0.7287481	0.7485592	0.3302233	0.3500344	1.0787825
	0	0.0154384	0.0072795	0.0148344	0.0205825	0
$y_2 = 0.25$	0	0.4756187	0.4827447	0.2007625	0.2095192	0.6883400
	0	0.4649931	0.4776341	0.2107060	0.2233469	0.6883400
	0	0.0106255	0.0051106	0.0099435	0.0138277	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_2 = 0.40$	$x_4 = 0.80$	$x_6 = 1.20$	$x_8 = 1.60$	$x_{10} = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

En las tablas 4.33 y 4.34, se muestra una comparación en $t_{1250} = 0.25$ y $t_{2500} = 0.50$ horas, al discretizar el dominio usando $M_x = 20$, $M_y = 16$ y $M_t = 5000$.

Tabla 4.33: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 1250$, método explícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y el Error $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{1250} = 0.25$ horas						
$y_{16} = 1.00$	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	0	0	0	0	0
$y_{12} = 0.75$	0	8.3940075	8.6088759	3.7675262	3.9769015	12.356990
	0	8.3474960	8.5744243	3.7825658	4.0094941	12.356990
	0	0.0465116	0.0344516	0.0150395	0.0325926	0
$y_8 = 0.50$	0	8.6550521	8.8735507	3.8762171	4.0868038	12.720746
	0	8.5932233	8.8268318	3.8939141	4.1275226	12.720746
	0	0.0618288	0.0467189	0.0176970	0.0407188	0
$y_4 = 0.25$	0	5.5254542	5.6645143	2.4733498	2.6067336	8.1167414
	0	5.4830882	5.6321470	2.4845944	2.6336532	8.1167414
	0	0.0423660	0.0323672	0.0112446	0.0269196	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_4 = 0.40$	$x_8 = 0.80$	$x_{12} = 1.20$	$x_{16} = 1.60$	$x_{20} = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.34: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 2500$, método explícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y el Error $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{2500} = 0.50$ horas						
$y_{16} = 1.00$	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0	0	0	0	0
$y_{12} = 0.75$	0	0.7124280	0.7307344	0.3198304	0.3372958	1.0479342
	0	0.7079092	0.7271538	0.3207804	0.3400250	1.0479342
	0	0.0045188	0.0035806	0.0009500	0.0027292	0
$y_8 = 0.50$	0	0.7348038	0.7534531	0.3291827	0.3466305	1.0787825
	0	0.7287481	0.7485592	0.3302233	0.3500344	1.0787825
	0	0.0060557	0.0048939	0.0010406	0.0034039	0
$y_4 = 0.25$	0	0.4691604	0.4810379	0.2100778	0.2210988	0.6883400
	0	0.4649931	0.4776341	0.2107060	0.2233469	0.6883400
	0	0.0041672	0.0034038	0.0006281	0.0022481	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
(x_i, y_j)	$x_0 = 0.00$	$x_4 = 0.40$	$x_8 = 0.80$	$x_{12} = 1.20$	$x_{16} = 1.60$	$x_{20} = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

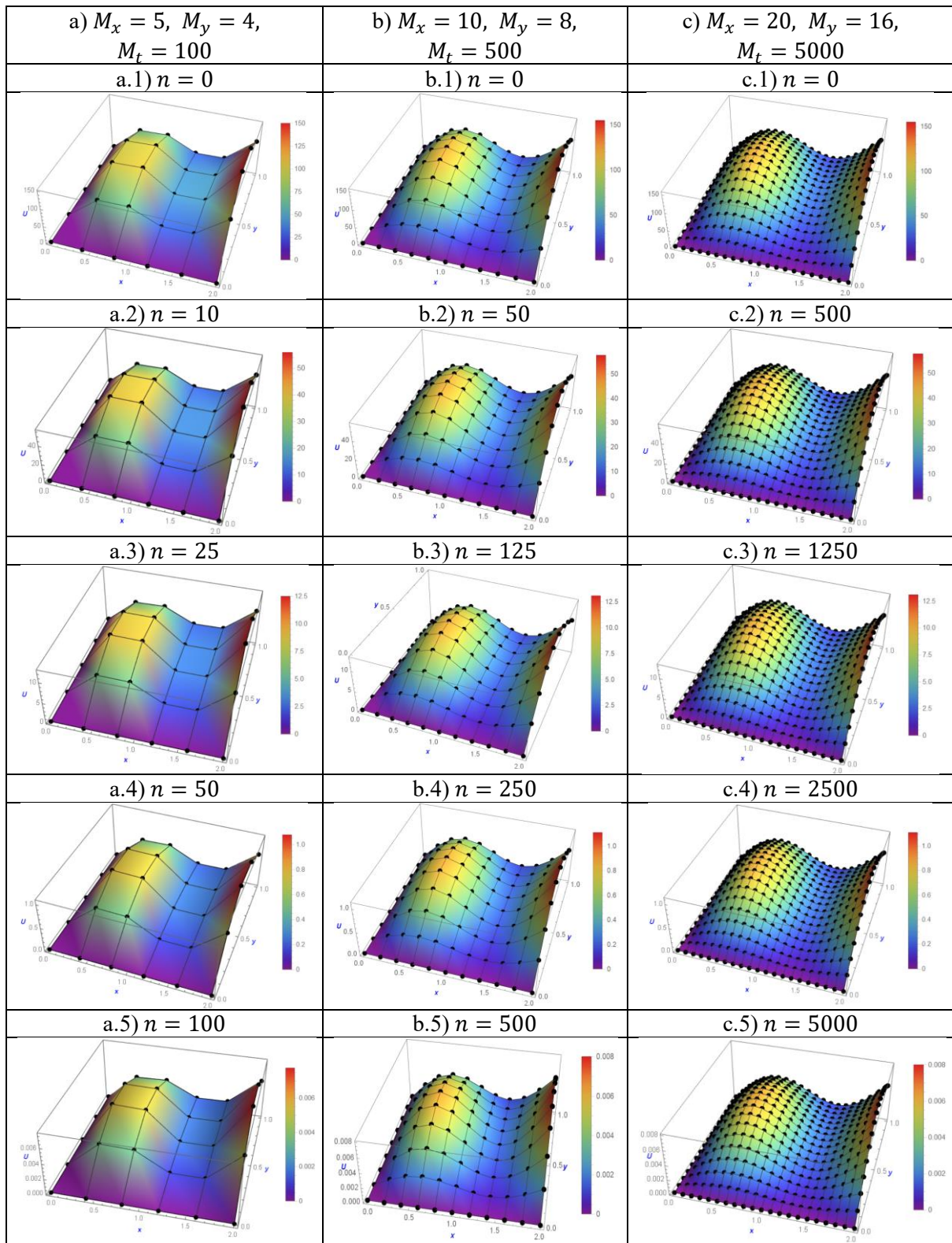


Figura 4.8: Comparación de la solución gráfica de la evolución de distribución de temperatura de la placa rectangular, según el método explícito

Fuente: Wolfram Mathematica versión 10.4

POR EL MÉTODO IMPLÍCITO

Se aproxima la EDP del problema (4.1) en el nodo (i, j, n) , de la misma forma que en la ecuación (4.51). Se representan las aproximaciones de las derivadas espaciales de la solución con diferencias finitas centrales, y para la aproximación de la primera derivada de la función de temperatura con respecto al tiempo, se emplea diferencias finitas hacia atrás. Por (4.52) y (4.53), se conocen las derivadas parciales de la función de temperatura con respecto a x e y en su forma aproximada, expresado en diferencias finitas centrales. Para el caso de la derivada temporal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x, y, t) - u(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\Delta t}{2} - O[(\Delta t)^2].$$

Al evaluar en $(x, y, t) = (x_i, y_j, t_n)$, o en el nodo (i, j, n) :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{i,j}^n \cdot \frac{\Delta t}{2} - O[(\Delta t)^2]. \quad (4.62)$$

Reemplazando (4.52), (4.53) y (4.62) en la EDP discretizada (4.51):

$$\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} = a^2 \left[\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] + f_{i,j}^n + TE_{i,j}^n, \quad (4.63)$$

donde el error de truncamiento local $TE_{i,j}^n = TE(x_i, y_j, t_n)$ es:

$$TE_{i,j}^n = -a^2 \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_{i,j}^n \frac{(\Delta x)^2}{12} - a^2 \left. \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right|_{i,j}^n \frac{(\Delta y)^2}{12} - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{i,j}^n \cdot \frac{\Delta t}{2} + O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^4, (\Delta y)^4]. \quad (4.64)$$

La discretización es de primer orden con respecto al tiempo, y de segundo orden en el espacio, cuando se expresa la ecuación en diferencias finitas (4.63) por el método implícito:

$$\frac{U_{i,j}^n - U_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} = a^2 \left[\frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] + f_{i,j}^n. \quad (4.65)$$

Reordenando la ecuación (4.65):

$$-r_x U_{i-1,j}^n - r_y U_{i,j-1}^n + \delta U_{i,j}^n - r_y U_{i,j+1}^n - r_x U_{i+1,j}^n = U_{i,j}^{n-1} + \Delta t (f_{i,j}^n), \quad (4.66)$$

donde:

$$r_x = \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad r_y = \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta y)^2}, \quad \delta = 1 + 2r_x + 2r_y. \quad (4.67)$$

El esquema molecular para el método implícito se ilustra a partir del nodo (i, j, n) en la figura 4.9, relacionando a los nodos cuyos valores de temperatura intervienen en la ecuación (4.66).

El error de truncamiento del esquema implícito de diferencias finitas es $O[\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$, de modo que (4.66) es consistente con la ecuación del calor bidimensional del problema (4.1) (Zauderer, 2006). Por la condición de estabilidad de Von Neumann, el esquema implícito de diferencias finitas es incondicionalmente estable (Zauderer, 2006).

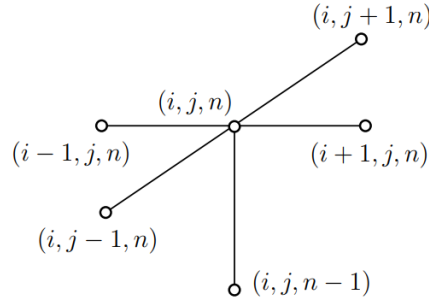


Figura 4.9: Molécula de diferencias finitas por el método implícito

Fuente: Elaboración propia

Al igual que en el caso de la EDP del calor unidimensional aproximado por el método implícito de diferencias finitas, se requiere formular y resolver un sistema de ecuaciones en forma matricial para obtener las temperaturas del tiempo siguiente. La cantidad de valores conocidos y desconocidos de las temperaturas suele variar dependiendo de la posición de cada nodo en el interior de la placa rectangular donde se aproxima la EDP. En cualquier caso, es seguro contar con el valor de temperatura $U_{i,j}^{n-1}$ del nodo $(i, j, n-1)$, ya que representa la temperatura en el tiempo anterior; y con $f_{i,j}^n$, que es el término fuente del nodo (i, j, n) , una función conocida a partir del PVIF dado. De (4.66), se deducen las ecuaciones particulares para cada nodo (i, j, n) , siendo agrupados por columnas de nodos interiores en la figura 4.1:

Para $i = 1$:

Si $j = 1$:

$$\delta U_{1,1}^n - r_y U_{1,2}^n - r_x U_{2,1}^n = U_{1,1}^{n-1} + r_x U_{0,1}^n + r_y U_{1,0}^n + \Delta t (f_{1,1}^n) \quad (4.68)$$

Si $j = 2, 3, \dots, M_y - 2$:

$$-r_y U_{1,j-1}^n + \delta U_{1,j}^n - r_y U_{1,j+1}^n - r_x U_{2,j}^n = U_{1,j}^{n-1} + r_x U_{0,j}^n + \Delta t (f_{1,j}^n) \quad (4.69)$$

Si $j = M_y - 1$:

$$-r_y U_{1,M_y-2}^n + \delta U_{1,M_y-1}^n - r_x U_{2,M_y-1}^n = U_{1,M_y-1}^{n-1} + r_x U_{0,M_y-1}^n + r_y U_{1,M_y}^n + \Delta t (f_{1,M_y-1}^n) \quad (4.70)$$

Para $i = 2, 3, \dots, M_x - 2$:

Si $j = 1$:

$$-r_x U_{i-1,1}^n + \delta U_{i,1}^n - r_y U_{i,2}^n - r_x U_{i+1,1}^n = U_{i,1}^{n-1} + r_y U_{i,0}^n + \Delta t (f_{i,1}^n) \quad (4.71)$$

Si $j = 2, 3, \dots, M_y - 2$:

$$-r_x U_{i-1,j}^n - r_y U_{i,j-1}^n + \delta U_{i,j}^n - r_y U_{i,j+1}^n - r_x U_{i+1,j}^n = U_{i,j}^{n-1} + \Delta t (f_{i,j}^n) \quad (4.72)$$

Si $j = M_y - 1$:

$$-r_x U_{i-1,M_y-1}^n - r_y U_{i,M_y-2}^n + \delta U_{i,M_y-1}^n - r_x U_{i+1,M_y-1}^n = U_{i,M_y-1}^{n-1} + r_y U_{i,M_y}^n + \Delta t (f_{i,M_y-1}^n) \quad (4.73)$$

Para $i = M_x - 1$:

Si $j = 1$:

$$-r_x U_{M_x-2,1}^n + \delta U_{M_x-1,1}^n - r_y U_{M_x-1,2}^n = U_{M_x-1,1}^{n-1} + r_y U_{M_x-1,0}^n + r_x U_{M_x,1}^n + \Delta t (f_{M_x-1,1}^n) \quad (4.74)$$

Si $j = 2, 3, \dots, M_y - 2$:

$$-r_x U_{M_x-2,j}^n - r_y U_{M_x-1,j-1}^n + \delta U_{M_x-1,j}^n - r_y U_{M_x-1,j+1}^n = U_{M_x-1,j}^{n-1} + r_x U_{M_x,j}^n + \Delta t (f_{M_x-1,j}^n) \quad (4.75)$$

Si $j = M_y - 1$:

$$\begin{aligned} -r_x U_{M_x-2,M_y-1}^n - r_y U_{M_x-1,M_y-2}^n + \delta U_{M_x-1,M_y-1}^n &= U_{M_x-1,M_y-1}^{n-1} + r_y U_{M_x-1,M_y}^n + \\ &+ r_x U_{M_x,M_y-1}^n + \Delta t (f_{M_x-1,M_y-1}^n) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Se expresa el sistema de ecuaciones (4.68) – (4.76) en su forma matricial para cada tiempo fijo t_n :

$$\mathbf{AU} = \mathbf{b} \quad (4.77)$$

La matriz \mathbf{A} es una matriz cuadrada y dispersa de orden $[(M_x - 1)(M_y - 1)] \times [(M_x - 1)(M_y - 1)]$, cuyos elementos son reales y forman un patrón predecible. Esa matriz se representa de manera práctica como una matriz tri – diagonal por bloque, a consecuencia de una partición en $(M_x - 1) \times (M_y - 1)$ bloques:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \dots & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{B} & & & \mathbf{0} \\ & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

donde:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta & -r_y & 0 & 0 & & & 0 \\ -r_y & \delta & -r_y & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & -r_y & \delta & -r_y & & & 0 \\ 0 & 0 & -r_y & \delta & & & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \delta & -r_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -r_y & \delta \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

y

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -r_x & 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & -r_x & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & -r_x & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_x & & & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & -r_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -r_x \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

son submatrices (o bloques) de \mathbf{A} . La submatriz \mathbf{B} es cuadrada, de orden $(M_y - 1) \times (M_y - 1)$ y simétrica, ya que $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$. La submatriz \mathbf{C} también es cuadrada, de orden $(M_y - 1) \times (M_y - 1)$ y diagonal, implicando que $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$. Los elementos de \mathbf{B} y \mathbf{C} son constantes para cualquier tiempo t_n .

El vector \mathbf{U} (o matriz columna) es el vector solución de orden $[(M_x - 1)(M_y - 1)] \times 1$, cuyos elementos son los valores de temperatura desconocidas. Este vector se representa de manera práctica como un vector por bloque, producto de la partición en $M_x - 1$ bloques en forma de vector, siendo cada bloque \mathbf{U}_i de orden $(M_y - 1) \times 1$. Para todo $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$ y $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_i^n] = \left[(\mathbf{U}_1^n)^T \quad (\mathbf{U}_2^n)^T \quad (\mathbf{U}_3^n)^T \quad \dots \quad (\mathbf{U}_{M_x-2}^n)^T \quad (\mathbf{U}_{M_x-1}^n)^T \right]^T, \quad (4.81)$$

donde,

$$\mathbf{U}_i^n = [U_{i,j}^n] = [U_{i,1}^n \quad U_{i,2}^n \quad U_{i,3}^n \quad \dots \quad U_{i,M_y-2}^n \quad U_{i,M_y-1}^n]^T \quad (4.82)$$

El vector \mathbf{b} (o matriz columna) es un vector de orden $[(M_x - 1)(M_y - 1)] \times 1$ que agrupa a los valores conocidos de temperaturas, ya sea por la condición inicial, condiciones de frontera, término fuente o valores de temperaturas calculadas en el tiempo t_{n-1} . Este vector se representa de manera práctica como un vector por bloque, producto de la partición en $M_x - 1$ bloques en forma de vector, siendo cada bloque \mathbf{b}_i de orden $(M_y - 1) \times 1$. Para todo $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$ y $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}_i^n] = \left[(\mathbf{b}_1^n)^T \quad (\mathbf{b}_2^n)^T \quad (\mathbf{b}_3^n)^T \quad \dots \quad (\mathbf{b}_{M_x-2}^n)^T \quad (\mathbf{b}_{M_x-1}^n)^T \right]^T \quad (4.83)$$

donde,

$$\mathbf{b}_i^n = [b_{i,j}^n] = [b_{i,1}^n \quad b_{i,2}^n \quad b_{i,3}^n \quad \dots \quad b_{i,M_y-2}^n \quad b_{i,M_y-1}^n]^T \quad (4.84)$$

Los elementos del vector \mathbf{b} se definen por el segundo miembro de cada igualdad en (4.68) – (4.76).

$$b_{i,j}^n = \begin{cases} U_{1,1}^{n-1} + r_x U_{0,1}^n + r_y U_{1,0}^n + \Delta t (f_{1,1}^n) & ; i = 1 & ; j = 1 \\ U_{1,j}^{n-1} + r_x U_{0,j}^n + \Delta t (f_{1,j}^n) & ; i = 1 & ; j = 2, \dots, M_y - 2 \\ U_{1,M_y-1}^{n-1} + r_x U_{0,M_y-1}^n + r_y U_{1,M_y}^n + \Delta t (f_{1,M_y-1}^n) & ; i = 1 & ; j = M_y - 1 \\ U_{i,1}^{n-1} + r_y U_{i,0}^n + \Delta t (f_{i,1}^n) & ; i = 2, \dots, M_x - 2 & ; j = 1 \\ U_{i,j}^{n-1} + \Delta t (f_{i,j}^n) & ; i = 2, \dots, M_x - 2 & ; j = 2, \dots, M_y - 2 \\ U_{i,M_y-1}^{n-1} + r_y U_{i,M_y}^n + \Delta t (f_{i,M_y-1}^n) & ; i = 2, \dots, M_x - 2 & ; j = M_y - 1 \\ U_{M_x-1,1}^{n-1} + r_y U_{M_x-1,0}^n + r_x U_{M_x,1}^n + \Delta t (f_{M_x-1,1}^n) & ; i = M_x - 1 & ; j = 1 \\ U_{M_x-1,j}^{n-1} + r_x U_{M_x,j}^n + \Delta t (f_{M_x-1,j}^n) & ; i = M_x - 1 & ; j = 2, \dots, M_y - 2 \\ U_{M_x-1,M_y-1}^{n-1} + r_y U_{M_x-1,M_y}^n + r_x U_{M_x,M_y-1}^n + \Delta t (f_{M_x-1,M_y-1}^n) & ; i = M_x - 1 & ; j = M_y - 1 \end{cases}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones (4.77) utilizando el método de Gradiente Conjugado, se demuestra que la matriz \mathbf{A} es simétrica y definida positiva con las propiedades de matrices por bloque (ver anexo B).

Para cada tiempo t_n , sea la función cuadrática a minimizar:

$$E(\tilde{\mathbf{U}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{b}^T \tilde{\mathbf{U}}$$

donde \mathbf{A} es una matriz cuadrada, simétrica y definida positiva, conformado por $(M_x - 1) \times (M_x - 1)$ bloques, y el gradiente de la función es $\nabla E = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{b}$. Minimizar la función $E(\tilde{\mathbf{U}})$ requiere establecer $\mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, lo que implica encontrar la solución del sistema de ecuaciones lineales dado por $\mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{b}$.

Sea el vector de estimación $\tilde{\mathbf{U}}^{(k)}$ con nivel de iteración k , con las mismas características que el vector solución \mathbf{U} :

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(k)} = [\tilde{\mathbf{U}}_i^{(k)}] = [(\tilde{\mathbf{U}}_1^{(k)})^T \quad (\tilde{\mathbf{U}}_2^{(k)})^T \quad (\tilde{\mathbf{U}}_3^{(k)})^T \quad \dots \quad (\tilde{\mathbf{U}}_{M_x-2}^{(k)})^T \quad (\tilde{\mathbf{U}}_{M_x-1}^{(k)})^T]^T,$$

donde, para cada $1 \leq i \leq M_x - 1$ y $1 \leq j \leq M_y - 1$:

$$\tilde{\mathbf{U}}_i^{(k)} = [\tilde{U}_{i,j}^{(k)}] = [\tilde{U}_{i,1}^{(k)} \quad \tilde{U}_{i,2}^{(k)} \quad \tilde{U}_{i,3}^{(k)} \quad \dots \quad \tilde{U}_{i,M_y-2}^{(k)} \quad \tilde{U}_{i,M_y-1}^{(k)}]^T.$$

Se asume que para $k = 0$ los valores de los elementos del vector de estimación inicial $\tilde{\mathbf{U}}^{(0)}$ son arbitrarios, pero para fines prácticos, se asume que $\tilde{\mathbf{U}}^{(0)} = \mathbf{0}$, o $\tilde{U}_{i,j}^{(0)} = 0$ para todo $1 \leq i \leq M_x - 1$ y $1 \leq j \leq M_y - 1$.

Sea el vector residual $\mathbf{r}^{(k)}$ tal que,

$$\mathbf{r}^{(k)} = [\mathbf{r}_i^{(k)}] = [(\mathbf{r}_1^{(k)})^T \quad (\mathbf{r}_2^{(k)})^T \quad (\mathbf{r}_3^{(k)})^T \quad \dots \quad (\mathbf{r}_{M_x-2}^{(k)})^T \quad (\mathbf{r}_{M_x-1}^{(k)})^T]^T,$$

donde, para cada $1 \leq i \leq M_x - 1$ y $1 \leq j \leq M_y - 1$:

$$\mathbf{r}_i^{(k)} = [r_{i,j}^{(k)}] = [r_{i,1}^{(k)} \quad r_{i,2}^{(k)} \quad r_{i,3}^{(k)} \quad \dots \quad r_{i,M_y-2}^{(k)} \quad r_{i,M_y-1}^{(k)}]^T.$$

Sea el vector de direcciones conjugadas $\mathbf{v}^{(k)}$ tal que,

$$\mathbf{v}^{(k)} = [\mathbf{v}_i^{(k)}] = [(\mathbf{v}_1^{(k)})^T \quad (\mathbf{v}_2^{(k)})^T \quad (\mathbf{v}_3^{(k)})^T \quad \dots \quad (\mathbf{v}_{M_x-2}^{(k)})^T \quad (\mathbf{v}_{M_x-1}^{(k)})^T]^T,$$

donde, para cada $1 \leq i \leq M_x - 1$ y $1 \leq j \leq M_y - 1$:

$$\mathbf{v}_i^{(k)} = [v_{i,j}^{(k)}] = [v_{i,1}^{(k)} \quad v_{i,2}^{(k)} \quad v_{i,3}^{(k)} \quad \dots \quad v_{i,M_y-2}^{(k)} \quad v_{i,M_y-1}^{(k)}]^T.$$

Los vectores $\tilde{\mathbf{U}}^{(k)}$, $\mathbf{r}^{(k)}$ y $\mathbf{v}^{(k)}$ son de orden $[(M_x - 1)(M_y - 1)] \times 1$, o también, están particionados en $(M_x - 1)$ bloques en forma de vectores de orden $(M_y - 1) \times 1$. Estas fórmulas resumen el método del gradiente conjugado aplicado al sistema:

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{U}}^{(0)}, \quad (4.85a)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{U}}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{v}^{(k)} \quad (4.85b)$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha^{(k)}\mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)}, \quad (4.85c)$$

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta^{(k)}\mathbf{v}^{(k)}, \quad (4.85d)$$

$$\alpha^{(k)} = \frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|^2}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle} = \frac{\sum_{i=1}^{M_x-1} \sum_{j=1}^{M_y-1} (r_{ij}^{(k)})^2}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)} \rangle}, \quad (4.85e)$$

$$\beta^{(k)} = \frac{\|\mathbf{r}^{(k+1)}\|^2}{\|\mathbf{r}^{(k)}\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{M_x-1} \sum_{j=1}^{M_y-1} (r_{ij}^{(k+1)})^2}{\sum_{i=1}^{M_x-1} \sum_{j=1}^{M_y-1} (r_{ij}^{(k)})^2}, \quad \forall \|\mathbf{r}^{(k)}\| \neq 0. \quad (4.85f)$$

El objetivo es encontrar un vector de estimación $\tilde{\mathbf{U}}^{(k+1)}$ tal que $E(\tilde{\mathbf{U}}^{(k+1)})$ sea mínimo. Si esto se cumple, entonces se establece $\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}}^{(k+1)}$ como solución del sistema, para cada tiempo t_n , $n > 0$.

El algoritmo 4.2 sirve de complemento para el desarrollo computacional del método implícito.

ALGORITMO 4.2: IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DE LA TRANSFORMACIÓN DE UN VECTOR POR BLOQUE “v” A TRAVÉS DE LA MATRIZ POR BLOQUE “A” DEFINIDO EN (4.78)

ENTRADA:

$v_{i,j}$: Valores de los elementos del vector por bloque \mathbf{v} , para $1 \leq i \leq M_x - 1$ y $1 \leq j \leq M_y - 1$,

r_x, r_y y δ : Valores conocidos de los elementos de la matriz por bloque \mathbf{A} .

SALIDA:

$v_{(A)}_{i,j}$: Valores de las componentes del vector $\mathbf{v}_{(A)} = \mathbf{A}\mathbf{v}$, formado a partir de la transformación lineal del Vector \mathbf{v} a través de la matriz \mathbf{A} , para $1 \leq i \leq M_x - 1$ y $1 \leq j \leq M_y - 1$

PROCESO:

PASO 1: Hacer $v_{(A)}_{1,1} = \delta v_{1,1} - r_y v_{1,2} - r_x v_{2,1}$

PASO 2: Hacer $j = 2$

PASO 3: Mientras $j \leq M_y - 2$, Repetir los Pasos 4 y 5.

PASO 4: Hacer $v_{(A)}_{1,j} = -r_y v_{1,j-1} + \delta v_{1,j} - r_y v_{1,j+1} - r_x v_{2,j}$

PASO 5: Hacer $j = j + 1$

PASO 6: Hacer $v_{(A)}_{1,M_y-1} = -r_y v_{1,M_y-2} + \delta v_{1,M_y-1} - r_x v_{2,M_y-1}$

PASO 7: Hacer $i = 2$

PASO 8: Mientras $i \leq M_x - 2$, repetir los pasos desde 9 hasta 15

PASO 9: Hacer $v_{(A)}_{i,1} = -r_x v_{i-1,1} + \delta v_{i,1} - r_y v_{i,2} - r_x v_{i+1,1}$

PASO 10: Hacer $j = 2$

PASO 11: Mientras $j \leq M_y - 1$, repetir los pasos 12 y 13

PASO 12: Hacer $v_{(A)}_{i,j} = -r_x v_{i-1,j} - r_y v_{i,j-1} + \delta v_{i,j} - r_y v_{i,j+1} - r_x v_{i+1,j}$

PASO 13: Hacer $j = j + 1$

PASO 14: Hacer $v_{(A)}_{i,M_y-1} = -r_x v_{i-1,M_y-1} - r_y v_{i,M_y-2} + \delta v_{i,M_y-1} - r_x v_{i+1,M_y-1}$

PASO 15: Hacer $i = i + 1$

PASO 16: Hacer $v_{(A)}_{M_x-1,1} = -r_x v_{M_x-2,1} + \delta v_{M_x-1,1} - r_y v_{M_x-1,2}$

PASO 17: Hacer $j = 2$

PASO 18: Mientras $j \leq M_y - 2$, repetir los pasos 19 y 20

PASO 19: Hacer $v_{(A)}_{M_x-1,j} = -r_x v_{M_x-2,j} - r_y v_{M_x-1,j-1} + \delta v_{M_x-1,j} - r_y v_{M_x-1,j+1}$

PASO 20: Hacer $j = j + 1$

PASO 21: Hacer $v_{(A)}_{M_x-1,M_y-1} = -r_x v_{M_x-2,M_y-1} - r_y v_{M_x-1,M_y-2} + \delta v_{M_x-1,M_y-1}$

ALGORITMO 4.3: IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL MÉTODO IMPLÍCITO

El presente algoritmo es una adaptación del algoritmo 8.2: Método implícito aplicado a la ecuación unidimensional del calor que se encuentra en el texto de Dominguez y Nieves (2014), al caso bidimensional, y resolviendo el sistema de ecuaciones con el método de gradiente conjugado.

ENTRADA:

Considere los mismos datos de entrada del algoritmo 4.1, además de:

TOL: Tolerancia

N: Número máximo de iteraciones

SALIDA:

$U_{i,j}^n$: Valores de las temperaturas en la placa rectangular para cada tiempo t_n , por el método implícito.

PROCESO:

Realizar los pasos del 1 al 10 del algoritmo 4.1.

PASO 11: Hacer $\delta = 1 + 2r_x + 2r_y$

PASO 12: Hacer $n = 1$

PASO 13: Mientras $n \leq M_t$, repetir los pasos 14 al 58.

PASO 14: Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,

$$\text{Hacer } U_{0,j} = g_1(j * \Delta y, n * \Delta t)$$

$$\text{Hacer } U_{M_x,j} = g_2(j * \Delta y, n * \Delta t)$$

PASO 15: Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$,

$$\text{Hacer } U_{i,0} = g_3(i * \Delta x, n * \Delta t)$$

$$\text{Hacer } U_{i,M_y} = g_4(i * \Delta x, n * \Delta t)$$

- PASO 16:** Hacer $U_{0,0} = g_1(0, n * \Delta t)$,
Hacer $U_{M_x,0} = g_2(0, n * \Delta t)$,
Hacer $U_{0,M_y} = g_1(L_y, n * \Delta t)$,
Hacer $U_{M_x,M_y} = g_2(L_y, n * \Delta t)$.
- PASO 17:** Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$,
Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,
Hacer $f_{i,j} = f(i * \Delta x, j * \Delta y, n * \Delta t)$
- PASO 18:** Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$,
Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,
Hacer $\tilde{U}_{i,j} = 0$
- PASO 19:** Hacer $\tilde{U}_{(A),i,j}$ utilizando el Algoritmo 4.2 (Estableciendo $v_{i,j} = \tilde{U}_{i,j}$)
- PASO 20:** Hacer $b_{1,1} = U_{1,1} + r_x U_{0,1} + r_y U_{1,0} + \Delta t * f_{1,1}$
- PASO 21:** Hacer $j = 2$
- PASO 22:** Mientras $j \leq M_y - 2$, repetir los Pasos 23 y 24
- PASO 23:** Hacer $b_{1,j} = U_{1,j} + r_x U_{0,j} + \Delta t * f_{1,j}$
- PASO 24:** Hacer $j = j + 1$
- PASO 25:** Hacer $b_{1,M_y-1} = U_{1,M_y-1} + r_x U_{0,M_y-1} + r_y U_{1,M_y} + \Delta t * f_{1,M_y-1}$
- PASO 26:** Hacer $i = 2$
- PASO 27:** Mientras $i \leq M_x - 2$, repetir los Pasos desde 28 hasta 34
- PASO 28:** Hacer $b_{i,1} = U_{i,1} + r_y U_{i,0} + \Delta t * f_{i,1}$
- PASO 29:** Hacer $j = 2$
- PASO 30:** Mientras $j \leq M_y - 2$, repetir los Pasos 31 y 32
- PASO 31:** Hacer $b_{i,j} = U_{i,j} + \Delta t * f_{i,j}$
- PASO 32:** Hacer $j = j + 1$
- PASO 33:** Hacer $b_{i,M_y-1} = U_{i,M_y-1} + r_y U_{i,M_y} + \Delta t * f_{i,M_y-1}$
- PASO 34:** Hacer $i = i + 1$
- PASO 35:** Hacer $b_{M_x-1,1} = U_{M_x-1,1} + r_y U_{M_x-1,0} + r_x U_{M_x,1} + \Delta t * f_{M_x-1,1}$
- PASO 36:** Hacer $j = 2$
- PASO 37:** Mientras $j \leq M_y - 2$, repetir los pasos 38 y 39
- PASO 38:** Hacer $b_{M_x-1,j} = U_{M_x-1,j} + r_x U_{M_x,j} + \Delta t * f_{M_x-1,j}$
- PASO 39:** Hacer $j = j + 1$
- PASO 40:** Hacer
 $b_{M_x-1,M_y-1} = U_{M_x-1,M_y-1} + r_y U_{M_x-1,M_y} + r_x U_{M_x,M_y-1} + \Delta t * f_{M_x-1,M_y-1}$
- PASO 41:** Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$,
Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,
Hacer $r_{i,j} = b_{i,j} - \tilde{U}_{(A),i,j}$

- PASO 42:** Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$,
 Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,
 Hacer $v_{i,j} = r_{i,j}$
- PASO 43:** Hacer $\eta = \sum_{i=1}^{M_x-1} \sum_{j=1}^{M_y-1} (r_{i,j})^2$
- PASO 44:** Hacer $k = 0$
- PASO 45:** Mientras $k \leq N$, realizar los pasos desde 46 hasta 56
- PASO 46:** Hacer $v_{(A)i,j}$, utilizando el algoritmo 4.2
- PASO 47:** Hacer
- $$\alpha = \frac{\eta}{\sum_{i=1}^{M_x-1} \sum_{j=1}^{M_y-1} (v_{i,j} * v_{(A)i,j})}$$
- PASO 48:** Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$
 Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,
 Hacer $\tilde{U}_{i,j} = \tilde{U}_{i,j} + \alpha * v_{i,j}$,
 Hacer $\tilde{r}_{i,j} = r_{i,j} - \alpha * v_{(A)i,j}$.
- PASO 49:** Hacer $\omega = \sum_{i=1}^{M_x-1} \sum_{j=1}^{M_y-1} (\tilde{r}_{i,j})^2$,
- PASO 50:** Hacer $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{\omega}$,
- PASO 51:** Si $\|\mathbf{r}\| < TOL$, entonces hacer el paso 52.
 Caso contrario, continuar con el Paso 53.
- PASO 52:** Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$,
 Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,
 Hacer $U_{i,j} = \tilde{U}_{i,j}$,
 Imprimir $U_{i,j}$,
 Imprimir $r_{i,j}$,
 PARE.
- PASO 53:** Hacer $\beta = \omega/\eta$,
- PASO 54:** Para $i = 1, 2, \dots, M_x - 1$
 Para $j = 1, 2, \dots, M_y - 1$,
 Hacer $v_{i,j} = r_{i,j} + \beta * v_{i,j}$
- PASO 55:** Hacer $\eta = \omega$
- PASO 56:** Hacer $k = k + 1$
- PASO 57:** Si $k > N$, entonces:
 Imprimir: "Se excedió el máximo número de iteraciones"
 Finalizar iteración.
- PASO 58:** Hacer $n = n + 1$

APLICACIÓN

Resolver el siguiente problema de valor inicial y de frontera:

$$\text{EDP: } \frac{\partial u}{\partial t} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + 50\pi^2 [\text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) - xy] e^{-\pi^2 t}; \quad \begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1; \end{array} t > 0$$

$$\text{CI: } u(x, y, t)|_{t=0} = 50[x + \text{sen}(\pi x)][y + \text{sen}(\pi y)] \quad ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{array}$$

$$\text{CF1: } u(x, y, t)|_{x=0} = 0 \quad ; \quad 0 < y < 1; t \geq 0$$

$$\text{CF2: } u(x, y, t)|_{x=2} = 100[y + \text{sen}(\pi y)] e^{-\pi^2 t} \quad ; \quad 0 < y < 1; t \geq 0$$

$$\text{CF3: } u(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad ; \quad 0 < x < 2; t \geq 0$$

$$\text{CF4: } u(x, y, t)|_{y=1} = 50[x + \text{sen}(\pi x)] e^{-\pi^2 t} \quad ; \quad 0 < x < 2; t \geq 0$$

Solución:

Tomando en cuenta las mismas consideraciones iniciales del problema resuelto por el método explícito: Se requiere estimar la distribución de temperatura en $t_{max} = 1.00$ hora, pero utilizando el método implícito. Al subdividir $[0, L_x] = [0, 2]$ y $[0, L_y] = [0, 1]$ en $M_x = 5$ y $M_y = 4$ subintervalos respectivamente, y $[0, t_{max}]$ en $M_t = 100$ subintervalos, entonces $\Delta x = 0.40$, $\Delta y = 0.25$ y $\Delta t = 0.01$, y cada componente de un nodo se define de la siguiente manera:

$$x_i = i\Delta x \quad , \quad \forall i = 0, 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$y_j = j\Delta y \quad , \quad \forall j = 0, 1, 2, 3, 4;$$

$$t_n = n\Delta t \quad , \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, 100.$$

El dominio espacial discretizado y la malla tridimensional de espacio – tiempo es el mismo que en el caso anterior (ver figura 4.4 y 4.5), sin embargo, el esquema molecular cambia cuando se aproxima por el método implícito la EDP en un nodo (ver figura 4.10).

El coeficiente de difusividad térmica es $a^2 = 1$. La condición inicial, condiciones de frontera y el término fuente son valores conocidos y se describen de la misma manera que en el caso inicial del método explícito. Por (4.67):

$$r_x = \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} = 0.0625, \quad r_y = \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta y)^2} = 0.16, \quad \delta = 1 + 2r_x + 2r_y = 1.445$$

NIVEL 0:

Para el nivel de tiempo $n = 0$, se considera la misma distribución de temperatura $U_{i,j}^0$ descrita en la tabla 4.1 por la condición inicial.

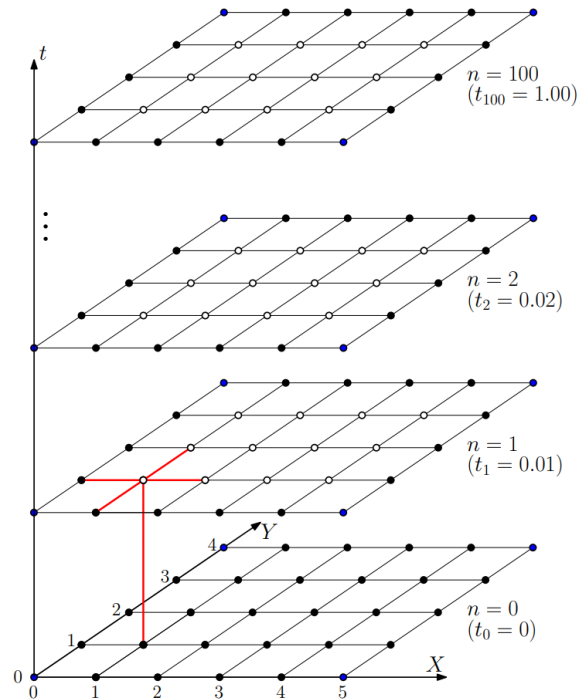


Figura 4.10: Esquema molecular del método implícito en la malla de espacio – tiempo.

Fuente: Elaboración propia

NIVEL 1:

En el nivel de tiempo $n = 1$, se conoce la temperatura descrita únicamente en el contorno de la placa rectangular por las condiciones de frontera de tipo Dirichlet, además de la distribución del término fuente dado en la Tabla 4.4. En la tabla 4.35, se muestra que, en ese nivel, las temperaturas en el interior de la placa son desconocidas.

Tabla 4.35: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 1$, según condiciones de frontera

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ (en el tiempo $t_1 = 0.01$ horas)						
$y_4 = 1.00$	0	61.204080	62.867925	27.733881	29.397726	90.601806
$y_3 = 0.75$	0	$U_{1,3}^1$	$U_{2,3}^1$	$U_{3,3}^1$	$U_{4,3}^1$	132.01651
$y_2 = 0.50$	0	$U_{1,2}^1$	$U_{2,2}^1$	$U_{3,2}^1$	$U_{4,2}^1$	135.90271
$y_1 = 0.25$	0	$U_{1,1}^1$	$U_{2,1}^1$	$U_{3,1}^1$	$U_{4,1}^1$	86.715603
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Se aproxima la EDP del PVIF en cada nodo (i, j, n) , empezando por la primera columna interior de nodos de la malla dada en la figura 4.4, es decir, para $i = 1$ y $j = 1, 2, 3$:

Se aproxima la EDP en el nodo $(1, 1, 1)$. Por la ecuación (4.65), se obtiene:

$$\frac{U_{1,1}^1 - U_{1,1}^0}{\Delta t} = a^2 \left[\frac{U_{2,1}^1 - 2U_{1,1}^1 + U_{0,1}^1}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{1,2}^1 - 2U_{1,1}^1 + U_{1,0}^1}{(\Delta y)^2} \right] + f_{1,1}^1$$

Los nodos involucrados en la última ecuación forman un esquema molecular en la figura 4.10. Las temperaturas $U_{0,1}^1$ y $U_{1,0}^1$ se conocen por las condiciones de frontera; la temperatura $U_{1,1}^0$, por la

condición inicial; y $f_{1,1}^1$, por el término fuente. Se desconocen las temperaturas $U_{1,1}^1$, $U_{2,1}^1$ y $U_{1,2}^1$. Entonces, se obtiene una ecuación con tres incógnitas, y reordenando queda de la misma forma que la ecuación (4.68):

$$\delta U_{1,1}^1 - r_y U_{1,2}^1 - r_x U_{2,1}^1 = U_{1,1}^0 + r_x U_{0,1}^1 + r_y U_{1,0}^1 + \Delta t * f_{1,1}^1$$

Reemplazando los valores conocidos, según las tablas (4.1), (4.4) y (4.35):

$$\delta U_{1,1}^1 - r_y U_{1,2}^1 - r_x U_{2,1}^1 = 64.655268 + (0.0625)(0) + (0.16)(0) + (0.01)(255.96522)$$

$$\delta U_{1,1}^1 - r_y U_{1,2}^1 - r_x U_{2,1}^1 = 67.214920$$

Se aproxima la EDP en el nodo (1,2,1). Por la ecuación (4.65), se obtiene:

$$\frac{U_{1,2}^1 - U_{1,2}^0}{\Delta t} = a^2 \left[\frac{U_{2,2}^1 - 2U_{1,2}^1 + U_{0,2}^1}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{1,3}^1 - 2U_{1,2}^1 + U_{1,1}^1}{(\Delta y)^2} \right] + f_{1,2}^1$$

En esta ecuación, existen cuatro temperaturas desconocidas: $U_{1,2}^1$, $U_{2,2}^1$, $U_{1,3}^1$ y $U_{1,1}^1$. Los valores de $U_{1,2}^0$, $U_{0,2}^1$ y $f_{1,2}^1$ se conocen por la condición inicial, condiciones de frontera y término fuente, respectivamente. Reordenando la ecuación, queda como en (4.69):

$$-r_y U_{1,1}^1 + \delta U_{1,2}^1 - r_y U_{1,3}^1 - r_x U_{2,2}^1 = U_{1,2}^0 + r_x U_{0,2}^1 + \Delta t * f_{1,2}^1$$

Reemplazando los valores conocidos, según las tablas (4.1), (4.4) y (4.35):

$$-r_y U_{1,1}^1 + \delta U_{1,2}^1 - r_y U_{1,3}^1 - r_x U_{2,2}^1 = 101.32924 + (0.0625)(0) + (0.01)(335.79886)$$

$$-r_y U_{1,1}^1 + \delta U_{1,2}^1 - r_y U_{1,3}^1 - r_x U_{2,2}^1 = 104.68723$$

Al aproximar la EDP en el nodo (1,3,1) mediante la ecuación (4.65), se obtiene:

$$\frac{U_{1,3}^1 - U_{1,3}^0}{\Delta t} = a^2 \left[\frac{U_{2,3}^1 - 2U_{1,3}^1 + U_{0,3}^1}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{1,4}^1 - 2U_{1,3}^1 + U_{1,2}^1}{(\Delta y)^2} \right] + f_{1,3}^1$$

En esta ecuación, existen cuatro temperaturas desconocidas: $U_{1,2}^1$, $U_{1,3}^1$, $U_{1,4}^1$ y $U_{2,3}^1$. La temperatura $U_{1,3}^0$ se conoce por la condición inicial; las temperaturas $U_{0,3}^1$ y $U_{1,4}^1$ se conocen por las condiciones de frontera, y $f_{1,3}^1$, por el término fuente. Reordenando la ecuación, queda como en (4.70):

$$-r_y U_{1,2}^1 + \delta U_{1,3}^1 - r_x U_{2,3}^1 = U_{1,3}^0 + r_x U_{0,3}^1 + r_y U_{1,4}^1 + \Delta t * f_{1,3}^1$$

Reemplazando los valores conocidos, según las tablas 4.1, 4.4 y 4.35:

$$-r_y U_{1,2}^1 + \delta U_{1,3}^1 - r_x U_{2,3}^1 = 98.431681 + (0.0625)(0) + (0.16)(61.204080)$$

$$+ (0.01)(166.54483)$$

$$-r_y U_{1,2}^1 + \delta U_{1,3}^1 - r_x U_{2,3}^1 = 109.88978$$

Hasta el momento, se ha planteado las ecuaciones en los nodos de la primera columna interior de la malla. Alternativamente, se puede usar (4.68) – (4.76) de forma directa para las siguientes columnas interiores de nodos y reemplazar los valores conocidos utilizando las tablas 4.1, 4.4 y 4.35.

En la segunda columna interior de nodos de la malla, es decir, para $i = 2$ y $j = 1,2,3$:

Por la ecuación (4.71), en el nodo (2,1,1),

$$\begin{aligned} -r_x U_{1,1}^1 + \delta U_{2,1}^1 - r_y U_{2,2}^1 - r_x U_{3,1}^1 &= U_{2,1}^0 + r_y U_{2,0}^1 + \Delta t * f_{2,1}^1 \\ -r_x U_{1,1}^1 + \delta U_{2,1}^1 - r_y U_{2,2}^1 - r_x U_{3,1}^1 &= 67.377006 \end{aligned}$$

Por la ecuación (4.72), en el nodo (2,2,1),

$$\begin{aligned} -r_x U_{1,2}^1 - r_y U_{2,1}^1 + \delta U_{2,2}^1 - r_y U_{2,3}^1 - r_x U_{3,2}^1 &= U_{2,2}^0 + \Delta t * f_{2,2}^1 \\ -r_x U_{1,2}^1 - r_y U_{2,1}^1 + \delta U_{2,2}^1 - r_y U_{2,3}^1 - r_x U_{3,2}^1 &= 104.92349 \end{aligned}$$

Por la ecuación (4.73), en el nodo (2,3,1),

$$\begin{aligned} -r_x U_{1,3}^1 - r_y U_{2,2}^1 + \delta U_{2,3}^1 - r_x U_{3,3}^1 &= U_{2,3}^0 + r_y U_{2,4}^1 + \Delta t * f_{2,3}^1 \\ -r_x U_{1,3}^1 - r_y U_{2,2}^1 + \delta U_{2,3}^1 - r_x U_{3,3}^1 &= 110.34210 \end{aligned}$$

Para la tercera columna ($i = 3$ y $j = 1,2,3$):

Por la ecuación (4.71), en el nodo (3,1,1),

$$\begin{aligned} -r_x U_{2,1}^1 + \delta U_{3,1}^1 - r_y U_{3,2}^1 - r_x U_{4,1}^1 &= U_{3,1}^0 + r_y U_{3,0}^1 + \Delta t * f_{3,1}^1 \\ -r_x U_{2,1}^1 + \delta U_{3,1}^1 - r_y U_{3,2}^1 - r_x U_{4,1}^1 &= 26.098162 \end{aligned}$$

Por la ecuación (4.72), en el nodo (3,2,1),

$$\begin{aligned} -r_x U_{2,2}^1 - r_y U_{3,1}^1 + \delta U_{3,2}^1 - r_y U_{3,3}^1 - r_x U_{4,2}^1 &= U_{3,2}^0 + \Delta t * f_{3,2}^1 \\ -r_x U_{2,2}^1 - r_y U_{3,1}^1 + \delta U_{3,2}^1 - r_y U_{3,3}^1 - r_x U_{4,2}^1 &= 40.605495 \end{aligned}$$

Por la ecuación (4.73), en el nodo (3,3,1),

$$\begin{aligned} -r_x U_{2,3}^1 - r_y U_{3,2}^1 + \delta U_{3,3}^1 - r_x U_{4,3}^1 &= U_{3,3}^0 + r_y U_{3,4}^1 + \Delta t * f_{3,3}^1 \\ -r_x U_{2,3}^1 - r_y U_{3,2}^1 + \delta U_{3,3}^1 - r_x U_{4,3}^1 &= 43.158340 \end{aligned}$$

Para la cuarta columna ($i = 4$ y $j = 1,2,3$):

Por la ecuación (4.74), en el nodo (4,1,1),

$$\begin{aligned} -r_x U_{3,1}^1 + \delta U_{4,1}^1 - r_y U_{4,2}^1 &= U_{4,1}^0 + r_y U_{4,0}^1 + r_x U_{5,1}^1 + \Delta t * f_{4,1}^1 \\ -r_x U_{3,1}^1 + \delta U_{4,1}^1 - r_y U_{4,2}^1 &= 31.679973 \end{aligned}$$

Por la ecuación (4.75), en el nodo (4,2,1),

$$\begin{aligned} -r_x U_{3,2}^1 - r_y U_{4,1}^1 + \delta U_{4,2}^1 - r_y U_{4,3}^1 &= U_{4,2}^0 + r_x U_{5,2}^1 + \Delta t * f_{4,2}^1 \\ -r_x U_{3,2}^1 - r_y U_{4,1}^1 + \delta U_{4,2}^1 - r_y U_{4,3}^1 &= 49.335672 \end{aligned}$$

Por la ecuación (4.76), en el nodo (4,3,1),

$$\begin{aligned} -r_x U_{3,3}^1 - r_y U_{4,2}^1 + \delta U_{4,3}^1 &= U_{4,3}^0 + r_y U_{4,4}^1 + r_x U_{5,3}^1 + \Delta t * f_{4,3}^1 \\ -r_x U_{3,3}^1 - r_y U_{4,2}^1 + \delta U_{4,3}^1 &= 51.861687 \end{aligned}$$

Las 12 ecuaciones constituyen un sistema lineal cuyas incógnitas, que son los valores de temperatura desconocidas, se ubican en el primer miembro de cada igualdad. El sistema de ecuaciones se expresa en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \delta & -r_y & 0 & -r_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_y & \delta & -r_y & 0 & -r_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_y & \delta & 0 & 0 & -r_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_x & 0 & 0 & \delta & -r_y & 0 & -r_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_x & 0 & -r_y & \delta & -r_y & 0 & -r_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_x & 0 & -r_y & \delta & 0 & 0 & -r_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_x & 0 & 0 & \delta & -r_y & 0 & -r_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_x & 0 & -r_y & \delta & -r_y & 0 & -r_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_x & 0 & -r_y & \delta & 0 & 0 & -r_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_x & 0 & 0 & \delta & -r_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_x & 0 & -r_y & \delta & -r_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_x & 0 & -r_y & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1}^1 \\ U_{1,2}^1 \\ U_{1,3}^1 \\ U_{2,1}^1 \\ U_{2,2}^1 \\ U_{2,3}^1 \\ U_{3,1}^1 \\ U_{3,2}^1 \\ U_{3,3}^1 \\ U_{4,1}^1 \\ U_{4,2}^1 \\ U_{4,3}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1,1}^0 + r_x U_{0,1}^1 + r_y U_{1,0}^1 + \Delta t * f_{1,1}^1 \\ U_{1,2}^0 + r_x U_{0,2}^1 + \Delta t * f_{1,2}^1 \\ U_{1,3}^0 + r_x U_{0,3}^1 + r_y U_{1,4}^1 + \Delta t * f_{1,3}^1 \\ U_{2,1}^0 + r_y U_{2,0}^1 + \Delta t * f_{2,1}^1 \\ U_{2,2}^0 + \Delta t * f_{2,2}^1 \\ U_{2,3}^0 + r_y U_{2,4}^1 + \Delta t * f_{2,3}^1 \\ U_{3,1}^0 + r_y U_{3,0}^1 + \Delta t * f_{3,1}^1 \\ U_{3,2}^0 + \Delta t * f_{3,2}^1 \\ U_{3,3}^0 + r_y U_{3,4}^1 + \Delta t * f_{3,3}^1 \\ U_{4,1}^0 + r_y U_{4,0}^1 + r_x U_{5,1}^1 + \Delta t * f_{4,1}^1 \\ U_{4,2}^0 + r_x U_{5,2}^1 + \Delta t * f_{4,2}^1 \\ U_{4,3}^0 + r_y U_{4,4}^1 + r_x U_{5,3}^1 + \Delta t * f_{4,3}^1 \end{bmatrix}$$

La matriz \mathbf{A} es simétrica y definida positiva para cualquier valor de r_x , r_y y δ . Por lo tanto, es posible resolver el sistema utilizando el método del Gradiente conjugado descrito en (4.85).

Sean los vectores de estimación inicial:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(0)} &= [(\tilde{\mathbf{U}}_1^{(0)})^T \quad (\tilde{\mathbf{U}}_2^{(0)})^T \quad (\tilde{\mathbf{U}}_3^{(0)})^T \quad (\tilde{\mathbf{U}}_4^{(0)})^T]^T, \\ &= [\tilde{U}_{1,1}^{(0)} \quad \tilde{U}_{1,2}^{(0)} \quad \tilde{U}_{1,3}^{(0)} \quad \tilde{U}_{2,1}^{(0)} \quad \tilde{U}_{2,2}^{(0)} \quad \tilde{U}_{2,3}^{(0)} \quad \tilde{U}_{3,1}^{(0)} \quad \tilde{U}_{3,2}^{(0)} \quad \tilde{U}_{3,3}^{(0)} \quad \tilde{U}_{4,1}^{(0)} \quad \tilde{U}_{4,2}^{(0)} \quad \tilde{U}_{4,3}^{(0)}]^T, \end{aligned}$$

el vector \mathbf{b} :

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= [(\mathbf{b}_1)^T \quad (\mathbf{b}_2)^T \quad (\mathbf{b}_3)^T \quad (\mathbf{b}_4)^T]^T, \\ &= [b_{1,1} \quad b_{1,2} \quad b_{1,3} \quad b_{2,1} \quad b_{2,2} \quad b_{2,3} \quad b_{3,1} \quad b_{3,2} \quad b_{3,3} \quad b_{4,1} \quad b_{4,2} \quad b_{4,3}]^T, \end{aligned}$$

el vector residual inicial:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(0)} &= [(\mathbf{r}_1^{(0)})^T \quad (\mathbf{r}_2^{(0)})^T \quad (\mathbf{r}_3^{(0)})^T \quad (\mathbf{r}_4^{(0)})^T]^T, \\ &= [r_{1,1}^{(0)} \quad r_{1,2}^{(0)} \quad r_{1,3}^{(0)} \quad r_{2,1}^{(0)} \quad r_{2,2}^{(0)} \quad r_{2,3}^{(0)} \quad r_{3,1}^{(0)} \quad r_{3,2}^{(0)} \quad r_{3,3}^{(0)} \quad r_{4,1}^{(0)} \quad r_{4,2}^{(0)} \quad r_{4,3}^{(0)}]^T, \end{aligned}$$

y la dirección de búsqueda:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(0)} &= [(\mathbf{v}_1^{(0)})^T \quad (\mathbf{v}_2^{(0)})^T \quad (\mathbf{v}_3^{(0)})^T \quad (\mathbf{v}_4^{(0)})^T]^T, \\ &= [v_{1,1}^{(0)} \quad v_{1,2}^{(0)} \quad v_{1,3}^{(0)} \quad v_{2,1}^{(0)} \quad v_{2,2}^{(0)} \quad v_{2,3}^{(0)} \quad v_{3,1}^{(0)} \quad v_{3,2}^{(0)} \quad v_{3,3}^{(0)} \quad v_{4,1}^{(0)} \quad v_{4,2}^{(0)} \quad v_{4,3}^{(0)}]^T. \end{aligned}$$

Con la transformación lineal de $\tilde{\mathbf{U}}^{(0)}$ a través de la matriz \mathbf{A} , es decir, $\tilde{\mathbf{U}}_{(\mathbf{A})}^{(0)} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{U}}^{(0)}$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}_{(\mathbf{A})}^{(0)} &= \left[\left(\tilde{\mathbf{U}}_{(\mathbf{A})_1}^{(0)} \right)^T \quad \left(\tilde{\mathbf{U}}_{(\mathbf{A})_2}^{(0)} \right)^T \quad \left(\tilde{\mathbf{U}}_{(\mathbf{A})_3}^{(0)} \right)^T \quad \left(\tilde{\mathbf{U}}_{(\mathbf{A})_4}^{(0)} \right)^T \right]^T, \\ &= \left[\tilde{U}_{(\mathbf{A})_{1,1}}^{(0)} \quad \tilde{U}_{(\mathbf{A})_{1,2}}^{(0)} \quad \tilde{U}_{(\mathbf{A})_{1,3}}^{(0)} \quad \tilde{U}_{(\mathbf{A})_{2,1}}^{(0)} \quad \dots \quad \tilde{U}_{(\mathbf{A})_{3,3}}^{(0)} \quad \tilde{U}_{(\mathbf{A})_{4,1}}^{(0)} \quad \tilde{U}_{(\mathbf{A})_{4,2}}^{(0)} \quad \tilde{U}_{(\mathbf{A})_{4,3}}^{(0)} \right]^T,\end{aligned}$$

se definen los valores de cada elemento:

$$r_{i,j}^{(0)} = b_{i,j} - \tilde{U}_{(\mathbf{A})_{i,j}}^{(0)}, \quad v_{i,j}^{(0)} = r_{i,j}^{(0)}, \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq 4, \\ 1 \leq j \leq 3. \end{array}$$

Entonces, según tabla 4.36:

$$\eta^{(0)} = \langle \mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{r}^{(0)} \rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \left(r_{i,j}^{(0)} \right)^2 = 65596.829.$$

Tabla 4.36: Vectores iniciales y cálculos previos a la iteración $k = 0$, nivel $n = 1$

(i, j)	$b_{i,j}$	$\tilde{U}_{i,j}^{(0)}$	$\tilde{U}_{(\mathbf{A})_{i,j}}^{(0)}$	$r_{i,j}^{(0)}$	$\left(r_{i,j}^{(0)} \right)^2$	$v_{i,j}^{(0)}$
(1,1)	67.214920	0	0	67.214920	4517.8455	67.214920
(1,2)	104.68723	0	0	104.68723	10959.416	104.68723
(1,3)	109.88978	0	0	109.88978	12075.764	109.88978
(2,1)	67.377006	0	0	67.377006	4539.6610	67.377006
(2,2)	104.92349	0	0	104.92349	11008.938	104.92349
(2,3)	110.34210	0	0	110.34210	12175.378	110.34210
(3,1)	26.098162	0	0	26.098162	681.11406	26.098162
(3,2)	40.605495	0	0	40.605495	1648.8062	40.605495
(3,3)	43.158340	0	0	43.158340	1862.6423	43.158340
(4,1)	31.679973	0	0	31.679973	1003.6207	31.679973
(4,2)	49.335672	0	0	49.335672	2434.0085	49.335672
(4,3)	51.861687	0	0	51.861687	2689.6346	51.861687
				$\eta^{(0)}$	65596.829	

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Se inicia con la primera iteración $k = 0$. En la tabla 4.37, se detallan los valores que alcanzan cada elemento de los vectores que intervienen en el proceso. Se alcanza la última iteración cuando se cumpla el criterio de parada impuesto: $\|\mathbf{r}^{(k)}\|_2 < TOL = 10^{-5}$.

Se define $\mathbf{v}_{(\mathbf{A})}^{(0)}$ como $\mathbf{v}_{(\mathbf{A})}^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(0)}$, es decir, la transformación lineal de $\mathbf{v}^{(0)}$ a través de la matriz \mathbf{A} :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{(\mathbf{A})}^{(0)} &= \left[\left(\mathbf{v}_{(\mathbf{A})_1}^{(0)} \right)^T \quad \left(\mathbf{v}_{(\mathbf{A})_2}^{(0)} \right)^T \quad \left(\mathbf{v}_{(\mathbf{A})_3}^{(0)} \right)^T \quad \left(\mathbf{v}_{(\mathbf{A})_4}^{(0)} \right)^T \right]^T, \\ &= \left[v_{(\mathbf{A})_{1,1}}^{(0)} \quad v_{(\mathbf{A})_{1,2}}^{(0)} \quad v_{(\mathbf{A})_{1,3}}^{(0)} \quad v_{(\mathbf{A})_{2,1}}^{(0)} \quad \dots \quad v_{(\mathbf{A})_{3,3}}^{(0)} \quad v_{(\mathbf{A})_{4,1}}^{(0)} \quad v_{(\mathbf{A})_{4,2}}^{(0)} \quad v_{(\mathbf{A})_{4,3}}^{(0)} \right]^T,\end{aligned}$$

luego:

$$\langle \mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{v}_{(\mathbf{A})}^{(0)} \rangle = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \left(v_{i,j}^{(0)} * v_{(\mathbf{A})_{i,j}}^{(0)} \right) = 75232.634.$$

Se estima que la solución óptima se alcanza en la dirección de búsqueda:

$$\alpha^{(0)} = \frac{\eta^{(0)}}{\langle \mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{v}_{(\mathbf{A})}^{(0)} \rangle} = 0.87191988.$$

Se actualiza el vector de estimación

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}^{(1)} &= \left[\left(\tilde{\mathbf{U}}_1^{(1)} \right)^T \quad \left(\tilde{\mathbf{U}}_2^{(1)} \right)^T \quad \left(\tilde{\mathbf{U}}_3^{(1)} \right)^T \quad \left(\tilde{\mathbf{U}}_4^{(1)} \right)^T \right] \\ &= \left[\tilde{U}_{1,1}^{(1)} \quad \tilde{U}_{1,2}^{(1)} \quad \tilde{U}_{1,3}^{(1)} \quad \tilde{U}_{2,1}^{(1)} \quad \tilde{U}_{2,2}^{(1)} \quad \tilde{U}_{2,3}^{(1)} \quad \tilde{U}_{3,1}^{(1)} \quad \tilde{U}_{3,2}^{(1)} \quad \tilde{U}_{3,3}^{(1)} \quad \tilde{U}_{4,1}^{(1)} \quad \tilde{U}_{4,2}^{(1)} \quad \tilde{U}_{4,3}^{(1)} \right]^T,\end{aligned}$$

y el vector residual

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{(1)} &= \left[\left(\mathbf{r}_1^{(1)} \right)^T \quad \left(\mathbf{r}_2^{(1)} \right)^T \quad \left(\mathbf{r}_3^{(1)} \right)^T \quad \left(\mathbf{r}_4^{(1)} \right)^T \right]^T, \\ &= \left[r_{1,1}^{(1)} \quad r_{1,2}^{(1)} \quad r_{1,3}^{(1)} \quad r_{2,1}^{(1)} \quad r_{2,2}^{(1)} \quad r_{2,3}^{(1)} \quad r_{3,1}^{(1)} \quad r_{3,2}^{(1)} \quad r_{3,3}^{(1)} \quad r_{4,1}^{(1)} \quad r_{4,2}^{(1)} \quad r_{4,3}^{(1)} \right]^T,\end{aligned}$$

de tal manera que:

$$\tilde{U}_{i,j}^{(1)} = \tilde{U}_{i,j}^{(0)} + \alpha^{(0)} v_{i,j}^{(0)}, \quad r_{i,j}^{(1)} = r_{i,j}^{(0)} - \alpha^{(0)} v_{(A)i,j}^{(0)}, \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq 4, \\ 1 \leq j \leq 3. \end{array}$$

Luego:

$$\omega^{(1)} = \langle \mathbf{r}^{(1)}; \mathbf{r}^{(1)} \rangle = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \left(r_{i,j}^{(1)} \right)^2 = 245.77906, \quad \|\mathbf{r}^{(1)}\|_2 = \sqrt{\omega^{(1)}} = 15.677342$$

Como $\|\mathbf{r}^{(1)}\|_2 \not\leq TOL$ (no satisface el criterio de parada), entonces se determina una nueva dirección de búsqueda conjugada:

$$\beta^{(0)} = \frac{\omega^{(1)}}{\eta^{(0)}} = 0.037468132$$

La nueva dirección de búsqueda:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(1)} &= \left[\left(\mathbf{v}_1^{(1)} \right)^T \quad \left(\mathbf{v}_2^{(1)} \right)^T \quad \left(\mathbf{v}_3^{(1)} \right)^T \quad \left(\mathbf{v}_4^{(1)} \right)^T \right]^T, \\ &= \left[v_{1,1}^{(1)} \quad v_{1,2}^{(1)} \quad v_{1,3}^{(1)} \quad v_{2,1}^{(1)} \quad v_{2,2}^{(1)} \quad v_{2,3}^{(1)} \quad v_{3,1}^{(1)} \quad v_{3,2}^{(1)} \quad v_{3,3}^{(1)} \quad v_{4,1}^{(1)} \quad v_{4,2}^{(1)} \quad v_{4,3}^{(1)} \right]^T,\end{aligned}$$

se define de tal manera que:

$$v_{i,j}^{(1)} = r_{i,j}^{(1)} + \beta^{(0)} v_{i,j}^{(0)}, \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq 4, \\ 1 \leq j \leq 3. \end{array}$$

Tabla 4.37: Vectores y cálculos auxiliares en la iteración $k = 0$, nivel $n = 1$

(i, j)	$v_{i,j}^{(0)}$	$v_{(A)i,j}^{(0)}$	$v_{i,j}^{(0)} \cdot v_{(A)i,j}^{(0)}$	$\tilde{U}_{i,j}^{(1)}$	$r_{i,j}^{(1)}$	$\left(r_{i,j}^{(1)} \right)^2$	$v_{i,j}^{(1)}$
(1,1)	67.214920	76.164540	5119.3935	58.606025	0.8055434	0.6489002	1.0573852
(1,2)	104.68723	116.37857	12183.350	91.278875	3.2144357	10.332597	3.6066792
(1,3)	109.88978	135.14440	14850.988	95.815085	-7.945305	63.127865	-7.533568
(2,1)	67.377006	74.739949	5035.7540	58.747351	2.2097593	4.8830360	2.4622083
(2,2)	104.92349	114.09858	11971.621	91.484873	5.4386612	29.579036	5.8317899
(2,3)	110.34210	133.09107	14685.547	96.209468	-5.702648	32.520197	-5.289217
(3,1)	26.098162	25.023904	653.07790	22.755506	4.2793229	18.312604	4.3771078
(3,2)	40.605495	37.952702	1541.0882	35.404738	7.5137792	56.456878	7.6659204
(3,3)	43.158340	45.729185	1973.5957	37.630614	3.2861541	10.798809	3.4478603
(4,1)	31.679973	36.252719	1148.4852	27.622399	0.0705071	0.0049713	0.1892061
(4,2)	49.335672	55.385537	2732.4827	43.016753	1.0439213	1.0897718	1.2287729
(4,3)	51.861687	64.349034	3337.2495	45.219236	-4.245515	18.024397	-4.051199
	$\langle \mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{v}_{(A)}^{(0)} \rangle$		75232.634		$\omega^{(1)}$	245.77906	

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Al establecer $\eta^{(1)} = \omega^{(1)} = 245.77906$, se completa la primera iteración.

Con la actualizada dirección de búsqueda conjugada $\mathbf{v}^{(1)}$, se inicia con la nueva iteración $k = 1$. En la tabla 4.38, se detallan los valores que alcanzan cada elemento de los vectores que intervienen en la presente iteración.

Se define $\mathbf{v}_{(A)}^{(1)}$ como $\mathbf{v}_{(A)}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(1)}$, es decir, la transformación lineal de $\mathbf{v}^{(0)}$ a través de la matriz \mathbf{A} :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{(A)}^{(1)} &= \left[\left(\mathbf{v}_{(A)1}^{(1)} \right)^T \quad \left(\mathbf{v}_{(A)2}^{(1)} \right)^T \quad \left(\mathbf{v}_{(A)3}^{(1)} \right)^T \quad \left(\mathbf{v}_{(A)4}^{(1)} \right)^T \right]^T, \\ &= \left[v_{(A)1,1}^{(1)} \quad v_{(A)1,2}^{(1)} \quad v_{(A)1,3}^{(1)} \quad v_{(A)2,1}^{(1)} \quad \dots \quad v_{(A)3,3}^{(1)} \quad v_{(A)4,1}^{(1)} \quad v_{(A)4,2}^{(1)} \quad v_{(A)4,3}^{(1)} \right]^T,\end{aligned}$$

luego:

$$\langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}_{(A)}^{(1)} \rangle = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \left(v_{i,j}^{(1)} * v_{(A)i,j}^{(1)} \right) = 339.42840.$$

Se estima que la solución óptima se alcanza en la dirección de búsqueda:

$$\alpha^{(1)} = \frac{\eta^{(1)}}{\langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}_{(A)}^{(1)} \rangle} = 0.72409693.$$

Se actualiza el vector de estimación

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}^{(2)} &= \left[\left(\tilde{\mathbf{U}}_1^{(2)} \right)^T \quad \left(\tilde{\mathbf{U}}_2^{(2)} \right)^T \quad \left(\tilde{\mathbf{U}}_3^{(2)} \right)^T \quad \left(\tilde{\mathbf{U}}_2^{(2)} \right)^T \right] \\ &= \left[\tilde{u}_{1,1}^{(2)} \quad \tilde{u}_{1,2}^{(2)} \quad \tilde{u}_{1,3}^{(2)} \quad \tilde{u}_{2,1}^{(2)} \quad \tilde{u}_{2,2}^{(2)} \quad \tilde{u}_{2,3}^{(2)} \quad \tilde{u}_{3,1}^{(2)} \quad \tilde{u}_{3,2}^{(2)} \quad \tilde{u}_{3,3}^{(2)} \quad \tilde{u}_{4,1}^{(2)} \quad \tilde{u}_{4,2}^{(2)} \quad \tilde{u}_{4,3}^{(2)} \right]^T,\end{aligned}$$

y el vector residual

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{(2)} &= \left[\left(\mathbf{r}_1^{(2)} \right)^T \quad \left(\mathbf{r}_2^{(2)} \right)^T \quad \left(\mathbf{r}_3^{(2)} \right)^T \quad \left(\mathbf{r}_4^{(2)} \right)^T \right]^T, \\ &= \left[r_{1,1}^{(2)} \quad r_{1,2}^{(2)} \quad r_{1,3}^{(2)} \quad r_{2,1}^{(2)} \quad r_{2,2}^{(2)} \quad r_{2,3}^{(2)} \quad r_{3,1}^{(2)} \quad r_{3,2}^{(2)} \quad r_{3,3}^{(2)} \quad r_{4,1}^{(2)} \quad r_{4,2}^{(2)} \quad r_{4,3}^{(2)} \right]^T,\end{aligned}$$

de tal manera que:

$$\tilde{u}_{i,j}^{(2)} = \tilde{u}_{i,j}^{(1)} + \alpha^{(1)} v_{i,j}^{(1)}, \quad r_{i,j}^{(2)} = r_{i,j}^{(1)} - \alpha^{(1)} v_{(A)i,j}^{(1)}, \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq 4, \\ 1 \leq j \leq 3. \end{matrix}$$

Luego:

$$\omega^{(2)} = \langle \mathbf{r}^{(2)}; \mathbf{r}^{(2)} \rangle = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \left(r_{i,j}^{(2)} \right)^2 = 3.0878819, \quad \|\mathbf{r}^{(2)}\|_2 = \sqrt{\omega^{(2)}} = 1.7572370.$$

Como $\|\mathbf{r}^{(2)}\|_2 \not\leq TOL$ (no satisface el criterio de parada), entonces se determina una nueva dirección de búsqueda conjugada:

$$\beta^{(1)} = \frac{\omega^{(2)}}{\eta^{(1)}} = 0.012563649.$$

La nueva dirección de búsqueda:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(2)} &= \left[\left(\mathbf{v}_1^{(2)} \right)^T \quad \left(\mathbf{v}_2^{(2)} \right)^T \quad \left(\mathbf{v}_3^{(2)} \right)^T \quad \left(\mathbf{v}_4^{(2)} \right)^T \right]^T, \\ &= \left[v_{1,1}^{(2)} \quad v_{1,2}^{(2)} \quad v_{1,3}^{(2)} \quad v_{2,1}^{(2)} \quad v_{2,2}^{(2)} \quad v_{2,3}^{(2)} \quad v_{3,1}^{(2)} \quad v_{3,2}^{(2)} \quad v_{3,3}^{(2)} \quad v_{4,1}^{(2)} \quad v_{4,2}^{(2)} \quad v_{4,3}^{(2)} \right]^T,\end{aligned}$$

se define de tal manera que:

$$v_{i,j}^{(2)} = r_{i,j}^{(2)} + \beta^{(1)} v_{i,j}^{(1)}, \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq 4, \\ 1 \leq j \leq 3. \end{matrix}$$

Tabla 4.38: Vectores y cálculos auxiliares en la iteración $k = 1$, nivel $n = 1$

(i,j)	$v_{i,j}^{(1)}$	$v_{(A)i,j}^{(1)}$	$v_{i,j}^{(1)} \cdot v_{(A)i,j}^{(1)}$	$\tilde{U}_{i,j}^{(2)}$	$r_{i,j}^{(2)}$	$(r_{i,j}^{(2)})^2$	$v_{i,j}^{(2)}$
(1,1)	1.0573852	0.7969649	0.8426989	59.371674	0.2284636	0.0521956	0.2417482
(1,2)	3.6066792	5.8833539	21.219370	93.890460	-1.045683	1.0934523	-1.000370
(1,3)	-7.533568	-11.13250	83.867436	90.360052	0.1157034	0.0133873	0.0210543
(2,1)	2.4622083	2.2851488	5.6265124	60.530228	0.5550900	0.3081249	0.5860244
(2,2)	5.8317899	8.1747204	47.673252	95.707654	-0.480629	0.2310039	-0.407360
(2,3)	-5.289217	-8.320648	44.009715	92.379562	0.3223076	0.1038822	0.2558557
(3,1)	4.3771078	4.9326601	21.590785	25.924957	0.7075988	0.5006961	0.7625913
(3,2)	7.6659204	9.3839749	71.936805	40.955607	0.7188718	0.5167767	0.8151838
(3,3)	3.4478603	4.3393869	14.961600	40.127199	0.1440174	0.0207410	0.1873351
(4,1)	0.1892061	-0.196770	-0.037230	27.759402	0.2129878	0.0453638	0.2153649
(4,2)	1.2287729	1.9143756	2.3523329	43.906504	-0.342272	0.1171502	-0.326834
(4,3)	-4.051199	-6.266077	25.385125	42.285775	0.2917324	0.0851078	0.2408346
	$\langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}_{(A)}^{(1)} \rangle$		339.42840		$\omega^{(2)}$	3.0878819	

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Al establecer $\eta^{(2)} = \omega^{(2)} = 3.0878819$, se completa la segunda iteración.

Con esta dirección actualizada, se da inicio a una nueva iteración $k = 2$. Y así sucesivamente, hasta que se cumpla el criterio de parada $\|\mathbf{r}^{(k)}\|_2 < 10^{-5}$ para algún valor de iteración k . En la tabla 4.39, se muestra la evolución de los elementos del vector de estimación en cada iteración:

Tabla 4.39: Evolución del vector de estimación a través de iteraciones, nivel $n = 1$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tilde{U}_{1,1}^{(k)}$	0	58.606025	59.371674	59.540201	59.470970	59.465372	59.466151	59.466150	59.466149
$\tilde{U}_{1,2}^{(k)}$	0	91.278875	93.890460	93.193087	93.168030	93.166625	93.166240	93.166316	93.166317
$\tilde{U}_{1,3}^{(k)}$	0	95.815085	90.360052	90.374729	90.370708	90.368748	90.368658	90.368615	90.368621
$\tilde{U}_{2,1}^{(k)}$	0	58.747351	60.530228	60.938755	60.916744	60.913011	60.912840	60.912879	60.912875
$\tilde{U}_{2,2}^{(k)}$	0	91.484873	95.707654	95.423677	95.431900	95.432794	95.432684	95.432595	95.432596
$\tilde{U}_{2,3}^{(k)}$	0	96.209468	92.379562	92.557923	92.579365	92.580661	92.580283	92.580266	92.580258
$\tilde{U}_{3,1}^{(k)}$	0	22.755506	25.924957	26.456571	26.507275	26.500134	26.499940	26.499978	26.499983
$\tilde{U}_{3,2}^{(k)}$	0	35.404738	40.955607	41.523884	41.509388	41.517314	41.517131	41.517111	41.517112
$\tilde{U}_{3,3}^{(k)}$	0	37.630614	40.127199	40.257794	40.306561	40.305708	40.305973	40.305955	40.305950
$\tilde{U}_{4,1}^{(k)}$	0	27.622399	27.759402	27.909536	27.905915	27.911989	27.912295	27.912337	27.912340
$\tilde{U}_{4,2}^{(k)}$	0	43.016753	43.906504	43.678663	43.727903	43.731022	43.731898	43.731928	43.731928
$\tilde{U}_{4,3}^{(k)}$	0	45.219236	42.285775	42.453665	42.469839	42.475795	42.476004	42.476065	42.476068
$\ \mathbf{r}^{(k)}\ _2$		15.677342	1.7572370	0.1699719	0.0232196	0.0020194	0.0002414	0.0000207	1.4568536×10^{-6}

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

En la iteración $k = 8$, se cumple el criterio de parada. Para el tiempo t_1 , los resultados se resumen de la siguiente forma:

Tabla 4.40: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 1$, método implícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ por el método implícito (en el tiempo $t_1 = 0.01$ horas)						
$y_4 = 1.00$	0	61.204080	62.867925	27.733881	29.397726	90.601806
$y_3 = 0.75$	0	90.368621	92.580258	40.305950	42.476068	132.01651
$y_2 = 0.50$	0	93.166317	95.432596	41.517112	43.731928	135.90271
$y_1 = 0.25$	0	59.466149	60.912875	26.499983	27.912340	86.715603
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

NIVEL 2:

Para calcular las temperaturas de cada nodo transcurrido el tiempo $t_2 = 0.02$ horas, se requiere de los valores de temperaturas calculadas en el nivel $n = 1$, es decir, en el tiempo $t_1 = 0.01$ horas, dado por la tabla 4.40. Además, se requiere del término fuente y las condiciones de frontera en el nivel de tiempo $n = 2$, dados por las tablas 4.41 y 4.42, respectivamente. Al igual que en el inicio del nivel anterior, se desconocen los valores de temperatura en los nodos interiores de la malla.

Tabla 4.41: Distribución del término fuente en la placa, nivel $n = 2$

Distribución del término fuente $f_{i,j}^n$ (en el tiempo $t_2 = 0.02$ horas)						
$y_4 = 1.00$						
$y_3 = 0.75$		150.89262	-74.68630	-532.9374	-758.5163	
$y_2 = 0.50$		304.23983	76.068515	-481.1510	-709.3223	
$y_1 = 0.25$		231.90911	87.346694	-289.8880	-434.4504	
$y_0 = 0.00$						
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.42: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 2$, según condiciones de frontera

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_2 = 0.02$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	55.452001	56.959475	25.127397	26.634870	82.086872
$y_3 = 0.75$	0	$U_{1,3}^2$	$U_{2,3}^2$	$U_{3,3}^2$	$U_{4,3}^2$	119.60934
$y_2 = 0.50$	0	$U_{1,2}^2$	$U_{2,2}^2$	$U_{3,2}^2$	$U_{4,2}^2$	123.13031
$y_1 = 0.25$	0	$U_{1,1}^2$	$U_{2,1}^2$	$U_{3,1}^2$	$U_{4,1}^2$	78.565902
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica

Se utiliza el conjunto de ecuaciones (4.68) – (4.76) para cada nodo en particular, sustituyendo los valores conocidos del segundo miembro de cada ecuación según tablas 4.40, 4.41 y 4.42.

Las 12 ecuaciones constituyen un sistema lineal cuyas incógnitas, que son los valores de temperatura desconocidos, se ubican en el primer miembro de cada igualdad. El sistema de ecuaciones se expresa en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
\delta & -r_y & 0 & -r_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-r_y & \delta & -r_y & 0 & -r_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -r_y & \delta & 0 & 0 & -r_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-r_x & 0 & 0 & \delta & -r_y & 0 & -r_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -r_x & 0 & -r_y & \delta & -r_y & 0 & -r_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -r_x & 0 & -r_y & \delta & 0 & 0 & -r_x & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -r_x & 0 & 0 & \delta & -r_y & 0 & -r_x & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -r_x & 0 & -r_y & \delta & -r_y & 0 & -r_x & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_x & 0 & 0 & \delta & -r_y & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_x & 0 & -r_y & \delta & -r_y \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_x & 0 & -r_y & \delta
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_{1,1}^2 \\
U_{1,2}^2 \\
U_{1,3}^2 \\
U_{2,1}^2 \\
U_{2,2}^2 \\
U_{2,3}^2 \\
U_{3,1}^2 \\
U_{3,2}^2 \\
U_{3,3}^2 \\
U_{4,1}^2 \\
U_{4,2}^2 \\
U_{4,3}^2
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
U_{1,1}^1 + r_x U_{0,1}^2 + r_y U_{1,0}^2 + \Delta t * f_{1,1}^2 \\
U_{1,2}^1 + r_x U_{0,2}^2 + \Delta t * f_{1,2}^2 \\
U_{1,3}^1 + r_x U_{0,3}^2 + r_y U_{1,4}^2 + \Delta t * f_{1,3}^2 \\
U_{2,1}^1 + r_y U_{2,0}^2 + \Delta t * f_{2,1}^2 \\
U_{2,2}^1 + \Delta t * f_{2,2}^2 \\
U_{2,3}^1 + r_y U_{2,4}^2 + \Delta t * f_{2,3}^2 \\
U_{3,1}^1 + r_y U_{3,0}^2 + \Delta t * f_{3,1}^2 \\
U_{3,2}^1 + \Delta t * f_{3,2}^2 \\
U_{3,3}^1 + r_y U_{3,4}^2 + \Delta t * f_{3,3}^2 \\
U_{4,1}^1 + r_y U_{4,0}^2 + r_x U_{5,1}^2 + \Delta t * f_{4,1}^2 \\
U_{4,2}^1 + r_x U_{5,2}^2 + \Delta t * f_{4,2}^2 \\
U_{4,3}^1 + r_y U_{4,4}^2 + r_x U_{5,3}^2 + \Delta t * f_{4,3}^2
\end{bmatrix}$$

La matriz A es simétrica y definida positiva. Por tanto, es posible resolver el sistema utilizando el método del Gradiente conjugado, de la misma manera que para el nivel de tiempo anterior. En las tablas 4.43 – 4.45, se resume los resultados que alcanza cada elemento de los vectores que intervienen en el proceso, en dos iteraciones.

Tabla 4.43: Vectores iniciales y cálculos previos a la iteración $k = 0$, nivel $n = 2$

(i, j)	$b_{i,j}$	$\tilde{U}_{i,j}^{(0)}$	$\tilde{U}_{(A)_{i,j}}^{(0)}$	$r_{i,j}^{(0)}$	$(r_{i,j}^{(0)})^2$	$v_{i,j}^{(0)}$
(1,1)	61.785240	0	0	61.785240	3817.4159	61.785240
(1,2)	96.208715	0	0	96.208715	9256.1169	96.208715
(1,3)	100.74987	0	0	100.74987	10150.536	100.74987
(2,1)	61.786342	0	0	61.786342	3817.5521	61.786342
(2,2)	96.193282	0	0	96.193282	9253.1474	96.193282
(2,3)	100.94691	0	0	100.94691	10190.279	100.94691
(3,1)	23.601104	0	0	23.601104	557.01211	23.601104
(3,2)	36.705602	0	0	36.705602	1347.3012	36.705602
(3,3)	38.996960	0	0	38.996960	1520.7629	38.996960
(4,1)	28.478205	0	0	28.478205	811.00816	28.478205
(4,2)	44.334349	0	0	44.334349	1965.5345	44.334349
(4,3)	46.628068	0	0	46.628068	2174.1767	46.628068
$\eta^{(0)}$					54860.843	

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

En la primera iteración $k = 0$, como $\|\mathbf{r}^{(1)}\|_2 = 14.285103 \ll 10^{-5}$ (no satisface el criterio de parada), entonces se determina una nueva dirección de búsqueda conjugada para la siguiente iteración, con

$$\beta^{(0)} = \frac{\omega^{(1)}}{\eta^{(0)}} = 0.0037196687,$$

y se establece $\eta^{(1)} = \omega^{(1)} = 204.06416$.

Tabla 4.44: Vectores y cálculos auxiliares en la iteración $k = 0$, nivel $n = 2$

(i, j)	$v_{i,j}^{(0)}$	$v_{(A)i,j}^{(0)}$	$v_{i,j}^{(0)} \cdot v_{(A)i,j}^{(0)}$	$\tilde{U}_{i,j}^{(1)}$	$r_{i,j}^{(1)}$	$(r_{i,j}^{(1)})^2$	$v_{i,j}^{(1)}$
(1,1)	61.785240	70.024631	4326.4887	53.867825	0.7338538	0.5385414	0.9636744
(1,2)	96.208715	107.00390	10294.707	83.880134	2.9167394	8.5073688	3.2746040
(1,3)	100.74987	123.88098	12480.993	87.839365	-7.256495	52.656722	-6.881739
(2,1)	61.786342	68.553693	4235.6819	53.868786	2.0174020	4.0699109	2.2472267
(2,2)	96.193282	104.65483	10067.091	83.866678	4.9493559	24.496124	5.3071630
(2,3)	100.94691	121.74319	12289.599	88.011158	-5.195600	26.994263	-4.820111
(3,1)	23.601104	22.589165	533.12923	20.576761	3.9066079	15.261585	3.9943962
(3,2)	36.705602	34.240927	1256.8338	32.001995	6.8524479	46.956042	6.9889806
(3,3)	38.996960	41.254274	1608.7913	33.999728	3.0291782	9.1759203	3.1742339
(4,1)	28.478205	32.582441	927.88945	24.828890	0.0710120	15.261585	0.1769415
(4,2)	44.334349	49.752031	2205.7239	38.653163	0.9577486	46.956042	1.1226577
(4,3)	46.628068	57.846752	2697.2823	40.652955	-3.805963	9.1759203	-3.632522
	$\langle \mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{v}_{(A)}^{(0)} \rangle$		62924.210		$\omega^{(1)}$	204.06416	

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

En la segunda iteración $k = 1$, como $\|\mathbf{r}^{(2)}\|_2 = 1.6051934 \times 10^{-5}$ (no satisface el criterio de parada), entonces se determina una nueva dirección de búsqueda conjugada para la siguiente iteración, con

$$\beta^{(1)} = \frac{\omega^{(2)}}{\eta^{(1)}} = 0.012626646,$$

y se establece $\eta^{(2)} = \omega^{(2)} = 2.5766458$.

Tabla 4.45: Vectores y cálculos auxiliares en la iteración $k = 1$, nivel $n = 2$

(i, j)	$v_{i,j}^{(1)}$	$v_{(A)i,j}^{(1)}$	$v_{i,j}^{(1)} \cdot v_{(A)i,j}^{(1)}$	$\tilde{U}_{i,j}^{(2)}$	$r_{i,j}^{(2)}$	$(r_{i,j}^{(2)})^2$	$v_{i,j}^{(2)}$
(1,1)	0.9636744	0.7281212	0.7016717	54.565947	0.2063752	0.0425907	0.2185432
(1,2)	3.2746040	5.3469954	17.509292	86.252381	-0.956827	0.9155172	-0.915479
(1,3)	-6.881739	-10.16679	69.965213	82.853972	0.1087146	0.0118189	0.0218214
(2,1)	2.2472267	2.0882171	4.6926974	55.496762	0.5046184	0.2546397	0.5329933
(2,2)	5.3071630	7.4390381	39.480188	87.711388	-0.439765	0.1933934	-0.372754
(2,3)	-4.820111	-7.582488	36.548435	84.519287	0.2974412	0.0884712	0.2365793
(3,1)	3.9943962	4.5021551	17.983391	23.470453	0.6450762	0.4161233	0.6955120
(3,2)	6.9889806	8.5502323	59.757408	37.065077	0.6583356	0.4334058	0.7465830
(3,3)	3.1742339	3.9968207	12.686844	36.299264	0.1337298	0.0178837	0.1738097
(4,1)	0.1769415	-0.173595	-0.030716	24.957074	0.1967705	0.0387186	0.1990046
(4,2)	1.1226577	1.7383220	1.9515405	39.466459	-0.301558	0.0909371	-0.287382
(4,3)	-3.632522	-5.627009	20.440235	38.021418	0.2704557	0.0731463	0.2245891
	$\langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}_{(A)}^{(1)} \rangle$		281.68620		$\omega^{(2)}$	2.5766458	

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Con el vector de dirección de búsqueda actualizada $\mathbf{v}^{(2)}$, se inicia con una nueva iteración $k = 2$. Y así sucesivamente, hasta que se cumpla el criterio de parada $\|\mathbf{r}^{(k)}\|_2 < 10^{-5}$ para algún valor de iteración k . En la tabla 4.46, se muestra la evolución de los elementos del vector de estimación en cada iteración:

Tabla 4.46: Evolución del vector de estimación a través de iteraciones, nivel $n = 2$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tilde{U}_{1,1}^{(k)}$	0	53.867825	54.565947	54.718386	54.654743	54.649723	54.650440	54.650439	54.650439
$\tilde{U}_{1,2}^{(k)}$	0	83.880134	86.252381	85.613815	85.591265	85.590057	85.589711	85.589781	85.589782
$\tilde{U}_{1,3}^{(k)}$	0	87.839365	82.853972	82.869193	82.865736	82.863979	82.863897	82.863859	82.863865
$\tilde{U}_{2,1}^{(k)}$	0	53.868786	55.496762	55.868536	55.847980	55.844574	55.844210	55.844457	55.844453
$\tilde{U}_{2,2}^{(k)}$	0	83.866678	87.711388	87.451385	87.459059	87.459875	87.459773	87.459692	87.459693
$\tilde{U}_{2,3}^{(k)}$	0	88.011158	84.519287	84.684306	84.704042	84.705202	84.704856	84.704841	84.704834
$\tilde{U}_{3,1}^{(k)}$	0	20.576761	23.470453	23.955587	24.001759	23.995174	23.994994	23.995029	23.995034
$\tilde{U}_{3,2}^{(k)}$	0	32.001995	37.065077	37.585834	37.572602	37.579823	37.579652	37.579633	37.579634
$\tilde{U}_{3,3}^{(k)}$	0	33.999728	36.299264	36.420500	36.465099	36.464272	36.464513	36.464497	36.464492
$\tilde{U}_{4,1}^{(k)}$	0	24.828890	24.957074	23.095883	25.093301	25.098898	25.099173	25.099211	25.099213
$\tilde{U}_{4,2}^{(k)}$	0	38.653163	39.466459	39.266004	39.311725	39.314597	39.315400	39.315427	39.315427
$\tilde{U}_{4,3}^{(k)}$	0	40.652955	38.021418	38.178074	38.193297	38.198758	38.198950	38.199006	38.199009
$\ \mathbf{r}^{(k)}\ _2$		14.285103	1.6051934	0.1559288	0.0212463	0.0018487	0.0002200	0.0000189	1.3342989×10^{-6}

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Para el segundo nivel del tiempo t_2 , los resultados se resumen de la siguiente forma:

Tabla 4.47: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 2$, método implícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_2 = 0.02$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	55.452001	56.959475	25.127397	26.634870	82.086872
$y_3 = 0.75$	0	82.863865	84.704834	36.464492	38.199009	119.60934
$y_2 = 0.50$	0	85.589782	87.459693	37.579634	39.315427	123.13031
$y_1 = 0.25$	0	54.650439	55.844453	23.995034	25.099213	78.565902
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

El procedimiento es análogo para los niveles posteriores de tiempo.

Tabla 4.48: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 3$, método implícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_3 = 0.03$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	50.240515	51.606313	22.765875	24.131673	74.372188
$y_3 = 0.75$	0	75.903459	77.447393	33.021299	34.382802	108.36822
$y_2 = 0.50$	0	78.566095	80.115707	34.049169	35.365763	111.55828
$y_1 = 0.25$	0	50.187333	51.176693	21.748323	22.581100	71.182125
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.49: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 4$, método implícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_4 = 0.04$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	45.518813	46.756251	20.626294	21.863732	67.382545
$y_3 = 0.75$	0	69.466059	70.771133	29.928212	30.972154	98.183563
$y_2 = 0.50$	0	72.063503	73.355178	30.878253	31.832499	101.07382
$y_1 = 0.25$	0	46.056184	46.880382	19.729882	20.326587	64.492291
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.50: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 5$, método implícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_5 = 0.05$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	41.240867	42.362008	18.687795	19.808936	61.049803
$y_3 = 0.75$	0	63.525901	64.638221	27.144393	27.919617	88.956081
$y_2 = 0.50$	0	66.051367	67.135877	28.025604	28.670217	91.574704
$y_1 = 0.25$	0	42.236796	42.928127	17.913663	18.307455	58.431180
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.51: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 10$, método implícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{10} = 0.10$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	25.177468	25.861922	11.408862	12.093316	37.270784
$y_3 = 0.75$	0	40.280142	40.850013	16.792249	16.764123	54.307512
$y_2 = 0.50$	0	42.335136	42.860022	17.428314	17.147632	55.906176
$y_1 = 0.25$	0	27.156026	27.489051	11.164246	10.944901	35.672120
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.52: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 25$, método implícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{25} = 0.25$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
$y_3 = 0.75$	0	9.8042690	9.9840308	4.1138328	3.8283273	12.356990
$y_2 = 0.50$	0	10.526696	10.717792	4.3789312	3.9241526	12.720746
$y_1 = 0.25$	0	6.8050639	6.9319837	2.8318916	2.5079038	8.1167414
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.53: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 50$, método implícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{50} = 0.50$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
$y_3 = 0.75$	0	0.8780136	0.9092010	0.3960273	0.3464785	1.0479342
$y_2 = 0.50$	0	0.9585342	0.9972879	0.4380262	0.3636428	1.0787825
$y_1 = 0.25$	0	0.6236250	0.6503261	0.2872903	0.2344994	0.6883400
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.54: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 75$, método implícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{75} = 0.75$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	0.0412010	0.0423210	0.0186697	0.0197898	0.0609907
$y_3 = 0.75$	0	0.0767660	0.0806383	0.0368725	0.0312922	0.0888700
$y_2 = 0.50$	0	0.0845495	0.0895711	0.0417972	0.0335374	0.0914861
$y_1 = 0.25$	0	0.0551897	0.0586834	0.0276523	0.0217957	0.0583747
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.55: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 100$, método implícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{100} = 1.00$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	0.0034940	0.0035890	0.0015833	0.0016783	0.0051723
$y_3 = 0.75$	0	0.0066449	0.0070520	0.0033358	0.0027783	0.0075366
$y_2 = 0.50$	0	0.0073607	0.0078983	0.0038387	0.0030213	0.0077585
$y_1 = 0.25$	0	0.0048161	0.0051917	0.0025559	0.0019731	0.0049505
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

La figura 4.11 muestra la solución gráfica del problema para algunos niveles de tiempo.

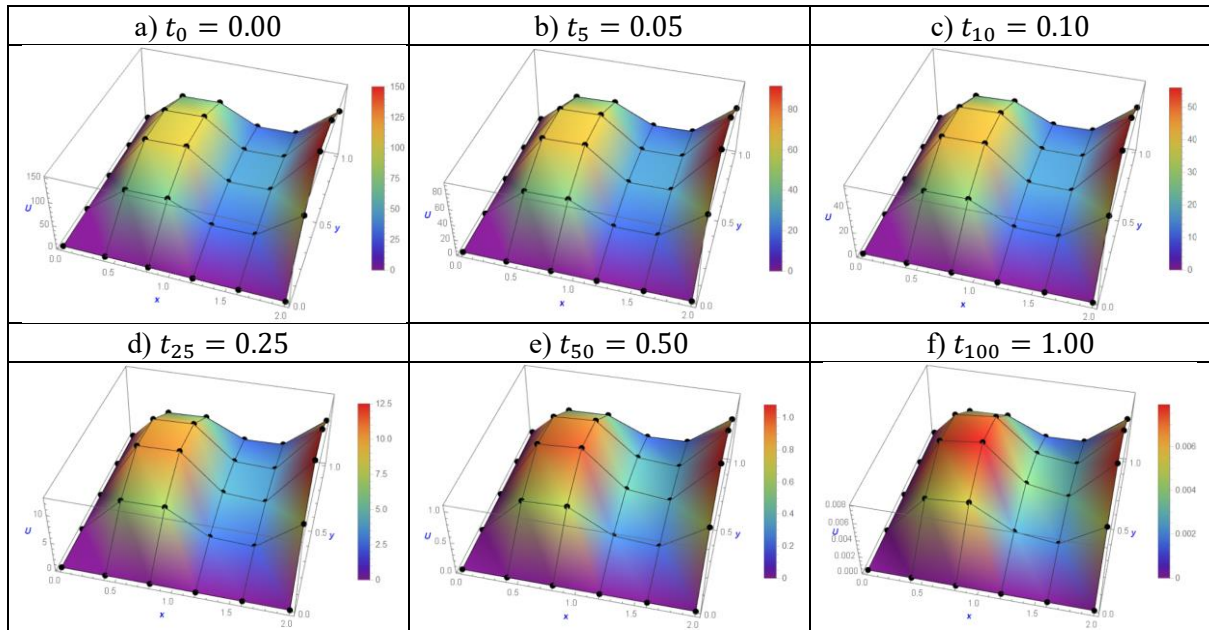


Figura 4.11: Solución gráfica de la distribución de temperatura en la placa rectangular, según el método implícito

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

En el caso de mantener la partición definida inicialmente sobre el dominio espacial $[0,2] \times [0,1]$ (con $M_x = 5$ y $M_y = 4$), si el dominio temporal $[0,1]$ se subdivide en $M_t = 20$ subintervalos en lugar de 100, entonces:

$$\Delta x = 0.40, \quad \Delta y = 0.25, \quad \Delta t = 0.05.$$

Cada nodo se representa por los puntos (x_i, y_j, t_n) tal que:

$$x_i = i\Delta x \quad , \quad \forall i = 0,1,2,3,4,5;$$

$$y_j = j\Delta y \quad , \quad \forall j = 0,1,2,3,4;$$

$$t_n = n\Delta t \quad , \quad \forall n = 0,1,2, \dots, 20.$$

En el nivel de tiempo cero, las temperaturas se describen por la condición inicial, y alcanzan los mismos valores que en la tabla 4.1. Se calculan los valores aproximados de temperatura de cada nodo en los siguientes niveles de tiempo, utilizando el método implícito.

Tabla 4.56: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 1$, método implícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_1 = 0.05$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	41.240867	42.362008	18.687795	19.808936	61.049803
$y_3 = 0.75$	0	66.238761	67.866563	29.441032	30.029875	88.956081
$y_2 = 0.50$	0	69.220279	70.937310	30.774007	31.159202	91.574704
$y_1 = 0.25$	0	44.292188	45.398470	19.705257	19.920898	58.431180
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.57: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 2$, método implícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_2 = 0.10$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	25.177468	25.861922	11.408862	12.093316	37.270784
$y_3 = 0.75$	0	43.737566	44.940741	19.609346	19.106579	54.307512
$y_2 = 0.50$	0	46.504204	47.846763	20.944997	20.043796	55.906176
$y_1 = 0.25$	0	29.883436	30.763903	13.491800	12.854807	35.672120
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.58: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 3$, método implícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_3 = 0.15$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	15.370794	15.788652	6.9650876	7.3829456	22.753740
$y_3 = 0.75$	0	28.534053	29.502452	13.116867	12.194613	33.154629
$y_2 = 0.50$	0	30.846627	31.991185	14.345525	12.959428	34.130610
$y_1 = 0.25$	0	19.918817	20.682532	9.3091185	8.3459575	21.777759
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.59: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 4$, método implícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_4 = 0.20$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	9.3838396	9.6389411	4.2521722	4.5072737	13.891113
$y_3 = 0.75$	0	18.463290	19.251483	8.7855252	7.8101502	20.240835
$y_2 = 0.50$	0	20.262702	21.236388	9.8340755	8.4181830	20.836670
$y_1 = 0.25$	0	13.149177	13.807628	6.4312822	5.4477756	13.295279
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.60: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 5$, método implícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_5 = 0.25$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
$y_3 = 0.75$	0	11.876919	12.506637	5.8813922	5.0183847	12.356990
$y_2 = 0.50$	0	13.211191	14.013876	6.7269551	5.4893321	12.720746
$y_1 = 0.25$	0	8.6136850	9.1618050	4.4323821	3.5710590	8.1167414
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

En los primeros cinco niveles de tiempo, no se presentan saltos ni oscilaciones, al igual que en los niveles posteriores.

Tabla 4.61: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 10$, método implícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{10} = 0.50$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
$y_3 = 0.75$	0	1.2461367	1.3895431	0.7649067	0.5663328	1.0479342
$y_2 = 0.50$	0	1.4567254	1.6517865	0.9457069	0.6640524	1.0787825
$y_1 = 0.25$	0	0.9673626	1.1034473	0.6404776	0.4428887	0.6883400
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.62: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 15$, método implícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{15} = 0.75$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	0.0412010	0.0423210	0.0186697	0.0197898	0.0609907
$y_3 = 0.75$	0	0.1260401	0.1486613	0.0932218	0.0644268	0.0888700
$y_2 = 0.50$	0	0.1523254	0.1836568	0.1202897	0.0795005	0.0914861
$y_1 = 0.25$	0	0.1023879	0.1243837	0.0826571	0.0539511	0.0583747
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.63: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 20$, método implícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{20} = 1.00$ hora						
$y_4 = 1.00$	0	0.0034940	0.0035890	0.0015833	0.0016783	0.0051723
$y_3 = 0.75$	0	0.0125832	0.0155904	0.0107895	0.0071966	0.0075366
$y_2 = 0.50$	0	0.0155953	0.0197941	0.0142791	0.0091935	0.0077585
$y_1 = 0.25$	0	0.0105767	0.0135302	0.0098922	0.0063084	0.0049505
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Con este ejemplo, se muestra que el método implícito es incondicionalmente estable, a diferencia del método explícito utilizando los mismos tamaños de paso, $\Delta x = 0.40$, $\Delta y = 0.25$ y $\Delta t = 0.05$. La figura 4.12 muestra la evolución de la solución gráfica del PVIF, manteniendo la estabilidad en cualquier nivel del tiempo.

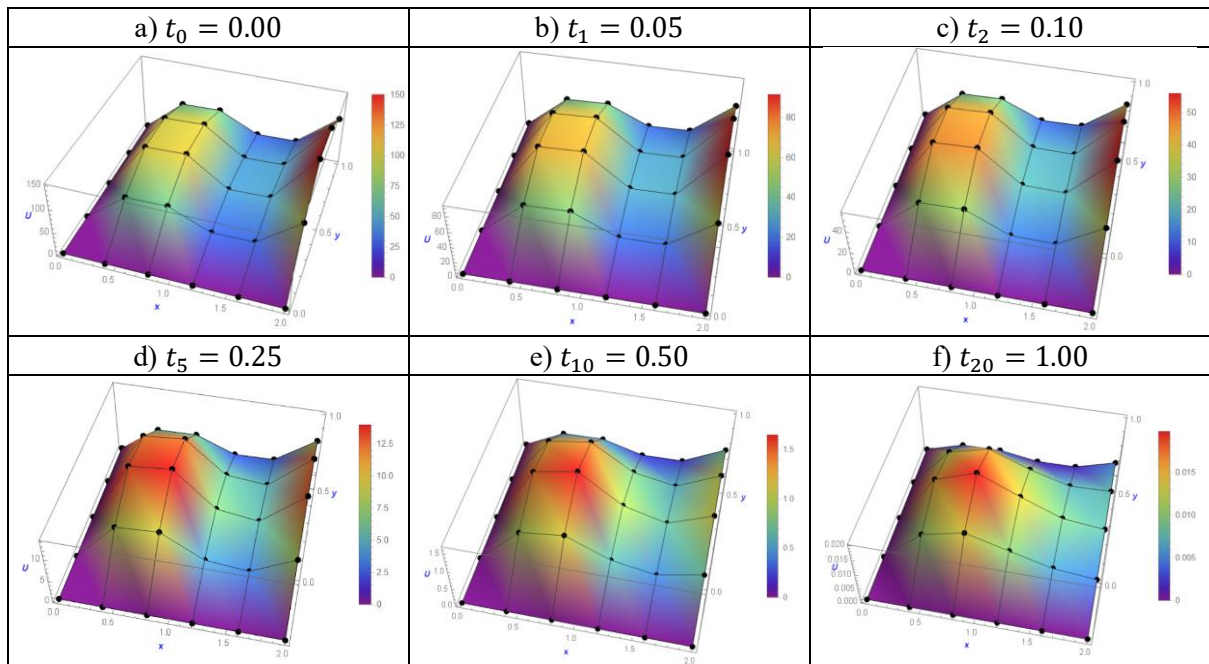


Figura 4.12: Solución gráfica estable de la distribución de temperatura en la placa rectangular, según el método implícito

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Al discretizar el dominio del PVIF con $M_x = 10$, $M_y = 8$ y $M_t = 500$ subintervalos, se puede direccionar el estudio en una subregión de la placa $[0,1] \times [0.5,1]$ para conocer más valores aproximados de temperatura por el incremento del número de nodos interiores. Se muestran las distribuciones de temperatura en $t_{125} = 0.25$ y $t_{250} = 0.50$ horas.

Tabla 4.64: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 125$, método implícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{125} = 0.25$ horas						
$y_8 = 1.000$	0	3.3404053	5.7288155	6.5768653	5.8845545	4.2402486
$y_7 = 0.875$	0	4.3090661	7.3883593	8.4775208	7.5756196	5.4408876
$y_6 = 0.750$	0	5.0569764	8.6702019	9.9468037	8.8850631	6.3739288
$y_5 = 0.625$	0	5.4124332	9.2796057	10.645730	9.5085631	6.8187782
$y_4 = 0.500$	0	5.2615540	9.0210544	10.349355	9.2440335	6.6287123
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.20$	$x_2 = 0.40$	$x_3 = 0.60$	$x_4 = 0.80$	$x_5 = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.65: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 250$, método implícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{250} = 0.50$ horas						
$y_8 = 1.000$	0	0.2832830	0.4858320	0.5577509	0.4990395	0.3595942
$y_7 = 0.875$	0	0.3676286	0.6306019	0.7241673	0.6481314	0.4668466
$y_6 = 0.750$	0	0.4329187	0.7427266	0.8532044	0.7639946	0.5505783
$y_5 = 0.625$	0	0.4643081	0.7966905	0.9154391	0.8200875	0.5913797
$y_4 = 0.500$	0	0.4519500	0.7755661	0.8913457	0.7987841	0.5763417
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.20$	$x_2 = 0.40$	$x_3 = 0.60$	$x_4 = 0.80$	$x_5 = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Si se discretiza el dominio con $M_x = 10$, $M_y = 8$ y $M_t = 100$ subintervalos, y direccionando el estudio en otra subregión $[0,1] \times [0.5,1]$, se muestra la solución en $t_{125} = 0.25$ y $t_{250} = 0.50$ horas.

Tabla 4.66: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 25$, método implícito

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{25} = 0.25$ horas						
$y_8 = 1.000$	4.2402486	2.5959427	1.9036320	2.7516817	5.1400919	8.4804972
$y_7 = 0.875$	5.6910948	3.5083753	2.5501761	3.5740253	6.5527366	10.665781
$y_6 = 0.750$	6.8190778	4.2247074	3.0614520	4.2158526	7.6416589	12.356990
$y_5 = 0.625$	7.3827920	4.5893031	3.3220748	4.5280302	8.1510923	13.135269
$y_4 = 0.500$	7.2245177	4.5008479	3.2569389	4.4121251	7.9092172	12.720746
	$x_5 = 1.00$	$x_6 = 1.20$	$x_7 = 1.40$	$x_8 = 1.60$	$x_9 = 1.80$	$x_{10} = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.67: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 50$, método implícito

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{50} = 0.50$ horas						
$y_8 = 1.000$	0.3595942	0.2201489	0.1614375	0.2333563	0.4359054	0.7191883
$y_7 = 0.875$	0.5027553	0.3156906	0.2309927	0.3133867	0.5609811	0.9045113
$y_6 = 0.750$	0.6154711	0.3918356	0.2868338	0.3765408	0.6577998	1.0479342
$y_5 = 0.625$	0.6746710	0.4330403	0.3172745	0.4088431	0.7039903	1.1139361
$y_4 = 0.500$	0.6652467	0.4291478	0.3146768	0.4010586	0.6845264	1.0787825
	$x_5 = 1.00$	$x_6 = 1.20$	$x_7 = 1.40$	$x_8 = 1.60$	$x_9 = 1.80$	$x_{10} = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

COMPARACIÓN CON LA SOLUCIÓN ANALÍTICA

Como en el caso anterior, se compara la solución analítica con la solución numérica en cada nodo de la malla discretizada, en $t = 0.25$ y $t = 0.50$ horas. En cada celda de las tablas 4.68 – 4.77, de arriba hacia abajo, el primer valor indica la temperatura $U_{i,j}^n$ obtenida por el método implícito de diferencias finitas, el segundo valor indica la temperatura exacta $u_{i,j}^n$ obtenida de forma analítica, y el tercer valor indica el error entre la solución analítica y numérica, $e_{i,j}^n$. Considerando el caso inicial, cuando se elige subdividir el dominio en $M_x = 5$, $M_y = 4$ y $M_t = 100$ subintervalos:

Tabla 4.68: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 25$, método implícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{25} = 0.25$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	0	0	0	0	0
$y_3 = 0.75$	0	9.8042690	9.9840308	4.1138328	3.8283273	12.356990
	0	8.3474960	8.5744243	3.7825658	4.0094941	12.356990
	0	1.4567731	1.4096065	0.3312670	0.1811668	0
$y_2 = 0.50$	0	10.526696	10.717792	4.3789312	3.9241526	12.720746
	0	8.5932233	8.8268318	3.8939141	4.1275226	12.720746
	0	1.9334723	1.8909604	0.4850171	0.2033700	0
$y_1 = 0.25$	0	6.8050639	6.9319837	2.8318916	2.5079038	8.1167414
	0	5.4830882	5.6321470	2.4845944	2.6336532	8.1167414
	0	1.3219757	1.2998367	0.3472972	0.1257494	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.69: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 50$, método implícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{50} = 0.50$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0	0	0	0	0
$y_3 = 0.75$	0	0.8780136	0.9092010	0.3960273	0.3464785	1.0479342
	0	0.7079092	0.7271538	0.3207804	0.3400250	1.0479342
	0	0.1701044	0.1820472	0.0752469	0.0064534	0
$y_2 = 0.50$	0	0.9585342	0.9972879	0.4380262	0.3636428	1.0787825
	0	0.7287481	0.7485592	0.3302233	0.3500344	1.0787825
	0	0.2297861	0.2487287	0.1078029	0.0136083	0
$y_1 = 0.25$	0	0.6236250	0.6503261	0.2872903	0.2344994	0.6883400
	0	0.4649931	0.4776341	0.2107060	0.2233469	0.6883400
	0	0.1586319	0.1726921	0.0765843	0.0111525	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Cuando se elige subdividir el dominio en $M_x = 5$, $M_y = 4$ y $M_t = 20$ subintervalos, se conserva la estabilidad del método numérico.

Tabla 4.70: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 5$, método implícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y el Error $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_5 = 0.25$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	0	0	0	0	0
$y_3 = 0.75$	0	11.876919	12.506637	5.8813922	5.0183847	12.356990
	0	8.3474960	8.5744243	3.7825658	4.0094941	12.356990
	0	3.5294231	3.9322124	2.0988265	1.0088906	0
$y_2 = 0.50$	0	13.211191	14.013876	6.7269551	5.4893321	12.720746
	0	8.5932233	8.8268318	3.8939141	4.1275226	12.720746
	0	4.6179675	5.1870442	2.8330410	1.3618096	0
$y_1 = 0.25$	0	8.6136850	9.1618050	4.4323821	3.5710590	8.1167414
	0	5.4830882	5.6321470	2.4845944	2.6336532	8.1167414
	0	3.1305968	3.5296580	1.9477877	0.9374058	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.71: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 10$, método implícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y el Error $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{10} = 0.50$ horas						
$y_4 = 1.00$	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0	0	0	0	0
$y_3 = 0.75$	0	1.2461367	1.3895431	0.7649067	0.5663328	1.0479342
	0	0.7079092	0.7271538	0.3207804	0.3400250	1.0479342
	0	0.5382275	0.6623892	0.4441263	0.2263078	0
$y_2 = 0.50$	0	1.4567254	1.6517865	0.9457069	0.6640524	1.0787825
	0	0.7287481	0.7485592	0.3302233	0.3500344	1.0787825
	0	0.7279773	0.9032273	0.6154837	0.3140179	0
$y_1 = 0.25$	0	0.9673626	1.1034473	0.6404776	0.4428887	0.6883400
	0	0.4649931	0.4776341	0.2107060	0.2233469	0.6883400
	0	0.5023695	0.6258132	0.4297716	0.2195418	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.40$	$x_2 = 0.80$	$x_3 = 1.20$	$x_4 = 1.60$	$x_5 = 2.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

La solución numérica en cada nodo se acerca a la solución exacta si se modifican los tamaños de paso espaciales y del tiempo, con $M_x = 10$, $M_y = 8$ y $M_t = 500$ subintervalos. Se estudia la temperatura en una subregión de la placa, $[0,1] \times [0.5,1]$, en los tiempos $t_{125} = 0.25$ y $t_{250} = 0.50$ horas.

Tabla 4.72: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 125$, método implícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y el Error $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{125} = 0.25$ horas						
$y_8 = 1.00$	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	0	0	0	0	0
$y_6 = 0.75$	0	8.6702019	8.8850631	3.8517777	3.9644061	12.356990
	0	8.3474960	8.5744243	3.7825658	4.0094941	12.356990
	0	0.3227059	0.3106388	0.0692119	0.0450879	0
$y_4 = 0.50$	0	9.0210544	9.2440335	3.9979094	4.0779669	12.720746
	0	8.5932233	8.8268318	3.8939141	4.1275226	12.720746
	0	0.4278311	0.4172018	0.1039953	0.0495556	0
$y_2 = 0.25$	0	5.7755768	5.9192316	2.5599325	2.6034233	8.1167414
	0	5.4830882	5.6321470	2.4845944	2.6336532	8.1167414
	0	0.2924886	0.2870846	0.0753381	0.0302299	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_2 = 0.20$	$x_4 = 0.40$	$x_6 = 0.60$	$x_8 = 0.80$	$x_{10} = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.73: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 250$, método implícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y el Error $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{250} = 0.50$ horas						
$y_8 = 1.00$	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0	0	0	0	0
$y_6 = 0.75$	0	0.7427266	0.7639946	0.3352565	0.3405894	1.0479342
	0	0.7079092	0.7271538	0.3207804	0.3400250	1.0479342
	0	0.0348174	0.0368408	0.0144761	0.0005643	0
$y_4 = 0.50$	0	0.7755661	0.7987841	0.3512136	0.3520370	1.0787825
	0	0.7287481	0.7485592	0.3302233	0.3500344	1.0787825
	0	0.0468180	0.0502249	0.0209903	0.0020026	0
$y_2 = 0.25$	0	0.4972492	0.5124771	0.2256989	0.2251736	0.6883400
	0	0.4649931	0.4776341	0.2107060	0.2233469	0.6883400
	0	0.0322560	0.0348430	0.0149929	0.0018267	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_2 = 0.20$	$x_4 = 0.40$	$x_6 = 0.60$	$x_8 = 0.80$	$x_{10} = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Si se modifica el tamaño de paso temporal con $M_t = 100$ subintervalos, se muestra que las soluciones obtenidas por el método implícito permanecen estables.

Tabla 4.74: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 25$, método implícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y el Error $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{25} = 0.25$ horas						
$y_8 = 1.00$	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	0	0	0	0	0
$y_6 = 0.75$	0	9.0599951	9.3787052	4.2247074	4.2158526	12.356990
	0	8.3474960	8.5744243	3.7825658	4.0094941	12.356990
	0	0.7124991	0.8042810	0.4421416	0.2063585	0
$y_4 = 0.50$	0	9.5337084	9.8995698	4.5008479	4.4121251	12.720746
	0	8.5932233	8.8268318	3.8939141	4.1275226	12.720746
	0	0.9404851	1.0727380	0.6069338	0.2846025	0
$y_2 = 0.25$	0	6.1240374	6.3668290	2.9056826	2.8317162	8.1167414
	0	5.4830882	5.6321470	2.4845944	2.6336532	8.1167414
	0	0.6409492	0.7346819	0.4210882	0.1980630	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_2 = 0.20$	$x_4 = 0.40$	$x_6 = 0.60$	$x_8 = 0.80$	$x_{10} = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.75: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 50$, método implícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y el Error $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{50} = 0.50$ horas						
$y_8 = 1.00$	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0	0	0	0	0
$y_6 = 0.75$	0	0.7932446	0.8325721	0.3918356	0.3765408	1.0479342
	0	0.7079092	0.7271538	0.3207804	0.3400250	1.0479342
	0	0.0853355	0.1054182	0.0710552	0.0365158	0
$y_4 = 0.50$	0	0.8437299	0.8921485	0.4291478	0.4010586	1.0787825
	0	0.7287481	0.7485592	0.3302233	0.3500344	1.0787825
	0	0.1149818	0.1435893	0.0989245	0.0510241	0
$y_2 = 0.25$	0	0.5442503	0.5771367	0.2799652	0.2591546	0.6883400
	0	0.4649931	0.4776341	0.2107060	0.2233469	0.6883400
	0	0.0792571	0.0995027	0.0692592	0.0358077	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_2 = 0.20$	$x_4 = 0.40$	$x_6 = 0.60$	$x_8 = 0.80$	$x_{10} = 1.00$

Fuente: Elaboración Propia y Wolfram Mathematica Versión 10.4

En las tablas 4.76 y 4.77, se muestra una comparación en $t_{1250} = 0.25$ y $t_{2500} = 0.50$ horas, al discretizar el dominio con $M_x = 20$, $M_y = 16$ y $M_t = 5000$ subintervalos.

Tabla 4.76: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 1250$, método implícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y el Error $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{1250} = 0.25$ horas						
$y_{16} = 1.00$	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	5.7288155	5.8845545	2.5959427	2.7516817	8.4804972
	0	0	0	0	0	0
$y_{12} = 0.75$	0	8.4129389	8.6331768	3.7863031	3.9896013	12.356990
	0	8.3474960	8.5744243	3.7825658	4.0094941	12.356990
	0	0.0654429	0.0587526	0.0037373	0.0198927	0
$y_8 = 0.50$	0	8.6800170	8.9059235	3.9016204	4.1037144	12.720746
	0	8.5932233	8.8268318	3.8939141	4.1275226	12.720746
	0	0.0867937	0.0790917	0.0077063	0.0238082	0
$y_4 = 0.25$	0	5.5424549	5.6866642	2.4908483	2.6183015	8.1167414
	0	5.4830882	5.6321470	2.4845944	2.6336532	8.1167414
	0	0.0593667	0.0545172	0.0062539	0.0153517	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_4 = 0.20$	$x_8 = 0.40$	$x_{12} = 0.60$	$x_{16} = 0.80$	$x_{20} = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.77: Distribución de temperatura aproximada, exacta, y error en la placa, nivel $n = 2500$, método implícito

Distribución de las temperaturas $U_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$ y el Error $e_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{2500} = 0.50$ horas						
$y_{16} = 1.00$	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0.4858320	0.4990395	0.2201489	0.2333563	0.7191883
	0	0	0	0	0	0
$y_{12} = 0.75$	0	0.7146842	0.7338122	0.3223986	0.3389640	1.0479342
	0	0.7079092	0.7271538	0.3207804	0.3400250	1.0479342
	0	0.0067750	0.0066584	0.0016182	0.0010610	0
$y_8 = 0.50$	0	0.7378363	0.7576313	0.3327143	0.3488973	1.0787825
	0	0.7287481	0.7485592	0.3302233	0.3500344	1.0787825
	0	0.0090882	0.0090721	0.0024910	0.0011372	0
$y_4 = 0.25$	0	0.4712482	0.4839283	0.2125351	0.2226679	0.6883400
	0	0.4649931	0.4776341	0.2107060	0.2233469	0.6883400
	0	0.0062551	0.0062942	0.0018291	0.0006790	0
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_4 = 0.20$	$x_8 = 0.40$	$x_{12} = 0.60$	$x_{16} = 0.80$	$x_{20} = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

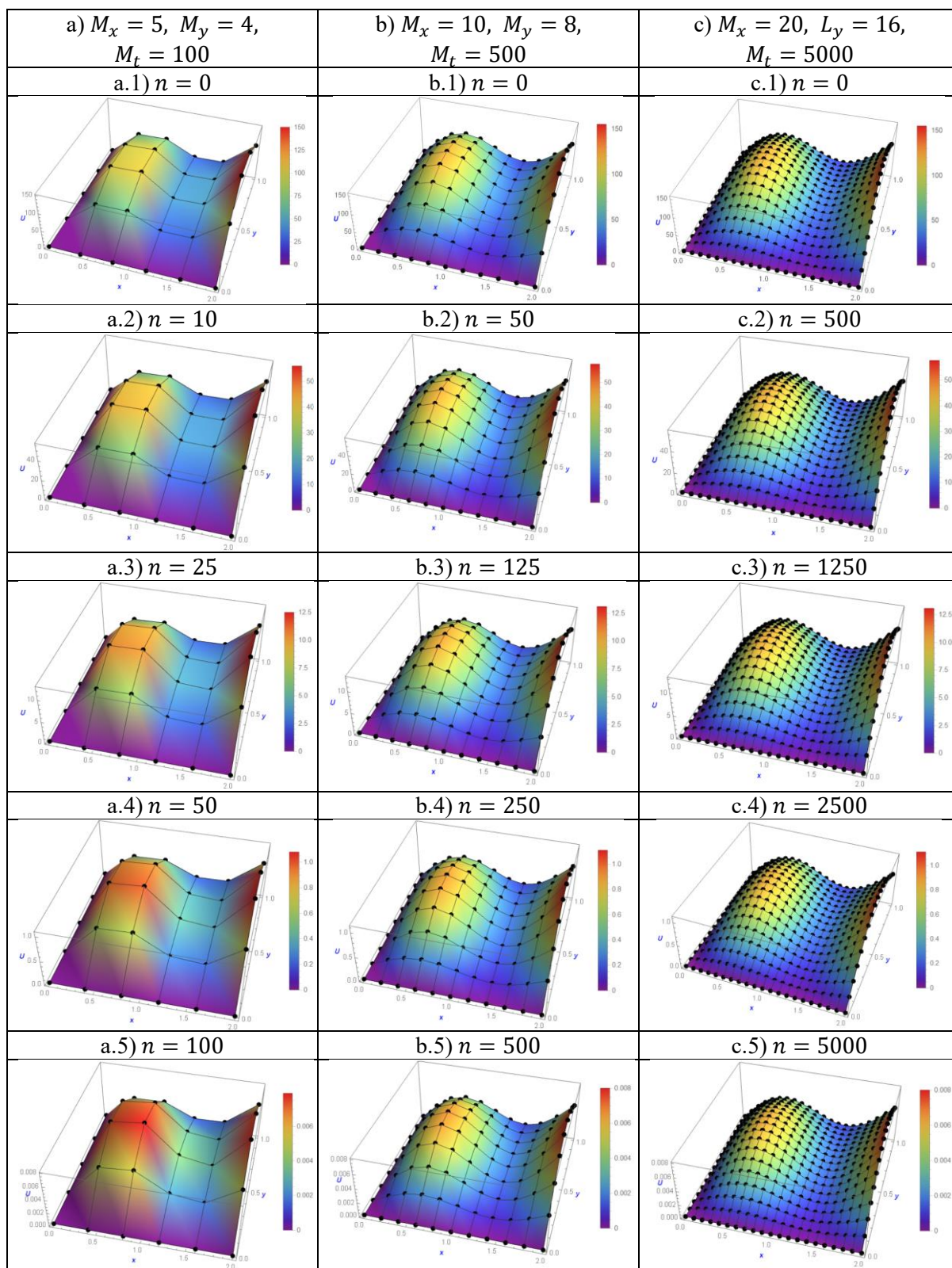


Figura 4.13: Comparación gráfica de la evolución de distribución de temperatura en la placa rectangular, según método Implícito.

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

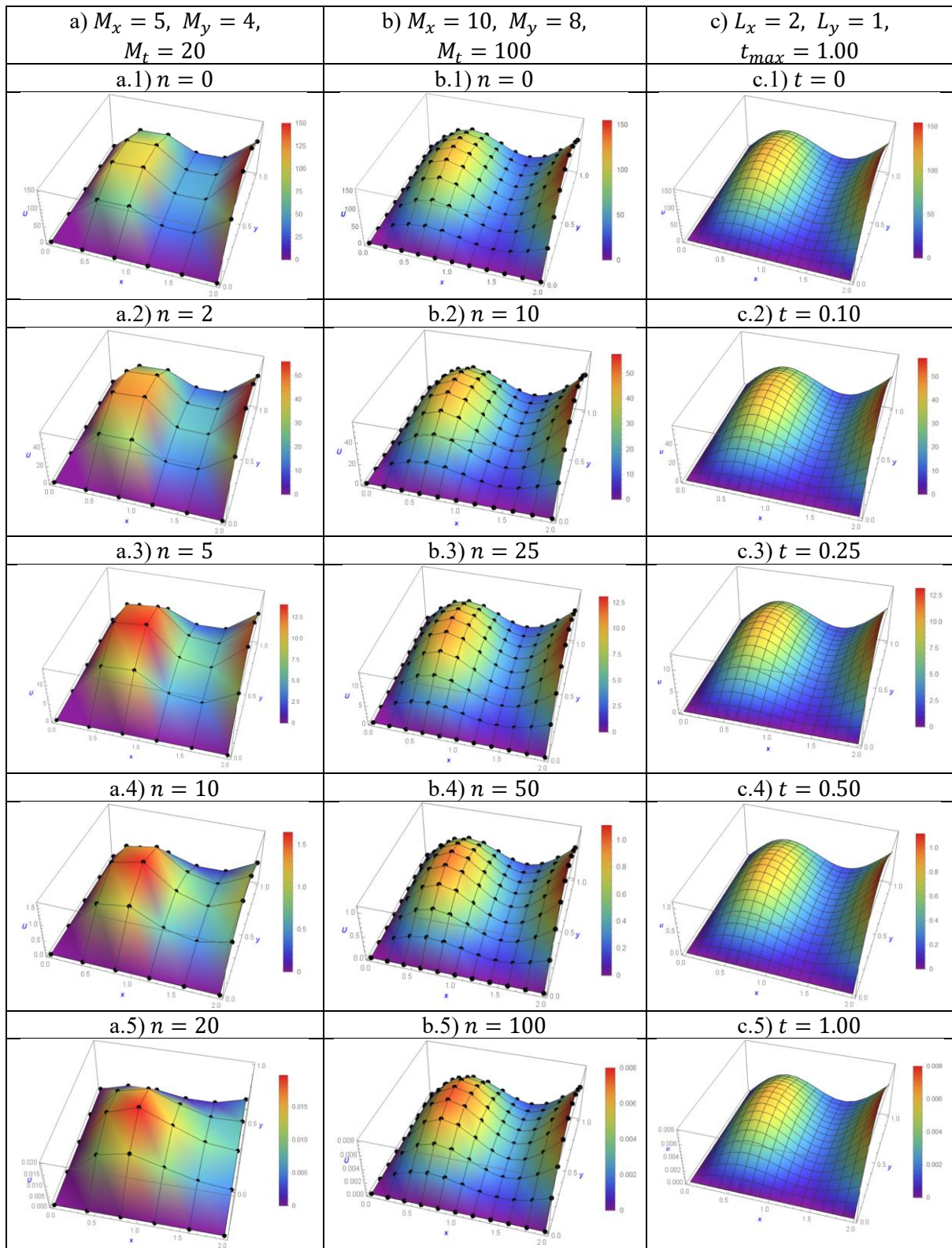


Figura 4.14: Comparación gráfica de la distribución de temperatura aproximada por el método implícito de la placa rectangular con la solución analítica

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

APLICACIÓN

Resolver el siguiente problema de valores en la frontera:

$$\text{EDP:} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{array} \quad ; \quad t > 0$$

$$\text{CI:} \quad u(x, y, t)|_{t=0} = \cos(\pi x) y \quad ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{array}$$

$$\text{CF1:} \quad u(x, y, t)|_{x=0} = ye^{\frac{1}{2}\pi^2 t} \quad ; \quad 0 < y < 1 \quad ; \quad t \geq 0$$

$$\text{CF2:} \quad u(x, y, t)|_{x=L_x} = -ye^{\frac{1}{2}\pi^2 t} \quad ; \quad 0 < y < 1 \quad ; \quad t \geq 0$$

$$\text{CF3:} \quad u(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad ; \quad t \geq 0$$

$$\text{CF4:} \quad u(x, y, t)|_{y=L_y} = \cos(\pi x) e^{\frac{1}{2}\pi^2 t} \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad ; \quad t \geq 0$$

Solución:

El dominio espacial consiste en una placa cuadrada de longitud $L_x = L_y = 1$ en cada lado, y el coeficiente de difusividad es $a^2 = 1/2$. Las condiciones de frontera son consistentes para todo $t \geq 0$:

$$\begin{array}{l} (x, y, t) = (0, 0, t) \quad : \quad u(0, 0, t) = g_1(0, t) = g_3(0, t) = 0, \\ (x, y, t) = (0, 1, t) \quad : \quad u(0, 1, t) = g_1(1, t) = g_4(0, t) = e^{\frac{1}{2}\pi^2 t}, \\ (x, y, t) = (1, 0, t) \quad : \quad u(1, 0, t) = g_2(0, t) = g_3(1, t) = 0, \\ (x, y, t) = (1, 1, t) \quad : \quad u(1, 1, t) = g_2(1, t) = g_4(1, t) = -e^{\frac{1}{2}\pi^2 t}. \end{array}$$

A) Por el método de expansión de funciones propias:

Se emplea la solución general de la forma:

$$u(x, y, t) = w(x, y, t) + v(x, y, t).$$

La función auxiliar $w(x, y, t)$ satisface las condiciones de frontera del PVIF, y se da por (4.4) con:

$$\begin{array}{l} \bar{X}(x) = 1 - x \quad \wedge \quad \bar{\bar{X}}(x) = x, \\ \bar{Y}(y) = 1 - y \quad \wedge \quad \bar{\bar{Y}}(y) = y, \end{array}$$

además,

$$A(t) = 0, \quad B(t) = -e^{\frac{1}{2}\pi^2 t}, \quad C(t) = 0, \quad D(t) = e^{\frac{1}{2}\pi^2 t}.$$

En ese caso, se obtiene:

$$w(x, y, t) = \cos(\pi x) ye^{\frac{1}{2}\pi^2 t}.$$

La solución general:

$$u(x, y, t) = \cos(\pi x) ye^{\frac{1}{2}\pi^2 t} + v(x, y, t),$$

se reemplaza en el PVIF inicial para formular un nuevo problema en función de $v(x, y, t)$, que contiene una EDP no homogénea, una condición inicial diferente, y condiciones de Dirichlet homogéneas. El nuevo PVIF para $v(x, y, t)$ tiene la misma forma que en (4.16), con:

$$\tilde{f}(x, y, t) = -\pi^2 \cos(\pi x) y e^{\frac{1}{2}\pi^2 t}, \quad \varphi^*(x, y) = 0.$$

La solución se expande como una Serie Doble de Senos de Fourier sobre la región $[0,1] \times [0,1]$:

$$v(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{n,m}(t) V_{n,m}(x, y),$$

donde $T_{n,m}(t)$ es el coeficiente dependiente del tiempo a calcular, y:

$$V_{n,m}(x, y) = \text{sen}(n\pi x) \text{sen}(m\pi y)$$

representa a las funciones propias del PVIF, con

$$\lambda_{n,m} = (n+m)\pi^2, \quad \|V_{n,m}(x, y)\|^2 = \frac{1}{4}, \quad \begin{array}{l} n = 1,2,3, \dots \\ m = 1,2,3, \dots \end{array}$$

siendo los valores propios y la norma cuadrática, respectivamente.

Aplicando la ecuación (4.22), se obtiene:

$$B_{n,m} = \frac{1}{\|V_{n,m}(x, y)\|^2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} [0] V_{n,m}(x, y) dy dx = 0, \quad \begin{array}{l} n = 1,2,3, \dots; \\ m = 1,2,3, \dots \end{array}$$

Aplicando la ecuación (4.30):

$$\tilde{f}_{n,m}(t) = \frac{1}{\|V_{n,m}(x, y)\|^2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[-25\pi^2 \cos(\pi x) y e^{\frac{1}{2}\pi^2 t} \right] V_{n,m}(x, y) dy dx$$

entonces:

$$\tilde{f}_{n,m}(t) = \begin{cases} 4 \left[\frac{n(1+(-1)^n)}{n^2-1} \right] \left[\frac{(-1)^m}{m} \right] e^{\frac{1}{2}\pi^2 t} & ; n \neq 1, m = 1,2,3, \dots \\ 0 & ; n = 1, m = 1,2,3, \dots \end{cases}$$

Luego, con (4.36), se obtiene el coeficiente dependiente del tiempo:

$$T_{n,m}(t) = e^{-\frac{1}{2}\lambda_{n,m} t} \cdot \int_0^t e^{\frac{1}{2}\lambda_{n,m} \tau} \cdot \tilde{f}_{n,m}(\tau) d\tau$$

entonces:

$$T_{n,m}(t) = \begin{cases} \frac{8}{\pi^2 + \lambda_{n,m}} \left[\frac{n(1+(-1)^n)}{n^2-1} \right] \left[\frac{(-1)^m}{m} \right] \left(e^{\frac{1}{2}\pi^2 t} - e^{-\frac{1}{2}\lambda_{n,m} t} \right) & ; n \neq 1, m = 1,2,3, \dots; \\ 0 & ; n = 1, m = 1,2,3, \dots \end{cases}$$

Por la ecuación (4.37):

$$v(x, y, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{n,m}(t) \text{sen}(n\pi x) \text{sen}(m\pi y).$$

La distribución de temperatura en la placa cuadrada se describe por la solución exacta:

$$u(x, y, t) = \cos(\pi x) y e^{\frac{1}{2}\pi^2 t} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{n,m}(t) \text{sen}(n\pi x) \text{sen}(m\pi y)$$

B) Por el método de diferencias finitas:

Se construye una malla en el dominio $[0,1] \times [0,1]$ dividiendo cada lado de la placa en $M_x = M_y = 5$ subintervalos. En consecuencia, los tamaños de paso espaciales definidos son $\Delta x = \Delta y = 0.20$.

Por el criterio de estabilidad, si se pretende estudiar la evolución de la temperatura en la placa rectangular por el tiempo máximo de $t_{max} = 0.50$ horas utilizando el método explícito, se puede elegir subdividir el dominio relacionado con el tiempo $[0,0.5]$ en $M_t = 50$ subintervalos, para obtener soluciones estables. El tamaño de paso temporal $\Delta t = 0.01$, es válido según el criterio de estabilidad.

Se definen los nodos por las coordenadas (x_i, y_j, t_n) , donde cada componente se define a partir del tamaño de cada subintervalo:

$$x_i = i\Delta x \quad , \quad \forall i = 0,1,2,3,4,5;$$

$$y_j = j\Delta y \quad , \quad \forall j = 0,1,2,3,4,5;$$

$$t_n = n\Delta t \quad , \quad \forall n = 0,1,2, \dots, 50.$$

Con los algoritmos (4.1) y (4.3) implementados en el sistema computacional científico Mathematica, se obtienen las temperaturas para cada nodo, en diferentes niveles de tiempo. En cada celda de las tablas 4.79 – 4.85, de arriba hacia abajo, el primer valor indica la temperatura obtenida por el método explícito de diferencias finitas, y el segundo valor indica la temperatura obtenida por el método implícito (con $TOL = 10^{-5}$); excepto en la condición inicial y las condiciones de frontera.

Tabla 4.78: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 0$

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_0 = 0.00$ horas						
$y_5 = 1.00$	1.0000000	0.8090170	0.3090170	-0.3090170	-0.8090170	-1.0000000
$y_4 = 0.80$	0.8000000	0.6472136	0.2472136	-0.2472136	-0.6472136	-0.8000000
$y_3 = 0.60$	0.6000000	0.4854102	0.1854102	-0.1854102	-0.4854102	-0.6000000
$y_2 = 0.40$	0.4000000	0.3236068	0.1236068	-0.1236068	-0.3236068	-0.4000000
$y_1 = 0.20$	0.2000000	0.1618034	0.0618034	-0.0618034	-0.1618034	-0.2000000
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.20$	$x_2 = 0.40$	$x_3 = 0.60$	$x_4 = 0.80$	$x_5 = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.79: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 20$

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{20} = 0.10$ horas						
$y_5 = 1.00$	1.6380069	1.3251754	0.5061720	-0.5061720	-1.3251754	-1.6380069
$y_4 = 0.80$	1.3104055	0.7860468 0.7920779	0.2737755 0.2769675	-0.2737755 -0.2769675	-0.7860468 -0.7920779	-1.3104055
$y_3 = 0.60$	0.9828042	0.5255388 0.5322954	0.1717736 0.1754164	-0.1717736 -0.1754164	-0.5255388 -0.5322954	-0.9828042
$y_2 = 0.40$	0.6552028	0.3375498 0.3425622	0.1074649 0.1101739	-0.1074649 -0.1101739	-0.3375498 -0.3425622	-0.6552028
$y_1 = 0.20$	0.3276014	0.1669706 0.1695165	0.0527141 0.0540892	-0.0527141 -0.0540892	-0.1669706 -0.1695165	-0.3276014
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.20$	$x_2 = 0.40$	$x_3 = 0.60$	$x_4 = 0.80$	$x_5 = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.80: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 50$

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{50} = 0.25$ horas						
$y_5 = 1.00$	3.4339134	2.7780943	1.0611376	-1.0611376	-2.7780943	-3.4339134
$y_4 = 0.80$	2.7471307	1.6265981 1.6320997	0.5608880 0.5634439	-0.5608880 -0.5634439	-1.6265981 -1.6320997	-2.7471307
$y_3 = 0.60$	2.0603481	1.0698159 1.0750377	0.3405136 0.3429948	-0.3405136 -0.3429948	-1.0698159 -1.0750377	-2.0603481
$y_2 = 0.40$	1.3735654	0.6784342 0.6821417	0.2073665 0.2091466	-0.2073665 -0.2091466	-0.6784342 -0.6821417	-1.3735654
$y_1 = 0.20$	0.6867827	0.3331999 0.3350911	0.1001774 0.1010932	-0.1001774 -0.1010932	-0.3331999 -0.3350911	-0.6867827
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.20$	$x_2 = 0.40$	$x_3 = 0.60$	$x_4 = 0.80$	$x_5 = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.81: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 100$

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{100} = 0.50$ horas						
$y_5 = 1.00$	11.791761	9.5397354	3.6438547	-3.6438547	-9.5397354	-11.791761
$y_4 = 0.80$	9.4334091	5.5846411 5.6027088	1.9254501 1.9337181	-1.9254501 -1.9337181	-5.5846411 -5.6027088	-9.4334091
$y_3 = 0.60$	7.0750568	3.6721210 3.6887632	1.1683461 1.1760706	-1.1683461 -1.1760706	-3.6721210 -3.6887632	-7.0750568
$y_2 = 0.40$	4.7167046	2.3281652 2.3396604	0.7111398 0.7164897	-0.7111398 -0.7164897	-2.3281652 -2.3396604	-4.7167046
$y_1 = 0.20$	2.3583523	1.1432483 1.1490043	0.3434248 0.3461140	-0.3434248 -0.3461140	-1.1432483 -1.1490043	-2.3583523
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_1 = 0.20$	$x_2 = 0.40$	$x_3 = 0.60$	$x_4 = 0.80$	$x_5 = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

En las tablas 4.82 y 4.83, se presentan los valores de temperatura en $t_{125} = 0.25$ y $t_{250} = 0.50$ horas, si se discretiza el dominio con $M_x = M_y = 10$, y $M_t = 250$ subintervalos:

Tabla 4.82: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 125$

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{125} = 0.25$ horas						
$y_{10} = 1.00$	3.4339134	2.7780943	1.0611376	-1.0611376	-2.7780943	-3.4339134
$y_8 = 0.80$	2.7471307	1.5906633 1.5929990	0.5459126 0.5469819	-0.5459126 -0.5469819	-1.5906633 -1.5929990	-2.7471307
$y_6 = 0.60$	2.0603481	1.0489194 1.0510666	0.3302218 0.3312353	-0.3302218 -0.3312353	-1.0489194 -1.0510666	-2.0603481
$y_4 = 0.40$	1.3735654	0.6690522 0.6705497	0.2023964 0.2031088	-0.2023964 -0.2031088	-0.6690522 -0.6705497	-1.3735654
$y_2 = 0.20$	0.6867827	0.3297134 0.3304718	0.0982920 0.0986541	-0.0982920 -0.0986541	-0.3297134 -0.3304718	-0.6867827
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_2 = 0.20$	$x_4 = 0.40$	$x_6 = 0.60$	$x_8 = 0.80$	$x_{10} = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.83: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 250$

Distribución de la Temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{250} = 0.50$ horas						
$y_{10} = 1.00$	11.791761	9.5397354	3.6438547	-3.6438547	-9.5397354	-11.791761
$y_8 = 0.80$	9.4334091	5.4614610 5.4692318	1.8741600 1.8776775	-1.8741600 -1.8776775	-5.4614610 -5.4692318	-9.4334091
$y_6 = 0.60$	7.0750568	3.6007114 3.6076903	1.1332195 1.1364559	-1.1332195 -1.1364559	-3.6007114 -3.6076903	-7.0750568
$y_4 = 0.40$	4.7167046	2.2962914 2.3010504	0.6942847 0.6964945	-0.6942847 -0.6964945	-2.2962914 -2.3010504	-4.7167046
$y_2 = 0.20$	2.3583523	1.1314856 1.1338592	0.3370803 0.3381811	-0.3370803 -0.3381811	-1.1314856 -1.1338592	-2.3583523
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_2 = 0.20$	$x_4 = 0.40$	$x_6 = 0.60$	$x_8 = 0.80$	$x_{10} = 1.00$

Fuente: Elaboración Propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

En las tablas 4.84 y 4.85, se presentan los valores de temperatura en $t_{1250} = 0.25$ y $t_{2500} = 0.50$ horas, si se discretiza el dominio con $M_x = M_y = 20$, y $M_t = 2500$ subintervalos:

Tabla 4.84: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 1250$

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{1250} = 0.25$ horas						
$y_{20} = 1.00$	3.4339134	2.7780943	1.0611376	-1.0611376	-2.7780943	-3.4339134
$y_{16} = 0.80$	2.7471307	1.5806669 1.5809215	0.5419756 0.5420758	-0.5419756 -0.5420758	-1.5806669 -1.5809215	-2.7471307
$y_{12} = 0.60$	2.0603481	1.0438563 1.0440541	0.3276518 0.3277303	-0.3276518 -0.3277303	-1.0438563 -1.0440541	-2.0603481
$y_8 = 0.40$	1.3735654	0.6670888 0.6672222	0.2012955 0.2013487	-0.2012955 -0.2013487	-0.6670888 -0.6672222	-1.3735654
$y_4 = 0.20$	0.6867827	0.3290704 0.3291377	0.0979226 0.0979496	-0.0979226 -0.0979496	-0.3290704 -0.3291377	-0.6867827
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_4 = 0.20$	$x_8 = 0.40$	$x_{12} = 0.60$	$x_{16} = 0.80$	$x_{20} = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

Tabla 4.85: Distribución de temperatura en la placa, nivel $n = 2500$

Distribución de la temperatura $U_{i,j}^n$ en el tiempo $t_{2500} = 0.50$ horas						
$y_{20} = 1.00$	11.791761	9.5397354	3.6438547	-3.6438547	-9.5397354	-11.791761
$y_{16} = 0.80$	9.4334091	5.4271215 5.4279199	1.8606326 1.8609883	-1.8606326 -1.8609883	-5.4271215 -5.4279199	-9.4334091
$y_{12} = 0.60$	7.0750568	3.5833058 3.5840083	1.1243824 1.1247025	-1.1243824 -1.1247025	-3.5833058 -3.5840083	-7.0750568
$y_8 = 0.40$	4.7167046	2.2895312 2.2900079	0.6904933 0.6907113	-0.6904933 -0.6907113	-2.2895312 -2.2900079	-4.7167046
$y_4 = 0.20$	2.3583523	1.1292673 1.1295053	0.3358056 0.3359143	-0.3358056 -0.3359143	-1.1292673 -1.1295053	-2.3583523
$y_0 = 0.00$	0	0	0	0	0	0
	$x_0 = 0.00$	$x_4 = 0.20$	$x_8 = 0.40$	$x_{12} = 0.60$	$x_{16} = 0.80$	$x_{20} = 1.00$

Fuente: Elaboración propia y Wolfram Mathematica versión 10.4

En la figura 4.15, se muestra la solución gráfica del PVIF propuesto utilizando el método explícito, con los tamaños de subintervalos elegidos para el problema.

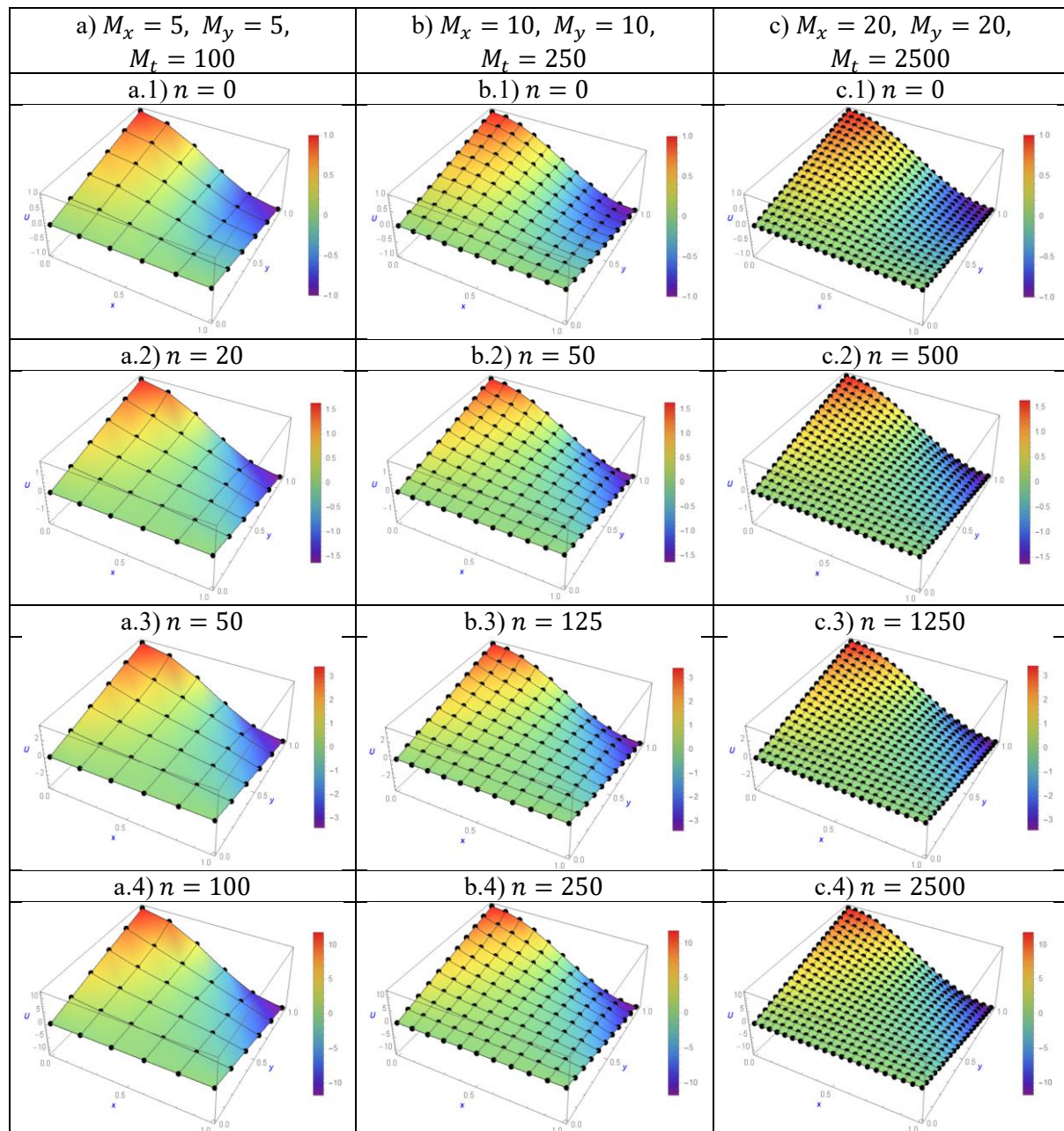


Figura 4.15: Comparación gráfica de la distribución de temperatura de la placa rectangular, según el método explícito.

Fuente: Elaboración Propia y Wolfram Mathematica Versión 10.4

CAPÍTULO V

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La presente investigación tuvo como objetivo principal establecer la solución analítica y numérica de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio, empleando los métodos de expansión de funciones propias para encontrar la solución analítica, y los métodos explícito e implícito de diferencias finitas para encontrar soluciones aproximadas. El problema a resolver consistió en un problema de valor inicial y de frontera, compuesto por una EDP de difusión del calor no homogénea aplicado sobre una placa rectangular, con una condición inicial y cuatro condiciones de frontera de tipo Dirichlet no homogéneas o dependientes de la posición y del tiempo; considerando además que las condiciones de frontera son consistentes, es decir, que para cualquier valor del tiempo, la temperatura en cada esquina de la placa rectangular alcanza un valor único.

Para encontrar la solución analítica, con la ayuda de una función auxiliar, se transformó el problema propuesto a uno con condiciones de Dirichlet homogéneas y, manteniendo esa característica, se volvió a separar el nuevo problema en dos sistemas: en el primero, considerando una EDP homogénea con una condición inicial diferente de cero, se conoce la solución por el método de separación de variables; mientras que, en el segundo, considerando una EDP no homogénea con término fuente diferente de cero y condición inicial cero, se aplicó el método de expansión de funciones propias, expresando la solución en una serie infinita cuyos términos están conformados por las mismas funciones propias utilizadas para describir la solución en el primer sistema, en particular, en una Serie Doble de Senos de Fourier, debido a que satisface las condiciones de frontera homogéneas del sistema. Una vez hallado el coeficiente dependiente del tiempo en ese caso, se logró expresar la distribución de la temperatura de forma general. Gracias a este enfoque, se dispuso de una solución exacta para el primer ejemplo, tratándose de una función expresada de forma cerrada, que sirvió como referencia en el estudio de la convergencia de los métodos explícito e implícito de diferencias finitas. Para el segundo ejemplo, se expresó la distribución de temperatura como la suma de una función auxiliar que satisface las condiciones de frontera del problema original y una Serie Doble de Senos de Fourier; sin embargo, por la presencia de series infinitas, surge una limitación para efectuar comparaciones con las soluciones numéricas de forma directa como en el primer ejemplo.

Para encontrar la solución numérica, se utilizó las series de Taylor para representar a las derivadas parciales de la solución en diferencias finitas, una vez efectuado la discretización del dominio espacial y temporal. Con el método de diferencias finitas, se emplearon los esquemas explícito e implícito, los cuales presentan similitudes al aproximar las segundas derivadas espaciales mediante diferencias finitas centrales; sin embargo, la diferencia entre ambos esquemas radica en la forma en que se aproximó la derivada temporal: en el esquema explícito, se utilizó las diferencias finitas hacia adelante, mientras que, en el esquema implícito, se utilizó las diferencias finitas hacia atrás. Con el método explícito, se comprobó que su formulación permite calcular de forma directa los valores de

temperatura en el siguiente nivel de tiempo, lo que facilita su implementación computacional. Sin embargo, su estabilidad depende de una adecuada elección de los tamaños de paso espacial y temporal. En ese sentido, la condición de estabilidad de Von Neumann impone una restricción sobre el tamaño de paso temporal en función de los tamaños de paso espaciales y del coeficiente de difusividad térmica de la placa. Por otro lado, el método implícito presenta una formulación más compleja, ya que la transformación del problema de valor inicial y de frontera mediante la discretización implica la construcción de un sistema de ecuaciones lineales con los valores de temperatura desconocidos como variables del sistema, para cada nivel discretizado del tiempo. Representar el sistema de ecuaciones con el uso de matrices por bloques resultó ser una opción adecuada para la implementación del método del gradiente conjugado. El esquema implícito conlleva un costo computacional más elevado que el explícito, pero es incondicionalmente estable, es decir, no se necesita restringir el tamaño de paso del tiempo para obtener soluciones físicamente razonables. En el primer ejemplo, se evidenció en la comparación con la solución analítica que, en ambos esquemas numéricos, la solución aproximada converge hacia la solución exacta a medida que la cantidad de subintervalos se incrementa en la discretización del dominio, sin descartar el criterio de estabilidad de Von Neumann impuesto en el esquema explícito. Para cualquier método empleado, con respecto al comportamiento de la temperatura en el problema de valor inicial y de frontera propuesto, se llega a una misma conclusión: se observa que la distribución de temperatura alcanza valores máximos y mínimos en algunas regiones de la placa rectangular; además, durante los primeros niveles del tiempo, el descenso de temperatura es más pronunciado, mientras que en los niveles posteriores, dicho descenso persiste, aunque con menor intensidad que al principio. En el segundo ejemplo, solo se conoce la solución en su representación como una serie infinita de Fourier. Para determinar el valor de convergencia de esa serie infinita fijando una posición de la placa y un tiempo en específico, se requiere de un tratamiento adicional como sumar parcialmente la serie empleando una mayor cantidad posible de términos, lo que representa una limitación en el estudio de la convergencia de los esquemas numéricos debido a que, para su implementación computacional, se requiere de un programa con mayor capacidad de procesamiento de resultados. Por lo tanto, el estudio de la convergencia para este caso queda pendiente. Sin embargo, es posible obtener la solución de forma numérica utilizando los esquemas explícito e implícito, concluyendo que la temperatura sigue una distribución antisimétrica con respecto a un eje vertical fijo en la mitad de la placa, y manteniendo esa distribución en niveles posteriores del tiempo, la temperatura tiende a crecer exponencialmente en una de las fronteras, mientras que decrece con la misma intensidad en la frontera opuesta. En ambos ejemplos, la implementación de los algoritmos propuestos en el sistema computacional Mathematica facilitó la visualización de la distribución de temperatura en diferentes niveles de tiempo, destacando así la importancia de la simulación computacional en el análisis de ecuaciones diferenciales parciales.

En los estudios realizados por diversos autores, algunos se destacan por su rigurosidad matemática, mientras que otros enfatizan la aplicación de los métodos a la simulación de problemas físicos. El empleo del método de separación de variables es una práctica común para obtener la solución exacta de un problema de valor inicial y de frontera; sin embargo, su aplicación se ve limitada para casos homogéneos. El uso del método de diferencias finitas es una alternativa frecuente para resolver problemas no homogéneos, ya que promueve la posibilidad de implementarse computacionalmente, pero contar con una solución exacta para el estudio de la convergencia del esquema numérico utilizado resulta ideal para validar las soluciones aproximadas. Con base en los resultados presentados en el capítulo anterior, se concluye que los objetivos planteados fueron alcanzados, evidenciando que con el método de expansión de funciones propias se encontró la solución analítica para problemas con término fuente y condiciones de Dirichlet no homogéneas, que sirvió de referencia para validar los resultados aproximados provenientes de la aplicación de métodos numéricos; y con el método de diferencias finitas se encontró la solución numérica, constituyéndose como un método versátil y aplicable a problemas donde no sea posible conocer la solución exacta de manera inmediata, sobre todo cuando la distribución de la temperatura se encuentra descrita por condiciones de frontera más complejas.

CAPÍTULO VI CONCLUSIONES

6.1. CONCLUSIÓN GENERAL

Se halló la solución de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio. El estudio se centró en el problema de valor inicial y de frontera compuesto por una EDP del calor no homogénea con término fuente, con una condición inicial y condiciones de frontera de tipo Dirichlet no homogéneas o dependientes de la posición y del tiempo.

6.2. CONCLUSIONES ESPECÍFICAS

6.2.1. Se estableció la solución de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio utilizando el método de expansión de funciones propias. Un paso previo consiste en la transformación de las condiciones de frontera de tipo Dirichlet no homogéneas a homogéneas por parte de una función auxiliar. Una parte de la solución depende del término fuente, y se expresa como una serie infinita considerando como base a las funciones propias utilizadas en la representación de la solución del problema homogéneo relacionado en una Serie Doble de Senos de Fourier, obtenido utilizando el método de separación de variables, por la razón de que satisface las condiciones de frontera homogéneas.

6.2.2. Se encontró la solución de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio utilizando el método de diferencias finitas y con la ayuda del sistema computacional Mathematica. Se resolvió el problema propuesto considerando los esquemas numéricos explícito e implícito, donde se aproxima la derivada temporal utilizando diferencias finitas hacia adelante y hacia atrás, respectivamente, una vez efectuado la discretización del dominio. Con el método explícito, se han obtenido los valores de temperatura de forma directa en cada nivel de tiempo, considerando que una elección apropiada de la cantidad de subintervalos en la discretización del dominio influye en la estabilidad del método. Con el método implícito, se ha determinado en cada nivel de tiempo la distribución de temperatura resolviendo un sistema de ecuaciones lineales en el que las variables corresponden a los valores de temperatura desconocidos. Aunque presenta un costo computacional elevado a comparación del método explícito, el método implícito es incondicionalmente estable.

CAPÍTULO VII

RECOMENDACIONES

7.1. RECOMENDACIÓN GENERAL

Realizar un estudio de la solución analítica y numérica en otros problemas de valor inicial y de frontera, que contengan una ecuación diferencial parcial no homogénea, con una condición inicial y condiciones de frontera no homogéneas, y comparar ambas soluciones. Por ejemplo, resultaría de interés resolver una ecuación de difusión del calor con condiciones de frontera de tipo Neumann, Robin o Mixtas.

7.2. RECOMENDACIONES ESPECÍFICAS

7.2.1. Con respecto a la solución analítica

- Realizar un estudio de las propiedades de ortogonalidad y completitud del conjunto de valores propios y funciones propias en otros problemas regulares de Sturm – Liouville, y relacionar con aplicaciones en la resolución de problemas de valor inicial y de frontera.
- Emplear métodos analíticos o numéricos para determinar el valor de convergencia de la solución del problema de valor inicial y de frontera representado por series infinitas.

7.2.2. Con respecto a la solución numérica

- Realizar un estudio sobre la aplicación de los métodos explícito e implícito de diferencias finitas en problemas con condiciones de frontera de tipo Neumann, Robin o Mixtas.
- Discutir las propiedades de consistencia, estabilidad y convergencia del método de diferencias finitas aplicado al problema tratado en la presente investigación.

Se sugiere ampliar el estudio a otros problemas de valor inicial y de frontera, considerando diversas ecuaciones lineales de tipo elípticas, hiperbólicas y parabólicas, que compartan características similares a las del caso estudiado en la presente tesis.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Altaç, Z. (2025). *Numerical methods for scientists and engineers: With pseudocodes*. Chapman and Hall/CRC Press.
- Bai, H. G., Jeyanthi, M. P. y Ashmi Dev, D. A. (2021). Numerical analysis of 2d rectangular plate. *Journal of physics. Conference series*, 1770(1), 012049.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1770/1/012049>
- Bleecker, D. y Csordas, G. (2018). *Basic Partial Differential Equations*. Chapman and Hall/CRC.
- Burden, A., Burden, R., y Faires, J. D. (2017). *Análisis Numérico* (10.^a ed.). CENGAGE Learning Editores, S.A de C.V.
- Coleman, M. P. (2013). *An introduction to partial differential equations with MATLAB* (2.^a ed.). Taylor & Francis Group.
- Domínguez, F. C. y Nieves, A. (2014). *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería*. Grupo Editorial Patria.
- Epperson, J. F. (2013). *An introduction to numerical methods and analysis* (2.^a ed.). John Wiley & Sons.
- Gilat, A. y Subramaniam, V. (2008). *Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: Uma introdução com aplicações usando o MATLAB* (A. R. de Conti, Trad.). Traducido de *Numerical Methods for Engineers and Scientists: An Introduction with Applications Using MATLAB* (1.^a ed.). John Wiley & Sons, Inc. Bookman/Artmed.
- Gonçalves de Brito dos Santos, V. y Gomes dos Anjos, P. T. (2022). Finite difference method applied in two-dimensional heat conduction problem in the permanent regime in rectangular coordinates. *Advances in pure mathematics*, 12(09), 505–518.
<https://doi.org/10.4236/apm.2022.129038>
- Gray, J. W. (1994). *Mastering Mathematica: Programming Methods and Applications*. Academic Press.
- Haberman, R. (2013). *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems* (5^a ed.). Pearson Educations.

- Henner, V., Belozerova, T. y Forinash, K. (2009). *Mathematical methods in physics: Partial differential equations, Fourier series, and special functions*. A K Peters.
- Henner, V., Belozerova, T. y Nepomnyashchy, A. (2020). *Partial differential equations: Analytical methods and applications*. Chapman & Hall/CRC.
- Hirsch, C. (2007). *Numerical computation of internal and external flows: The fundamentals of computational fluid dynamics* (2^a ed.). Butterworth-Heinemann.
- Hoffman, J. D. (2001). *Numerical methods for engineers and scientists* (2.^a ed.). Marcel Dekker.
- Holmes, M. H. (2007). *Introduction to numerical methods in differential equations*. Springer.
- Jeffrey, A. (2002). *Advanced Engineering Mathematics*. Hardcourt/Academic Press.
- La Torre Alarcón, C. R. (2013). *Simulación numérica de la distribución de temperatura en una placa metálica rectangular utilizando un esquema de diferencias finitas* [Tesis de maestría, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. Repositorio Institucional UNPRG.
<https://hdl.handle.net/20.500.12893/6078>
- Li, Z., Qiao, Z. y Tang, T. (2018). *Numerical solution of differential equations: Introduction to finite difference and finite element methods*. Cambridge University Press.
- Miller, G. (2014). *Numerical analysis for engineers and scientists*. Cambridge University Press.
- Myint – U, T. y Debnath, L. (2007). *Linear partial differential equations for scientists and engineers* (4^a ed.). Birkhäuser.
- O’Neil, P. V. (2015). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* (J. C. Rodríguez, Ed. y Trad., 7^a ed.). CENGAGE Learning.
- Özisik, N., Orlande, H. R. B., Colaço, M. J. y Machado Cotta, R. (2017). *Finite difference methods in heat transfer* (2.^a ed.). CRC Press.
- Ray, S. S. (2016). *Numerical analysis with algorithms and programming*. Chapman & Hall/CRC.
- Reddy, J. N., Anand, N. K. y Roy, P. (2023). *Finite element and finite volume methods for heat transfer and fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- Roychowdhury, D. G. (2021). *Computational fluid dynamics for incompressible flow*. CRC Press.

- Salgado, V. H. (2021). *Ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico mediante el método de diferencias finitas* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco]. Repositorio Institucional UNSAAC <http://hdl.handle.net/20.500.12918/6064>
- Sequeira – Chavarría, F. y Ramírez – Bogantes, M. (2019). Aspectos computacionales del método de diferencias finitas para la ecuación de calor dependiente del tiempo. *UNICIENCIA*, 33(1), 83-100. <https://doi.org/10.15359/ru.33-1.7>
- Shingareva, I. K. y Lizarraga-Celaya, C. (2011). *Solving nonlinear partial differential equations with Maple and Mathematica*. Springer.
- Spiegel, M. R. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas* (J. A. Sánchez, Trad.). Traducido de la 3.^a ed. en inglés de *Applied Differential Equations* por M. R. Spiegel. Prentice-Hall Latinoamérica.
- Stewart, G. W. (1998). *Matrix Algorithms: Volume 1: Basic Decompositions*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Strikwerda, J. C. (2004). *Finite difference schemes and partial differential equations, second edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics
- Tannehill, J. C., Pletcher, R. H., Shankar, V., Anderson, D. y Munipalli, R. (2021). *Computational fluid mechanics and heat transfer* (4.^a ed.). CRC Press.
- Tolstov, G. P. (1962). *Fourier Series*. Prentice – Hall.
- Uddin, N. (2024). *Heat transfer: A systematic learning approach*. Taylor & Francis Group.
- Zauderer, E. (2006). *Partial differential equations of applied mathematics* (3^a ed.). John Wiley & Sons.
- Zill, D. G. y Cullen, M. R. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería, Vol. 1: Ecuaciones diferenciales* (E. Jasso, H. D'Borneville, & C. R. Cordero Pedraza, Trad.). Traducido de la 3.^a ed. en inglés de *Advanced Engineering Mathematics* por D. G. Zill y M. R. Cullen. Jones and Bartlett Publishers. Editorial McGraw – Hill Latinoamérica.

ANEXOS

ANEXO A. DERIVACIÓN DE LA FUNCIÓN AUXILIAR $w(x, y, t)$

Considerar el problema de valores en la frontera general para la conducción de calor dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \gamma u + f(x, y, t), \\ 0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

con condición inicial y condiciones de frontera no homogéneas

$$\begin{aligned} u(x, y, t)|_{t=0} &= \varphi(x, y), \\ P_1[u] &\equiv \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u \Big|_{x=0} = g_1(y, t), & P_2[u] &\equiv \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u \Big|_{x=L_x} = g_2(y, t), \\ P_3[u] &\equiv \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_3 u \Big|_{y=0} = g_3(x, t), & P_4[u] &\equiv \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_4 u \Big|_{y=L_y} = g_4(x, t), \end{aligned}$$

Para tratar con condiciones de frontera homogéneas, se introduce una función auxiliar, $w(x, y, t)$, y se busca una solución del problema en la forma

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) + w(x, y, t),$$

donde $v(x, y, t)$ es una nueva función desconocida, y la función auxiliar $w(x, y, t)$ se elige de modo que satisfaga las condiciones de frontera no homogéneas dadas.

Suponer que las **funciones de valor en las fronteras** satisfacen las **condiciones de consistencia** (es decir, las condiciones de frontera toman los mismos valores en los vértices del dominio), en cuyo caso se tiene

$$\begin{aligned} P_1[g_3(x, t)]_{x=0} &= P_3[g_1(y, t)]_{y=0}, & P_1[g_4(x, t)]_{x=0} &= P_4[g_1(y, t)]_{y=L_y}, \\ P_2[g_3(x, t)]_{x=L_x} &= P_3[g_2(y, t)]_{y=0}, & P_2[g_4(x, t)]_{x=L_x} &= P_4[g_2(y, t)]_{y=L_y}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Para este caso, Henner et. Al (2009) proponen una función auxiliar $w(x, y, t)$ definido en (A.3) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= g_1(y, t)\bar{X}(x) + g_2(y, t)\bar{\bar{X}}(x) + g_3(x, t)\bar{Y}(y) + g_4(x, t)\bar{\bar{Y}}(y) \\ &+ A(t)\bar{X}(x)\bar{Y}(y) + B(t)\bar{X}(x)\bar{\bar{Y}}(y) + C(t)\bar{\bar{X}}(x)\bar{Y}(y) + D(t)\bar{\bar{X}}(x)\bar{\bar{Y}}(y), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde $\bar{X}(x)$, $\bar{\bar{X}}(x)$, $\bar{Y}(y)$ y $\bar{\bar{Y}}(y)$ son polinomios de primer o segundo orden, designados por una o dos barras sobre los símbolos. Los coeficientes de estos polinomios se ajustan de tal manera que la función $w(x, y, t)$ satisfaga las condiciones de frontera dadas en (A.1).

Existe otro caso en el que las **funciones de valor en las fronteras** son **inconsistentes**, es decir, se imponen valores distintos en los vértices del dominio para cualquier valor del tiempo; sin embargo, el

análisis de ese tipo de problemas queda fuera del alcance de esta investigación por requerir de tratamientos adicionales.

Henner et. Al (2009) muestran la derivación de la función auxiliar $w(x, y, t)$ para el problema (A.1) y sus condiciones de frontera dadas de forma general, suponiendo que satisfacen la condición de consistencia; con la finalidad de plantear un nuevo problema de valores en la frontera en función de $v(x, y, t)$ con condiciones de frontera homogéneas. De manera análoga, manteniendo la validez del modelo propuesto por el autor, se deriva la función $w(x, y, t)$ para este problema que es de interés en la presente investigación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + f(x, y, t), \quad (\text{A.4})$$

$$0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad t > 0,$$

con condición inicial y condiciones de frontera de tipo Dirichlet no homogéneas

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi(x, y),$$

$$u(0, y, t) = g_1(y, t), \quad u(L_x, y, t) = g_2(y, t),$$

$$u(x, 0, t) = g_3(x, t), \quad u(x, L_y, t) = g_4(x, t).$$

Se sigue buscando una solución de la forma $u(x, y, t) = v(x, y, t) + w(x, y, t)$, y la función auxiliar $w(x, y, t)$ mantiene la definición dada en (A.3). Se supone que las funciones de valor en las fronteras de tipo **Dirichlet** satisfacen las **condiciones de consistencia**, es decir:

$$g_3(0, t) = g_1(0, t), \quad g_4(0, t) = g_1(L_y, t), \quad (\text{A.5})$$

$$g_3(L_x, t) = g_2(0, t), \quad g_4(L_x, t) = g_2(L_y, t).$$

Para que $w(x, y, t)$ satisfaga las condiciones de frontera descritas en (A.5), las funciones $\bar{X}(x)$ y $\bar{X}(x)$ pueden elegirse de tal manera que

$$\bar{X}(0) = 1, \quad \bar{X}(L_x) = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{X}(0) = 0, \quad \bar{X}(L_x) = 1.$$

Como las condiciones de frontera son de tipo Dirichlet, las funciones $\bar{X}(x)$ y $\bar{X}(x)$ son polinomios de primer orden

$$\bar{X}(x) = \gamma_1 + \delta_1 x, \quad \bar{X}(x) = \gamma_2 + \delta_2 x. \quad (\text{A.7})$$

Los coeficientes de estos polinomios $\gamma_1, \delta_1, \gamma_2$ y δ_2 se definen de forma única como

$$\gamma_1 = 1, \quad \delta_1 = -\frac{1}{L_x},$$

$$\gamma_2 = 0, \quad \delta_2 = \frac{1}{L_x},$$

y entonces se tiene

$$\bar{X}(x) = 1 - \frac{1}{L_x} x, \quad \bar{X}(x) = \frac{1}{L_x} x. \quad (\text{A.8})$$

De la misma forma, las funciones $\bar{Y}(y)$ e $\bar{\bar{Y}}(y)$ pueden elegirse de tal manera que

$$\begin{aligned}\bar{Y}(0) &= 1, & \bar{Y}(L_y) &= 0, \\ \bar{\bar{Y}}(0) &= 0, & \bar{\bar{Y}}(L_y) &= 1.\end{aligned}\tag{A.9}$$

Como las condiciones de frontera son de tipo Dirichlet, las funciones $\bar{Y}(y)$ e $\bar{\bar{Y}}(y)$ son polinomios de primer orden

$$\bar{Y}(y) = \gamma_3 + \delta_3 y, \quad \bar{\bar{Y}}(y) = \gamma_4 + \delta_4 y.\tag{A.10}$$

Los coeficientes de estos polinomios γ_3 , δ_3 , γ_4 y δ_4 se definen de forma única como

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= 1, & \delta_3 &= -\frac{1}{L_y}, \\ \gamma_4 &= 0, & \delta_4 &= \frac{1}{L_y},\end{aligned}$$

y entonces se tiene

$$\bar{Y}(y) = 1 - \frac{1}{L_y} y, \quad \bar{\bar{Y}}(y) = \frac{1}{L_y} y.\tag{A.11}$$

Los coeficientes $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$ de la función auxiliar $w(x, y, t)$ se definen a partir de las condiciones de frontera:

1. En el borde $x = 0$, se tiene

$$w(0, y, t) = g_1(y, t) + \{g_3(0, t) + A(t)\}\bar{Y}(y) + \{g_4(0, t) + B(t)\}\bar{\bar{Y}}(y).$$

2. En el borde $x = L_x$, se tiene

$$w(L_x, y, t) = g_2(y, t) + \{g_3(L_x, t) + C(t)\}\bar{Y}(y) + \{g_4(L_x, t) + D(t)\}\bar{\bar{Y}}(y).$$

3. En el borde $y = 0$, se tiene

$$w(x, 0, t) = g_3(x, t) + \{g_1(0, t) + A(t)\}\bar{X}(x) + \{g_2(0, t) + C(t)\}\bar{\bar{X}}(x).$$

4. En el borde $y = L_y$, se tiene

$$w(x, L_y, t) = g_4(x, t) + \{g_1(L_y, t) + B(t)\}\bar{X}(x) + \{g_2(L_y, t) + D(t)\}\bar{\bar{X}}(x).$$

Las condiciones de consistencia para las funciones definidas en las condiciones de frontera son válidas, por lo que los coeficientes son

$$\begin{aligned}A(t) &= -g_1(0, t) &= -g_3(0, t) &= -u(0, 0, t), \\ B(t) &= -g_1(L_y, t) &= -g_4(0, t) &= -u(0, L_y, t), \\ C(t) &= -g_2(0, t) &= -g_3(L_x, t) &= -u(L_x, 0, t), \\ D(t) &= -g_2(L_y, t) &= -g_4(L_x, t) &= -u(L_x, L_y, t).\end{aligned}\tag{A.12}$$

Por lo tanto, la función auxiliar $w(x, y, t)$ satisface las siguientes condiciones de frontera dadas

$$\begin{aligned}w(0, y, t) &= g_1(y, t), & w(L_x, y, t) &= g_2(y, t), \\ w(x, 0, t) &= g_3(x, t), & w(x, L_y, t) &= g_4(x, t).\end{aligned}\tag{A.13}$$

$$\mathbf{U}_i^T \mathbf{C} \mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_{i+1}^T \mathbf{C} \mathbf{U}_i = -2r_x \sum_{j=1}^{M_y-1} U_{i,j} \cdot U_{i+1,j}$$

de $\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}$, entonces:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \delta \sum_{i=1}^{M_x-1} \sum_{j=1}^{M_y-1} (U_{i,j})^2 - 2r_x \sum_{i=1}^{M_x-2} \sum_{j=1}^{M_y-1} U_{i,j} \cdot U_{i+1,j} - 2r_y \sum_{i=1}^{M_x-1} \sum_{j=1}^{M_y-2} U_{i,j} \cdot U_{i,j+1}.$$

Considerando que $\delta = 1 + 2r_x + 2r_y$, se obtiene una expresión cuadrática:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = & \sum_{i=1}^{M_x-1} \sum_{j=1}^{M_y-1} (U_{i,j})^2 + r_x \left\{ \sum_{i=1}^{M_x-2} \sum_{j=1}^{M_y-1} (U_{i,j} - U_{i+1,j})^2 + \sum_{j=1}^{M_y-1} [(U_{1,j})^2 + (U_{M_x-1,j})^2] \right\} \\ & + r_y \left\{ \sum_{i=1}^{M_x-1} \sum_{j=1}^{M_y-2} (U_{i,j} - U_{i,j+1})^2 + \sum_{i=1}^{M_x-1} [(U_{i,1})^2 + (U_{i,M_y-1})^2] \right\}. \end{aligned}$$

Como $r_x > 0$ y $r_y > 0$, se concluye que $\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} > 0, \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}, m = (M_x - 1)(M_y - 1)$, en consecuencia, la matriz \mathbf{A} es definida positiva.

ANEXO C. MATRIZ DE CONSISTENCIA

Título: Solución analítica y numérica de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio				
Autor(es): Bach. DEYBY EDWIN ARHUATA TURPO Y Bach. RUTH APAZA ROMERO				
PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	DISEÑO DE INVESTIGACIÓN
<u>General</u>	<u>General</u>	<u>General</u>		
¿Es posible hallar la solución analítica y numérica de la Ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio?	Hallar la solución analítica y numérica de la Ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio.	Si usamos los métodos de expansión de funciones propias y el de diferencias finitas, entonces es posible encontrar la solución analítica y numérica de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio.	Variables independientes: V.I. 1: Método de expansión de Variables propias V.I.2: Diferencias Finitas	Por su finalidad: Básica y/o aplicada Por el enfoque: Mixto Por el tipo: No experimental Por su carácter: Explicativa
<u>Específicos</u>	<u>Específicos</u>	<u>Específicos</u>		
¿Es posible establecer la solución analítica de la Ecuación de difusión del calor del calor en una placa rectangular en régimen transitorio?	Establecer la solución analítica de la Ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio.	Si usamos el método de expansión de funciones propias y el de diferencias finitas, entonces es posible encontrar la solución analítica de la ecuación de difusión del calor en placa rectangular de régimen transitorio.	Variable Dependiente: Solución Analítica y Numérica de la Ecuación de la Difusión del Calor en una Placa Rectangular en Régimen Transitorio	
¿Es posible encontrar la solución numérica de la Ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio utilizando el sistema de computación científica Mathematica?	Encontrar la solución numérica de la Ecuación de difusión del calor en una placa rectangular en régimen transitorio utilizando el sistema de computación científica Mathematica.	Si usamos el método de diferencias finitas, entonces se puede hallar la solución numérica de la ecuación de difusión del calor en una placa rectangular de régimen transitorio.		